

УДК 539.42

DOI 10.33113/mkmm.ras.2021.27.03.323_342.03

МОДЕЛЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО СОУДАРЕНИЯ ЖЕСТКОГО ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПРЕГРАДОЙ

Головешкин В.А.^{1,2}, Беклемишев С.А.^{1,2}, Выборнов А.Н.^{1,2},
Мягков Н.Н.², Юшманова О.О.³

¹Московский технологический университет, г. Москва, Россия

²ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

³ФГБУН Институт водных проблем РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Построена аналитическая механическая модель проникания жесткого цилиндрического ударника при высокоскоростном ударе в полубесконечную преграду. Ударник характеризуется тремя параметрами – линейным поперечным размером, массой и начальной скоростью. Относительно механических свойств материала преграды принята гипотеза идеально-жестко-пластического тела с условием несжимаемости. Материал преграды характеризуется двумя параметрами – плотностью и пределом текучести. Задача рассматривается в осесимметричной динамической постановке. Целью работы является получение приемлемых инженерных оценок следующих параметров – глубины внедрения ударника, массы материала, выброшенного из преграды, и эффекта усиления импульса, вызванного выбросом (эжекцией) фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника. Предложен следующий метод исследования. Строится осесимметричное поле скоростей в трех зонах. Первая зона – это материал преграды «прилипший» к ударнику и движущийся с ним, как твердое недеформируемое тело. Моделируется, как сегмент шара. Второе поле скоростей – фрагмент шарового слоя, примыкающий к первой зоне. Поле скоростей в этой зоне строится из предположения, что скорость $U_\theta(R; \theta)$, в специально выбранной локальной сферической системе координат, зависит только от θ , то есть $U_\theta(R; \theta) = g(\theta)$. Скорость $U_R(R; \theta)$ определяется из условия несжимаемости. Третья зона – цилиндрическая зона, движущаяся как твердое тело в направлении противоположном движению ударника. На границе зон предполагается условие непрерывности нормальной составляющей скорости. Параметры зон определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Уравнение движения заменяется уравнением баланса энергии – изменение кинетической энергии равно мощности внутренних сил. Сделанные предположения позволили определять параметры зон как функцию глубины внедрения ударника. Это дало возможность построить сравнительно простую аналитическую инженерную модель, которая позволяет определить глубину внедрения ударника, массу выброса, усиление импульса. Фактически полученное решение определяется двумя безразмерными параметрами.

Ключевые слова: высокоскоростной удар; эффект усиления импульса; аналитическая модель; идеально-пластическое тело

A MODEL OF A HARD AXSYMMETRIC PROJECTILE'S HIGH-SPEED IMPACT WITH A DEFORMABLE SEMI-INFINITE BARRIER

Golovshkin V.A.^{1,2}, Beklemishev S.A.^{1,2}, Vybornov A.N.^{1,2},
Myagkov N.N.², Yushmanova O.O.³

¹*Moscow University of Technology, Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

³*Institute of Water Problems of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

An analytical mechanical model of penetration at a high-speed impact of a rigid cylindrical projectile into a semi-infinite barrier has been constructed. The projectile is characterized by three parameters - linear transverse size, mass and initial speed. Regarding the mechanical properties of the barrier material, the hypothesis of a perfectly hard-plastic body with a condition of incompressibility has been adopted. The material of the barrier is characterized by two parameters - density and the yield strength. The problem is considered in the ax symmetrical dynamic setting. The aim of the work is to obtain acceptable engineering estimates of the following parameters - the depth of the projectile's introduction, the mass of material thrown out of the barrier (in its evaluation, it was assumed that the material risen above the initial level of the undeformed barrier, leaves it and does not participate in further consideration of the movement), the effect of strengthening the momentum caused by the release (ejection) of the barrier fragments in the direction opposite to the projectile's flight direction. The following method of research is proposed. An ax symmetric field of velocities is being built in three zones. The first is the area of the barrier material "sticking" to the projectile and moving with it, like a solid undeformable body. It is modeled as a segment of the ball. The second velocity field is a fragment of a ball layer adjacent to the first zone. The velocity field in this zone is based on the assumption that the speed $U_\theta(R;\theta)$, in a specially selected local spherical coordinate system, depends only on θ . That is $U_\theta(R;\theta) = g(\theta)$. The speed $U_r(R;\theta)$ is determined from the incompressibility condition. The third zone is a cylindrical zone moving like a solid in the direction opposite to the projectile's movement. At the boundary of the zones a condition of continuity of normal speed component is supposed. The zone parameters are determined from the minimum power of the internal forces. The equation of motion is replaced by an equation of energy balance - the change of kinetic energy equals the power of internal forces. The assumptions made allowed to define the parameters of zones as a function of the depth of the projectile's penetration. This allowed building a relatively simple analytical engineering model, which permits to determine the depth of the projectile's introduction, the mass of the ejection, the strengthening of the pulse. In fact, the result is determined by two non-dimensional parameters.

Keywords: high-speed impact; impulse amplification effect; analytical model; perfectly plastic body

ВВЕДЕНИЕ

Задачи внедрения ударника в преграду при высоких скоростях соударения рассматривались на протяжении ряда лет в связи с многочисленными применениями в технике и военном деле [1,2], и не теряют свою актуальность в настоящее время [3-9]. Основными параметрами высокоскоростного взаимодействия ударника с преградой, интересующие исследователей, являются

глубина внедрения ударника и параметры эжекции (выброса) фрагментов преграды. Для толстых преград эжекция вызывает эффект, который состоит в усилении импульса преграды по направлению удара. То есть импульс, передаваемый телу, превышает исходный импульс ударника. Эффект вызван эжекцией фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника. Явление эжекции наблюдается как для пластичных материалов, так и для хрупких материалов [10-13]. В настоящее время проявляется устойчивый интерес к исследованию эффекта усиления импульса. Это связано, в частности, с возможным применением эффекта для отклонения потенциально опасного объекта (астероида), сближающегося с Землей, посредством ударного космического аппарата, использующего эффект усиления импульса удара [12].

