

УДК 534.1

EDN NFPKPK (<https://elibrary.ru/nfpkpk>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.02.06



## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ТЕЛ, СОЕДИНЁННЫХ РАСТЯЖИМЫМ АБСОЛЮТНО ГИБКИМ ТРОСОМ\*

Шавня Р.А.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается динамика пространственного движения космического аппарата (КА) с растяжимым, абсолютно гибким тросом с массой (полезной нагрузкой) на конце в центральном гравитационном поле. В расчетной модели трос разбивается на участки (конечные элементы), распределенная масса троса заменяется системой сосредоточенных масс в узлах элементов. Распределённая гравитационная нагрузка также приводится к узлам конечно-элементной модели. КА считается абсолютно жестким телом, с которым связывается подвижная координатная система, совершающая движение относительно некоторой инерциальной системы координат. Участки выпущенной части троса считаются прямолинейными. Сила натяжения и продольная деформация троса считаются в пределах конечного элемента постоянными величинами. Искомыми неизвестными задачи являются координаты узлов конечно-элементной модели и узлы поворота КА относительно инерциальной системы координат.

Дифференциальные уравнения движения космического аппарата с выпускаемым тросом составляются на основе принципа возможных перемещений в обобщенных координатах с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил. Полученная в результате замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений позволяет определить зависимости искомых величин от времени.

В качестве примеров приводятся решения двух консервативных задач: о падении закрепленного в начальной точке троса в плоскости с грузом на свободном конце; о буксировке груза с помощью весомого троса. В задаче о буксировке предварительно была решена нелинейная статическая задача с целью определения начальной конфигурации троса.

Решения получены путём численного интегрирования нелинейных уравнений движения методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-5 порядков с автоматическим выбором шага. Устойчивость вычислений контролировалась по выполнению закона сохранения полной энергии системы.

**Ключевые слова:** растяжимый трос, колебания, принцип возможных перемещений, метод конечных элементов, численные методы

## NONLINEAR DYNAMICS OF BODIES CONNECTED BY STRETCHING ABSOLUTELY FLEXIBLE CABLE

Shavnya R.A.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 22-19-00678.

## ABSTRACT

The dynamics of the spatial motion of a spacecraft (SC) with a tensile, absolutely flexible cable with a mass (payload) at the end in a central gravitational field is considered. In the calculation model, the cable is divided into sections (finite elements); the distributed mass of the cable is replaced by a system of concentrated masses in the nodes of the elements. The distributed gravitational load is also reduced to the nodes of the finite element model. The spacecraft is considered to be an absolutely rigid body, with which a moving coordinate system is associated, which moves relative to some inertial coordinate system. Sections of the released part of the cable are considered straight. The tension force and the longitudinal deformation of the cable are considered to be constant within the finite element. The desired unknowns of the problem are the coordinates of the nodes of the finite element model and the nodes of the spacecraft rotation relative to the inertial coordinate system.

The differential equations of motion of a spacecraft with a retractable tether are compiled on the basis of the principle of possible displacements in generalized coordinates, taking into account the nonlinearities of elastic and inertial forces. The resulting closed system of nonlinear differential equations makes it possible to determine the dependences of the desired quantities on time.

Solutions of two conservative problems are given as examples: about the fall of a cable fixed at the starting point in a plane with a load at the free end; about towing cargo with a heavy cable. In the problem of towing, a nonlinear static problem was previously solved in order to determine the initial configuration of the tether.

Solutions are obtained by numerical integration of nonlinear equations of motion by the Runge-Kutta-Felberg method of 4-5 orders with automatic step selection. The stability of the calculations was controlled by the fulfillment of the law of conservation of the total energy of the system.

**Keywords:** tensile cable, vibrations, principle of possible displacements, finite element method, numerical methods

## ВВЕДЕНИЕ

Проблемам математического моделирования нелинейной динамики составных стержневых и тросовых систем посвящено большое число работ, и интерес к этой теме не ослабевает [1-10]. Рост числа публикаций и их тематическое разнообразие определяются, прежде всего, многочисленными практическими приложениями, сочетающими конструктивные особенности стержневых систем с условиями их применения.

Стержневые системы могут быть как жесткими, так и гибкими, значительно менять свою первоначальную конфигурацию в результате деформации или трансформирования с помощью исполнительных механизмов. В стержневых системах некоторые из элементов могут трактоваться как жесткие, упругие и неупругие связи, в том числе – односторонние, например, в виде троса или нити, сопротивляющиеся только растяжению [2,5,8,11,12].

Динамическое деформирование стержневых конструкций может носить существенно нелинейный характер, сопровождаться большими перемещениями и углами поворотов, и конечными деформациями. Это ведет к проблеме создания адекватных математических моделей, опирающихся на нелинейные геометрические соотношения [1-4,6,7,10,13-15].

### 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим динамику пространственного движения космического аппарата (КА) с растяжимым, абсолютно гибким тросом в центральном гравитационном поле [16]. КА считаем абсолютно жестким. С ним связываем подвижную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в произвольной точке.

В расчетной модели трос разбивается на участки (конечные элементы) с длинами  $l_i$ , а его распределенная масса заменяется системой сосредоточенных масс в узлах  $m_i$ . При этом масса полезного груза на конце троса входит в  $m_1$ . Участки выпущенной части троса считаются прямолинейными.

