

УДК 539.2

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.003\_016.01

## КРИТИКА ЗАКОНА ДЕФОРМИРОВАНИЯ UGENT ДЛЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ И АЛЬТЕРНАТИВА ЕМУ

Белов П.А.<sup>1</sup>, Головина Н.Я.<sup>2</sup><sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия

### АННОТАЦИЯ

Анализируется эмпирическая модель UGent для упругопластического материала с упрочнением. Кривая деформирования, в соответствии с этой моделью, является составной. Область определения разбивается на три сегмента. На первом и третьем постулируется закон Рамберга-Осгуда с разными показателями степени, а на втором постулируется кривая, плавно соединяющая кривые на первом и третьем сегменте так, что в целом кривая является дифференцируемой. Здесь показано, что эта блестящая идея авторов закона UGent реализована ими с несколькими логическими недостатками. Чтобы исправить эти недостатки, сплайн модифицирован так, чтобы закон деформирования на втором сегменте содержал линейную комбинацию двух линейных полиномов и двух степенных функций с разными показателями степени, входящих в структуры законов деформирования на первом и третьем сегменте. Также сформулированы новые условия, которым должен удовлетворять закон деформирования на третьем сегменте в его начальной и конечной точках. Показано, что новых произволов ровно столько, чтобы удовлетворить всем выявленным требованиям к дифференцируемому трехзвенному сплайну кривой деформирования. По выборке из 582 экспериментальных точек для стали 35 осуществлено определение десяти существенных физических параметров предложенной модели. Два из них, координаты точки предела прочности на истинной кривой в координатах деформация-напряжение, выбраны в качестве нормирующих множителей. Оставшиеся восемь определены из требования минимума целевой функции методом градиентного спуска. В качестве целевой функции выбрано суммарное квадратичное отклонение. Построена соответствующая теоретическая кривая деформирования с установленными параметрами. Показано, что точность предложенной модели является достаточно высокой. Среднеквадратичное отклонение построенной кривой от выборки экспериментальных точек равно 1.8%.

**Ключевые слова:** кривые деформирования упругопластических материалов; закон Рамберга-Осгуда; закон UGent; сплайны кривых деформирования

## CRITICISM OF THE LAW OF DEFORMATION UGENT FOR ELASTOPLASTIC MATERIALS AND AN ALTERNATIVE TO IT

Belov Pt.A.<sup>1</sup>, Golovina N.Ya.<sup>2</sup><sup>1</sup>Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia<sup>2</sup>Tyumen Industrial University, Tyumen, Russia

## ABSTRACT

An empirical UGent model for an elastoplastic material with hardening is analyzed. The deformation curve, according to this model, is composite. The definition area is divided into three segments. On the first and third, the Ramberg-Osgood law with different exponents is postulated, and on the second, a curve is postulated that smoothly connects the curves on the first and third segments so that, on the whole, the curve is differentiable. It is shown here that this brilliant idea of the authors of the UGent law was implemented by them with several logical flaws. To correct these shortcomings, the spline is modified so that the deformation law on the second segment contains a linear combination of two linear polynomials and two power functions with different exponents included in the structures of the deformation laws on the first and third segments. Also, new conditions have been formulated that must be satisfied by the law of deformation on the third segment at its initial and final points. It is shown that there are just enough new arbitrariness to satisfy all the identified requirements for a differentiable three-link spline of the deformation curve. From a sample of 582 experimental points for steel 35, ten significant physical parameters of the proposed model were determined. Two of them, the coordinates of the strength point on the true curve in the strain-stress coordinates, are selected as normalizing factors. The remaining eight are determined from the minimum requirement of the objective function by the gradient descent method. The total quadratic deviation is selected as the objective function. The corresponding theoretical deformation curve with the established parameters is constructed. It is shown that the accuracy of the proposed model is quite high. The standard deviation of the constructed curve from the sample of experimental points is 1.8%.

**Keywords:** deformation curves of elastoplastic materials; Ramberg-Osgood law; UGent law; splines of deformation curves

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время крепнет убеждение, что процесс деформирования упругопластических материалов невозможно описать некоторой универсальной кривой на всей области определения закона деформирования. Аналогичная ситуация имеет место и для композиционных материалов, причем для них процесс деформирования, как правило, имеет ещё большее разнообразие этапов, связанное с неоднородностью, дефектностью, адгезионной прочностью соединения матрицы и включений, и другими факторами. Был проведен анализ ряда эмпирических законов, постулирующих разный закон деформирования при различных уровнях деформации [1-19]. Наиболее удачной представляется модель, изложенная в работах [1-3]. В ней сформулирован так называемый закон UGent. Кривая деформирования, в соответствии с этой моделью, является составной. Область определения разбивается на три сегмента. На первом и третьем постулируется закон Рамберга-Осгуда [20] с разными показателями степени, а на втором постулируется кривая, плавно соединяющая кривые на первом и третьем сегменте так, что в целом кривая является дифференцируемой. Первый сегмент назван авторами «early yielding segment», второй – «transition segment», третий – «extensive yielding segment». Сегменты разделены двумя характерными точками с координатами  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  и  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$ . По определению, точки  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  и  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$  являются точками сопряжения на трехзвенном сплайне кривой деформирования. На рис.1 приведена, как цитата из [1], графическая иллюстрация модели UGent.