В настоящей работе построена аналитическая механическая модель проникания жесткого цилиндрического ударника при высокоскоростном ударе в полубесконечную преграду. Ударник характеризуется тремя параметрами – линейным поперечным размером, массой и начальной скоростью. Преграда рассматривается как несжимаемое идеально-жестко-пластическое тело. Материал преграды характеризуется двумя параметрами – плотностью и пределом текучести, которые являются постоянными величинами. Задача рассматривается в осесимметричной динамической постановке. Целью работы является получение приемлемых инженерных оценок для: глубины внедрения ударника, массы материала, выброшенного из преграды (при оценке, предполагалось, что материал, поднявшийся выше начального уровня недеформированной преграды, покидает ее и в дальнейшем рассмотрении движения не участвует) и эффекта усиления импульса, вызванного эжекцией фрагментов преграды в направлении, противоположном направлению полета ударника. Предложен следующий метод исследования. Строится осесимметричное поле скоростей в трех зонах. Первая зона – это материал преграды «прилипший» к ударнику и движущийся с ним, как твердое недеформируемое тело. Моделируется, как сегмент шара. Второе поле скоростей – фрагмент шарового слоя, примыкающий к первой зоне. Поле скоростей в этой зоне строится из предположения, что скорость $U_\theta(R; \theta)$, в специально выбранной локальной сферической системе координат, зависит только от θ , то есть $U_\theta(R; \theta) = g(\theta)$. Скорость $U_R(R; \theta)$ определяется из условия несжимаемости. Третья зона – цилиндрическая зона, движущаяся как твердое тело в направлении противоположном движению ударника. На границе зон предполагается условие непрерывности нормальной составляющей скорости. Параметры зон определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Уравнение движения заменяется уравнением баланса энергии – изменение кинетической энергии равно мощности внутренних сил. Сделанные предположения позволили определять параметры зон как функцию глубины внедрения ударника. Это дало возможность построить сравнительно простую аналитическую инженерную модель, которая позволяет определить глубину внедрения ударника, массу выброса, усиление импульса. Фактически, полученное

решение определяется двумя безразмерными параметрами $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{V_0^2 \rho_t}$ и $\frac{M}{\rho_t \pi l^3}$,

где l – радиус цилиндрического ударника, M – масса ударника на единицу длины, V_0 – начальная скорость ударника, Y_t и ρ_t – предел текучести и плотность материала преграды.

1. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ

Сплошная преграда рассматривается как жестко-идеально-пластичное полупространство (см. например [14]), материал которого определяется двумя параметрами – плотностью ρ_i и пределом текучести Y_i . Ударник рассматривается как недеформируемый цилиндр радиуса l , длины L , с плотностью ρ_p и массой $M = \pi\rho_p l^2 L$. Задача рассматривается как осесимметричная. Предполагается, что в начальный момент скорость ударника равна V_0 и направлена перпендикулярно поверхности преграды на протяжении всего процесса внедрения. Абсолютное значение текущей скорости ударника обозначим V . Текущую глубину внедрения ударника относительно начальной недеформированной поверхности преграды обозначим h . Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат $(r; \varphi; z)$, см. рис.1. Так как задача рассматривается в осесимметричной постановке, то будем считать, что: 1) ось z совпадает с осью симметрии задачи; 2) ее начало совпадает с уровнем недеформированной поверхности; 3) ее направление противоположно направлению движения ударника. Составляющие скорости в указанной системе координат обозначим u_r и u_z соответственно.

В преграде выделяются три зоны:

Зона 1. Материал «прилипший» к ударнику и движущейся вместе с ним как жесткое недеформируемое тело. Эта зона моделируется шаровым сегментом. Центр шара радиуса a находится на оси симметрии – в точке O . Положение точки O и радиус a определяется в процессе решения задачи.

Зона 2. Деформируемый материал преграды. Эта зона моделируется как часть сферического слоя, вырезаемого конусом с углом раствора α из объема заключенного между ранее упомянутым шаром радиуса a и шаром радиуса b (центр второго шара совпадает с центром первого). Значение α и b определяются в процессе решения.

Зона 3. Зона обратного течения. Моделируется кольцевым цилиндрическим слоем. Предполагается, что материал в этой зоне движется как жесткое недеформируемое тело в направлении противоположном движению ударника. Пока предполагаем, что выше начального уровня преграды, находится выдавленный материал, движущийся вместе с материалом преграды.

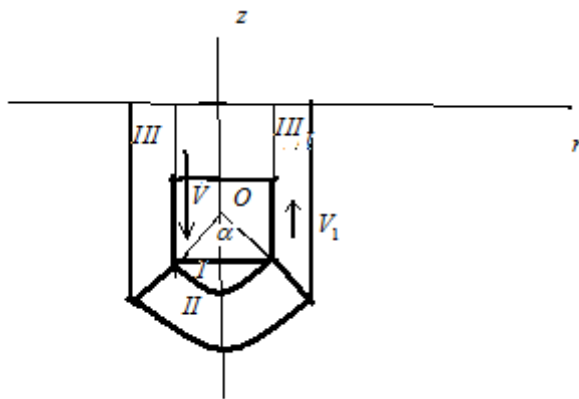


Рис.1.

Поле скоростей в указанных зонах:

В зоне I поле скоростей имеет вид $u_r = 0$, $u_z = -V$.

В зоне III имеем $u_r = 0$, $u_z = V_1$. Предположения, о характере течения в зоне III основаны: на результатах экспериментов, представленных в работе [2] (см. рис.2); результатах, полученных в работе [3].

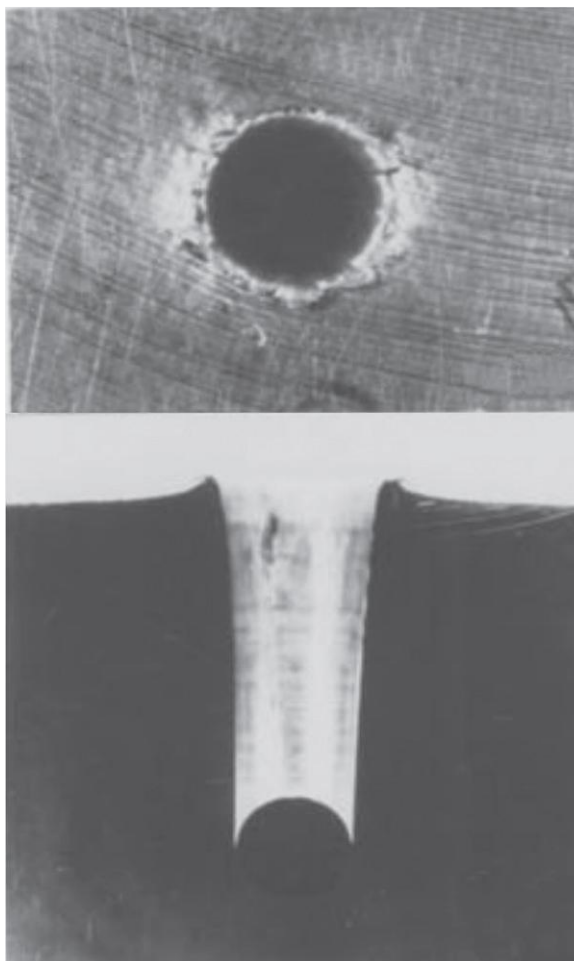


Рис.2. Кратер в плите из алюминиевого сплава 1100 после удара стального ударника со скоростью 1,08 км/с [2] эксперимент. а – вид сверху; б – поперечное сечение.