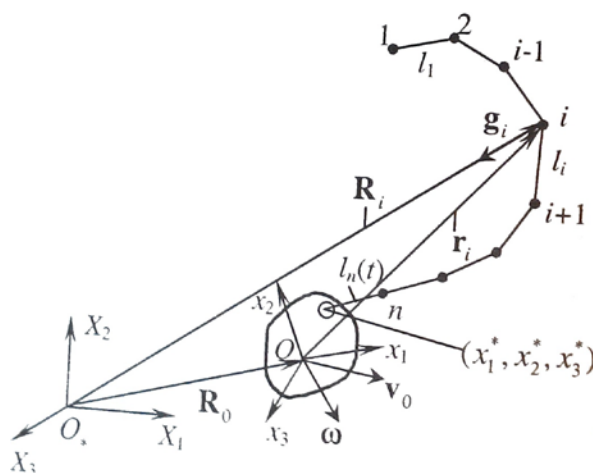


Рис.1. Схема модели.

Искомые неизвестные – координаты положения и углы поворота КА относительно инерциальной системы координат  $OX_1X_2X_3$

$$R_0 = [X_{0,1} X_{0,2} X_{0,3}]^T, \quad \theta = [\theta_1 \theta_2 \theta_3]^T, \tag{1}$$

линейные и мгновенные угловые скорости подвижной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  в проекциях на ее оси

$$v_0 = [v_{0,1} v_{0,2} v_{0,3}]^T, \quad \omega = [\omega_1 \omega_2 \omega_3]^T. \tag{2}$$

Положения узловых точек троса в подвижной системе координат

$$r_i = [x_{i,1} x_{i,2} x_{i,3}]^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3}$$

векторы абсолютного ускорения любой точки недеформируемого тела КА и  $i$ -й массы троса в проекциях на оси подвижной системы координат определяются в виде

$$a = a_0 + \ddot{\omega}r + \dot{\omega}\dot{r}, \quad a_0 = \dot{v}_0 + \dot{\omega}v_0, \tag{4}$$

$$a_i = a_0 + \ddot{\omega}r_i + \dot{\omega}\dot{r}_i + 2\dot{\omega}\dot{r}_i + \ddot{r}_i. \tag{5}$$

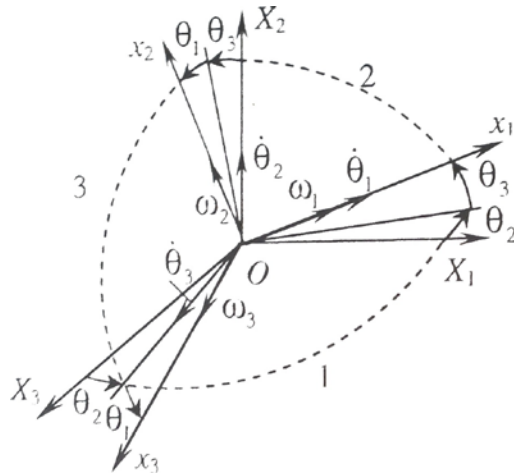


Рис.2. Угловое положение подвижной системы координат относительно инерциальной.

Знаком  $\sim$  обозначается кососимметричная матрица вида

$$a = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

введенная для замены векторного произведения матричным ( $a \times b = \tilde{a}b$ ).

Уравнения движения системы КА с выпускаемым растяжимым тросом в гравитационном поле для интервала времени между выходом  $n$ -й и  $n+1$ -й сосредоточенных масс троса составляются на основе принципа возможных перемещений и записываются в виде

$$\int_{V_0} adm + \sum_{i=1}^n a_i m_i = P_g + P_p, \quad (7)$$

$$\int_{V_0} \tilde{r}adm + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i a_i m_i = M_g + M_p, \quad (8)$$

$$a_i m_i + \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = g_i m_i + P_i, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (9)$$

где

$$P_g = \int_{V_0} gdm + \sum_{i=1}^n g_i m_i, \quad P_p = \int_{S_0} pds + \sum_{i=1}^n P_i, \quad (10)$$

$$M_g = \int_{V_0} \tilde{r}dm + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i g_i m_i, \quad M_p = \int_{S_0} \tilde{r}pds + \sum_{i=1}^n \tilde{r}_i P_i, \quad (11)$$

$P_g$ ,  $P_p$ ,  $M_g$ ,  $M_p$  – векторы равнодействующих гравитационных и поверхностных сил и моментов, действующих на КА и трос;  $P_i$  – векторы поверхностных сил, приведенных к узлам троса  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $\Pi$  – потенциальная энергия растяжения троса.

Потенциальная энергия растяжения троса как системы прямолинейных конечных элементов записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{EF_i}, \quad (12)$$

где

$$N_i = EF_i \frac{\tilde{l}_i - l_i}{l_i} \tag{13}$$

представляет растягивающее усилие на  $i$ -м участке, а  $\tilde{l}_i$  – длину деформированного  $i$ -го участка

$$\tilde{l}_i = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i+1,1})^2 + (x_{i,2} - x_{i+1,2})^2 + (x_{i,3} - x_{i+1,3})^2}. \tag{14}$$

Таким образом, вектор упругих сил равен

$$P_{N,i} = \frac{\partial \Pi}{\partial r_i} = -\frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}}(r_{i-1} - r_i) + \frac{N_i}{\tilde{l}_i}(r_i - r_{i+1}). \tag{15}$$

Подставляя уравнения ускорения (4), (5) в уравнения движения системы (7), (8), (9) и используя тождества

$$\tilde{a}b = -\tilde{b}a, \quad \tilde{a}\tilde{b}\tilde{b}a = -\tilde{b}\tilde{a}\tilde{a}b, \tag{16}$$

получим уравнения

$$ma_0 - \tilde{L}\dot{\omega} + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i - \left( \tilde{\omega}\tilde{L} + 2\sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \right) \omega = P_g + P_p, \tag{17}$$

$$\tilde{L}a_0 - I\dot{\omega} + \sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \tilde{r}_i - \left( \tilde{\omega}I - 2\sum_{i=1}^n m_i \ddot{r}_i \tilde{r}_i \right) \omega = M_g + M_p, \tag{18}$$

$$ma_0 - m_i \ddot{r}_i \omega + m_i \ddot{r}_i - m_i (\tilde{\omega} \tilde{r}_i + 2\ddot{r}_i) \omega = m_i g_i + P_i + P_{N,i}. \tag{19}$$

