



УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОСТИ ДИАГРАММЫ ПЕРЕХОДА И ИЗМЕНЕНИЯ УПРУГОГО МОДУЛЯ ВО ВНЕШНИХ СЛОЯХ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ И ВЯЗКОУПРУГИМ ВНУТРЕННИМ СЛОЕМ*

Мовчан А.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается процесс деформирования трехслойной полосы с внешними слоями из сплава с памятью формы (СПФ) и внутренним вязкоупругим слоем при нагревании одного из внешних слоев через интервал температур обратного термоупругого фазового превращения. Толщина внутреннего слоя в 8 раз превосходит толщину внешних слоев, мгновенный модуль материала внутреннего слоя составляет менее одной десятой от мартенситного значения модуля Юнга СПФ, но более чем в 6 раз превосходит значение длительного модуля материала внутреннего слоя. Перед созданием пакета материал внешних слоев находится в полностью мартенситном фазовом состоянии с одинаковой заданной фазово – структурной деформацией.

В отличие от известного аналога в данной работе учитывается нелинейность диаграммы фазового превращения и изменение упругих модулей СПФ при фазовом переходе. Задача решена полуобратным методом в предположении о линейном распределении продольных деформаций по толщине внутреннего слоя. Математически проблема сведена к разрешающей системе двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами относительно безразмерных параметров распределения продольных напряжений в вязкоупругом слое. Исследована зависимость напряжений во внешних и внутреннем слоях, кривизны полосы и ее средней продольной деформации от скорости нагрева активного слоя, вычисленной по приведенному времени, равному отношению физического времени к времени релаксации материала вязкоупругого слоя. Установлено, что с ростом скорости нагрева увеличивается влияние на искомые величины переменности модуля Юнга внешних слоев при фазовом переходе. Обнаружен эффект немонотонного изменения напряжений во всех слоях при монотонном нагреве, связанный с нелинейностью диаграммы фазового перехода.

Ключевые слова: сплав с памятью формы; обратное превращение; переменность упругого модуля; нелинейная диаграмма перехода; вязкоупругий слой; стандартное линейное тело; трехслойная полоса

TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEARITY OF THE TRANSITION DIAGRAM AND CHANGES IN THE ELASTIC MODULUS IN THE OUTER LAYERS OF A THREE-LAYER STRIP WITH SHAPE MEMORY ALLOY OUTER LAYERS AND A VISCOELASTIC INNER LAYER

* Работа выполнена в рамках госбюджетной темы, государственная регистрация номер 121112200126-5.

Movchan A.A.

Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Science, Moscow, Russia

ABSTRACT

The process of deformation of a three-layer strip with external layers of shape memory alloy (SMA) and an internal viscoelastic layer is considered when one of the outer layers is heated through the temperature range of the reverse thermoelastic phase transformation. The thickness of the inner layer is 8 times greater than the thickness of the outer layers, the instantaneous modulus of the inner layer material is less than one tenth of the martensitic value of the Young's modulus of the SMA, but more than 6 times greater than the value of the long-term modulus of the inner layer material. Before creating the package, the material of the outer layers is in a completely martensitic phase state with the same specified phase – structural deformation.

In contrast to the known publication, this work takes into account the nonlinearity of the phase transformation diagram and the change in the elastic modulus of the SMA during the phase transition. The problem is solved by the semi-inverse method under the assumption of a linear distribution of longitudinal deformations over the thickness of the inner layer. Mathematically, the problem is reduced to a resolving system of two ordinary linear differential equations of the first order with variable coefficients with respect to dimensionless parameters of the longitudinal stress distribution in inner layer. The dependence of the stresses in the outer and viscoelastic inner layers, the curvature of the strip and its average longitudinal deformation on the heating rate of the active layer calculated from the reduced time equal to the ratio of physical time to the relaxation time of the viscoelastic layer material is investigated. It is established that with an increase in the heating rate, the influence on the desired values of the variability of the Young's modulus of the outer layers during the phase transition increases. The effect of non-monotonic stress variation in all layers under monotonic heating is found, associated with the nonlinearity of the phase transition diagram.

Keywords: shape memory alloy; reverse transformation; elastic modulus variability; nonlinear transition diagram; viscoelastic layer; standard linear body; three-layer strip

ВВЕДЕНИЕ

В качестве материалов рабочих тел датчиков температуры и термореле чаще всего используются биметаллические пластинки, составленные из металлов с различными коэффициентами температурной деформации. Сравнению характеристик биметаллических упругих тел и аналогичных изделий, содержащих элементы из сплавов с памятью формы, посвящена работа [1]. Обратимые термоупругие деформации большинства металлов ограничены величиной порядка 0,1%, что существенно уменьшает прогибы (рабочий ход) соответствующего устройства. Такие жесткие ограничения не характерны для двухслойных или трехслойных пластин (полос), содержащих слои из сплава с памятью формы и вязкоупругие полимерные слои, поскольку возвращаемые при нагреве деформации такого СПФ, как никелид титана могут достигать до 8%, возвращаемые со временем после разгрузки деформации полимеров, находящихся в высокоэластическом состоянии, могут быть еще на порядок выше. Поэтому проблема разработки методов теоретического анализа термомеханического поведения двухслойных и трехслойных полос и пластин со слоями из СПФ и слоями из вязкоупругих полимеров является актуальной в прикладном отношении.

Определению напряженно-деформированного состояния и смещений трехслойных оболочек, пластин и балок (полос) состоящих из упругих или упруго-пластических (не функциональных) материалов посвящены работы [2-4]. Теоретический анализ поведения слоистых элементов, слои которых выполнены из сплавов с памятью формы или вязкоупругих полимерных материалов затруднен в связи с необходимостью учета сложных термомеханических свойств СПФ [5-8] и реономного поведения полимеров [9-12]. Так, в силу нелинейного характера зависимости объемной доли мартенситной фазы СПФ от температуры [13], фазовая деформация этих материалов даже для простейшего случая обратного превращения в отсутствие структурного перехода зависит от температуры нелинейно. Дополнительные нелинейности возникают при учете переменности упругих модулей СПФ при фазовых переходах [14-19].

Поведение композиционных материалов с волокнами из СПФ и упругим связующем анализировалось в работах [20-23], пластические свойства связующего учитывались в [24], вязкие свойства связующего таких композитов рассматривались в [25], случай вязкоупругого связующего в таких композитах рассматривался в [26,27]. Задача о поведении трехслойной полосы с внешними слоями из никелида титана и упругим внутренним слоем аналитически решена в [21]. Аналогичная проблема с учетом вязкоупругих свойств внутреннего слоя рассмотрена в [28] в простейшей постановке без учета изменения упругих модулей СПФ при фазовых переходах и предположении о линейной зависимости объемной доли мартенситной фазы СПФ от температуры. Эти упрощения позволили получить аналитическое решение соответствующей задачи.

Известно, однако, что упругие модули многих СПФ при фазовых переходах меняются весьма существенно. Так, по некоторым данным модуль Юнга никелида титана при обратном переходе из мартенситного состояния в аустенитное может увеличиться в 3 и более раз [18,19]. Диаграмма зависимости объемной доли мартенситной фазы от температуры в точках начала и конца фазового перехода имеет, согласно известной аппроксимации диаграммы фазового перехода [13], касательные с нулевым наклоном по отношению к оси температур, а в центральной точке фазового перехода (точке перегиба) направление этой касательной близко к вертикальному. Поэтому аналитическое решение, полученное в [28] в рамках принятых там достаточно грубых гипотез, может быть рассмотрено лишь как первое, самое грубое приближение.