Из закона сохранения массы и условия несжимаемости следует

$$\pi \rho l^2 V = \pi \rho \sin^2 \alpha (b^2 - a^2) V_1,$$

то есть

$$V_1 = \frac{l^2}{\sin^2 \alpha (b^2 - a^2)} V. \quad (1)$$

Для описания течения в зоне II введем локальную сферическую систему координат $R; \theta$, с началом в точке O (рис.3).

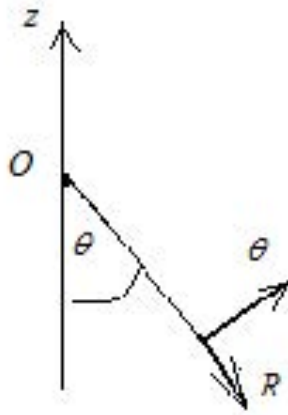


Рис.3.

Скорости в сферической системе координат обозначим U_R, U_θ соответственно. Скорости в разных системах координат связаны соотношениями

$$U_R = u_r \sin \theta - u_z \cos \theta, \quad U_\theta = u_r \cos \theta + u_z \sin \theta,$$

$$u_z = -U_R \cos \theta + U_\theta \sin \theta, \quad u_r = U_R \sin \theta + U_\theta \cos \theta.$$

Условие несжимаемости в выбранной сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{2U_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{U_\theta \cos \theta}{R \sin \theta} = 0. \quad (2)$$

Примем гипотезу, аналогичную принятой в [1], что в области II скорость $U_\theta(R; \theta)$ зависит только от θ , то есть $U_\theta(R; \theta) = g(\theta)$.

Тогда, согласно условию несжимаемости имеем

$$\frac{\partial U_R}{\partial R} + \frac{2U_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{g}{R} = 0.$$

Решая данное уравнение относительно $U_R(R; \theta)$, получаем

$$U_R(R; \theta) = U = -\frac{1}{2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right) + \frac{1}{R^2} f(\theta).$$

Так как нормальные составляющие скорости на границе области II – при $R = b$ равны нулю, то

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right) + \frac{1}{b^2} f(\theta) = 0.$$

Тогда

$$U = -\frac{1}{2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right) + \frac{b^2}{2R^2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right).$$

Из условия равенства нормальных составляющих скорости при $R = a$ имеем $V \cos \theta = U$.

Получаем

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right) + \frac{b^2}{2a^2} \left(\frac{dg}{d\theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} g \right) = V \cos \theta.$$

Решая данное дифференциальное уравнение с условием $g = 0$ при $\theta = 0$, получаем

$$U_{\theta}(R; \theta) = g(\theta) = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \sin \theta. \quad (3)$$

Тогда

$$U_R(R; \theta) = U = -\frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta + \frac{b^2}{R^2} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta. \quad (4)$$

Соотношения (3,4) определяют поле скоростей в зоне II.

Нетрудно проверить, что найденное поле скоростей удовлетворяет условию непрерывности нормальной составляющей на границе зон II и III.

Заметим, что $a = \frac{l}{\sin \alpha}$. Обозначим $x = \frac{b}{a} > 1$.

Тогда поле скоростей, с учетом указанных выше обозначений, может быть записано в виде:

В зоне II

$$U_R(R; \theta) = -\frac{1}{(x^2 - 1)} V \cos \theta + \frac{l^2 x^2}{\sin^2 \alpha R^2} \frac{1}{(x^2 - 1)} V \cos \theta \quad (5)$$

$$U_{\theta}(R; \theta) = \frac{1}{(x^2 - 1)} V \sin \theta \quad (6)$$

В зоне III

$$V_1 = \frac{1}{(x^2 - 1)} V. \quad (7)$$

Тензор скоростей деформации в сферической системе координат

$$\varepsilon_R = \frac{\partial U_R}{\partial R} = -\frac{2b^2}{R^3} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta = -\frac{2l^2}{R^3} \frac{x^2}{(x^2 - 1)} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \cos \theta. \quad (8)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial U_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{U_R}{R} = \frac{b^2}{R^3} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta = \frac{l^2 x^2}{R^3} \frac{1}{x^2 - 1} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \cos \theta. \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{U_R}{R} + \frac{U_{\theta} \cos \theta}{R \sin \theta} = \frac{b^2}{R^3} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta = \frac{l^2 x^2}{R^3} \frac{1}{(x^2 - 1)} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \cos \theta. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{R\theta} &= \frac{1}{2} \left[R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{U_{\theta}}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial U_R}{\partial \theta} \right] = -\frac{b^2}{2R^3} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \sin \theta = \\ &= -\frac{l^2 x^2}{2R^3} \frac{1}{(x^2 - 1)} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \sin \theta \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно (8-11)

$$\varepsilon_R^2 + \varepsilon_{\theta}^2 + \varepsilon_{\varphi}^2 + 2\varepsilon_{R\theta}^2 = \frac{l^4 x^4}{R^6} \frac{3}{(x^2 - 1)^2} \frac{V^2}{\sin^4 \alpha} \left[1 - \frac{5}{6} \sin^2 \theta \right]. \quad (12)$$

Далее определим суммарную мощность внутренних сил W . Данная величина состоит из нескольких слагаемых. Величина W_2 – мощность внутренних

сил в деформируемой зоне II. Ее значение определяется следующим соотношением

$$W_2 = Y_t \sqrt{\frac{2}{3}} \iiint_{V_2} \sqrt{\varepsilon_R^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\varepsilon_{R\theta}^2} dV,$$