Здесь  $m$ ,  $L$ ,  $I$  – масса, вектор моментов масс и матрица инерции КА с деформируемым тросом в рассматриваемый момент времени

$$m = \int_{V_0} dm + \sum_{i=1}^n m_i, \quad L = \int_{V_0} r dm + \sum_{i=1}^n r_i m_i, \quad I = \int_{V_0} \tilde{r} \tilde{r} dm - \sum_{i=1}^n m_i \tilde{r}_i \tilde{r}_i. \tag{20}$$

Вектор ускорения свободного падения в любой точке вращающейся деформируемой системы в центральном гравитационном поле при  $|r/R_0| \ll 1$  записывается в виде

$$g = -g_0 \left[ v + \frac{1}{|R_0|} (r - 3(v^T r)v) \right], \tag{21}$$

где

$$g_0 = \gamma \frac{M_3}{|R_3|^3}, \quad v = \Lambda \frac{R_0}{|R_0|}, \quad R_0^2 = X_{0,1}^2 + X_{0,2}^2 + X_{0,3}^2;$$

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), \quad M_3 = 5,9763 \cdot 10^{24} \text{ кг}, \quad |R_3| = 6371,1 \text{ км}.$$

С учетом полученных уравнений строится следующая система [1]

$$\dot{R}_0 = \Lambda^T v_0, \quad \dot{\theta} = A^{-1} \omega, \tag{22}$$

где

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c_2 c_3 & s_3 & -s_2 c_3 \\ s_1 s_2 - c_1 c_2 s_3 & c_1 c_3 & s_1 c_2 - c_1 s_2 s_3 \\ c_1 s_2 - s_1 c_2 s_3 & -s_1 c_3 & c_1 c_2 - s_1 s_2 s_3 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s_3 & 0 \\ 0 & c_1 c_3 & s_1 \\ 0 & -s_1 c_3 & c_1 \end{bmatrix}; \quad c_k = \cos \theta_k, \quad s_k = \sin \theta_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (24)$$

В результате получается замкнутая система уравнений для определения всех  $3(4+n)$  компонентов векторов. Эта система нелинейных дифференциальных уравнений с заданными внешними нагрузками и начальными условиями интегрируется численно.

## 2. ПРИМЕРЫ РАСЧЁТА

Для проверки работоспособности полученной математической модели рассмотрим несколько примеров в плоскости. Модель троса в каждом из них будет одинаковой, её схема представлена на рис.3.

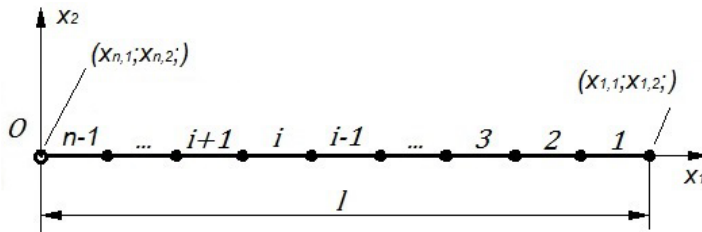


Рис.3. Схема модели плоского троса.

Здесь  $x_{i,1}$  – горизонтальная координата  $i$ -го узла троса,  $x_{i,2}$  – вертикальная координата  $i$ -го узла троса,  $l$  – длина троса. Трос обладает жесткостью на растяжение  $EF$ , где  $F$  – площадь поперечного сечения троса  $E$  – модуль Юнга материала.

### 2.1. Падение закреплённого троса с грузом в плоскости.

Рассмотрим шарнирно закреплённый с одного конца трос, свободно падающий под действием силы тяжести в плоскости (однородное гравитационное поле,  $g = 9,8$  м/с). К другому концу троса прикреплен груз с массой  $m$ . Схема примера представлена на рис.4.

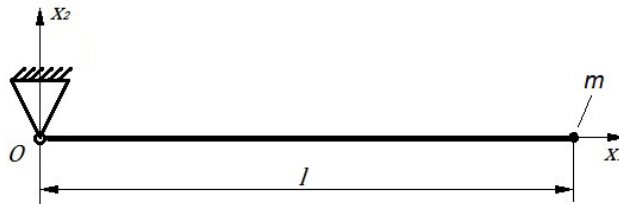


Рис.4. Схема закреплённого троса с грузом на свободном конце.

Система дифференциальных уравнений, описывающих данную модель, выглядит следующим образом

$$\ddot{x}_{i,1} = \frac{1}{m_i} \left[ \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,1} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,1} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,1} \right],$$

$$\ddot{x}_{i,2} = \frac{1}{m_i} \left[ \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,2} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,2} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,2} - m_i g_0 \right], \tag{25}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Здесь  $m_i$  – масса  $i$ -го узла,  $N_i$  – растягивающее усилие в  $i$ -м участке троса,  $\tilde{l}_i$  – длина деформированного  $i$ -го участка троса.

Растягивающее усилие и длина деформированного участка для плоского троса вычисляются по формулам

$$N_i = EF \frac{\tilde{l}_i - l_i}{l_i}, \tag{26}$$

$$\tilde{l}_i = \sqrt{(x_{i,1} - x_{i+1,1})^2 + (x_{i,2} - x_{i+1,2})^2}. \tag{27}$$

Здесь  $l_i$  – начальная длина  $i$ -го участка троса.