Целью настоящей работы является решение задачи о поведении трехслойной полосы с тонкими внешними слоями из СПФ и вязкоупругим внутренним слоем при обратном термоупругим фазовом превращении в одном из внешних слоев, учитывающее, в отличие от постановки задачи в [28], нелинейность диаграммы фазового перехода и существенные изменения модуля Юнга при таком превращении. Следовало определить, насколько сильно учет этих эффектов меняет решение соответствующей задачи.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННЕГО СЛОЕВ

Внешние слои полосы выполнены из сплава с памятью формы типа никелида титана. Материал слоев подчиняется системе определяющих соотношений объединенной модели деформирования СПФ [29-32]. Предполагается, что напряжения в этих слоях в рассматриваемом процессе

не достигают поверхности нагружения для структурного механизма деформирования, соответствующей окончанию процесса задания внешним слоям начальной фазово-структурной деформации. В случае задания начальной деформации ε_0 с помощью процесса полного прямого термоупругого мартенситного превращения под действием постоянного напряжения (состояние одноосного растяжения), значение напряжения начала структурного превращения σ^{st} при последующем обратном превращении, согласно последней версии объединенной модели [32], описывающей эффект перекрестного упрочнения СПФ [33,34] и подтвержденной экспериментальными данными [35], определяется по формуле

$$\sigma^{st} = \sigma_{20} \Phi_2^{-1}(\varepsilon_0 / \rho_{D2}) \quad (1.1)$$

В (1.1) за Φ_2^{-1} обозначается функция, обратная функции Φ_2 , определяющей диаграмму мартенситной неупругости СПФ при одноосном растяжении, имеющей уравнение $\varepsilon^{st} = \rho_{D2} \Phi_2(\sigma / \sigma_{20})$.

Одномерный вариант определяющих соотношений для обратного превращения в СПФ в условиях выполнения ограничения

$$\sigma \leq \sigma_{20} \Phi_2^{-1}(\varepsilon_0 / \rho_{D2}) \quad (1.2)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^{ph}, \\ \varepsilon^{ph} &= q \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)}, \quad \frac{1}{E(q)} = \left(\frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A} \right), \quad (1.4)$$

$$q = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(\pi \frac{A_f - T}{A_f - A_s} \right) \right). \quad (1.5)$$

Здесь σ , ε , ε^e , ε^{ph} – напряжение, полная, упругая и фазовая деформации (чисто температурной деформацией в силу ее малости пренебрегается); q – объемная доля мартенситной фазы; $E(q)$, E_M , E_A – величина модуля Юнга СПФ, зависящая от параметра фазового состава q , а также значения этого модуля в мартенситном и аустенитном состояниях соответственно; T , A_f , A_s – температура СПФ и значения этой температуры, соответствующие окончанию и началу обратного термоупругого фазового превращения, соответственно. Задача решается в несвязанной постановке. Поэтому влияние действующих напряжений на характерные температуры фазового перехода не учитываются.

Использование зависимости модуля Юнга от параметра фазового состава (1.4), рекомендуемой в [36,37] и проверенной экспериментально в [38] отличает постановку задачи в данной работе от использованной в [28], где зависимость модуля Юнга СПФ от параметра фазового состава не учитывалась. То же самое относится к использованию в данной работе предложенной в [13] нелинейной зависимости (1.5) для описания диаграммы фазового перехода, поскольку в [28] использовалось простейшее линейное соотношение $q = (A_f - T) / (A_f - A_s)$.

Для описания поведения внутреннего вязкоупругого слоя используется модель Кельвина–Фойгхта [9,10,39], которая является простейшей моделью, качественно правильно описывающей основные механические свойства

вязкоупругих полимеров, а именно, ограниченную ползучесть под действием постоянного напряжения, релаксацию напряжений до ненулевого значения в состоянии фиксированной деформации и релаксацию деформаций асимптотически до нулевого значения после опыта на ползучесть под действием постоянного напряжения и последующей полной разгрузки.

Дифференциальная формы определяющих соотношений модели Кельвина–Фойгхта имеет вид [39]

$$\dot{\sigma} + \lambda \sigma = E \left(\dot{\varepsilon} + \eta \varepsilon \right). \quad (1.6)$$

В (1.6) – точкой сверху обозначено дифференцирование по времени, σ , ε – напряжение и деформация в вязкоупругом слое, E – мгновенный модуль, $\lambda > \eta$ параметры материала. Величина длительного модуля E_∞ определяется по формуле $E_\infty = E\eta/\lambda$. Решение уравнения (1.6) относительно напряжения имеет вид

$$\sigma = E \left[\varepsilon - (\lambda - \eta) \int_0^t \varepsilon(\tau) \exp(-(t - \tau)/t_0) d\tau \right], \quad (1.7)$$

где величина характерного времени релаксации вычисляется по формуле $t_0 = 1/\lambda$. Далее будет использован безразмерный параметр времени $\tau = t/t_0$. В этом случае определяющее соотношение (1.6) принимает вид

$$\dot{\sigma} + \sigma = E \left(\dot{\varepsilon} + \gamma \varepsilon \right). \quad (1.8)$$

В (1.8) точкой сверху обозначено дифференцирование по приведенному времени τ , $\gamma = E_\infty/E = \eta/\lambda$.

2. РАССМАТРИВАЕМЫЙ ОБЪЕКТ И ПРИНИМАЕМЫЕ ГИПОТЕЗЫ

Подробно рассматриваемая трехслойная полоса описана в работе [28]. Предполагается, что для длины L и ширины b полосы, толщин h и H внешних и внутреннего слоев выполняются соотношения $L \gg b$, $H \gg h$, а величины b и H имеют один и тот же порядок. Материал внешних слоев находится в полностью мартенситном фазовом состоянии и имеет начальную продольную растягивающую фазово-структурную деформацию ε_0 . На границе между внешним и внутренним слоем требуется выполнение условия непрерывности продольных смещений. Внешние нагрузки на полосу не действуют, ее деформирование происходит вследствие нагрева одного из внешних слоев через интервал температур обратного термоупругого мартенситного превращения, вызывающего в этом слое деформацию сжатия эффекта памяти формы.

В соответствии с этими предположениями принимаются следующие гипотезы. Напряженное состояние во всех слоях считается одномерным, действует продольное нормальное напряжение. В тонких внешних слоях напряжения распределены по их толщине равномерно. Продольная деформация ε имеет линейное распределение по толщине внутреннего слоя

$$\varepsilon = \kappa z + \varepsilon^0 \quad (2.1)$$

В (2.1) z – координата по толщине внутреннего слоя, κ – аналог кривизны, ε^0 – средняя по толщине продольная деформации полосы. Подставляя распределение (2.1) в определяющее соотношение (1.7) можно получить

$$\sigma = \mu z + \sigma_0, \quad (2.2)$$

где

$$\sigma_0 = E \left[\varepsilon^0 - (\lambda - \eta) \int_0^t \varepsilon^0(\tau) \exp(-(t-\tau)/t_0) d\tau \right],$$

$$\mu^0 = E \left[\kappa - (\lambda - \eta) \int_0^t \kappa(\tau) \exp(-(t-\tau)/t_0) d\tau \right].$$

Таким образом, из гипотезы о линейном распределении деформаций в линейно-вязкоупругом слое и определяющих соотношений (1.7) следует положение о линейном распределении напряжений в том же слое (2.2).