где V_2 – объем, занимаемый этой зоной. Поскольку в локальной сферической системе координат данная область ограничена поверхностями $R=a$, $R=b$, $\theta=\alpha$, то, используя (12) имеем

$$W_2 = Y_t \sqrt{\frac{2}{3}} 2\pi \int_0^\alpha d\theta \int_a^b \sqrt{\frac{l^4 x^4}{R^6} \frac{3}{(x^2-1)^2} \frac{V^2}{\sin^4 \alpha} \left[1 - \frac{5}{6} \sin^2 \theta\right]} R^2 \sin \theta dR.$$

Вычисляя, получаем

$$W_2 = Y_t 2\pi \frac{l^2 x^2}{(x^2-1)} \sqrt{2} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \ln \frac{b}{a} \int_0^\alpha \sqrt{\left[1 - \frac{5}{6} \sin^2 \theta\right]} \sin \theta d\theta.$$

Продолжая вычисления

$$W_2 = Y_t \pi \frac{l^2 x^2}{(x^2-1)} \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \ln x \left[\sqrt{\frac{11}{5}} - \cos \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{6}{5}} + \frac{6}{5} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{11}{5}}}{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{6}{5}}} \right].$$

Заметим, что с приемлемой точностью данное выражение может быть представлено в виде

$$W_2 \approx Y_t 2\pi \frac{l^2 x^2}{(x^2-1)} \sqrt{2} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \ln \frac{b}{a} \int_0^\alpha \left(1 - \frac{5}{12} \sin^2 \theta\right) \sin \theta d\theta.$$

или окончательно

$$W_2 \approx Y_t \pi \frac{l^2 x^2}{(x^2-1)} \frac{\sqrt{2}}{18} \frac{V}{\sin^2 \alpha} \ln x (1 - \cos \alpha) (26 + 5 \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha). \quad (13)$$

В дальнейшем для значения W_2 будем использовать приближенное представление (13).

Мощность внутренних сил W_1 на разрыве скоростей на поверхности S_1 – разделяющей зоны I и II. Уравнение поверхности в сферической системе координат определяется соотношениями $R=a$, $0 < \theta < \alpha$.

$$W_1 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \iint_{S_1} \int_0^\alpha [V] ds,$$

где $[V]$ – абсолютное значение разрыва скорости на данной поверхности.

Так как

$$[V] = V \frac{x^2}{(x^2-1)} \sin \theta,$$

имеем

$$W_1 = 2\pi \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha V \frac{x^2}{(x^2-1)} \sin \theta a^2 \sin \theta d\theta.$$

Окончательно

$$W_1 = \pi \frac{l^2}{\sin^2 \alpha} V \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2 - 1)} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \quad (14)$$

Мощность внутренних сил W_3 на разрыве скоростей на поверхности S_2 – разделяющей зону II и недеформируемую часть преграды. Уравнение поверхности в сферической системе координат определяется соотношениями $R = b, 0 < \theta < \alpha$.

Абсолютное значение разрыва скорости на данной поверхности

$$[V] = V \frac{1}{(x^2 - 1)} \sin \theta.$$

Тогда

$$W_3 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \iint_{S_2} \int_0^\alpha [V] ds = 2\pi \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha V \frac{x^2}{(x^2 - 1)} \sin \theta \frac{l^2}{\sin^2 \alpha} \sin \theta d\theta.$$

Окончательно

$$W_3 = \pi \frac{l^2}{\sin^2 \alpha} V \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{x^2}{(x^2 - 1)} \left(\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \quad (15)$$

Мощность внутренних сил W_4 на разрыве скоростей на поверхности S_3 – разделяющей зону III и недеформируемую часть преграды.

Разрыв скорости $[V] = \frac{1}{(x^2 - 1)} V$ – постоянная величина. Площадь

поверхности равна $2\pi b \sin \alpha [h + (b - a) \cos \alpha]$. Тогда

$$W_4 = \frac{Y_t}{\sqrt{3}} 2\pi \frac{l^2}{\sin \alpha} x \sin \alpha \left[\frac{h}{l} + \frac{1}{\sin \alpha} (x - 1) \cos \alpha \right] \frac{1}{(x^2 - 1)} V. \quad (16)$$

Мощность внутренних сил W_5 на разрыве скоростей на поверхности S_5 – разделяющей зоны II и III. Уравнение поверхности в сферической системе координат определяется соотношениями $\theta = \alpha, a < R < b$.

Разрыв скорости

$$[V] = \frac{l^2 x^2}{\sin^2 \alpha R^2 (x^2 - 1)} V \cos \alpha,$$

$$W_5 = 2\pi \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_a^b [V] R \sin \theta dR = 2\pi \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \int_a^b \left[\frac{l^2 x^2}{\sin^2 \alpha R^2 (x^2 - 1)} V \cos \alpha \right] R \sin \alpha dR$$

Окончательно

$$W_5 = 2\pi \frac{Y_t}{\sqrt{3}} \frac{l^2 x^2}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{(x^2 - 1)} V \cos \alpha \sin \alpha \ln x. \quad (17)$$

Полная мощность W равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5. \quad (18)$$

Используя (13-18), имеем

$$W = \frac{\pi l^2}{\sqrt{3}} Y_t V G(\alpha; x; \bar{h}), \quad (19)$$

где

$$G(\alpha; x; \bar{h}) = \frac{x^2}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha) + \frac{x^2 \ln x}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sin 2\alpha + \frac{2x}{(x^2-1)} \bar{h} + \frac{2x(x-1)}{(x^2-1)} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{x^2 \ln x}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos \alpha) (26 + 5 \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha) \quad (20)$$

$\bar{h} = \frac{h}{l}$ – далее черту опускаем.

Значения $\alpha; x$ определяются из условия минимума полной мощности.

Условие минимума определяется условием $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial G}{\partial x} = 0$.