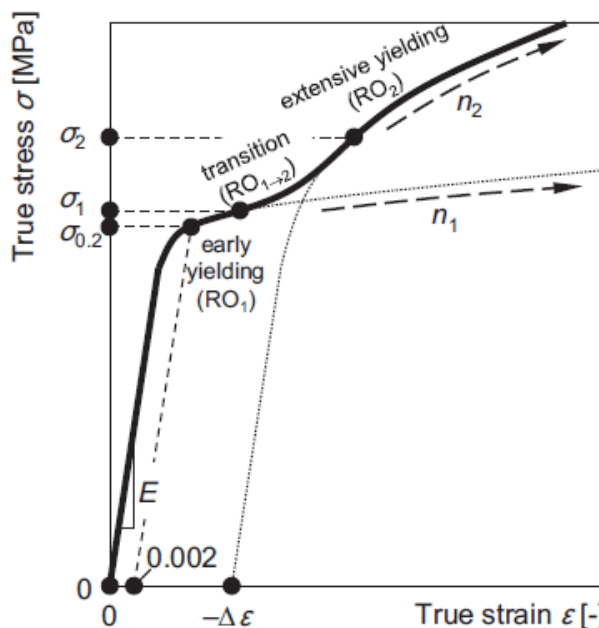


Рис.1. Графическая иллюстрация модели UGent из [1].

Приведем авторскую формулировку математического закона UGent

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n_1} & \text{for } 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \\ \frac{\sigma}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n_1} + \\ + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n_2} - \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n_1} \right] - \\ - \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \left[ \frac{\sigma^{n_2+1} - \sigma_1^{n_2+1}}{(n_2 + 1)\sigma_{0,2}^{n_2}} - \frac{\sigma^{n_1+1} - \sigma_1^{n_1+1}}{(n_1 + 1)\sigma_{0,2}^{n_1}} \right] & \text{for } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ \frac{\sigma}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{n_2} - \Delta\varepsilon & \text{for } \sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_u \end{cases}$$

$$\Delta\varepsilon = \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \left[ \frac{\sigma_2^{n_2+1} - \sigma_1^{n_2+1}}{(n_2 + 1)\sigma_{0,2}^{n_2}} - \frac{\sigma_2^{n_1+1} - \sigma_1^{n_1+1}}{(n_1 + 1)\sigma_{0,2}^{n_1}} \right] \tag{1}$$

Сплайн непрерывен как при переходе через точку  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ , так и через точку  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$ .

В соответствии с этой формулировкой определим и касательный модуль, как производную от напряжения по деформации

$$\frac{d\varepsilon}{d\sigma} = \frac{1}{E(\sigma)} = \begin{cases} \frac{1}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{n_1}{\sigma_{0,2}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{(n_1-1)} & \text{for } 0 \leq \sigma \leq \sigma_1 \\ \frac{1}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{n_1}{\sigma_{0,2}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{(n_1-1)} + \\ + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{(\sigma - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_1)} \left[ \frac{n_2}{\sigma_{0,2}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{(n_2-1)} - \right. \\ \left. - \frac{n_1}{\sigma_{0,2}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{(n_1-1)} \right] & \text{for } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ \frac{1}{E_0} + \left( \varepsilon_{0,2} - \frac{\sigma_{0,2}}{E_0} \right) \frac{n_2}{\sigma_{0,2}} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{0,2}} \right)^{(n_2-1)} & \text{for } \sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_u \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда видно, что сплайн дифференцируем как при переходе через точку  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ , так и через точку  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$ .

Блестящая, на наш взгляд, идея авторов, однако, реализована ими с несколькими логическими недостатками.

**Первый недостаток** касается области определения двух законов Рамберга-Осгуда.

Строго следуя концепции авторов, закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_1$  должен быть определен только на первом и втором сегменте, так как на третьем сегменте, согласно их концепции, действует только закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_2$ .

Аналогично, закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_2$  должен быть определен только на втором и третьем сегменте, так как, согласно их концепции, на первом сегменте действует только закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_1$ .

Поэтому, согласно концепции авторов закона UGent, эволюция процесса деформирования должна выглядеть следующей: начиная от начала нагружения и до точки  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  действует первый закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_1$ . В точке  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  «включается» второй закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_2$  и на втором сегменте они работают вместе до точки  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$ . При переходе через точку  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$  первый закон Рамберга-Осгуда с показателем степени  $n_1$  «выключается», и далее, на третьем сегменте, работает только второй закон.

Как следствие, на втором сегменте должны действовать одновременно оба закона и только они. Однако, сама структура закона Рамберга-Осгуда определяется в общем случае тремя механизмами деформирования, которые определяются линейной комбинацией двух линейных полиномов и степенной функции. Как результат, на втором сегменте действует совместно четыре механизма деформирования, определяемые двумя линейными полиномами и двумя степенными функциями. Из них линейными комбинациями можно образовать как

оба закона Рамберга-Осгуда, так и ещё два «переходных» закона, работающих только на втором сегменте.

Отсюда следует **второй** существенный логический **недостаток**, присущий реализации закона UGent – это наличие иных, не свойственных обоим законам Рамберга-Осгуда механизмов деформирования, определяемых степенными функциями с показателями степени  $(n_1 + 1)$  и  $(n_2 + 1)$ .