С использованием условий равновесия при отсутствии внешних нагрузок и распределения напряжений (2.2) получаются следующие выражения напряжений σ_1 и σ_2 в верхнем и нижнем слоях из СПФ через параметры μ и σ_0 распределения напряжений во внутреннем слое [28]

$$\sigma_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu H}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\sigma_0}{\delta} \right), \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu H}{6\delta(1+\delta)} - \frac{\sigma_0}{\delta} \right). \quad (2.3)$$

Здесь введено обозначение $\delta = h/H$. Использование условия непрерывности продольных смещений на границе между слоями и гипотезы о линейном распределении деформаций по толщине внутреннего слоя позволяет выразить деформации ε_1 и ε_2 внешних активного и пассивного слоев через параметры распределения деформаций во внутреннем слое [28]

$$\kappa = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{H}, \quad \varepsilon^0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}. \quad (2.4)$$

3. ПРОЦЕСС ОБРАТНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Процесс сводится к нагреву и соответствующему обратному превращению в первом активном слое при условии неизменной температуры и мартенситного фазового состояния второго активного слоя. На этапе процесса нагрева и обратного превращения, предполагается выполнение условия (1.2), структурного перехода нет, фазовая деформация активного слоя определяется формулой (1.3). Начальным состоянием для рассматриваемого процесса, в котором напряжения в элементах полосы отсутствуют, является состояние с начальной деформацией ε_0 во внешних слоях. Для правильного учета упругого эффекта деформации внешних слоев ε_1 , ε_2 должны отсчитываться именно от этого ненапряженного, но деформированного состояния. Поэтому для рассматриваемого процесса справедливы следующие соотношения, выражающие деформации слоев из СПФ через напряжения в этих слоях

$$\varepsilon_1 = \sigma_1 \left(\frac{q}{E_A} + \frac{1-q}{E_M} \right) + \varepsilon_0 q - \varepsilon_0, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_M}. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.4) получаем

$$\kappa = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{H} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{HE_M} - \frac{\Delta}{H}, \quad (3.2)$$

$$\varepsilon^0 = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2E_M} - \frac{\Delta}{2}, \quad (3.3)$$

$$\Delta = \sigma_1 \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) (1-q). \quad (3.4)$$

Подставляя (2.3) в (3.4) находим

$$\Delta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu H}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\sigma_0}{\delta} \right) \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) (1-q), \quad (3.5)$$

Подстановка (2.3) в (3.2) и (3.3) соответственно, дает

$$\kappa = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{H} - \frac{\mu}{6\delta(\delta+1)E_M} - \frac{\Delta}{H}, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^0 = -\frac{\varepsilon_0(1-q)}{2} - \frac{\sigma_0}{2\delta E_M} - \frac{\Delta}{2}. \quad (3.7)$$

Дифференцируя (3.5), (3.6) и (3.7) по приведенному времени получаем

$$\dot{\kappa} = \frac{\varepsilon_0 \dot{q}}{H} - \frac{\dot{\mu}}{6\delta(1+\delta)E_M} - \frac{\dot{\Delta}}{H}, \quad (3.8)$$

$$\dot{\varepsilon}^0 = \frac{\varepsilon_0 \dot{q}}{2} - \frac{\dot{\sigma}_0}{2\delta E_M} - \frac{\dot{\Delta}}{2}, \quad (3.9)$$

$$\dot{\Delta} = \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) \left(\dot{\sigma}_1(1-q) - \dot{q}\sigma_1 \right). \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) продифференцированное по приведенному времени выражения (2.3) находим

$$\dot{\Delta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_M} - \frac{1}{E_A} \right) \left[\left(\frac{H\dot{\mu}}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\dot{\sigma}_0}{\delta} \right) (1-q) + \dot{q} \left(\frac{H\mu}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\sigma_0}{\delta} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Подставляя сами формулы (2.1) и (2.2) и результаты их дифференцирования в вязкоупругое определяющее уравнение (1.8) внутреннего слоя и приравнявая свободные слагаемые правой и левой частей, а также коэффициенты при z правой и левой частей получаем

$$\dot{\mu} + \mu = E \left(\dot{\kappa} + \gamma \kappa \right), \quad (3.12)$$

$$\dot{\sigma}_0 + \sigma_0 = E \left(\dot{\varepsilon}^0 + \gamma \varepsilon^0 \right). \quad (3.13)$$

Подстановка в правую часть (3.12) выражения для κ (3.6) и $\dot{\kappa}$ (3.8) дает

$$\dot{\mu} + \mu = E_m \left[\frac{\varepsilon_0 \left(\dot{q} - \gamma(1-q) \right)}{H} - \frac{\dot{\mu} + \gamma\mu}{6\delta(\delta+1)E_M} \right] - \frac{E}{H} \left(\dot{\Delta} + \gamma\Delta \right). \quad (3.14)$$

Подставляя в правую часть (3.13) выражения для ε^0 (3.7) и $\dot{\varepsilon}^0$ (3.9) получаем

$$\dot{\sigma}_0 + \sigma_0 = E_m \left[\frac{\varepsilon_0 \left(\dot{q} - \gamma(1-q) \right)}{2} - \frac{\dot{\sigma}_0 + \gamma\sigma_0}{2\delta E_m} \right] - E_m \frac{\dot{\Delta} + \gamma\Delta}{2}. \quad (3.15)$$

Соотношения (3.14), (3.15) представляют собой систему двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций μ и σ_0 , некоторые коэффициенты которых являются функциями приведенного времени, а некоторые – постоянны. Поскольку величины Δ (3.5) и $\dot{\Delta}$ (3.11) зависят, как от μ так и от σ_0 , то система (3.14), (3.15) является, вообще говоря, связанной. Даже в случае, когда приведенная температура растет со временем линейно, но используется нелинейная аппроксимация зависимости q от T (1.5), функции зависимости коэффициентов системы от τ являются нелинейными.

Умножая (3.14) на H , деля на E_m и переходя к безразмерной искомой функции $M = H\mu/E$ получаем

$$\dot{M} + M = \varepsilon_0 \left(\dot{q} - \gamma(1-q) \right) - e_1 \left(\dot{M} + \gamma M \right) - \left(\dot{\Delta} + \gamma\Delta \right). \quad (3.16)$$

Здесь $e_1 = \frac{E}{6E_m\delta(1+\delta)}$. Умножая (3.15) на 2, деля на E и переходя к безразмерной искомой функции $S = 2\sigma_0/E$ получаем

$$\dot{S} + S = \varepsilon_0 \left(\dot{q} - \gamma(1-q) \right) - e_2 \left(\dot{S} + \gamma S \right) - \left(\dot{\Delta} + \gamma\Delta \right). \quad (3.17)$$

Здесь $e_2 = \frac{E}{2E_m\delta}$. Вычитая (3.17) из (3.16) получаем для неизвестных функций M и S

$$(1+e_1)\dot{M} - (1+e_2)\dot{S} = -(1+\gamma e_1)M + (1+\gamma e_2)S. \quad (3.18)$$

После введения обозначений $a_{11} = 1+e_1$, $a_{12} = -(1+e_2)$, $b_{11} = -(1+\gamma e_1)$, $b_{12} = 1+\gamma e_2$ уравнение (3.18) принимает вид

$$a_{11}\dot{M} + a_{12}\dot{S} = b_{11}M + b_{12}S = b_1(M, S). \quad (3.19)$$

Уравнение (3.19) является однородным линейным уравнением с постоянными коэффициентами относительно двух неизвестных функций S и M .