Вычисляя, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{x^2}{(x^2-1)} \frac{4 \sin^2 \alpha - 2\alpha \sin 2\alpha}{\sin^4 \alpha} - \frac{x^2 \ln x}{(x^2-1)} \frac{2}{\sin^2 \alpha} - \frac{2x(x-1)}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{x^2 \ln x}{(x^2-1)} \frac{(1 - \cos \alpha)^2 (21 - 10 \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha) \sin \alpha}{\sin^4 \alpha}. \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = & -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \frac{1}{\sin^2 \alpha} (2\alpha - \sin 2\alpha) - \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sin 2\alpha + \\ & + \frac{x}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \sin 2\alpha - \frac{2+2x^2}{(x^2-1)^2} h + \frac{2(x-1)^2 \cos \alpha}{(x^2-1)^2 \sin \alpha} - \\ & - \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \frac{1}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos \alpha) (26 + 5 \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha) + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{18} \frac{x}{(x^2-1)} \frac{1}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos \alpha) (26 + 5 \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha). \end{aligned} \quad (22)$$

На интервале $0 < \alpha < \pi/2$ уравнение $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$ при $x > 1$ равносильно уравнению $\Psi(x; \alpha) = 0$, где, согласно (21),

$$\begin{aligned} \Psi(x; \alpha) = & x^2 \frac{(4 \sin^2 \alpha - 2\alpha \sin 2\alpha)}{\sin^2 \alpha} - 2x^2 \ln x - 2x(x-1) + \\ & + \frac{\sqrt{6}}{18} x^2 \ln x \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha} [21 - 10 \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha]. \end{aligned} \quad (23)$$

Имеем $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi(x; \alpha) = -2x^2 \ln x - 2x(x-1)$. Следовательно, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Psi(x; \alpha) < 0$ при

$x > 1$. $\Psi(x; \pi/2) = 2x + \frac{7\sqrt{6}-12}{6} x^2 \ln x$. Имеем $\Psi(x; \pi/2) > 0$ при $x > 1$.

Следовательно, уравнение $\Psi(x; \alpha) = 0$ имеет корень на отрезке $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ при $x > 1$.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = x^2 \frac{2(2\alpha - \sin 2\alpha)}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sqrt{6}}{18} x^2 \ln x (1 - \cos \alpha) \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} [21 - 10 \cos \alpha - 5 \cos^2 \alpha] + \frac{\sqrt{6}}{18} x^2 \ln x \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha} [10 \sin \alpha + 10 \sin \alpha \cos \alpha].$$

Поскольку $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} > 0$ при $x > 1$, то уравнение $\Psi(x; \alpha) = 0$ имеет один корень интервале $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, и этот корень соответствует минимуму функции $G(\alpha; x; h)$ при фиксированном значении x . Обозначим решение уравнения $\Psi(x; \alpha) = 0$ относительно α как $\alpha = \beta(x)$, то есть $\Psi(x; \beta(x)) \equiv 0$.

Уравнение $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, согласно (22), равносильно уравнению $H(x; \alpha) = 0$, где

$$H(x; \alpha) = -2(2\alpha - \sin 2\alpha) - 2 \ln x \sin 2\alpha + (x^2 - 1) \sin 2\alpha - 2 \frac{(x^2 + 1)}{x} \sin^2 \alpha h + 2 \frac{(x-1)^2}{x} \sin \alpha \cos \alpha + \frac{\sqrt{6}}{18} (1 - \cos \alpha) (26 + 5 \cos \alpha + 5 \cos^2 \alpha) (x^2 - 1 - 2 \ln x). \quad (24)$$

Заметим, что $H(1; \alpha) < 0$ при $0 < \alpha < \pi/2$, $H(+\infty; \alpha) > 0$ при $0 < \alpha < \pi/2$. Фактически α и x являются функциями h : $\alpha = \alpha(h)$, $x = x(h)$.

Поскольку α и x являются функциями h , то функция $G(\alpha; x; h)$ является фактически функцией h . Обозначим

$$\Theta(h) = G[\alpha(h); x(h); h]. \quad (25)$$

Функция $\Theta(h)$ неплохо аппроксимируется функцией $\Theta(h) \approx \Theta_{AP}(h) = 6.4 + 3.6 \ln \left(1 + \frac{1}{2} h\right)$. Погрешность не превышает 2% при $0 < h < 100$.

Кинетическая энергия системы состоит из следующих составляющих.

1. E_1 – кинетическая энергия ударника

$$E_1 = \frac{1}{2} M V^2, \quad (26)$$

где M – его масса, V – его скорость.

2. E_2 – кинетическая энергия жесткой прилипшей зоны

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho_t V^2 \Theta_1,$$

где ρ_t – плотность материала преграды, Θ_1 – объем этой зоны.

Поскольку $\Theta_1 = \pi l^3 \frac{1}{3 \sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha)$, то

$$E_2 = \pi \frac{1}{6} \rho_t l^3 \frac{1}{\sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) V^2.$$

3. E_3 – кинетическая энергия деформируемой зоны.

$$E_3 = 2\pi \frac{1}{2} \rho_t \int_a^b dR \int_0^\alpha (U_R^2 + U_\theta^2) R^2 \sin \theta d\theta.$$

Так как

$$U_R = -\frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta + \frac{b^2}{R^2} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V \cos \theta,$$

$$U_\theta = \frac{1}{(x^2 - 1)} V \sin \theta,$$

то

$$E_3 = 2\pi \frac{1}{2} \rho_t V^2 \int_a^b dR \int_0^\alpha \left[\left[-\frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \cos \theta + \frac{b^2}{R^2} \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \cos \theta \right]^2 + \left[\frac{a^2}{(b^2 - a^2)} \sin \theta \right]^2 \right] R^2 \sin \theta d\theta,$$

$$E_3 = \pi \rho_t l^3 \frac{1}{3} \frac{(x-1)}{(x^2-1)^2} \frac{(1-\cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} \left[(x^2 + x + 1) - 2x^2 (1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha) + x^3 (1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \right] V^2.$$

4. E_4 – кинетическая энергия жесткой кольцевой зоны

$$E_4 = \frac{1}{2} \rho_t V_1^2 \Theta_2,$$

где $V_1 = \frac{a^2}{(b^2 - a^2)} V$, Θ_2 – объем зоны,

$$\Theta_2 = \pi \frac{1}{3} \sin^2 \alpha \cdot \left[(b^2 - a^2) h + (a + 2b)(b - a)^2 \cos \alpha \right].$$

Имеем

$$E_4 = \pi \frac{1}{6} \rho_t l^3 \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left[(x^2 - 1) \bar{h} \sin \alpha + (2x + 1)(x - 1)^2 \cos \alpha \right] V^2.$$

5. E_5 – кинетическая энергия выдавленного за начальный уровень преграды материала

$$E_5 = \frac{1}{2} M_1 V_1^2,$$

где M_1 – масса выдавленного материала. В силу закона сохранения массы и условия несжимаемости имеем $M_1 = \rho_t \pi l^2 h$. Тогда

$$E_5 = \frac{1}{2} \rho_t \pi l^2 h \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} V^2 = \frac{1}{2} \rho_t \pi l^3 \bar{h} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} V^2.$$