Исходные данные для примера: длина троса  $l = 30$  м, модуль упругости материала (полиамид)  $E = 1,6 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>, плотность материала  $\rho = 1,1 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, площадь поперечного сечения  $F = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Масса груза принималась равной 5 кг и 120 кг.

Интегрирование системы производится методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-5 порядков. Для проверки устойчивости вычислений в ходе численного решения дифференциальных уравнений вычислялась полная энергия системы

$$E = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i + \frac{N_i^2 l_i}{EF} \right) + g_0 m_i x_{i,2} \right], \tag{28}$$

где  $m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i / 2$  – кинетическая энергия;  $N_i^2 l_i / (2EF)$  – энергия упругого взаимодействия;  $g_0 m_i x_{i,2}$  – потенциальная энергия тяготения.

Параметры метода численного интегрирования: абсолютная погрешность  $10^{-12}$ ; относительная погрешность  $10^{-11}$ ; выбор шага автоматический; точность вычислений 12 знаков после запятой; количество узлов 23; время интегрирования 12 секунд движения.

Ниже представлены результаты расчета для троса с грузом массой 5 кг (рис.5-9).

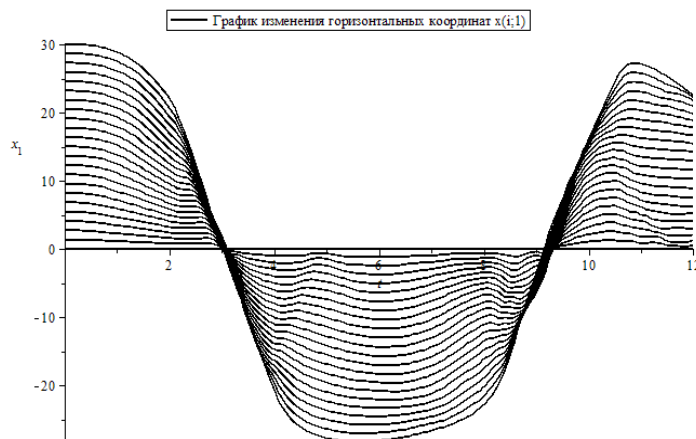


Рис.5. График изменения горизонтальных координат троса  $x_{i,1}$  относительно времени.

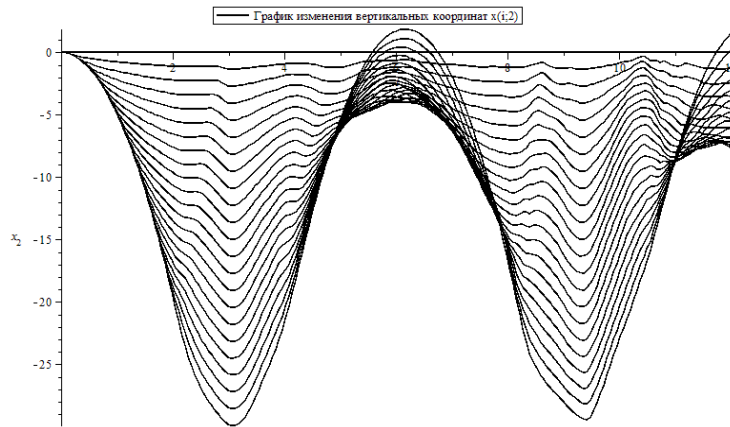


Рис.6. График изменения вертикальных координат троса  $x(i;2)$  относительно времени.

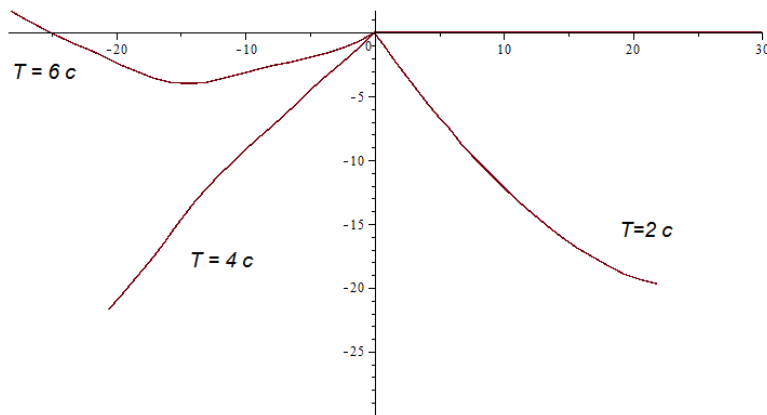


Рис.7. Положения троса в моменты времени  $T = 2, 4, 6$  секунд.

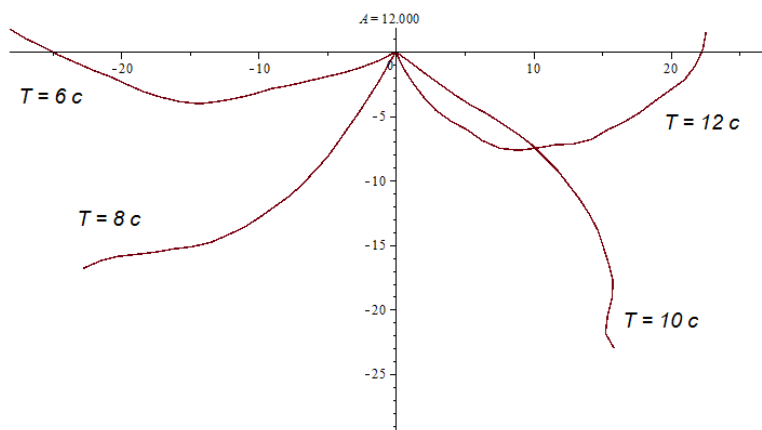


Рис.8. Положения троса в моменты  $T = 6, 8, 10, 12$  секунд.