В процессе обратного термоупругого фазового превращения предполагается линейное по приведенному времени возрастание температуры от значения A_s до A_f

$$T = A_s + (A_f - A_s)\xi, \quad \xi = \tau/\Delta\tau. \quad (3.20)$$

В (3.20) $\Delta\tau$ продолжительность процесса нагрева и полного обратного превращения, выраженная в приведенном времени τ . Подставляя (3.20) в (1.5) получаем

$$q = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\xi)), \quad \dot{q} = -\frac{1}{2} \frac{\pi}{\Delta\tau} \sin\left(\pi\xi \frac{\tau}{\Delta\tau}\right). \quad (3.21)$$

Согласно (3.4) и (3.21)

$$\dot{\Delta} + \eta\Delta = -\frac{1}{4} \frac{E_A - E_M}{E_A E_M} \left\{ f_1(\xi) \left[\frac{H(\dot{\mu} + \gamma\mu)}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\dot{\sigma}_0 + \gamma\sigma_0}{\delta} \right] - f_2(\xi) \left(\frac{H\mu}{6\delta(1+\delta)} + \frac{\sigma_0}{\delta} \right) \right\}.$$

Здесь введены обозначения $f_1(\xi) = 0.5(1 - \cos \pi\xi)$, $f_2(\xi) = \pi \sin(\pi\xi)/\Delta\tau$. Переходя к введенным ранее безразмерным переменным M , S получаем

$$\dot{\Delta} + \gamma\Delta = -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{E_M}{E_A}\right) \left\{ f_1(\xi) \left[e_1(\dot{M} + \gamma M) + e_2(\dot{S} + \gamma S) \right] - f_2(\xi)(e_1 M + e_2 S) \right\}.$$

Подставляя это соотношение в (3.16) находим

$$(1 + e_1)\dot{M} + (1 + \gamma e_1)M = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 [f_2(\xi) - \gamma f_1(\xi)] + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{E_M}{E_A}\right) \left\{ f_1(\xi) \left[e_1(\dot{M} + \gamma M) + e_2(\dot{S} + \gamma S) \right] + f_2(\xi)(e_1 M + e_2 S) \right\}.$$

Это уравнение записывается в форме

$$a_{21}\dot{M} + a_{22}\dot{S} = b_{20} + b_{21}M + b_{22}S = b_2(M, S, \tau). \quad (3.22)$$

Здесь

$$a_{21} = 1 + e_1 - E_1 f_1(\xi), \quad a_{22} = -E_2 f_1(\xi), \quad b_{20} = -\frac{\varepsilon_0}{2}(f_1(\xi) + f_2(\xi)), \quad b_{21} = -1 - \gamma e_1 + E_1 f_3(t),$$

$$b_{22} = E_2(\gamma f_1(\xi) - f_2(\xi)), \quad E_1 = \frac{e_1}{4} \left(1 - \frac{E_M}{E_A}\right), \quad E_2 = \frac{e_2}{4} \left(1 - \frac{E_M}{E_A}\right).$$

Решение системы (3.19), (3.22) относительно скоростей изменения M и S имеет вид

$$\dot{M} = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad \dot{S} = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \quad (3.23)$$

Соотношения (3.23) представляют собой разрешающую систему двух обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами рассматриваемой задачи об обратном превращении в верхнем активном слое с учетом переменности упругих модулей СПФ и нелинейности диаграммы фазового перехода СПФ. Эта система должна решаться при нулевых начальных условиях: $M(0) = 0$, $S(0) = 0$.

4. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ

Далее приведены графики зависимостей искомых величин: σ_1 , σ_2 , ε^0 , безразмерной кривизны $H\kappa$, а также максимального по модулю напряжения в среднем слое σ_{\max} , достигаемого на его поверхности, ближайшей к активному внешнему слою, от температуры T для следующих значений параметров полосы и материалов, из которых она состоит: $\delta = 0.125$, $E_M = 28000$ МПа,

$E_A = 84000$ МПа, $A_s = 50^\circ\text{C}$, $A_f = 70^\circ\text{C}$, $E = 2500$ МПа, $\gamma = 0.16$. Ниже сравниваются результаты, получающиеся при различных скоростях процесса нагрева, которые определяются значением параметра $\Delta\tau$. Напряжения на всех рисунках приведены в единицах МПа, температуры в градусах Цельсия.

Все результаты получены для значения начальной деформации активного слоя $\varepsilon_0 = 6\%$. При вычислении значения σ^{st} (1.1) использовались полученные в [40] экспериментальные данные по мартенситной неупругости плюшинки из никелида титана, вполне пригодной для создания активных слоев рассматриваемой трехслойной полосы. Показано, что наилучшей из рассмотренных в [40] аппроксимаций диаграммы мартенситной неупругости никелида титана является аппроксимация, использующая интегральную функцию γ -распределения

$$\varepsilon^{st} = \rho_{D2} \Phi_2(\sigma, \alpha, \sigma_{20}), \quad \Phi_2(\sigma, \alpha, \sigma_{20}) = \varphi(\sigma/\sigma_{20}, \alpha), \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt. \quad (4.2)$$

В (4.2) $\Gamma(\alpha)$ – γ -функция. В [40] методом наименьших квадратов найдены следующие параметры аппроксимации (4.1): $\rho_{D2} = 0.0608$, $\alpha = 6.45$, $\sigma_{20} = 27.4$ МПа. Результаты вычислений по формуле (1.1) для $\varepsilon_0 = 0.06$ с использованием функции (4.1) и этих значений параметров, для напряжения начала структурного перехода дают

$$\sigma^{st} = 250 \text{ МПа}. \quad (4.3)$$

На рис.1 приведены графики зависимости безразмерной кривизны полосы H/R (R – радиус кривизны) от температуры для скорости нагрева, соответствующей $\Delta\tau = 0.04$, когда время полного обратного превращения составляет $1/25$ от времени релаксации материала внутреннего слоя. Нижняя и верхняя кривые относятся к решениям с постоянным значением модуля Юнга СПФ, равным, соответственно E_A и E_M .

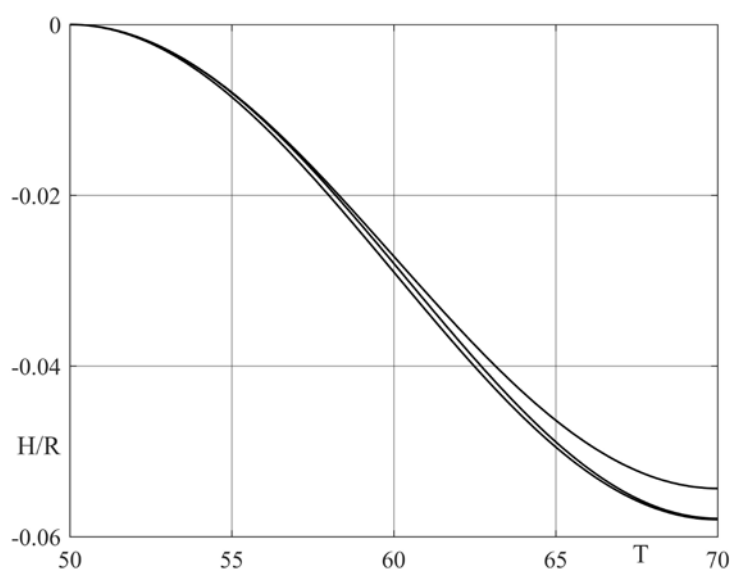


Рис.1.

Средняя кривая соответствует решению, полученному с учетом переменности этого модуля. Для значений температуры, близких к A_s , эта кривая примыкает к графику, соответствующему $E = E_M$, а для температур, близких к A_f , выходит на кривую, соответствующую $E = E_A$.

На рис.2 приведены графики, аналогичные изображенным на рис.1, но построенные для $\Delta\tau = 4$, т.е. для скорости нагрева в 100 раз меньшей. Как видно, с уменьшением скорости нагрева влияние значения модуля Юнга и учет изменения этого модуля при фазовом переходе на кривизну полосы уменьшается.