**Третий недостаток** касается условий, которым удовлетворяет закон деформирования на третьем сегменте. Не трудно убедиться проверкой, что «второй закон Рамберга-Осгуда» удовлетворяет следующим требованиям: в точках  $(-\Delta\varepsilon; 0)$  и  $(\varepsilon_{0,2} - \Delta\varepsilon; \sigma_{0,2})$  деформация и касательный модуль должны быть заданными. Однако не трудно показать, что обе точки не лежат внутри третьего сегмента. Отсюда вытекают трудности в определении физических параметров, свойственных «второму закону Рамберга-Осгуда», так как, согласно идее авторов, только на третьем сегменте процесс деформирования определяется исключительно этим законом.

Настоящая статья и посвящена формулировке такого, более логически последовательного, согласно концепции авторов закона UGent, эмпирического закона. Будем формулировать альтернативный закон как трехсегментный сплайн, отражающий зависимость напряжения от деформации.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА «ПЕРВОГО ЗАКОНА РАМБЕРГА-ОСГУДА»

Постулируем структуру «первого закона Рамберга-Осгуда» на первом и втором сегменте в виде

$$\begin{cases} \sigma_A(\varepsilon) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^{n_1} \\ E_A(\sigma) = A_1 + A_2n_1\varepsilon^{(n_1-1)} \end{cases} \quad (3)$$

Четыре параметра  $A_0, A_1, A_2, n_1$  в (3) должны удовлетворять следующим требованиям: в начальной и конечной точках первого сегмента должны быть заданы напряжение и касательный модуль

$$\begin{cases} \sigma_A(0) = A_0 = 0 \\ E_A(0) = A_1 = E_0 \end{cases} \begin{cases} \sigma_A(\varepsilon_1) = A_0 + A_1\varepsilon_1 + A_2\varepsilon_1^{n_1} = \sigma_1 \\ E_A(\varepsilon_1) = A_1 + A_2n_1\varepsilon_1^{(n_1-1)} = E_1 \end{cases} \quad (4)$$

Решая нелинейную систему (4), получим

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = E_0 \\ A_2 = (\sigma_1 - E_0\varepsilon_1)\varepsilon_1^{-n_1} \\ n_1 = \frac{(E_0 - E_1)}{(E_0 - \sigma_1/\varepsilon_1)} \end{cases} \quad (5)$$

Ограничение на показатель степени  $n_1$  в (5) определяется условием, что касательный модуль в нуле, в соответствии с (3), должен быть несингулярным

$$n_1 = \frac{(E_0 - E_1)}{(E_0 - \sigma_1/\varepsilon_1)} > 1 \rightarrow \frac{(\sigma_1/\varepsilon_1 - E_1)}{(E_0 - \sigma_1/\varepsilon_1)} > 0 \quad (6)$$

В результате сплайн на первом сегменте определяется соотношениями

$$\begin{cases} \sigma_A(\varepsilon) = E_0\varepsilon - (E_0\varepsilon_1 - \sigma_1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^{n_1} \\ E_A(\varepsilon) = E_0 - (E_0 - E_1)\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^{(n_1-1)} \end{cases} \quad (7)$$

В целом, «первый закон Рамберга-Осгуда» является четырех параметрическим, причем формальные параметры  $A_0, A_1, A_2, n_1$  с помощью (4)-(5) выражены через физические параметры, имеющие ясный физический смысл: через координаты конечной точки первого сегмента  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  и величины касательных модулей на концах сегмента  $E_0, E_1$ .

## 2. ФОРМУЛИРОВКА «ВТОРОГО ЗАКОНА РАМБЕРГА-ОСГУДА»

Постулируем структуру «второго закона Рамберга-Осгуда» на втором и третьем сегменте в аналогичном (3) виде

$$\begin{cases} \sigma_C(\varepsilon) = C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{n_2} \\ E_C(\varepsilon) = C_1 + C_2n_2\varepsilon^{(n_2-1)} \end{cases} \quad (8)$$

Четыре параметра  $C_0, C_1, C_2, n_2$  в (8) должны удовлетворять следующим требованиям: в начальной и конечной точках третьего сегмента должны быть заданы напряжение и касательный модуль

$$\begin{cases} \sigma_C(\varepsilon_2) = C_0 + C_1\varepsilon_2 + C_2\varepsilon_2^{n_2} = \sigma_2 \\ E_C(\varepsilon_2) = C_1 + C_2n_2\varepsilon_2^{(n_2-1)} = E_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_C(\varepsilon_u) = C_0 + C_1\varepsilon_u + C_2\varepsilon_u^{n_2} = \sigma_u \\ E_C(\varepsilon_u) = C_1 + C_2n_2\varepsilon_u^{(n_2-1)} = E_u \end{cases} \quad (9)$$

Здесь конечная точка третьего сегмента и кривой деформирования в целом, с координатами  $(\varepsilon_u; \sigma_u)$  – точка предела прочности на истинной кривой деформирования.