Представим кинетическую энергию преграды $E_d = E_2 + E_3 + E_4$ в виде

$$E_d = \pi \rho_t l^3 V^2 \Phi(x; \alpha; h), \quad (27)$$

где

$$\Phi(x; \alpha; h) = \frac{1}{6} \frac{1}{\sin^3 \alpha} (2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha) + \frac{1}{3} \frac{(x-1)}{(x^2-1)^2} \frac{(1-\cos \alpha)}{\sin^3 \alpha} [(x^2+x+1) - 2x^2(1+\cos \alpha + \cos^2 \alpha) + x^3(1+\cos \alpha + \cos^2 \alpha)] + \frac{1}{6} \frac{1}{(x^2-1)^2} \frac{1}{\sin \alpha} [(x^2-1)h \sin \alpha + (2x+1)(x-1)^2 \cos \alpha].$$

Поскольку α и x являются функциями h , то функция $\Phi(x; \alpha; h)$ является фактически функцией h . Обозначим

$$\Omega(h) = \Phi[\alpha(h); x(h); h]. \quad (28)$$

Функция $\Omega(h)$ неплохо аппроксимируется функцией $\Omega(h) \approx \Omega_{AP}(h) = 0.43 + 0.04 \ln(1+h)$. Погрешность не превышает 5% при $0 < h < 100$.

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ И ЕГО ИССЛЕДОВАНИЕ

Уравнение движения ударника в принятой постановке следует из закона сохранения энергии. Имеем

$$\frac{dE}{dt} + W = 0, \quad (29)$$

где E – полная кинетическая энергия системы; W – суммарная мощность внутренних сил; t – время.

Согласно (26-28)

$$E = \frac{1}{2} MV^2 + \pi \rho_l l^3 V^2 \Omega(h). \quad (30)$$

Согласно (19,25)

$$W = \frac{\pi l^2}{\sqrt{3}} Y_t V \Theta(h). \quad (31)$$

Из соотношений (29-31) следует

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} MV^2 + \pi \rho_l l^3 V^2 \Omega(h) + \frac{1}{2} \rho_l \pi l^3 h \frac{1}{(x^2-1)^2} V^2 \right] + \frac{\pi l^2}{\sqrt{3}} Y_t V \Theta(h) = 0. \quad (32)$$

Введем безразмерные переменные

$$V = V_0 \bar{V},$$

где V_0 – начальная скорость ударника. Массу ударника представим в виде

$$M = \pi \rho_1 l^2 L. \text{ Будем искать } V \text{ как функцию } h. \text{ Тогда } \frac{d}{dt} = \frac{d}{dh} \frac{dh}{dt} = \frac{d}{dh} \frac{1}{l} V_0 \bar{V}.$$

Уравнение (32) примет вид

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{1}{2} \pi \rho_1 l^2 L V_0^2 \bar{V}^2 + \pi \rho_l l^3 V_0^2 \bar{V}^2 \Omega(h) + \frac{1}{2} \rho_l \pi l^3 h \frac{1}{(x^2-1)^2} V_0^2 \bar{V}^2 \right] \frac{1}{l} V_0 \bar{V} + \frac{\pi l^2}{\sqrt{3}} Y_t V_0 \bar{V} \Theta(h) = 0.$$

Далее черту опускаем. После преобразований имеем

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{L}{l} V^2 + V^2 \Omega(h) + \frac{1}{2} h \frac{1}{(x^2 - 1)^2} V^2 \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{\rho_t V_0^2} \Theta(h) = 0.$$

Обозначим $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{V_0^2 \rho_t}$, $\mu = \frac{\rho_1}{\rho_t}$, $\gamma = \frac{L}{l}$

Окончательно получаем

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{1}{2} \mu \gamma V^2 + V^2 \Omega(h) + \frac{1}{2} h \frac{1}{(x^2 - 1)^2} V^2 \right] + \kappa \Theta(h) = 0. \quad (33)$$

Решение определяется двумя безразмерными параметрами $\kappa, \mu\gamma$.

Попытаемся понять их смысл. Величина $\frac{Y_t}{\rho_t}$ имеет размерность c_0^2 , где

c_0 – некоторая характерная скорость, определяемая механическими свойствами

материала преграды. Тогда $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{V_0^2 \rho_t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{c_0}{V_0} \right)^2$ – то есть κ определяется

квадратом отношения характерной скорости материала к начальной скорости

ударника. Величину $\mu\gamma$ представим в виде $\mu\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{L}{l} = \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{\pi l^2 L}{\pi l^3}$. То есть

$\mu\gamma$ – представляет собой отношение массы ударника к массе преграды, находящейся в объеме цилиндра того же радиуса, что и ударник с высотой равной его радиусу.

При условии $V = 1$ при $h = 0$

Полная глубина проникания h_f определяется из условия $V = 0$. Имеем

$$\int_0^{h_f} \Theta(s) ds = \frac{1}{2\kappa} \mu\gamma. \quad (34)$$

Используя приближенную аппроксимацию $\Theta(h) \approx 6.4 + 3.6 \ln \left(1 + \frac{1}{2} h \right)$,

получаем уравнение для определения h_f

$$2.8h + 7.2(1 + h/2) \ln(1 + h/2) = \frac{1}{2\kappa} \mu\gamma. \quad (35)$$

То есть глубина проникания определяется следующим безразмерным параметром η , где

$$\eta = \frac{1}{2\kappa} \mu\gamma.$$

Попытаемся понять механический смысл данного параметра

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{V_0^2 \rho_t} \frac{\rho_1}{\rho_t} \frac{L}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\rho_1 \frac{1}{2} \pi V_0^2 L l^2}{Y_t l^3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_0}{Y_t l^3},$$

где E_0 – начальная кинетическая энергия ударника.

Результаты расчета

Сталь по алюминию: $\gamma = 2$, $\rho_1 = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $Y = 50 \text{ МПа}$.

$$V_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 133.6$$

$$V_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 67.7$$

$$V_0 = 1 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 21.6$$

Сталь по алюминию: $\gamma = 2$, $\rho_1 = 7800 \text{ кг/м}^3$, $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, $Y = 100 \text{ МПа}$.

$$V_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 74.7$$

$$V_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 38.2$$

$$V_0 = 1 \cdot 10^3 \text{ м/с} \quad h_f = 12.3$$

3. ИССЛЕДОВАНИЕ С УЧЕТОМ УНОСА ЭНЕРГИИ

Далее считаем, что материал, достигший уровня недеформированной поверхности, покидает систему и в дальнейшем при исследовании движения не рассматривается. В этом случае в уравнении баланса энергии, необходим учет потерь кинетической энергии, унесенной покинувшим систему материалом. Обозначим E_u – унесенную энергию.