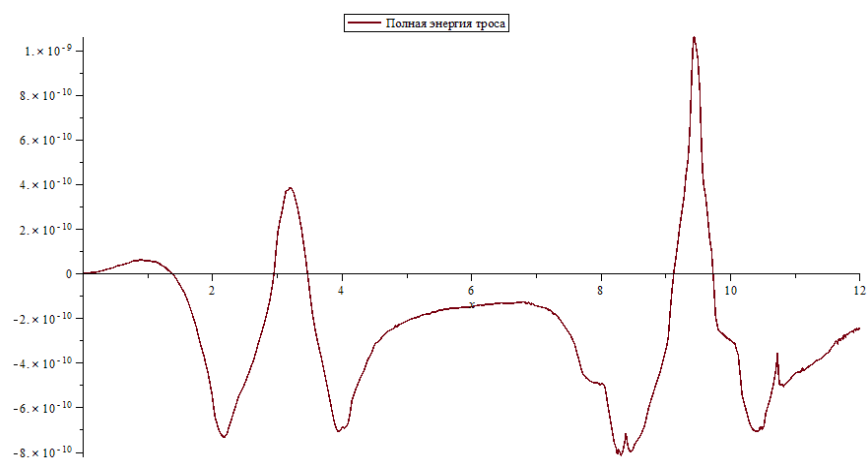
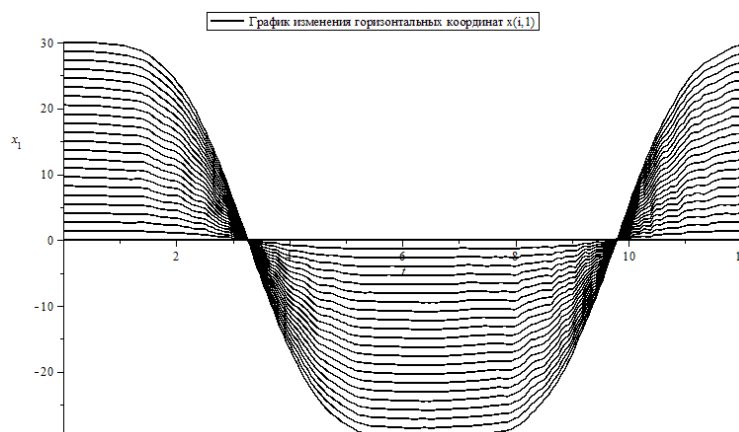
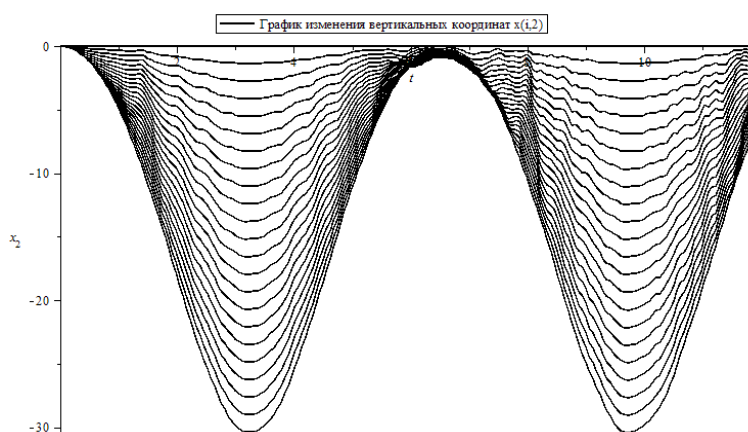


Рис.9. Полная энергия системы.

Результаты расчета для троса с грузом массой 120 кг представлены на рис.10-14.

Рис.10. График изменения горизонтальных координат троса  $x(i;1)$  относительно времени.Рис.11. График изменения вертикальных координат троса  $x(i;2)$  относительно времени.

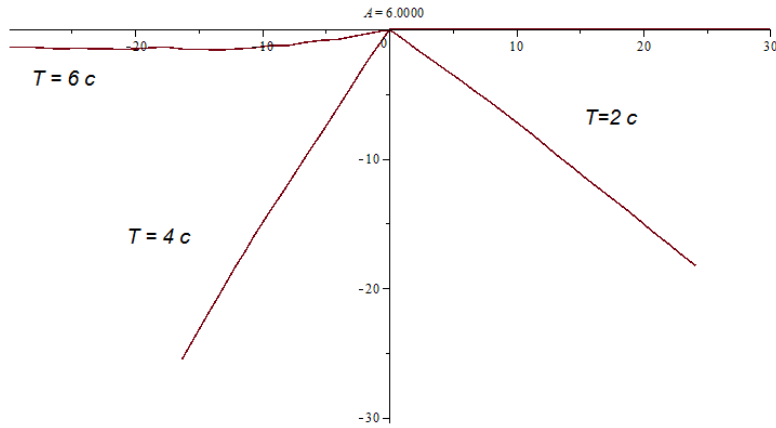


Рис.12. Положения троса в моменты времени  $T = 2, 4, 6$  секунд.

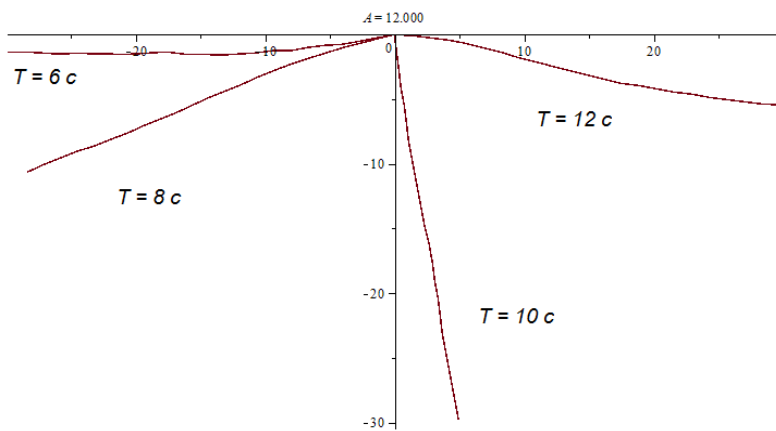


Рис.13. Положения троса в моменты  $T = 6, 8, 10, 12$  секунд.