Решая линейную часть системы (9), получим

$$\begin{cases} C_0 = \frac{(\sigma_2\varepsilon_u - \sigma_u\varepsilon_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} - C_2 \frac{(\varepsilon_2^{n_2}\varepsilon_u - \varepsilon_2\varepsilon_u^{n_2})}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \\ C_1 = \frac{(\sigma_u - \sigma_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} - C_2 \frac{(\varepsilon_u^{n_2} - \varepsilon_2^{n_2})}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \end{cases} \quad C_2 = \left[ E_2 - \frac{(\sigma_u - \sigma_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \right] / \left[ n_2 - \frac{\left( \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_2} \right)^{n_2} - 1 \right)}{\left( \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_2} \right) - 1 \right)} \right] \varepsilon_2^{(n_2-1)} \quad (10)$$

Исключая из последнего уравнения системы (9) амплитуды  $C_1, C_2$ , получим нелинейное уравнение на показатель степени  $n_2$

$$\frac{n_2 \left[ \left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_2} \right)^{(n_2-1)} - 1 \right]}{\left[ \frac{\left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_2} \right)^{n_2} - 1}{\left( \frac{\varepsilon_u}{\varepsilon_2} - 1 \right)} - n_2 \right]} = \frac{(E_2 - E_u)}{\left[ E_2 - \frac{(\sigma_u - \sigma_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \right]} \quad (11)$$

Подставляя (10) в (8), с учетом (11) получим

$$\begin{cases} \sigma_c(\varepsilon) = \sigma_2 \frac{(\varepsilon_u - \varepsilon)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} + \sigma_u \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} + C_2 \left[ \varepsilon^{n_2} - \varepsilon_u^{n_2} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} - \varepsilon_2^{n_2} \frac{(\varepsilon_u - \varepsilon)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \right] \\ E_c(\varepsilon) = \frac{(\sigma_u - \sigma_2)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} + C_2 \left[ n_2 \varepsilon^{(n_2-1)} - \frac{(\varepsilon_u^{n_2} - \varepsilon_2^{n_2})}{(\varepsilon_u - \varepsilon_2)} \right] \end{cases} \quad (12)$$

Как видно, «второй закон Рамберга-Осгуда» (12) хоть и содержит аналогично (7) линейные полиномы и степенную функцию, но отличается по структуре от «первого закона Рамберга-Осгуда», хотя бы тем, что содержит два линейных полинома, а не один.

### 3. ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНА ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА СЕГМЕНТЕ СОПРЯЖЕНИЯ

Постулируем структуру закона деформирования на втором сегменте в виде линейной комбинации двух линейных полиномов и двух степенных функций, определяющих оба закона Рамберга-Осгуда

$$\begin{cases} \sigma_B(\varepsilon) = B_0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^{n_1} + B_3\varepsilon^{n_2} \\ E_B(\varepsilon) = B_1 + B_2n_1\varepsilon^{(n_1-1)} + B_3n_2\varepsilon^{(n_2-1)} \end{cases} \quad (13)$$

Покажем, что постулированная структура удовлетворяет, в отличие от (1) и (2), концепции авторов закона UGent. Для этого выделим явно в (13) оба закона Рамберга-Осгуда и интерпретируем остаток как специфический механизм деформирования, работающий исключительно на втором сегменте

$$\begin{aligned} \sigma_B(\varepsilon) = B_0 + B_1\varepsilon + B_2\varepsilon^{n_1} + B_3\varepsilon^{n_2} = & (A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^{n_1}) + \\ & + (B_0 - A_0 - C_0) + (B_1 - A_1 - C_1)\varepsilon + (B_2 - A_2)\varepsilon^{n_1} + \\ & + (B_3 - C_2)\varepsilon^{n_2} + (C_0 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^{n_2}) \end{aligned} \quad (14)$$

Введем новые обозначения

$$\begin{cases} D_0 = (B_0 - A_0 - C_0) \\ D_1 = (B_1 - A_1 - C_1) \\ D_2 = (B_2 - A_2) \\ D_3 = (B_3 - C_2) \end{cases} \quad (15)$$

получим явное выделение закона «сопряжения» с коэффициентами  $D_i, i = 0 \div 3$  и двух законов Рамберга-Осгуда с коэффициентами  $A_i, i = 0 \div 2$  и  $C_i, i = 0 \div 2$ .

Аналогично, можно с учетом (15) осуществить детализацию механизмов деформирования и в касательном модуле

$$E_B(\varepsilon) = \left( A_1 + A_2 n_1 \varepsilon^{(n_1-1)} \right) + \left( D_1 + D_2 n_1 \varepsilon^{(n_1-1)} + D_3 n_2 \varepsilon^{(n_2-1)} \right) + \left( C_1 + C_2 n_2 \varepsilon^{(n_2-1)} \right) \quad (16)$$

Четыре параметра  $B_0, B_1, B_2, B_3$  в (13) должны удовлетворять следующим требованиям: в начальной и конечной точках второго сегмента должны быть заданы напряжение и касательный модуль

$$\begin{cases} \sigma_B(\varepsilon_1) = B_0 + B_1 \varepsilon_1 + B_2 \varepsilon_1^{n_1} + B_3 \varepsilon_1^{n_2} = \sigma_1 \\ \sigma_B(\varepsilon_2) = B_0 + B_1 \varepsilon_2 + B_2 \varepsilon_2^{n_1} + B_3 \varepsilon_2^{n_2} = \sigma_2 \end{cases} \begin{cases} E_B(\varepsilon_1) = B_1 + B_2 n_1 \varepsilon_1^{(n_1-1)} + B_3 n_2 \varepsilon_1^{(n_2-1)} = E_1 \\ E_B(\varepsilon_2) = B_1 + B_2 n_1 \varepsilon_2^{(n_1-1)} + B_3 n_2 \varepsilon_2^{(n_2-1)} = E_2 \end{cases} \quad (17)$$

Решая линейную систему (17), и подставляя найденные значения в (13), получим

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} A_0 + A_1 \varepsilon + A_2 \varepsilon^{n_1} & \text{for } 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1 \\ B_0 + B_1 \varepsilon + B_2 \varepsilon^{n_1} + B_3 \varepsilon^{n_2} & \text{for } \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2 \\ C_0 + C_1 \varepsilon + C_2 \varepsilon^{n_2} & \text{for } \varepsilon_2 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u \end{cases} \quad (18)$$