Тогда уравнение баланса энергии (29) примет вид

$$\frac{dE}{dt} - \frac{dE_u}{dt} + W = 0, \quad (36)$$

где $E = \frac{1}{2} MV^2 + \pi \rho_1 l^3 V^2 \Omega(h)$.

Для $\frac{dE_u}{dt}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE_u}{dt} &= \frac{\rho_t}{2} V_1^2 \pi (b^2 - a^2) \sin^2 \alpha V_1 = \frac{\rho_t}{2} \pi \frac{a^6}{(b^2 - a^2)^2} V^3 \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\rho_t}{2} \pi l^2 \frac{1}{(x^2 - 1)^2} V^3. \end{aligned}$$

С учетом уноса энергии уравнение движения (36) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \pi \rho_1 l^2 L V^2 + \pi \rho_1 l^3 \Omega(h) V^2 \right] + \frac{\pi l^2}{\sqrt{3}} Y_t \Theta(h) V + \frac{\rho_t}{2} \pi \frac{l^2}{(x^2 - 1)^2} V^3 = 0.$$

В безразмерных переменных это уравнение примет вид

$$\frac{d}{dh} \left[\frac{1}{2} \mu \gamma V^2 + \Omega(h) V^2 \right] + \kappa \Theta(h) + \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} V^2 = 0. \quad (37)$$

Обозначим $U_f = \left[\frac{1}{2} \mu \gamma + \Omega(h) \right] V^2$, тогда $V^2 = \frac{U}{\left[\frac{1}{2} \mu \gamma + \Omega(h) \right]}$.

Уравнение для U_f примет вид

$$\frac{dU_f}{dh} + \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \left[\frac{1}{2} \mu\gamma + \Omega(h) \right] U_f + \alpha\Theta(h) = 0 \quad (38)$$

с начальным условием $U_f = \frac{1}{2} \mu\gamma$ при $h = 0$.

Поскольку x является функцией h , то уравнение (38) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Полную глубину проникания h_f определяем из условия $U_f = 0$.

4. ОБРАТНЫЙ ИМПУЛЬС

Импульс, унесенный выброшенными частицами, обозначим N .

В размерном виде

$$\frac{dN}{dt} = \pi l^2 \rho_t V V_1 = \pi l^2 \rho_t V^2 \frac{1}{x^2 - 1}. \quad (39)$$

Введем безразмерный импульс \bar{N} по формуле $N = \pi \rho_l l^2 L V_0 \bar{N}$. Далее черту опускаем. Переходя к безразмерным переменным, согласно (39)

$$\frac{dN}{dh} = \frac{1}{\mu\gamma} \frac{1}{x^2 - 1} V. \quad (40)$$

Тогда суммарный обратный импульс вычисляется по формуле

$$N = \frac{1}{\mu\gamma} \int_0^{h_f} \frac{1}{x^2 - 1} V dh. \quad (41)$$

Результаты расчетов:

Сталь по алюминию $\rho_l = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\rho_t = 2700 \text{ kg/m}^3$.

Длина ударника равна удвоенному радиусу.

Предел текучести $Y_t = 50 \text{ mPa}$

Скорость $V = 1 \text{ км/с}$

$$N = 0.165 \quad h_f = 17.3$$

Скорость $V = 1.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.184 \quad h_f = 34.7$$

Скорость $V = 2.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.193 \quad h_f = 56.9$$

Скорость $V = 2.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.198 \quad h_f = 83.6$$

Скорость $V = 3.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.201 \quad h_f = 114.6$$

Зависимость от массы ударника

$$\rho_1 = 3900 \text{ kg/m}^3, \rho_t = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

Длина ударника равна удвоенному радиусу.

Предел текучести $Y_t = 50 \text{ mPa}$

Скорость $V = 1 \text{ км/с}$

$$N = 0.263$$

$$h_f = 9.4$$

Скорость $V = 1.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.311$$

$$h_f = 18.8$$

Скорость $V = 2.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.336$$

$$h_f = 30.8$$

Скорость $V = 2.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.350$$

$$h_f = 45.1$$

Скорость $V = 3.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.359$$

$$h_f = 61.7$$

Зависимость от предела текучести преграды

$$\rho_1 = 7800 \text{ kg/m}^3, \rho_t = 2700 \text{ kg/m}^3.$$

Длина ударника равна удвоенному радиусу.

Предел текучести $Y_t = 100 \text{ mPa}$

Скорость $V = 1 \text{ км/с}$

$$N = 0.142$$

$$h_f = 9.5$$

Скорость $V = 1.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.169$$

$$h_f = 19.2$$

Скорость $V = 2.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.182$$

$$h_f = 31.4$$

Скорость $V = 2.5 \text{ км/с}$

$$N = 0.189$$

$$h_f = 46.0$$

Скорость $V = 3.0 \text{ км/с}$

$$N = 0.194$$

$$h_f = 62.9$$

ВЫВОДЫ

В настоящей работе построена аналитическая модель проникания жесткого цилиндрического ударника в идеально-жестко-пластическую среду. Модель использует минимальное число параметров: радиус – l , массу – M , начальную скорость ударника V_0 , предел текучести материала преграды Y_t и плотность материала преграды ρ_t . Решение задачи разделено на два этапа. На первом этапе определялось, исходя из принципа минимума мощности поле скоростей в зависимости от глубины проникания ударника. Динамика движения исследовалась исходя из построенного поля скоростей и уравнения баланса энергии. Это дало возможность получить сравнительно простую инженерную модель, для оценки глубины внедрения ударника, выброшенной массы и эффекта усиления переданного импульса, вызванного выбросом материала преграды.