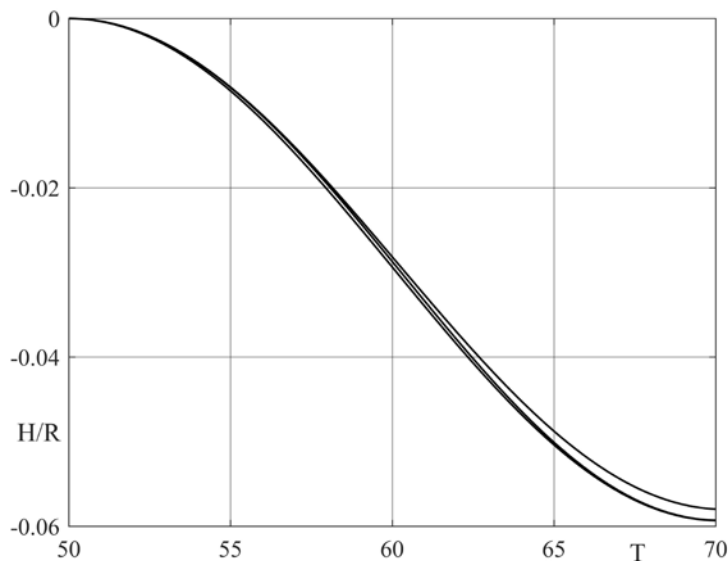


Рис.2.

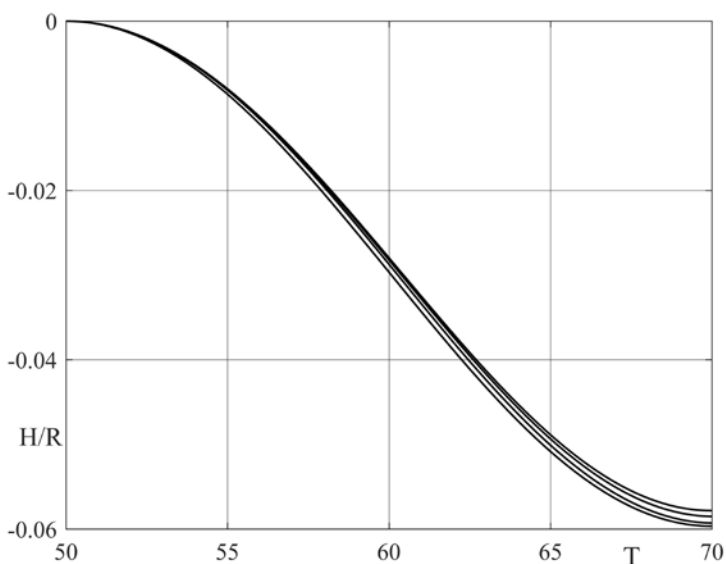


Рис.3.

На рис.3 изображены графики зависимости безразмерной кривизны от температуры, полученные с учетом переменности упругих модулей СПФ. Кривые снизу вверх соответствуют значениям $\Delta\tau = 400, 4, 2, 0.0004$. Согласно рис.3, с ростом скорости нагрева (уменьшением $\Delta\tau$) кривизна для любого фиксированного значения температуры несколько уменьшается, однако это изменение весьма незначительно. Наибольшее влияние скорости нагрева

на кривизну при полном обратном превращении в активном слое из СПФ наблюдается для величин продолжительности нагрева, соизмеримых с временем релаксации вязкоупругого материала среднего слоя. Так, изменение кривизны, связанное с увеличением $\Delta\tau$ от $\Delta\tau=1$ до $\Delta\tau=4$ составляет около половины всего роста кривизны, соответствующего росту $\Delta\tau$ на 5 порядков от $\Delta\tau=0.0004$ до $\Delta\tau=400$. Интересно отметить, что модуль безразмерной кривизны ограничен сверху значением 0.06, равным деформации ϵ_0 , заданной верхнему активному слою перед совмещением с остальными двумя слоями и приближается к этому значению с ростом времени нагрева.

Аналогично изменяется с изменением времени нагрева и упругого модуля активного слоя средняя деформация полосы ϵ^0 . Величина ϵ^0 является сжимающей, модуль этой деформации растет с ростом продолжительности нагрева активного слоя. Этот факт иллюстрируется на рис.4, где кривые снизу вверх соответствуют тем же, что и на рис 3 значениям $\Delta\tau$. С ростом скорости процесса нагрева средняя деформация, при прочих равных условиях убывает, причем скорость убывания средней деформации выше, чем скорость убывания безразмерной кривизны в тех же условиях.

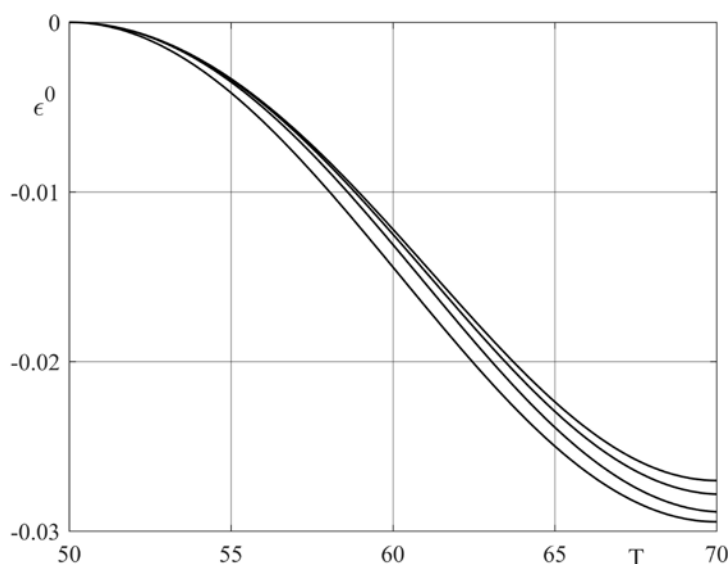


Рис.4.

На рис.5 изображены графики зависимости от температуры напряжений в верхнем σ_1 и нижнем σ_2 слоях из СПФ для продолжительности процесса нагрева $\Delta\tau=4$. Верхняя кривая в каждой из двух групп соответствует решению при постоянной величине модуля Юнга СПФ, равной аустенитному значению E_A , нижняя получена в случае решения при постоянной величине этого модуля, равной мартенситному значению E_M , каждая из средних кривых соответствует решению, полученному с учетом переменности модуля Юнга СПФ при фазовом переходе. Согласно рис.5 оба напряжения являются растягивающими, но величина напряжения в активном слое почти в 2 раза больше, чем в пассивном.

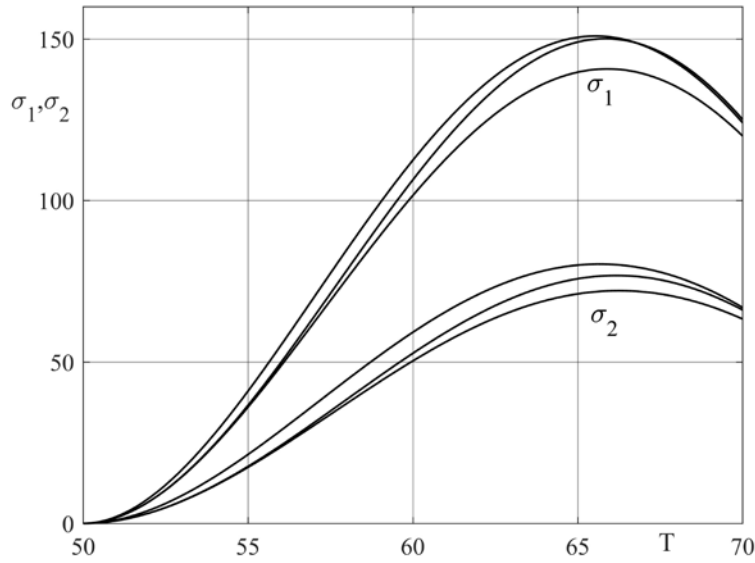


Рис.5.