В результате двенадцать формальных параметров  $A_0, A_1, A_2, n_1, B_0, B_1, B_2, B_3$  и  $C_0, C_1, C_2, n_2$  выражены через двенадцать физических параметров, имеющих ясный физический смысл: через координаты четырех характерных точек кривой  $(\varepsilon_0; \sigma_0)$ ,  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ ,  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$  и  $(\varepsilon_u; \sigma_u)$ , и величины касательных модулей в этих точках  $E_0, E_1, E_2, E_u$ . Здесь следует обратить внимание на то, что координаты начальной точки кривой деформирования по определению равны нулю  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\sigma_0 = 0$  в силу гипотезы о начальном ненапряженном состоянии и в соответствии с первым условием системы (4). Из сформулированных условий (4), (9) и (17) можно доказать, что построенный при таких условиях сплайн будет непрерывным и дифференцируемым при переходе через точки сопряжения. Действительно непрерывность следует из цепочек равенств, построенных как следствие (4), (9) и (17)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1-0} \sigma(\varepsilon) = \sigma_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1+0} \sigma(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2-0} \sigma(\varepsilon) = \sigma_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2+0} \sigma(\varepsilon) \end{aligned} \quad (19)$$

Соответственно, дифференцируемость следует из цепочек равенств, также следующих из (4), (9) и (17)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1-0} \sigma'(\varepsilon) = E_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1+0} \sigma'(\varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2-0} \sigma'(\varepsilon) = E_2 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2+0} \sigma'(\varepsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

Внутри сегментов сплайн дифференцируем, так как на каждом сегменте определен как линейная комбинация дифференцируемых функций. Таким образом, и в целом построенный здесь сплайн (18) непрерывен и дифференцируем на всей области определения.



#### 4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Идентификация физических параметров, в строгом соответствии с концепцией UGent, должна проводиться на первом сегменте для параметров  $\varepsilon_1, \sigma_1, E_0, E_1$  и для параметров  $\varepsilon_2, \sigma_2, E_2, E_u$  – на третьем сегменте. Кривая деформирования на втором сегменте должна быть полностью определена параметрами обоих законов Рамберга-Осгуда и не должна содержать собственных уникальных параметров. Параметры  $\varepsilon_u, \sigma_u$  использованы для нормировки напряжений и деформаций для того, чтобы все кривые деформирования для всех материалов начинались в начальной точке с координатами (0;0) и заканчивались в точке предела прочности с координатами (1;1). Нумерация экспериментальных точек  $n$  проводится от 1 до  $N$ . Соответственно, все модули должны нормироваться на секущий модуль в точке предела прочности  $\sigma_u/\varepsilon_u$ . Обратим внимание на то, что законы Рамберга-Осгуда определяют кривые деформирования с отрицательной кривизной. На «transition segment» существует и найдется (хотя бы визуально) экспериментальная точка с координатами  $(\varepsilon_+; \sigma_+)$ , в которой кривизна кривой деформирования положительна. Тогда вся кривая может быть разбита этой точкой на два отрезка, первый из которых полностью содержит «early yielding segment» с отрицательной кривизной и часть кривой деформирования с положительной кривизной, а второй отрезок полностью содержит «extensive yielding segment» с отрицательной кривизной и часть кривой деформирования с положительной кривизной. В общем случае следует допускать, что «transition segment» на своих концах имеет отрицательную кривизну, а в точках сопряжения кривизна может терпеть разрыв.

##### Алгоритм определения физических параметров I закона Рамберга-Осгуда.

После выбора точки  $(\varepsilon_+; \sigma_+)$  с номером  $N_+$ , на первом отрезке останутся  $N_+$  экспериментальных точек. Уменьшая номер экспериментальной точки на единицу, можно выбрать её в качестве пробной на предмет проверки её максимальной близости к теоретически оптимальной точке сопряжения  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ . При выборе конкретной экспериментальной точки в качестве пробного кандидата на точку сопряжения, фиксируются пробные значения  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  остаются неопределёнными ещё два физических параметра: начальный касательный модуль  $E_0$  и касательный модуль  $E_1$ . Модуль  $E_0$  определяется углом  $\varphi_0$  между касательной к кривой деформирования в нуле и осью деформаций, который должен лежать в интервале  $\arctg(\sigma_1/\varepsilon_1) < \varphi_0 < \pi/2$ . Модуль  $E_1$  определяется углом  $\varphi_1$  между касательной кривой деформирования в точке  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  и осью деформаций, который должен лежать в интервале от  $0 < \varphi_1 < \arctg(\sigma_1/\varepsilon_1)$ . Таким образом, для каждой пробной точки сопряжения  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$  следует построить двухпараметрический пучок кривых деформирования, проходящих через точки (0;0) и  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ , вычислить для каждой кривой из пучка суммарное квадратичное отклонение, и выбрать кривую с минимальным суммарным квадратичным отклонением. Проводя эту процедуру для каждой экспериментальной точки, можно определить ту, которая лежит максимально близко к теоретической точке  $(\varepsilon_1; \sigma_1)$ .