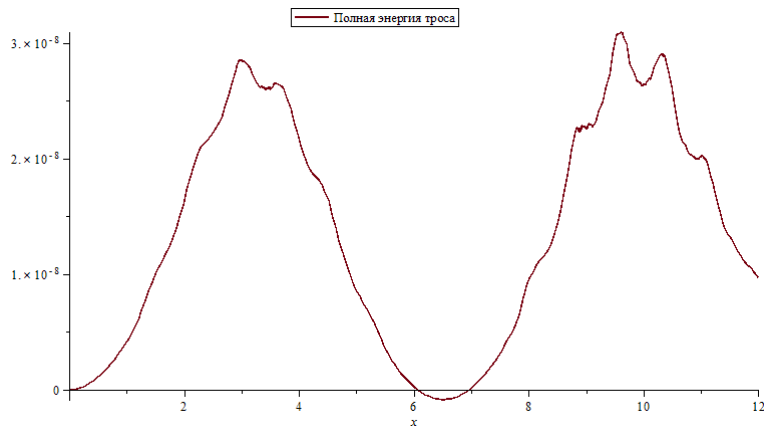


Рис.14. Полная энергия системы.

## 2.2. Буксировка груза.

К одному из концов троса прикреплен груз (сосредоточенная масса  $m$ ), этот конец может свободно перемещаться в горизонтальной плоскости, но не может перемещаться в вертикальной. К другому концу троса прикладывается постоянная по величине и направлению сила  $P$  с аналогичными условиями закрепления.

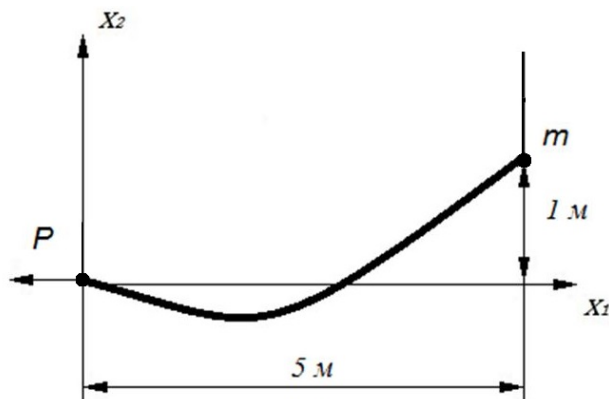


Рис.15. Схема примера с буксировкой.

Изначально трос находится в ненапрянутом состоянии. Концы троса располагаются на разной высоте, вертикальное расстояние между ними – 1 метр, горизонтальное – 5 метров.

Для решения статической задачи (поиска формы провиса троса) нужно исключить из системы уравнений движения инерционную силу. Уравнения статической задачи выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,1} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,1} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,1} &= 0, \\ \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,2} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,2} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,2} &= m_i \cdot g_0, \quad i = 2, 3 \dots n-1. \end{aligned} \tag{29}$$

Найденные в результате решения системы нелинейных уравнений координаты будут использоваться в качестве начальных условий для динамической задачи. Полная энергия системы с учетом работы силы  $P$  вычисляется следующим образом

$$E = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{2} \left( m_i \dot{r}_i^T \dot{r}_i + \frac{N_i^2 l_i}{EF} \right) + g_0 m_i x_{i,2} - P \cdot x_{n,1} \right]. \tag{30}$$

Уравнения движения динамической задачи записываются в следующем виде:

для  $i = 1, n$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1,1} &= \frac{1}{m_1} \left( \left( \frac{N_1}{\tilde{l}_1} \right) x_{1,1} + \frac{N_1}{\tilde{l}_1} x_{2,1} \right), \\ \ddot{x}_{n,1} &= \frac{1}{m_n} \left( \frac{N_{n-1}}{\tilde{l}_{n-1}} x_{n-1,1} - \left( \frac{N_{n-1}}{\tilde{l}_{n-1}} + \frac{N_n}{\tilde{l}_n} \right) x_{n,1} + P \right); \end{aligned}$$

для  $i = 2, 3, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{i,1} &= \frac{1}{m_i} \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,1} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,1} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,1} \right), \\ \ddot{x}_{i,2} &= \frac{1}{m_i} \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} x_{i-1,2} - \left( \frac{N_{i-1}}{\tilde{l}_{i-1}} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} \right) x_{i,2} + \frac{N_i}{\tilde{l}_i} x_{i+1,2} - m_i \cdot g_0 \right). \end{aligned} \tag{31}$$

Исходные данные: длина троса  $l = 6$  м, поперечное сечение троса  $F = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, модуль упругости материала (полиэтилен)  $E = 900$  МПа, плотность материала  $\rho = 940$  кг/м<sup>3</sup>, масса груза (правый конец троса)  $m = 8$  т, масса буксира (левый конец троса)  $M = 7$  т, внешняя сила, приложенная к левому концу  $P = 10000$  Н.

Параметры метода численного интегрирования: абсолютная погрешность  $10^{-12}$ ; относительная погрешность  $10^{-11}$ ; выбор шага автоматический; точность вычислений 12 знаков после запятой; количество узлов 18, время интегрирования 1,8 секунды движения.

Результаты расчетов приведены на рисунках ниже.