На рис.6 приведены, полученные с учетом переменности модуля Юнга СПФ, графики зависимости напряжений σ_1 в активном слое от температуры при его нагревании с различными скоростями. Относительное значение продолжительности нагрева указано у каждой кривой. Как следует из рис.5, с ростом скорости нагрева (уменьшение $\Delta\tau$) напряжения σ_1 существенно возрастают, причем наиболее резкое возрастание происходит в районе $\Delta\tau \approx 1$, когда время полного нагрева коррелирует со временем релаксации вязкоупругого материала среднего слоя. Таким образом, для изменения напряжения σ_1 при изменении скорости нагрева характерна тенденция, противоположная той, которая наблюдается для кинематических величин Hk и ε^0 , причем количественно зависимость σ_1 от скорости нагрева значительно более сильная, чем та, которая характерна для Hk и ε^0 . Влияние учета переменности модуля Юнга на σ_1 также возрастает с ростом скорости нагрева.

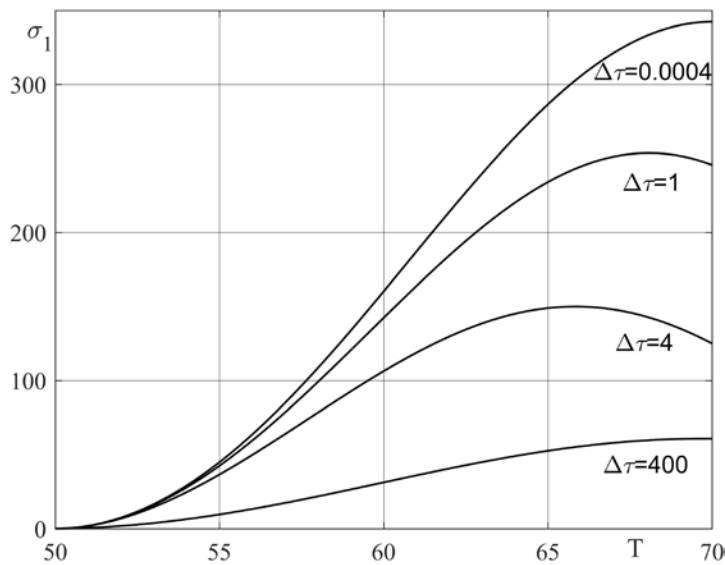


Рис.6.

Полученные в результате решения задачи без учета структурного превращения результаты справедливы до тех пор, пока для напряжений в слоях из СПФ выполняется условие (1.2), которое, согласно (4.3) сводится к ограничению $\sigma_1 \leq 250$ МПа. Сопоставляя полученное значение σ^{st} (4.3) и данные рис.6 можно утверждать, что это решение является корректным для продолжительности нагрева $\Delta\tau \geq 1$. При решении для более высоких скоростей нагрева необходимо учитывать эффект структурного превращения в активном слое из СПФ.

Как для самых высоких из всех рассмотренных скоростей нагрева, так и для самых низких скоростей наблюдается монотонное возрастание напряжения σ_1 с ростом температуры активного слоя, т.е. при реализации эффекта памяти формы. Необычным кажется факт немонотонности соответствующих графиков, построенных для промежуточных скоростей нагрева. Этот эффект не проявляется при решении задачи, полученном в [28], для линейной аппроксимации диаграммы перехода, согласно которой скорость изменения параметра фазового состава одинакова во всех точках фазового перехода.

Обнаруженный эффект уменьшения σ_1 с ростом температуры активного слоя во второй половине процесса нагружения качественно объясняется следующим образом. В процессе деформирования внешнего активного слоя, связанного с эффектом памяти формы, растет деформация жестко связанного с активным слоем промежуточного слоя из вязкоупругого материала. В результате в вязкоупругом слое генерируются напряжения, которые уравниваются напряжениям σ_1 в активном слое. При моделировании реальной нелинейной диаграммы термоупругого мартенситного превращения зависимостью (1.5), скорость изменения q с изменением температуры максимальна в средней точке интервала температур перехода и резко уменьшается во второй половине процесса, стремясь к нулю при $T \rightarrow A_f$. При этом скорость изменения фазовых деформаций ε^{ph} в активном слое также уменьшается, стремясь к нулю. В силу выполнения условий совместного деформирования активного слоя и внешней поверхности вязкоупругого слоя деформации вязкоупругого слоя претерпевает аналогичное уменьшение. Но в вязко-упругом материале резкое уменьшение скорости роста деформаций может привести к падению напряжений (при уменьшении скорости деформации до нуля наблюдается эффект релаксация напряжений)! В силу условий равновесия, уменьшается и напряжение σ_1 .

На рис.7 приведены графики зависимости напряжения σ_2 в пассивном слое из СПФ, полученные для различных значений относительной продолжительности процесса нагрева $\Delta\tau$, с учетом переменности упругих модулей СПФ. Согласно этим данным, с ростом скорости нагрева наблюдается более чем 4-кратный рост σ_2 . Тем не менее, напряжения в пассивном слое при прочих равных условиях примерно в 2 раза ниже, чем в активном, поэтому критическое значение (4.3) в пассивном слое не достигается даже при предельно быстрых процессах нагрева. Для средних значений продолжительности нагрева наблюдается немонотонное изменение напряжения σ_2 с ростом температуры, связанное с теми же обстоятельствами, что и аналогичный эффект для напряжения σ_1 .

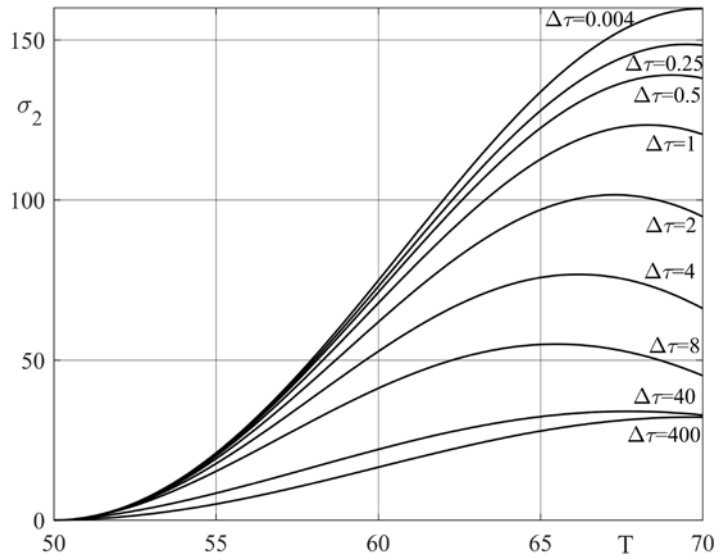


Рис.7.

На рис.8 изображены графики зависимости максимальных по модулю напряжений σ_{\max} в промежуточном вязкоупругом слое от температуры активного слоя при нагреве последнего через интервал температур обратного термоупругого мартенситного превращения. Три нижние кривые построены для одной и той же весьма малой продолжительности процесса нагрева $\Delta\tau = 0.004$, причем промежуточная из этих трех кривых соответствует учету переменности модуля Юнга СПФ, нижняя – постоянному модулю, соответствующему аустенитному значению СПФ, а верхняя – мартенситному значению модуля. Эти значения напряжения наблюдаются вблизи границы вязкоупругого слоя с активным слоем из СПФ и являются сжимающими. Поскольку напряжения в активном слое являются растягивающими, то продольное напряжение терпит на этой границе разрыв первого рода.