Дальнейшее уточнение экспериментальных значений физических параметров определяется процедурой, которую можно назвать методом сжимающейся двумерной области. Пусть за оптимальную выбрана экспериментальная точка с номером  $n$ . Тогда координаты соседних к ней точек с номерами  $(n-1)$  и  $(n+1)$  определяют на плоскости деформация-напряжение прямоугольную область с размерами  $(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n-1})$  и  $(\sigma_{n+1} - \sigma_{n-1})$ . Покрывая её прямоугольной сеткой и выбирая каждый узел этой сетки за пробные точки сопряжения, следуя процедуре, изложенной выше, можно выбрать оптимальный узел и определить соответствующие ему оптимальные физические параметры. Повторяя эту процедуру, можно уточнять локализацию теоретической точки сопряжения до тех пор, пока размеры двумерной области не сожмутся до величин инструментальной погрешности определения деформаций и напряжений.

Таким образом, можно утверждать, что данный алгоритм позволяет определить физические параметры I закона Рамберга-Осгуда  $\varepsilon_1, \sigma_1, E_0, E_1$  с точностью до инструментальных погрешностей эксперимента.

#### **Алгоритм определения физических параметров II закона Рамберга-Осгуда.**

После выбора точки  $(\varepsilon_+; \sigma_+)$  с номером  $N_+$ , на втором отрезке останутся  $(N - N_+)$  экспериментальных точек. Увеличивая номер экспериментальной точки на единицу, можно выбрать её в качестве пробной на предмет проверки её максимальной близости к теоретически оптимальной точке сопряжения  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$ . Для каждой пробной точки следует определить область значений касательных модулей  $E_2, E_u$ . Модуль  $E_u$  определяется углом  $\varphi_u$  между касательной к кривой деформирования в точке предела прочности  $(\varepsilon_u; \sigma_u)$  и осью деформаций, который должен лежать в интервале  $0 < \varphi_u < \arctg((\sigma_u - \sigma_2)/(\varepsilon_u - \varepsilon_2))$ . Модуль  $E_2$  определяется углом  $\varphi_2$  между касательной к кривой деформирования в точке  $(\varepsilon_2; \sigma_2)$  и осью деформаций, который должен лежать в интервале от  $\arctg((\sigma_u - \sigma_2)/(\varepsilon_u - \varepsilon_2)) < \varphi_1 < \arctg(E_0)$ .

В остальном алгоритм тот же, что и для определения физических параметров I закона Рамберга-Осгуда.

На рисунке ниже приведена выборка из 582 экспериментальных точек для стали 35 и соответствующая ей теоретическая кривая, построенная в соответствии с решением (18) и условиями (4), (9) и (17).

Сравнение экспериментальной и теоретической кривых деформирования для Стали-35 дает среднеквадратичное отклонение, равное 1,8%. Эта точность превосходит точность в 2,5%, достигнутую в [8].

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Проведен анализ эмпирического закона UGent для упругопластического материала с упрочнением. Кривая деформирования, в соответствии с этой моделью, является составной. Область определения разбивается на три сегмента. На первом и третьем постулируется закон Рамберга-Осгуда с разными показателями степени, а на втором постулируется кривая, плавно соединяющая кривые на первом и третьем сегменте так, что в целом кривая является

дифференцируемой. Вскрыты три существенных логических недостатка при реализации этого закона.

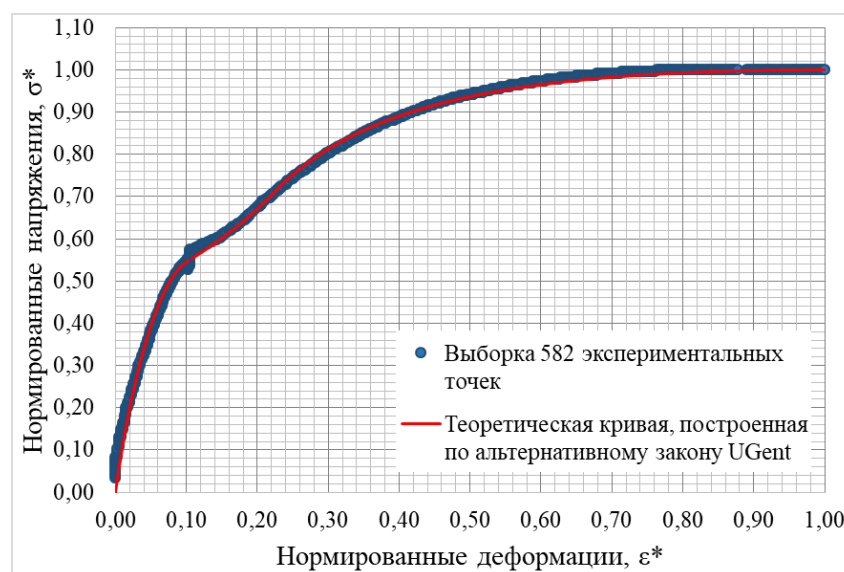


Рис.2. Теоретическая кривая, соответствующая альтернативному закону UGent, и экспериментальные данные для стали 35 ГОСТ 1050-2013 (стандартное отклонение  $S_0 = 0,01769$ ).

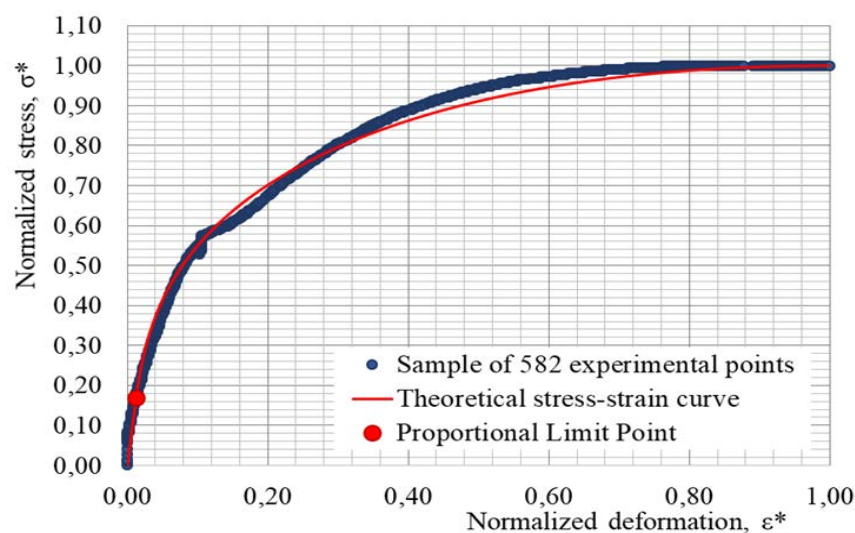


Рис.3. Теоретическая кривая, представленная в работе [8] и экспериментальные данные для стали 35 ГОСТ 1050-2013 (стандартное отклонение  $S_0 = 0,02513$ ).

Чтобы исправить эти недостатки, сплайн модифицирован (18) так, чтобы закон деформирования на втором сегменте содержал линейную комбинацию двух линейных полиномов и двух степенных функций с разными показателями степени, входящих в структуры законов деформирования на первом и третьем сегменте. Также сформулированы новые условия (17), которым должен удовлетворять закон деформирования на третьем сегменте в его начальной и конечной точках. Показано, что новых произволов ровно столько, чтобы удовлетворить всем

выявленным требованиям к дифференцируемому трехзвенному сплайну кривой деформирования. Для апробации сформулированной альтернативной модели для Стали-35 подобраны физические параметры и построена соответствующая теоретическая кривая деформирования. Показано, что точность предложенной модели является достаточно высокой.

Кроме практической ценности развитие идеи авторов закона UGent дает импульс к более глубокому исследованию как отдельных механизмов деформирования, так и их совокупностей, которые и определяют тот или иной закон. Так линейные полиномы и степенные функции, определяющие отдельные механизмы деформирования в законе Рамберга-Осгуда (линейные и нелинейные, обратимые и необратимые) могут трактоваться как собственные функции некоторого дифференциального уравнения четвертого порядка (по числу собственных функций). Примечательно, что для однозначного определения закона деформирования, определяемого уравнением четвертого порядка, на некотором интервале деформаций, следует задать на концах этого интервала значение напряжения и его первой производной (касательного модуля). А это требование автоматически приводит к тому, что построенный таким образом сплайн будет и непрерывным, и дифференцируемым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hertele S., De Waele W., Denys R. *A generic stress-strain model for metallic materials with twostage strain hardening behavior* // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – No.3. – Pp.519-531.
2. Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. *Full-range stress-strain behaviour of contemporary pipeline steels: Part I. Model description* // Intern. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2012. – No.92. – Pp.34-40.
3. Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. *Full-range stress-strain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters* // Intern. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2012. – No.92. – Pp.27-33.
4. Mendelson A. *Plasticity: Theory and Application*. – New York, London: Macmillan, 1968. – 353 p.
5. Надаи А.Л. *Пластичность и разрушение твердых тел. Т.1.* – М.: Изд-во иностранной литературы, 1954. – 648 с.
6. Надаи А.Л. *Пластичность. Механика пластического состояния вещества. Т.2.* – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 280 с.
7. Belov P.A., Golovina N.Y. *Generalization of the Ramberg–Osgood model for elastoplastic materials* // J. of Materials Engineering and Performance. – 2019. – Vol.12. – No.28. – Pp.7342-7346.
8. Golovina N. Ya. *The nonlinear deformation curve model as a solution of the fourth order differential equation* // Intern. J. of Pressure Vessels and Piping. – 2021. – No.189. – 104258.
9. Головина Н.Я., Белов П.А. *Кривая деформирования как экстремаль некоторого функционала* // Наука и бизнес: пути развития. – 2019. – №10(100). – С.44-52.
10. Головина Н.Я., Белов П.А. *Модель кривой нелинейного деформирования стали 20ХГР и стали 35* // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т.82. – №3. – С.305-316.

11. Real E., Arrayago I., Mirambell E., Westeel R. *Comparative study of analytical expressions for the modelling of stainless steel behavior* // *Thin-Walled Structures*. – 2014. – Vol.83. – Pp.2-11.
12. Головина Н.Я. *Об одной эмпирической модели нелинейного деформирования упругопластических материалов* // *Экологический вестник научных центров ЧЭС*. – 2020. – Т.17. – №3. – С.48-55.
13. Quach W.M., Huang J.F. *Stress-strain models for light gauge steels* // *Procedia Engineering*. – 2011. – No.14. – Pp.288-296.
14. Quach W.M., Teng J.G., Chung K.F. *Three-stage full-range stress-strain model for stainless steels* // *J. of Structural Engineering*. – 2008. – No.134. – Pp.1518-1527.
15. Quach W.M., Huang J.F. *Two-stage stress-strain models for light-gauge steels* // *Advances in Structural Engineering*. – 2014. – Vol.17. – No.7. – Pp.937-949.
16. Abdella K. *Inversion of a full-range stress-strain relation for stainless steel alloys* // *Intern. J. of Non-Linear Mechanics*. – 2006. – No.41. – Pp.456-463.
17. Головина Н.Я. *Сравнительный анализ моделей ресурса пластичных материалов* / XII Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – Т.3. – С.611-613.
18. Li T., Zheng J., Yi Chen Z. *Description of the behavior of steel in strain hardening in the entire range* // *Springer Plus*. – 2016. – No.5. – Pp.1316-1328.
19. Rasmussen K. *Full range stress-strain curves for stainless steel alloys* // *J. of Constructional Steel Research*. – 2003. – No.59(1). – Pp.47-61.
20. Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress-strain curves by three parameters* // *National Advisory Committee for Aeronautics. Technical Note No.902*. – Washington DC, 1943. – 29 p.

## REFERENCES

1. Hertele S., De Waele W., Denys R. *A generic stress-strain model for metallic materials with two-stage strain hardening behavior*. *Intern. J. of Non-Linear Mechanics*, 2011, Vol.46, No.3, Pp.519-531.
2. Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. *Full-range stress-strain behaviour of contemporary pipeline steels: Part I. Model description*. *Intern. J. of Pressure Vessels and Piping*, 2012, No.92, Pp.34-40.
3. Hertelé S., De Waele W., Denys R., Verstraete M. *Full-range stress-strain behaviour of contemporary pipeline steels: Part II. Estimation of model parameters*. *Intern. J. of Pressure Vessels and Piping*, 2012, No.92, Pp.27-33.
4. Mendelson A. *Plasticity: Theory and Application*. New York, London: Macmillan, 1968, 353 p.
5. Nadai A.L. *Plastichnost' i razrushenie tverdykh tel. T.1. [Theory of flow and fracture of solids]*. Moskva, Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1954, 648 p.
6. Nadai A.L. *Plastichnost'. Mekhanika plasticheskogo sostoyaniya veshhestva. T.2. [Mechanics of the plastic state of matter]*. Moskva, ONTI NKTP SSSR, 1936, 280 p.
7. Belov P.A., Golovina N.Y. *Generalization of the Ramberg–Osgood model for elastoplastic materials*. *J. of Materials Engineering and Performance*, 2019, Vol.12, No.28, Pp.7342-7346.
8. Golovina N.Ya. *The nonlinear deformation curve model as a solution of the fourth order differential equation*. *Intern. J. of Pressure Vessels and Piping*, 2021, No.189, 104258.

9. Golovina N.Ya., Belov P.A. *Krivaya deformirovaniya kak ehkstremaal' nekotorigo funktsionala [Stress-strain curve as extremal of some functional]*. Nauka i biznes: puti razvitiya, 2019, No.10(100), Pp.44-52.
10. Golovina N.Ya., Belov P.A. *Model' krivoj nelinejnogo deformirovaniya stali 20KhGR i stali 35 [Model of a curve of nonlinear deformation of steel 20XTP and steel 35]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2020, Vol.82, No.3, Pp.305-316.
11. Real E., Arrayago I., Mirambell E., Westeel R. *Comparative study of analytical expressions for the modelling of stainless steel behavior*. Thin-Walled Structures, 2014, Vol.83, Pp.2-11.
12. Golovina N.Ya. *Ob odnoj ehmpiricheskoy modeli nelinejnogo deformirovaniya uprugoplasticheskikh materialov [On one empirical model of nonlinear deformation of elastoplastic materials]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov ChEhS, 2020, Vol.17, No.3, Pp.48-55.
13. Quach W.M., Huang J.F. *Stress-strain models for light gauge steels*. Procedia Engineering, 2011, No.14, Pp.288-296.
14. Quach W.M., Teng J.G., Chung K.F. *Three-stage full-range stress-strain model for stainless steels*. J. of Structural Engineering, 2008, No.134, Pp.1518-1527.
15. Quach W.M., Huang J.F. *Two-stage stress-strain models for light-gauge steels*. Advances in Structural Engineering, 2014, Vol.17, No.7, Pp.937-949.
16. Abdella K. *Inversion of a full-range stress-strain relation for stainless steel alloys*. J. of Non-Linear Mechanics, 2006, No.41, Pp.456-463.
17. Golovina N.Ya. *Sravnitel'nyj analiz modelej resursa plastichnykh materialov [Comparative analysis of resource models of plastic materials]*. XII Vserossijskij s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki, Sbornik trudov, V 4-kh tomakh, Ufa, RITS BashGU, 2019, Vol.3, Pp.611-613.
18. Li T., Zheng J., Yi Chen Z. *Description of the behavior of steel in strain hardening in the entire range*. Springer Plus, 2016, No.5, Pp.1316-1328.
19. Rasmussen K. *Full range stress-strain curves for stainless steel alloys*. Journal of Constructional Steel Research, 2003, No.59(1), Pp.47-61.
20. Ramberg W., Osgood W.R. *Description of stress-strain curves by three parameters*. National Advisory Committee For Aeronautics, Technical Note, No.902, Washington DC, 1943, 29 p.

*Поступила в редакцию 08 января 2021 года.*

---

Сведения об авторах:

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [belovpa@yandex.ru](mailto:belovpa@yandex.ru)  
 Головина Наталья Яковлевна – к.т.н., доц., ФГБОУ ВО Тюменский индустриальный университет, г. Тюмень, Россия; e-mail: [golovinanj@tyuiu.ru](mailto:golovinanj@tyuiu.ru)