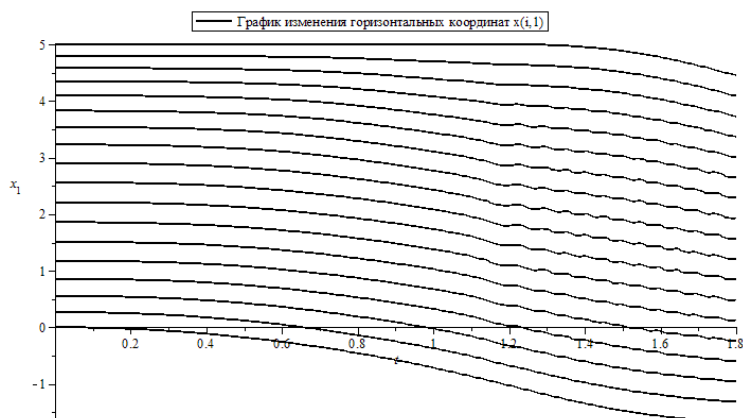


Рис.16. График изменения горизонтальных координат  $x(i;1)$  относительно времени.

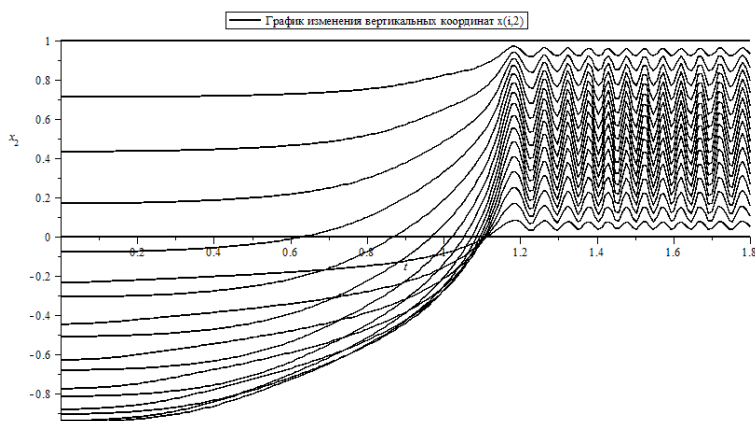


Рис.17. График изменения вертикальных координат  $x(i;2)$  относительно времени.

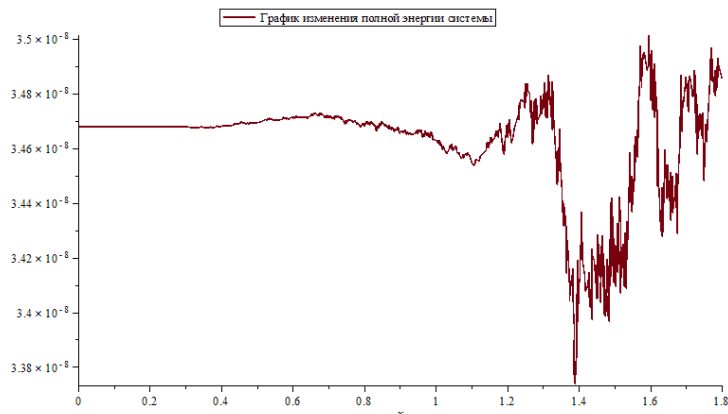


Рис.18. График изменения полной энергии системы.

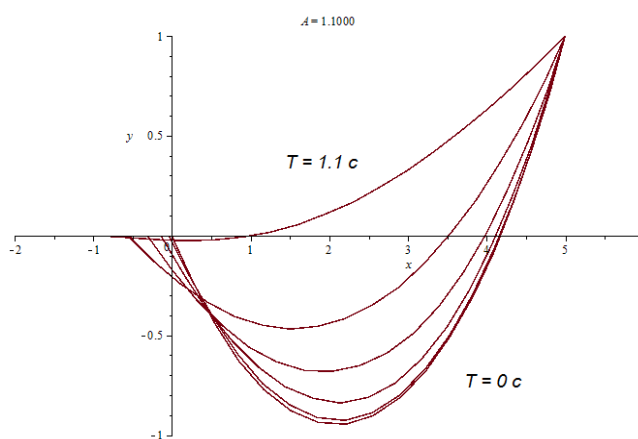


Рис.19. Положения троса в период времени с  $T = 0$  по  $T = 1,1$  с.

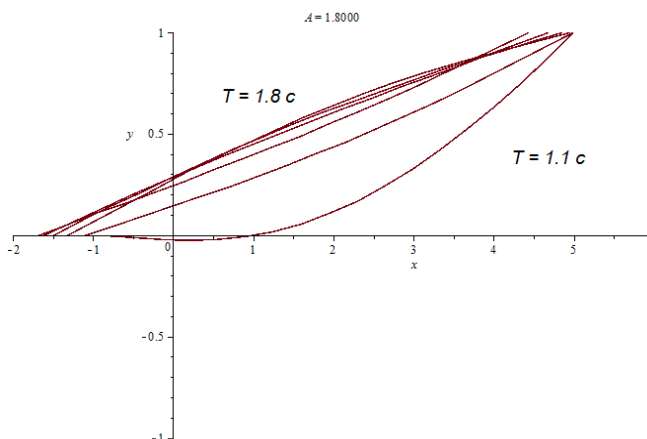


Рис.20. Положения троса в период времени с  $T = 1,1$  с по  $T = 1,8$  с.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены дифференциальные уравнения динамики космического аппарата с тросовой системой, составлена математическая модель растяжимого абсолютно гибкого троса. Уравнения движения системы получены на основе принципа возможных перемещений.

Рассмотрено два примера: падение закрепленного троса с грузом на свободном конце, буксировка троса с грузом. Численное интегрирование систем дифференциальных уравнений в обоих случаях проводилось методом Рунге-Кутты-Фельберга 4-5 порядков с автоматическим выбором шага. Для второго примера потребовалось определить форму провиса троса, путём исключения из динамической системы инерционных членов была получена система нелинейных уравнений для статической задачи.

Устойчивость вычислений проверялась путём определения полной энергии системы: в обоих случаях отклонения энергии от первоначального значения не превысили  $3 \cdot 10^{-8}$ , что говорит об устойчивости вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hodges D.H. *Finite rotating and nonlinear beam kinematics* // Vertica. – 1987. – Vol.11(1/2). – Pp.297-307.
2. Misra A.K., Modi V.J. *A survey on the dynamics and control of tethered satellite systems* // Advances in Astronautical Sciences. – 1987. – Vol.62. – Pp.667-719.
3. Iura M., Atluri S.N. *Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams* // Computers & Structures. – 1988. – Vol.29. – No.5. – Pp.875-889.
4. Ferri A.A. *Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures* // Journal of Spacecraft and Rockets. – 1988. – Vol.25. – No.5. – Pp.354-360.
5. Белецкий В.В., Левин Е.М. *Динамика космических тросовых систем*. – М.: Наука, 1990. – 330 с.
6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. *Gravity effects on damping of a truss using pinned joints* / Dynamics Specialists Conference “Structures, Structural Dynamics and Materials”, AIAA-94-1685-CP. Hilton Head, SC, U.S.A., 1994. – Pp.131-140. DOI: 10.2514/6.1994-1685
7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. *Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss* // Journal of Guidance Control and Dynamics. – 1995. – Vol.18. – No.6. – Pp.1398-1403. DOI: 10.2514/3.21559.
8. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. *Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether* // Computers & Structures. – 1999. – Vol.72. – No.1-3. – Pp.141-147. DOI: 10.1016/S0045-7949(99)00039-5.
9. Gulyaev V.I., Zavrzhina T.V. *Dynamics of a manipulation robot with flexible links and drive mechanisms* // Mech. Solids. – 2003. – Vol.38. – No.6. – Pp. 13-22.
10. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. *On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations* // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2002. – Vol.191. – Pp.5159-5176.
11. Steindl A., Troger H. *Optimal control of deployment of tethered subsatellite* // Nonlinear Dynamics. – 2003. – Vol.31. – No.3. – Pp.257-274.
12. Williams P. *Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems* // Nonlinear Dynamics. – 2008. – Vol.52. – No.1. – Pp.159-179.
13. Cao D.Q., Tucker R.W. *Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation* // Int. Journal of Solids and Structures. – 2008. – Vol.45. – No.2. – Pp.460-477.

14. Luo Y., Xu M., Zhang X. *Nonlinear self-defined truss element based on the plane truss structure with flexible connector* // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2010. – Vol.15. – No.10. – Pp.3156-3169.
15. Akour S.N. *Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation* / Proceedings of the World Congress on Engineering. WCE 2010. – London, U.K., 2010. – Vol.II. – Pp.1427-1433.
16. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 327 с.

## REFERENCES

1. Hodges D.H. *Finite rotating and nonlinear beam kinematics*. Vertica, 1987, Vol.11(1/2), Pp.297-307.
2. Misra A.K., Modi V.J. *A survey on the dynamics and control of tethered satellite systems*. Advances in Astronautical Sciences, 1987, Vol.62, Pp.667-719.
3. Iura M., Atluri S.N. *Dynamic analysis of finitely stretched and rotated three-dimensional space-curved beams*. Computers & Structures, 1988, Vol.29, No.5, Pp.875-889.
4. Ferri A.A. *Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures*. Journal of Spacecraft and Rockets, 1988, Vol.25, No.5, Pp.354-360.
5. Beletskii V.V., Levin E.M. *Dinamika kosmicheskikh trosovykh system [Dynamics of tethered space systems]*. Moskva, Nauka, 1990, 330 p.
6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. *Gravity effects on damping of a truss using pinned joints*. Dynamics Specialists Conference “Structures, Structural Dynamics and Materials”, AIAA-94-1685-CP, Hilton Head, SC, U.S.A., 1994, Pp.131-140.
7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. *Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss*. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1995, Vol.18, No.6, Pp.1398-1403.
8. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. *Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether*. Computers & Structures, 1999, Vol.72, No.1-3, Pp.141-147.
9. Gulyaev V.I., Zavrzhina T.V. *Dynamics of a manipulation robot with flexible links and drive mechanisms*. Mech. Solids, 2003, Vol.38, No.6, Pp.13-22.
10. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. *On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 2002, Vol.191, Pp.5159-5176.
11. Steindl A., Troger H. *Optimal control of deployment of tethered subsatellite*. Nonlinear Dynamics, 2003, Vol.31, No.3, Pp.257-274.
12. Williams P. *Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems*. Nonlinear Dynamics, 2008, Vol.52, No.1, Pp.159-179.
13. Cao D.Q., Tucker R.W. *Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation*. Int. Journal of Solids and Structures, 2008, Vol.45, No.2, Pp.460-477.
14. Luo Y., Xu M., Zhang X. *Nonlinear self-defined truss element based on the plane truss structure with flexible connector*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, Vol.15, No.10, Pp.3156-3169.

15. Akour S.N. *Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation*. Proceedings of the World Congress on Engineering, WCE 2010, Vol.II, London, U.K., 2010, Pp.1427-1433.
16. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksij [Dynamics of elastic controlled structures]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2007, 327 p.

*Поступила в редакцию 27 февраля 2023 года.*

---

Сведения об авторе:

Шавня Руслан Анатольевич – соискатель, ФГБУН Институт прикладной механики РАН,  
г. Москва, Россия; e-mail: [ru.sh@ro.ru](mailto:ru.sh@ro.ru)