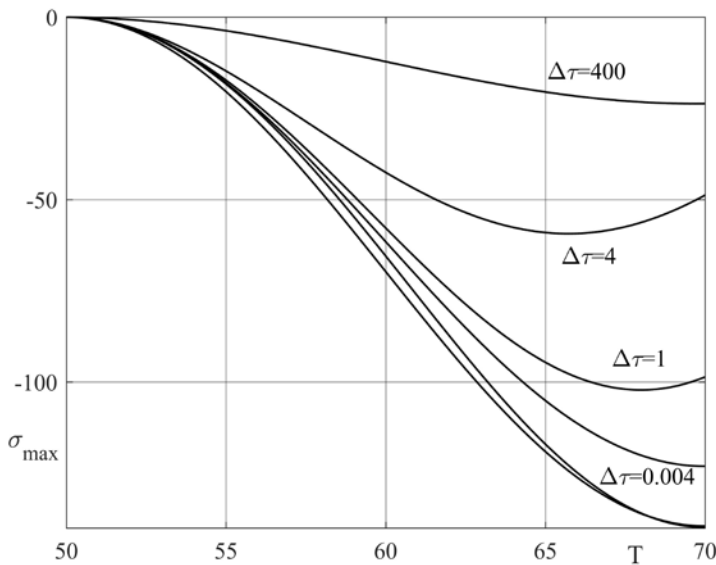


Рис.8.

Как видно, модуль σ_{\max} резко возрастает с ростом скорости нагрева и для высоких скоростей достигает весьма высоких значений порядка 140 МПа.

Поэтому возникает проблема выбора полимера для промежуточного слоя, который должен выдерживать столь высокие сжимающие нагрузки. Напряжения в вязкоупругом слое на границе с пассивным слоем из СПФ являются растягивающими, и весьма малы по величине (для самых быстрых процессов не превосходят 15 МПа).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведено решение задачи о напряженно-деформированном состоянии трехслойной полосы с внешними слоями из СПФ и вязкоупругим промежуточным слоем при нагреве одного из внешних слоев через интервал температур обратного термоупругого фазового превращения. В отличие от известного аналога [28] учитывается эффект изменения модуля Юнга СПФ при фазовом переходе и нелинейность диаграммы фазового превращения СПФ.

Обнаружен связанный с нелинейностью диаграммы перехода эффект немонотонного изменения напряжений во всех слоях полосы при монотонном нагреве активного слоя и промежуточных значениях скорости нагрева.

Констатируется незначительное увеличение кинематических характеристик полосы (кривизны и средней осевой деформации) с уменьшением скорости нагрева и противоположная тенденция резкого (многократного) роста напряжений во всех слоях трехслойной полосы с ростом скорости нагрева. Наибольшие скорости этих изменений наблюдаются в диапазоне продолжительности нагрева, сравнимой с временем релаксации вязкоупругого материала внутреннего слоя. При проектировании таких полос выполнение условий прочности всех элементов полосы следует проверять для наибольших скоростей нагрева, предполагаемых в изделии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tautzenberger P., Rau G. *Thermal actuators: A comparison of shape memory alloys with thermoelastic bimetalls and wax actuators* / In: Duerig T.W., Melton K.N., Stockel D., Wayman C.M. "Engineering aspects of shape memory alloys". Butterworth-Heinemann Ltd. – 1990. – Pp.207-218.
2. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму* // Прикладная математика и механика. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.
3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
4. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.58-73.
5. Лихачев В.А. *Материалы с эффектом памяти формы: Справочное издание. Т.2.* – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 374 с.
6. Лихачев В.А., Малинин В.Г. *Структурно-аналитическая теория прочности.* – СПб.: Наука, 1993. – 471 с.

7. Lagoudas D. C. (Editor). *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. Department of Aerospace Engineering Texas A&M University College Station TX, USA, 2008. – 446 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
8. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook*. London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013. – 379 p.
9. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
10. Бленд Д.Р. *Теория линейной вязкоупругости*. – М.: Мир, 1965. – 200 с.
11. Кацнельсон М.Ю., Балаев Г.А. *Полимерные материалы. Свойства и применение*. – Л.: Химия, 1982. – 317 с.
12. Люкшин Б.А., Панин С.В., Корниенко Л.А., Люкшин П.А., Бочкарева С.А., Матолыгина Н.Ю., Гришаева Н.Ю., Реутов Ю.Я., Шилько С.В., Машков Ю.К., Плескачевский Ю.М., Кропотин О.В., Черноус Д.А. *Дисперсно-наполненные полимерные композиты технического и медицинского назначения*. – М.: Изд-во СО РАН, 2017. – 311 с.
13. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
14. Ковнеристый Ю.К., Федотов С.Г., Матлахова Л.А., Олейникова С.В. *Эффекты запоминания формы и формообратимости сплава TiNi в зависимости от деформации* // Физика металлов и металловедение. – 1986. – Т.62. – Вып.2. – С.344-348.
15. Хачин В.Н., Гюнтер В.Э., Монасевич Л.А., Паскаль Ю.И. *Обратимые изменения формы при мартенситных превращениях* // Изв. вузов. Физика. – 1977. – №5. – С.95-101.
16. Корнилов И.И., Белоусов О.К., Качур Е.В. *Никелид титана и другие сплавы с эффектом «памяти»*. – М.: Наука, 1977. – 179 с.
17. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1998. – №1. – С.79-90.
18. Liu Y., Van Humbeeck J., Stalmans R., Delaey L. *Some aspects of the properties of TiNi shape memory alloys* // Journal Alloys and Compounds. – 1997. – Vol.247. – Pp.115-121.
19. Jacson C.M., Wagner H.J., Wasilewski R.J. *55-Nitinol - the alloy with a memory: Its physical metallurgy, properties and applications*. NASA-SP-5110. – 1972. – 91 p.
20. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates* / In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference. – 1989. – Part 4. – Pp.2011-2017.
21. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплавов с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №2. – С.29-48.
22. Viet N.V., Zaki W., Umer R. *Bending models for superelastic shape memory alloy laminated composite cantilever beams with elastic core layer* // Composites Part B: Engineering. – 2018. – Vol.147. – Pp.86-103.
23. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2001. – Vol.12. – No.11. – Pp.761-773.
24. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites* // International Journal of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.7029-7044.

25. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement* // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – Pp.1577-1594.
26. Мовчан А.А., Чернов М.И. *Влияние вязкоупругих свойств связующего на поведение однонаправленного композита с волокнами из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №3. – С.287-312.
27. Мовчан А.А., Чернов М.И. *Влияние скорости изменения температуры на напряженно-деформированное состояние и функциональные свойства композита с волокнами из сплава с памятью формы и вязко-упругим связующим* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №3. – С.313-338.
28. Мовчан А.А. *Трехслойная полоса с тонкими внешними слоями из сплава с памятью формы и вязкоупругим внутренним слоем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т. 28. – №4. – С.465-487.
29. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
30. Мовчан А. А. *Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Известия российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.140-151.
31. Мовчан А.А. *Объединенная модель фазово-структурного деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №11. – С.2-10.
32. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
33. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
34. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
35. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Влияние обратного термоупругого фазового превращения на напряжение начала структурного превращения в никелиде титана* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №10. – С.2-10.
36. Бречко Т.М., Лихачев В.А. *Моделирование эффекта памяти формы* / XXIV Всесоюзный семинар «Актуальные проблемы прочности». Механика прочности материалов с новыми функциональными свойствами. – Рубежное: Днепропетровский химико-технологический институт. – 1990. – С.57-60.
37. Lagoudas D.S., Bo Z., Quidwai M.A. *A unified thermodynamics constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites* // Mechanics of Composite Material and Structures. – 1996. – Vol.3. – Pp.153-179.
38. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное определение напряжения начала структурного перехода в никелиде титана после ориентированного превращения* // Деформация и разрушение материалов. – 2022. – №12. – С.2-9.

39. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел.* – М.: Наука, 1977. – 384 с.
40. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов.* – 2018. – №12. – С.2-11.