Показано, что глубина проникания и объем выброшенной массы зависит от одного безразмерного параметра $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{E_0}{Y_t l^3}$, где E_0 – начальная кинетическая энергия ударника. Характер движения определяется двумя безразмерными параметрами $\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{Y_t}{V_0^2 \rho_t}$ и $\frac{M}{\rho_t \pi l^3}$, где M – масса ударника. Проведена серия расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орленко Л.П. *Физика взрыва*. Изд. 3-е, испр. В 2 т. Т.2. – М.: Физматлит, 2004. – 656 с.
2. Сагомоян А.Я. *Проникание (проникание твердых тел в сжимаемые сплошные среды)*. – М.: Изд-во МГУ, 1974. – 300 с.
3. Valerio-Flores O.L., Murr L.E., Hernandez V.S., Quinones S.A. *Observations and simulations of the low velocity-to-hypervelocity impact crater transition for a range of penetrator densities into thick aluminum targets* // J. Mater. Sci. – 2004. – Vol.39. – Pp.6271-6289.
4. Власов А.С., Синани А.Б. *Модельный расчет высокоскоростного соударения тел различной формы с массивными металлическими преградами* // Журнал технической физики. – 2017. – Т.87. – Вып.7. – С.1033-1039.
5. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Модель взаимодействия деформируемой струны с деформируемой преградой* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №8. – С.2-9.
6. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target* // Russian Metallurgy (Metally). – 2019. – Vol.2019. – Iss.4. – Pp.294-300.
7. Myagkov N.N., Kalmykov P.N., Lapichev N.V., Leont'ev A.I., Nomakonova V.N., Ponomarev A.V., Sal'nikov A.V., Sokolov O.A., Shumikhin T.A. *Studies of the Fragmentation of Spherical Aluminum Projectiles on a Heavy Mesh at Velocities of up to 7 km/s* // J. of Experimental and Theoretical Physics. – 2021. – Vol.132. – No.2. – Pp.177-188.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target* // Meccanica. – 2021. – Vol.56. – Iss.1. – Pp.179-193.
9. Francesconi A., Higashide M., Mandeville J.C., Meshcheryakov S. et al. *Characterization of Ejecta from HVI on Spacecraft outer Surfaces*. IADC WG3, 2013. https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/3/id/107#u
10. Walker James D., Chocron Sidney, Grosch Donald J. *Size scaling of hypervelocity-impact ejecta mass and momentum enhancement: Experiments and a nonlocal-shear-band-motivated strain-rate-dependent failure model* // Intern. J. Impact Engn. – 2020. – Vol.135. – 103388.
11. Hoerth Tobias, Schäfer Frank, Hupfer Jan, Millon Oliver, Wickert Matthias. *Momentum Transfer in Hypervelocity Impact Experiments on Rock Targets* // Procedia Engineering. – 2015. – Vol.103. – Pp.197-204.
12. Holsapple K.A., Housen K.R. *Momentum transfer in asteroid impacts. I. Theory and scaling* // Icarus. – 2012. – Vol.221. – Pp.875-887.

13. Walker J.D., Chocron S., Durda D.D. et al. *Scale Size Effect in Momentum Enhancement* // Procedia Engineering. – 2013. – Vol.58. – Pp.240-250.
14. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

REFERENCES

1. Orlenko L.P. *Fizika vzryva [Explosion physics]*. Izdanie 3-e, ispravlennoe. V 2 tomakh. Tom 2. Moskva, Fizmatlit, 2004, 656 p.
2. Sagomonyan A.Ya. *Pronikanie (pronikanie tverdykh tel v szhimaemye sploshnye sredy) [Penetration (penetration of solids into compressible continuous media)]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1974, 300 p.
3. Valerio-Flores O.L., Murr L.E., Hernandez V.S., Quinones S.A. *Observations and simulations of the low velocity-to-hypervelocity impact crater transition for a range of penetrator densities into thick aluminum targets*. J. Mater. Sci., 2004, Vol.39, Pp.6271-6289.
4. Vlasov A.S., Sinani A.B. *Model calculating high-speed collisions between bodies with different shapes and massive metallic obstacles*. Tech. Phys., 2017, Vol.62, Pp.1049-1055. DOI: 10.1134/S106378421707026X.
5. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model' vzaimodejstviya deformiruemoj struny s deformiruemoj pregradoj [Model of the interaction of a deformable string with a deformable target]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2019, No.8, Pp.2-9.
6. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Model for the Interaction of a Rigid String with a Deformable Target*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, Iss.4, Pp.294-300.
7. Myagkov N.N., Kalmykov P.N., Lapichev N.V., Leont'ev A.I., Nomakonova V.N., Ponomarev A.V., Sal'nikov A.V., Sokolov O.A., Shumikhin T.A. *Studies of the Fragmentation of Spherical Aluminum Projectiles on a Heavy Mesh at Velocities of up to 7 km/s*. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2021, Vol.132, No.2, Pp.177-188.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Shumikhin T.A. *Model of interaction of a rigid mesh with a deformable target*. Meccanica, 2021, Vol.56, Iss.1, Pp.179-193.
9. Francesconi A., Higashide M., Mandeville J.C., Meshcheryakov S. et al. *Characterization of Ejecta from HVI on Spacecraft outer Surfaces*. IADC WG3, 2013. https://www.iadc-home.org/documents_public/view/page/3/id/107#u
10. Walker James D., Chocron Sidney, Grosch Donald J. *Size scaling of hypervelocity-impact ejecta mass and momentum enhancement: Experiments and a nonlocal-shear-band-motivated strain-rate-dependent failure model*. Intern. J. Impact Engn., 2020, Vol.135, 103388.
11. Hoerth Tobias, Schäfer Frank, Hupfer Jan, Millon Oliver, Wickert Matthias. *Momentum Transfer in Hypervelocity Impact Experiments on Rock Targets*. Procedia Engineering, 2015, Vol.103, Pp.197-204.
12. Holsapple K.A., Housen K.R. *Momentum transfer in asteroid impacts. I. Theory and scaling*. Icarus, 2012, Vol.221, Pp.875-887.
13. Walker J.D., Chocron S., Durda D.D. et al. *Scale Size Effect in Momentum Enhancement*. Procedia Engineering, 2013, Vol.58, Pp.240-250.

14. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti [Foundations of the theory of plasticity]*. Moskva, Nauka, 1969, 420 p.

Поступила в редакцию 24 мая 2021 года.

Сведения об авторах:

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., проф., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Беклемишев Сергей Андреевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры Высшей математики, Московский технологический университет, г. Москва, Россия; e-mail: balankin.aes@yandex.ru

Выборнов Александр Николаевич – к.ф.-м.н., доцент кафедры Высшей математики, Московский технологический университет, г. Москва, Россия; e-mail: VAG-1953@yandex.ru

Мягков Николай Николаевич – д.ф.-м.н., зав. лаб., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: nn_myagkov@mail.ru

Юшманова Ольга Олеговна – к.т.н., научный сотрудник, ФГБУН Институт водных проблем РАН, г. Москва, Россия; e-mail: olyusha8@yandex.ru