REFERENCES

1. Tautzenberger P., Rau G. *Thermal actuators: A comparison of shape memory alloys with thermoelastic bimetalls and wax actuators.* In: Duerig T.W., Melton K.N., Stockel D., Wayman C.M. “Engineering aspects of shape memory alloys”. Butterworth-Heinemann Ltd., 1990, Pp.207-218.
2. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm.* Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.1, Pp.76-87.
3. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhsloynnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.3, Pp. 419-434.
4. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izgib uprugoplasticheskoy krugovoy trekhsloynnoy plastiny so szhimayemym zapolnitelem [Bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.58-73.
5. Likhachev V.A. (Editor) *Materialy s ehffektom pamyati formy: Spravochnoe izdanie. Vol.2 [Materials with shape memory effect: Reference edition. Vol.2].* Sankt-Peterburg, Nauchno-issledovatel'skij institut khimii Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo universiteta, 1998, 374 p.
6. Lihachev V.A., Malinin V.G. *Strukturno-analiticheskaya teoriya prochnosti [Structural-analytical theory of strength].* Sankt-Peterburg, Nauka, 1993, 471 p.
7. Lagoudas D.C. (Editor). *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications.* Department of Aerospace Engineering Texas A&M University College Station TX, USA, 2008, 446 p. DOI: 10.1007/978-0-387-47685-8.
8. Lexcellent C. *Shape-memory alloys handbook,* London: ISTE Ltd and John Wiley & Sons Inc., 2013, 379 p.
9. Christensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An Introduction.* New York and London, Acadmic Press, 1971, 384 p.
10. Bland D.R. *The theory of Linear Viscoelasticity.* Oxford, 1960, 125 p.
11. Katsnelson M.Yu., Balaev G.A. *Polimernye materialy. Svoystva i primeneniye [Polymeric materials. Properties and applications].* Leningrad, Khimiya, 1982, 317 p.
12. Lyukshin B.A., Panin S.V., Kornienko L.A., Lyukshin P.A., Bochkareva S.A., Matolygina N.Yu., Grishaeva N.Yu., Reutov Yu.Ya., Shil'ko S.V., Mashkov Yu.K., Pleskachevskij Yu.M., Kropotin O.V., Chernous D.A. *Dispersno-napolnennyye polimernyye kompozity tekhnicheskogo i meditsinskogo naznacheniya [Dispersed-filled polymer composites for technical and medical purposes].* Moskva, Izdatel'stvo SO RAN, 2017, 311 p.
13. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials.* J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.

14. Kovneristyj Yu.K., Fedotov S.G., Matlahova L.A., Olejnikova S.V. *Ehffekty zapominaniya formy i formoobratimosti splava TiNi v zavisimosti ot deformatsii [Effects of the shape memory and reversibility of the TiNi alloy depending on the deformation]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.62, Iss.2, Pp.344-348.
15. Hachin V.N., Gyunter V.E., Monasevich L.A., Paskal' Yu.I. *Obratimye izmeneniya formy pri martensitnykh prevrashheniyakh [Reversible shape changes during martensitic transformations]*. Izvestiya vuzov. Fizika, 1977, No.5, Pp.95-101.
16. Kornilov I.I., Belousov O.K., Kachur E.V. *Nikelid titana i drugie splavy s ehffektom "pamyati" [Titanium nickelide and other alloys with the "memory" effect]*. Moskva, Nauka, 1977, 179 p.
17. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.
18. Liu Y., Van Humbeeck J., Stalmans R., Delaey L. *Some aspects of the properties of TiNi shape memory alloys*. Journal Alloys and Compounds, 1997, Vol.247, Pp.115-121.
19. Jacson C.M., Wagner H.J., Wasilewski R.J. *55-Nitinol - the alloy with a memory: Its physical metallurgy, properties and applications*. NASA-SP-5110, 1972, 91 p.
20. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates*. In: Proceeding of the 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, 1989, Part 4, Pp.2011-2017.
21. Movchan A.A. Kazarina S.A. *Mekhanika aktivnykh kompozitov, soderzhashhikh volokna ili sloi iz splavov s pamyat'yu formy [Mechanics of active composites, containing fibres or layers from shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1996, Vol.2, No.2, Pp.29-48.
22. Viet N.V., Zaki W., Umer R. *Bending models for superelastic shape memory alloy laminated composite cantilever beams with elastic core layer*. Composites Part B: Engineering, 2018, Vol.147, Pp.86-103.
23. Ghomshei M.M. *Finite Element Modeling of Shape Memory Alloy Composite Actuators: Theory and Experiment*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2001, Vol.12, No.11, Pp.761-773.
24. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.7029-7044.
25. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement*. International Journal of Solids and Structures, 2000, Vol.37, Pp.1577-1594.
26. Movchan A.A., Chernov M.I. *Vliyanie vyazkouprugikh svoystv svyazuyushhego na povedenie odnonapravlennoogo kompozita s voloknami iz splava s pamyat'yu formy [Nonlinear analysis of thermomechanical behavior of unidirectional composite with shape memory alloy fibers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.221-241.
27. Movchan A.A., Chernov M.I. *Vliyanie skorosti izmeneniya temperatury na napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i funktsional'nye svoystva kompozita s voloknami iz splava s pamyat'yu formy i vyazko-uprugim svyazuyushhim [The effect of the rate of temperature change on the stress-strain state and functional properties of a composite with fibers from a shape memory alloy and a viscoelastic binder]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2022, Vol.28, No.3, Pp.313-338.

28. Movchan A.A. *Trekhslonjnaya polosa s tonkimi vneshnimi slojami iz splava s pamyat'yu formy i vyazkouprugim vnutrennim sloem [Three-layer strip with thin outer layers of shape memory alloy and viscoelastic inner layer]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2022, Vol.28, No.4, Pp.465-487.
29. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
30. Movchan A.A. *Phenomenological Model of Changes in Phase-Structural Deformations in Shape Memory Alloys*. *Mechanics of Solids*, 2020, Vol.55, No.4, Pp.573-583.
31. Movchan A.A. *Joint Model for the Phase-Structural Deformation of Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, No.4, Pp.333-340.
32. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2021, No.10, Pp.1203-1212.
33. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental Study and Theoretical Simulation of the Cross Hardening Effect in Shape Memory Alloys*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2017, Vol.2017, No.10, Pp.779-784.
34. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Cross Hardening of a Shape Memory Alloy during Compression*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2019, Vol.2019, No.10, Pp.967-973.
35. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Effect of the Reverse Thermoelastic Phase Transformation on the Stress of the Onset of a Structural Transformation in Titanium Nickelide*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2022, Vol.2022, No.4, Pp.286-292.
36. Brechko T.M., Lihachev V.A. *Modelirovanie ehffekta pamyati formy. Vsesoyuznyj seminar "Aktual'nye problemy prochnosti". Mekhanika prochnosti materialov s novymi funktsional'nymi svojstvami [Modeling the shape memory effect. Mechanics of strength of materials with new functional properties: XXIV All-Union seminar "Actual problems of strength"]*. Rubezhnoe, Dnepropetrovskij khimiko-tehnologicheskij institute, 1990, Pp.57-60.
37. Lagoudas D.S., Bo Z., Quidwai M.A. *A unified thermodynamics constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites*. *Mechanics of Composite Material and Structures*, 1996, Vol.3, Pp.153-179.
38. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Determination of the Stress of the Onset of the Structural Transition in Titanium Nickelide after Orientational Transformation*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2023, Vol.2023, No.4, Pp.44-50.
39. Rabotnov Y.N. *Ehlementy nasledstvennoj mekhaniki tverdykh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
40. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental Identification of a Nonlinear Deformation Model for a Shape Memory Alloy during Phase and Structural Transformations*. *Russian Metallurgy (Metally)*, 2019, Vol.2019, No.4, Pp.301-308.

Поступила в редакцию 03 апреля 2023 года.

Сведения об авторе:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru