

УДК 539.3

EDN BFJANF (<https://elibrary.ru/bfjanf>)

DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.02.01



## ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ЖИДКОСТЬЮ, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ\*

Бочкарёв С.А.

*ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Представлены результаты исследований собственных колебаний круговых слоистых цилиндрических оболочек, полностью заполненных неподвижной сжимаемой жидкостью и покоящихся на упругом основании, которое описывается двухпараметрической моделью Пастернака. Поведение упругой конструкции и жидкой среды описывается в рамках классической теории оболочек и уравнений Эйлера. Уравнения движения оболочки совместно с соответствующими геометрическими и физическими соотношениями сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Акустическое волновое уравнение преобразуется к системе дифференциальных уравнений с помощью метода обобщённых дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. Для вычисления собственных частот колебаний используется сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением методом деления пополам. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с известными численными и численно-аналитическими решениями. Для свободно опертых, жёстко закреплённых и консольных двухслойных и трёхслойных цилиндрических оболочек детально проанализированы зависимости низших частот колебаний от жёсткости упругого основания. Продемонстрировано, что характер влияния упругого основания на фундаментальные частоты и соответствующие им формы колебаний оболочек с разными граничными условиями в большей степени зависит от схемы укладки и угла армирования композиционного материала.

**Ключевые слова:** классическая теория оболочек; цилиндрическая оболочка; сжимаемая жидкость; слоистый материал; метод ортогональной прогонки Годунова; метод обобщённых дифференциальных квадратур; упругая среда Пастернака; собственные колебания

## STUDY OF NATURAL VIBRATIONS OF FLUID-CONTAINING COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS RESTING ON ELASTIC FOUNDATION

Bochkarev S.A.

*Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia*

---

\* Работа выполнена в рамках государственного задания; номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

## ABSTRACT

The paper presents the results of investigations of natural vibrations of circular multilayer cylindrical shells completely filled with a stationary compressible fluid and resting on an elastic foundation, which is described by Pasternak's two-parameter model. The behavior of the elastic structure and the fluid is described based on the classical shell theory and Euler equations. The equations of motion of the shell together with the corresponding geometric and physical relationships are reduced to a system of ordinary differential equations in new unknown variables. The acoustic wave equation is transformed to a system of differential equations using the method of generalized differential quadrature. The solution to the formulated boundary value problem is found by the Godunov orthogonal sweep method. The natural frequencies of vibrations are calculated by applying the stepwise procedure and subsequent refinement by the half-division method. The validity of the obtained results is confirmed by comparing them with the known numerical and numerical-analytical solutions. The dependence of the lowest vibration frequencies on the rigidity of the elastic foundation is closely analyzed for simply supported, rigidly supported and cantilevered two- and three-layer cylindrical shells. It is shown that for shells with different boundary conditions, the character of influence of elastic foundation on the fundamental frequencies and the corresponding vibration modes depend heavily on the scheme of reinforcement laying and reinforcing angle of the composite material.

**Keywords:** classical shell theory; cylindrical shell; compressible fluid; layered material; Godunov's orthogonal sweep method; generalized differential quadrature method; elastic Pasternak's medium; natural vibrations

## ВВЕДЕНИЕ

Элементы машиностроительных конструкций, выполненные из слоистых композиционных материалов, находят широкое применение в различных областях техники благодаря повышенным требованиям к удельной прочности и жёсткости [1]. Уникальные свойства композитов, формируемые в результате подбора соответствующих материалов матрицы и связующего, схем укладки и углов армирования, допускают их использование в изделиях, функционирующих в особых условиях, в том числе, взаимодействующих с жидкой средой. В этом случае поверхность раздела с жидкостью с одной стороны и внешней окружающей средой с другой, представляют собой связанную систему, динамические характеристики которой заметно отличаются от свойств независимой структуры. Изучение этих характеристик необходимо для оценки возможного отклика конструкции на возмущающие воздействия сил различной природы.

Исследования тонкостенных конструкций, выполненных из слоистых композиционных материалов, и взаимодействующих с жидкой средой, носят ограниченный характер. В частности, цилиндрические оболочки, являющиеся предметом исследования настоящей работы, изучены в [2-13]. Натурные наблюдения четырёхслойной (симметричный перекрёстно армированный композит) оболочки, содержащей жидкость, осуществлены в [2]. С использованием полуаналитического варианта метода конечных элементов (МКЭ) в работах [3,4] проанализировано влияние различных параметров на частоты колебаний оболочек с разными схемами укладки композиционного материала. Собственные колебания поперечно армированных оболочек, частично или полностью заполненных жидкостью, изучены в [5] с помощью гибридного варианта МКЭ, в котором точные функции перемещений определяются

непосредственно из уравнений теорий оболочек. В [6] экспериментально и численно (МКЭ) продемонстрировано влияние уровня жидкости на изменение окружной формы колебаний для изотропных и поперечно армированных композитных оболочек. Собственные колебания полностью заполненных жидкостью поперечно и перекрёстно армированных оболочек исследованы в [7-9] при разных вариантах граничных условий с использованием сплайнов Бикли для аппроксимации перемещений и углов поворота. В статьях [10,11] для исследования колебаний поперечно армированных оболочек, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, или погруженных в неё, применяется метод динамической жёсткости. Параметрическое исследование погруженной в жидкость оболочки из поперечно армированного симметричного композита осуществлено в [12] с использованием метода Релея-Ритца. В работе [13] перекрёстно армированные оболочки, частично или полностью заполненные жидкостью, проанализированы с помощью конечно-элементного алгоритма, построенного на соотношениях линейной теории упругости.

При моделировании взаимодействия упругого тела с внешней окружающей средой широкое распространение получили приближённые модели, согласно которым действие извне заменяется упругим основанием [14]. При этом внешняя среда также оказывает существенное воздействие на динамические характеристики контактирующей с ней конструкцией. Как следует из библиографических обзоров в недавних публикациях [15,16], анализ влияния упругого основания на поведение слоистых цилиндрических оболочек с жидкостью не представлен в литературе. Насколько известно автору, только в работе [17] для поперечно армированной свободно опёртой и жёстко закреплённой конической оболочки оценён вклад некоторых коэффициентов постели на изменение частотного спектра. Детальное исследование фундаментальных частот колебаний слоистых цилиндрических оболочек с жидкостью при наличии упругого основания остаётся не изученным и является целью настоящей работы.

Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова [18]. При его использовании для конструкций, взаимодействующих с жидкостью, может применяться комбинированный подход, в котором системы обыкновенных дифференциальных уравнений для упругого тела и жидкости решаются совместно. Для преобразования дифференциальных уравнений, описывающих поведение идеальной сжимаемой жидкости, к нормальному виду Коши употребляются следующие методы: кубическая сплайн-аппроксимация, прямых, обобщённых дифференциальных квадратур [15,16,19-21]. Последний метод, как показано в [21], более эффективен и будет использован в настоящей работе.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается упругая слоистая цилиндрическая оболочка вращения (рис.1) длиной  $L$ , радиусом  $R$  и толщиной  $h$ , которая полностью заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Тонкостенное тело изготовлено из однонаправленного материала (бор-эпоксидная смола AVCO 5505 [22]), слои которого ориентированы под углами  $+\alpha$  и  $-\alpha$  относительно меридиональной координаты (перекрёстно армированный композит). Рассматриваются пакеты, состоящие из двух  $[\alpha, -\alpha]$  или трёх  $[\alpha, 0^\circ, -\alpha]$  слоёв. Оболочка целиком

погружена в двухпараметрическое упругое основание с коэффициентами постели  $K_w$  и  $K_p$ , отвечающими за растяжение-сжатие (модель Винклера) и сдвиг (модель Пастернака) соответственно. Необходимо проанализировать влияние угла армирования  $\alpha$  для двух вариантов укладки слоистого композиционного материала на минимальные частоты колебаний оболочки при различных значениях жёсткости упругого основания и разных комбинациях граничных условий, задаваемых на краях тонкостенной конструкции.

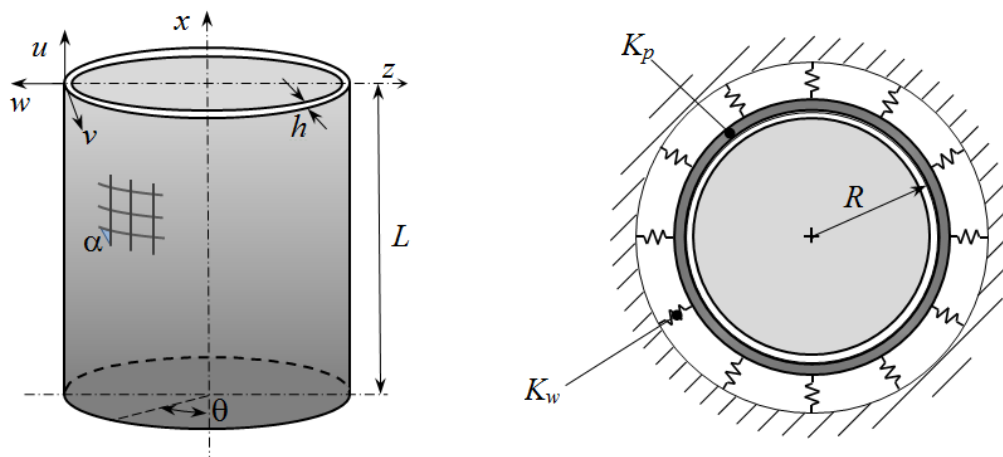


Рис.1. Расчётная схема композитной цилиндрической оболочки с жидкостью на упругом основании.

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, компоненты вектора деформации  $E_{ij}$  в криволинейной системе координат  $(s, \theta, z)$  могут быть записаны в виде [23]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial s}, & \varepsilon_{22} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), & \varepsilon_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial s_1}, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta}, & \kappa_{12} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta} \right), & \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, & \theta_2 &= \frac{1}{R} \left( v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $u, v, w$  – меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки;  $\theta_i$  – углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов  $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T$  и вектором обобщённых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$ , в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей  $\mathbf{D}$ , определяются по формулам

$$(\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij}(\alpha) dz, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

а компоненты матрицы  $\bar{Q}_{ij}(\alpha)$  вычисляются известным способом [24] в результате изменения свойств однонаправленного материала при повороте системы координат на угол  $\alpha$ .

Уравнения движения оболочки с учётом реакции упругой среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left( Q_{22} + \frac{\partial H}{\partial s} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial Q_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_w w + K_p \left( \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + p = 0, \quad (4) \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_{11} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} = 0, \end{aligned}$$

где  $Q_{ii}$  – поперечные силы,  $\rho_0 = \int_h \rho dz$ ,  $\rho$  – плотность материала,  $p$  – гидродинамическое давление, которое в области  $V_f$  описывается акустическим волновым уравнением [25]

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Здесь  $c$  – скорость звука в жидкости. На смоченной поверхности ( $r = R$ ), оси вращения оболочки ( $r = 0$ ), нижнем ( $x = 0$ ) и верхнем ( $x = L$ ) краях давление  $p$  удовлетворяет следующим условиям

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=R} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=0} = 0, \quad (7)$$

$$x = 0: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x = L: \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичные внешние нормали к области жидкости  $V_f$ ,  $\rho_f$  – плотность жидкости.

Раскладывая все компоненты уравнений (1), (2), (5) в ряды Фурье по окружной координате  $\theta$

$$X(s, \theta) = \sum_{j=0} X_j(s) \cos(j\theta), \quad Y(s, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(s) \sin(j\theta),$$

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\},$$

$$Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, H, Q_{22}\},$$

сведём геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (4) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных [23]

$$y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + 2H/R, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j}H,$$

$$y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1.$$

Здесь  $j$  – номер гармоники при разложении в ряд Фурье,  $\bar{j} = j/R$ . С учётом этого и принимая во внимание  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$ , искомая система может быть записана следующим образом

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial s} = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &= \bar{j}(2H/R - y_2) - \omega^2 \rho_0 y_5, & f_2 &= \bar{j}T_{22} - Q_{22}/R - \omega^2 \rho_0 y_6, \\ f_4 &= T_{22}/R - \bar{j}Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7 + K_w y_7 + K_p (\kappa_{11} + \bar{j}^2 y_7) - p, & (10) \\ f_3 &= y_4 - 2\bar{j}H, & f_5 &= \varepsilon_{11}, & f_6 &= \varepsilon_{12} + \bar{j}y_5, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= \kappa_{11}. \end{aligned}$$

Здесь  $\omega$  – частота колебаний,  $i^2 = -1$ . Входящие в выражения (10) величины вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \bar{j}y_6 + y_7/R, & \kappa_{22} &= \bar{j}\theta_2, & \theta_2 &= y_6/R - \bar{j}y_7, \\ H &= \bar{b}_{33}\varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33}\kappa_{12}, & Q_{22} &= -\bar{j}M_{22}, \\ \kappa_{11} &= \frac{\bar{a}_{11}(y_3 - \bar{b}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{c}_{12}\kappa_{22}) - \bar{b}_{11}(y_1 - \bar{a}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{b}_{12}\kappa_{22})}{\bar{a}_{11}\bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2}, \\ \varepsilon_{11} &= \frac{y_1 - \bar{a}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{b}_{11}\kappa_{11} - \bar{b}_{12}\kappa_{22}}{\bar{a}_{11}}, & \kappa_{12} &= (\varepsilon_{12} + \bar{j}y_5)/R - \bar{j}y_8, \\ T_{22} &= \bar{a}_{12}\varepsilon_{11} + \bar{a}_{22}\varepsilon_{22} + \bar{b}_{12}\kappa_{11} + \bar{b}_{22}\kappa_{22}, & M_{22} &= \bar{b}_{12}\varepsilon_{11} + \bar{b}_{22}\varepsilon_{22} + \bar{c}_{12}\kappa_{11} + \bar{c}_{22}\kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2\bar{c}_{33}/R)\bar{j}(y_5/R + y_8)}{\bar{a}_{33} + 4(\bar{b}_{33} + \bar{c}_{33}/R)/R}. \end{aligned}$$

Уравнение (5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом обобщённых дифференциальных квадратур [26]. Для этого область жидкости по радиусу  $r$  делится на  $n$  точек. Тогда производные  $l$ -го порядка от функции  $p(x, r)$  в любой точке  $r_i$  определяются как

$$\frac{\partial^l p(x, r_i)}{\partial r^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, r_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad (11)$$

где весовые коэффициенты  $c_{ik}^{(l)}$  вычисляются по следующим рекуррентным формулам

$$\left. \begin{aligned} c_{ik}^{(1)} &= \frac{M^{(1)}(r_i)}{M^{(1)}(r_k)(r_i - r_k)}, & c_{ii}^{(1)} &= -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(1)}, & M^{(1)}(r_i) &= \prod_{k=1}^n (r_i - r_k) \\ c_{ik}^{(l)} &= l \left( c_{ik}^{(l-1)} c_{ii}^{(l-1)} - \frac{c_{ik}^{(l-1)}}{r_i - r_k} \right), & c_{ii}^{(l)} &= -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} i \neq k, \\ i, k = \overline{1, n}. \end{array}$$

С учетом (11) граничные условия (6) и (7) представим в виде

$$\left. \frac{\partial p(x, r_n)}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{k=1}^n c_{nk}^{(1)} p_k(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p(x, r_1)}{\partial r} \right|_{r=0} = \sum_{k=1}^n c_{1k}^{(1)} p_k(x) = 0,$$

и, переписав их следующим образом

$$\begin{aligned} c_{n1}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) + c_{nn}^{(1)} p_n(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ c_{11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x) &= 0, \end{aligned}$$

получим явные выражения для «крайних» значений

$$p_n(x) = \frac{c_{n1}^{(1)} \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) / c_{11}^{(1)} - \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) - \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}{c_{m1}^{(1)} - c_{n1}^{(1)} c_{n1}^{(1)} / c_{11}^{(1)}},$$

$$p_1(x) = - \frac{\sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x)}{c_{11}^{(1)}},$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений примет вид

$$p_{n-1}^{(1)}(x) = c_{n-11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(1)} p_n(x),$$

$$p_{n-1}^{(2)}(x) = c_{n-11}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(2)} p_n(x),$$

$$y_{7+2(n-1)} = p_{n-1}(x), \quad y'_{7+2(n-1)} = y_{8+2(n-1)},$$

$$y'_{8+2(n-1)} = -p_{n-1}^{(2)}(x) + y_{7+2(n-1)} \left( \frac{j^2}{r_{n-1}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{r_{n-1}}.$$
(12)

Принимая во внимание, что в соотношениях (10)  $p = p_n$ , совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (9) и (12), составляет  $m = 8 + 2(n - 1)$ .

Объединенные системы уравнений (9), (12) решаются методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности и соответствующими однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки и жидкости

$$y_i|_{s=0} \delta_i + y_{i+4}|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \tag{13}$$

$$y_i|_{s=L} \delta_{i+4} + y_{i+4}|_{s=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \tag{14}$$

$$y_i|_{x=0} = 0, \quad i = 10, 12 \dots m/2, \tag{15}$$

$$y_i|_{x=L} = 0, \quad i = 10, 12 \dots m/2, \tag{16}$$

где  $\delta_i = 0$ , если заданы кинематические, и  $\delta_i = 1$ , если заданы статические граничные условия.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где  $C_k$  – некоторые константы и  $\mathbf{y}_j$  – совокупность линейно независимых решений объединённых систем, удовлетворяющих граничным условиям (13), (14). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (15), (16) получаем следующую алгебраическую систему для определения постоянных  $C_k$

$$\sum_{k=1}^{m/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = 1, m/2. \tag{17}$$

Искомая задача сводится к определению таких значений, при которых существует нетривиальное решение системы (17). Необходимым условием этого является равенство нулю определителя матрицы  $|f_{ij}(\omega)| = 0$ . Для вычисления

частот  $\omega$ , удовлетворяющих данному условию, используется сочетание пошаговой процедуры и метода деления пополам.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В численных примерах рассматриваются свободно опёртые ( $v = w = T_{11} = M_{11} = 0$ , SS), жёстко защемлённые ( $u = v = w = \theta_1 = 0$ , CC) на обоих краях или консольно закреплённые ( $T_{11} = 0$ ,  $S + 2H/R = 0$ ,  $M_{11} = 0$ ,  $Q_{11} + \bar{j}M_{12} = 0$ , CF) цилиндрические оболочки. Численными экспериментами установлено, что для всех представленных ниже расчётов, разбиение области решения в радиальном направлении на 15 точек обеспечивает вычисление собственных частот с подходящей точностью и приемлемой вычислительной эффективностью. Для представления результатов расчётов вводятся безразмерные параметры коэффициентов постели  $k_w$ ,  $k_p$  [27] и относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega(\alpha, k)$  как функции от угла намотки  $\alpha$  и жёсткости упругого основания  $k$

$$k_w = K_w (R^4/D) \cdot 10^{-3}, \quad k_p = K_p (R^2/D) \cdot 10^{-3}, \quad D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)],$$

$$\Omega(\alpha, k) = \frac{\omega(\alpha, k) - \omega(0^\circ, k)}{\omega(\alpha, k)} \cdot 100\%.$$

Здесь  $k = k_w = k_p$ ;  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Верификация результатов, получаемых в рамках описанного алгоритма, осуществлена на следующих примерах. В первом из них рассмотрена пустая двухслойная и трёхслойная цилиндрическая оболочка со средним радиусом  $R = 0.1905$  м, длиной  $L = 0.381$  м и толщиной  $h = 5 \cdot 10^{-4}$  м, изготовленная из бор-эпоксидной смолы, физико-механические характеристики для которой заимствованы из [22]. В таблице 1 представлены низшие собственные частоты колебаний  $\omega$  жёстко закреплённой на обоих краях (CC) слоистой цилиндрической оболочки при разных значениях угла намотки  $\alpha$ . Здесь же приведены результаты, полученные в рамках различных реализаций метода конечных элементов [13, 22, 28]. Имеет место хорошее согласование в сопоставляемых данных, особенно в тех случаях, когда решение основывается на аналогичной теории тонких оболочек.

В следующем примере анализируются колебания свободно опёртой (SS) изотропной цилиндрической оболочки ( $L = 0.41$  м,  $R = 0.3015$  м,  $h = 0.001$  м,  $E = 210$  ГПа,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>), полностью заполненной несжимаемой жидкостью ( $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>). Сопоставление низших собственных частот  $\omega$ , определённых в рамках описанного алгоритма, с известными решениями приведено в таблице 2. На основании этих данных можно заключить, что значения частот, полученных с использованием различных методов, разных теорий оболочек и моделей, описывающих поведение жидкости, достаточно близки друг к другу.



Таблица 1.

Сравнение низших собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) пустой жёстко закреплённой (СС) на обоих краях слоистой цилиндрической оболочки:  $k = 0$ .

$\alpha$	Схема укладки $[\alpha, -\alpha]$				Схема укладки $[\alpha, 0^\circ, -\alpha]$			
	Работа [22]	Работа [13]	Работа [28]	Расчёт	Работа [22]	Работа [13]	Работа [28]	Расчёт
$0^\circ$	261.41	261.09	261.13	261.13	261.41	261.09	261.13	261.13
$15^\circ$	351.75	351.21	351.01	351.01	337.63	337.31	337.03	337.03
$30^\circ$	369.56	366.50	366.39	366.39	397.58	396.18	395.95	395.95
$45^\circ$	340.95	332.78	332.64	332.64	446.24	443.98	443.78	443.78
$60^\circ$	359.36	352.76	352.56	352.56	487.64	485.94	485.69	485.69
$75^\circ$	382.24	380.14	380.13	380.13	465.54	464.96	464.63	464.63
$90^\circ$	333.43	332.49	332.53	332.53	370.71	370.07	370.09	370.09

Таблица 2.

Сравнение собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) свободно опертой (SS) изотропной цилиндрической оболочки, полностью заполненной жидкостью:  $k = 0$ .

$j$	Работа [29]	Работа [30]	Работа [31]	Работа [32]	Работа [33]	Работа [15]	Расчёт
8	114.8	118.1	118	119	117.2	117.6	117.9
9	123.9	126.8	124	128	125.9	126.1	126.5
10	142.7	145.4	144	146	144.6	144.6	145.2
11	169.4	171.9	171	173	171.2	170.9	171.8
12	202.4	204.9	204	206	–	203.6	204.8
13	241.0	243.5	243	245	–	241.7	243.4

В таблице 3 представлено сравнение с результатами работы [29], где с помощью метода распространяющихся волн выполнен анализ цилиндрических оболочек, полностью погруженных в упругое основание. Здесь для шести окружных гармоник приведены низшие частоты  $\omega$  (Гц), вычисленные как для пустой оболочки, так и оболочки с жидкостью при различных комбинациях коэффициентов постели  $(K_w, K_p)$ . Из представленных данных следует, что получаемые в рамках разработанного алгоритма результаты, идеально согласуются в случае пустых оболочек и имеют незначительные отличия для оболочек с жидкостью, которые снижаются с повышением номера окружной гармоники  $j$ . Отметим, что различие в результатах с работой [29] имеет место и при отсутствии упругого основания, как это видно из таблицы 2.

Отметим, что в работах [15,16] также используется метод ортогональной прогонки Годунова, но для преобразования волнового уравнения задействован метод прямых, требующий для обеспечения сходимости решения значительно большей степени дискретизации области жидкости. Различие в результатах между этими методами становится незначительным на гармониках с минимальной частотой колебаний. В отношении результатов, представленных в таблицах 2 и 3, во внимание также следует принимать тот факт, что не во всех источниках указаны граничные условия, задаваемые для области жидкости. В следующих вычислениях будут использованы оболочки, параметры материала которых

соответствуют данным из первого примера и следующими геометрическими размерами:  $R=25$  м,  $h=0.03$  м,  $L=30$  м.

Таблица 3.

Сравнение собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) свободно опёртой пустой (I) и полностью заполненной жидкостью (II) цилиндрической оболочки, лежащей на упругом основании с разными комбинациями коэффициентов постели  $(K_w, K_p)$ .

$j$	$(1.5 \cdot 10^7 \text{ Па/м}, 0)$					$(0, 1.5 \cdot 10^7 \text{ Па} \cdot \text{м}^2)$				
	Работа [29]		Работа [16]		Расчёт	Работа [29]		Работа [16]		Расчёт
	I	II	I	II	II	I	II	I	II	II
8	354.2	145.7	354.2	149.3	149.7	6026.2	2456.2	6026.2	2537.2	2547.9
9	360.3	155.9	360.3	158.6	159.2	6737.2	2887.5	6737.2	2962.3	2978.2
10	384.2	173.7	384.2	175.9	176.7	7452.5	3336.9	7452.6	3404.7	3427.2
11	421.9	198.2	421.9	199.9	200.9	8170.9	3802.6	8170.9	3862.4	3892.9
12	470.6	228.7	470.6	230.1	231.4	8891.7	4282.9	8891.8	4333.5	4373.7
13	528.4	264.9	528.4	265.7	267.5	9614.6	4776.6	9614.6	4816.7	4868.2

В работе [34] проанализировано изменение частот симметричных и несимметричных четырёхслойных перекрёстно армированных пустых оболочек от угла намотки. Отмечено, что с ростом угла армирования номер окружной гармоники, соответствующий минимальной частоте, постепенно снижается благодаря повышению жёсткости в этом направлении. Волновое число для низшей моды увеличивается с ростом ограничений на краях оболочки, и наименьшее значение имеет место в случае консольного закрепления. В полной мере эти выводы относятся и к слоистым оболочкам, содержащие жидкость, что демонстрируется данными, приведёнными на рис.2.

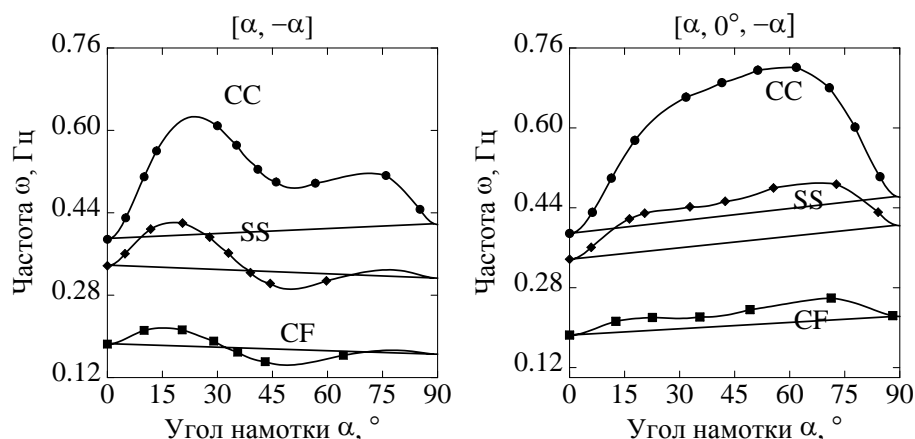


Рис.2. Зависимости низших собственных частот колебаний  $\omega$  двухслойной и трёхслойной цилиндрической оболочки, полностью заполненной жидкостью, от угла намотки  $\alpha$ :  $k = 0$ .

Здесь для двух схем укладки показаны зависимости низшей частоты колебаний  $\omega$  от угла намотки  $\alpha$ , полученные для оболочек с разными комбинациями граничных условий, полностью заполненных сжимаемой жидкостью ( $c = 1500$  м/с). Символами обозначены места смены окружной формы колебаний  $j$  с минимальной частотой, которые для разных граничных условий

образуют следующие последовательности их изменений от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ : CC —  $12 \rightarrow \dots \rightarrow 15 \rightarrow \dots \rightarrow 8$ ; SS —  $12 \rightarrow \dots \rightarrow 14 \rightarrow \dots \rightarrow 8$ ; CF —  $10 \rightarrow 11 \rightarrow \dots \rightarrow 6$ . Для двухслойного и трёхслойного пакетов эти последовательности совпадают, но углы армирования, при которых осуществляется смена окружной моды, различаются. Длина приведённых рядов изменений окружных мод при росте угла армирования определяется не только комбинацией граничных условий, но и геометрическими размерами конструкции [13,28].

Наличие упругого основания приводит к повышению частотного спектра, как пустых оболочек, так и оболочек, содержащих жидкость [15,16,35]. Слоистая структура материала привносит свои особенности, которые демонстрируются на рис.3-4. Здесь показаны зависимости низшей частоты колебаний  $\omega$  от угла армирования  $\alpha$ , полученные при различных значениях безразмерного коэффициента постели  $k$  для трёхслойных (рис.3) и двухслойных (рис.4) оболочек с разными комбинациями граничных условий. Символами, как и ранее, отображены точки смены окружной гармонике с минимальной частотой. Кривые построены для коэффициента постели  $k$ , изменяющегося от  $k=0$  до  $k=6$  с шагом 1.

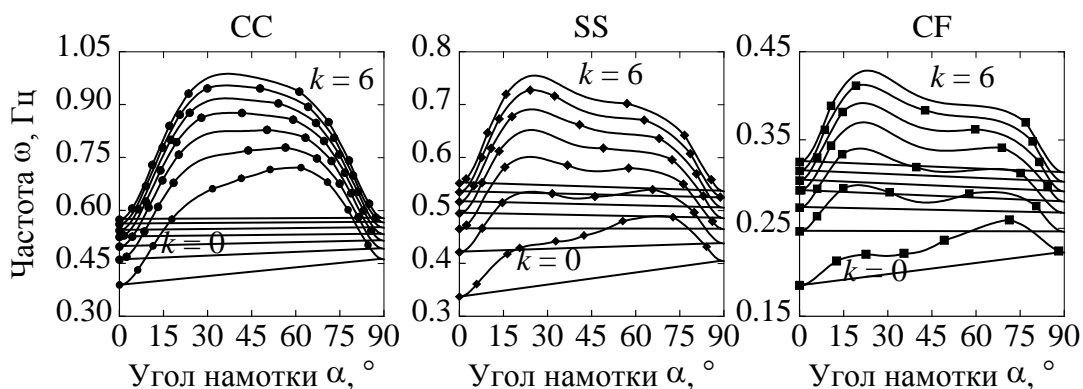


Рис.3. Зависимости низших собственных частот колебаний  $\omega$  трёхслойной цилиндрической оболочки с жидкостью от угла намотки  $\alpha$ , полученные при различных значениях жёсткости упругого основания  $k$ .

Из представленных на рис.3 данных следует, что для трёхслойных оболочек с повышением жёсткости упругого основания максимальная фундаментальная частота смещается в область более низких углов армирования для любых граничных условий. При этом в связи с ростом жёсткости всей системы в целом номер окружной моды, соответствующий минимальной частоте, уменьшается. Например, приведённая выше последовательность для жёсткого закрепления при  $k=3$  преобразуется к ряду  $7 \rightarrow \dots \rightarrow 12 \rightarrow \dots \rightarrow 7$ , а при  $k=6$  к  $6 \rightarrow \dots \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow 6$ . Для двухслойного пакета указанная особенность отсутствует. Вместо этого, для свободно опёртых и жёстко закреплённых оболочек определённая комбинация параметров приводит к появлению области с балочной модой колебаний. На рис.4 она имеет характерное проявление, выражающееся в нарушении плавного изменения частоты с ростом угла армирования. Переход к окружной гармонике  $j=1$  и обратно происходит скачкообразно. Для тех же граничных условий (CC) имеют место следующие ряды:  $k=3 - 5 \rightarrow \dots \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow \dots \rightarrow 6$ ;  $k=6 - 4 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow \dots \rightarrow 5$ . Эти последовательности помимо балочной моды отличаются также и меньшим

номером окружной гармоники по сравнению с трёхслойными пакетами. Для обоих граничных условий область с гармоникой  $j=1$  начинается при невысоких углах армирования, но значительно отличающейся жёсткости упругого основания: СС –  $\alpha = 21^\circ$ ,  $k \approx 2.3$ ; SS –  $\alpha = 22^\circ$ ,  $k \approx 4.05$ .

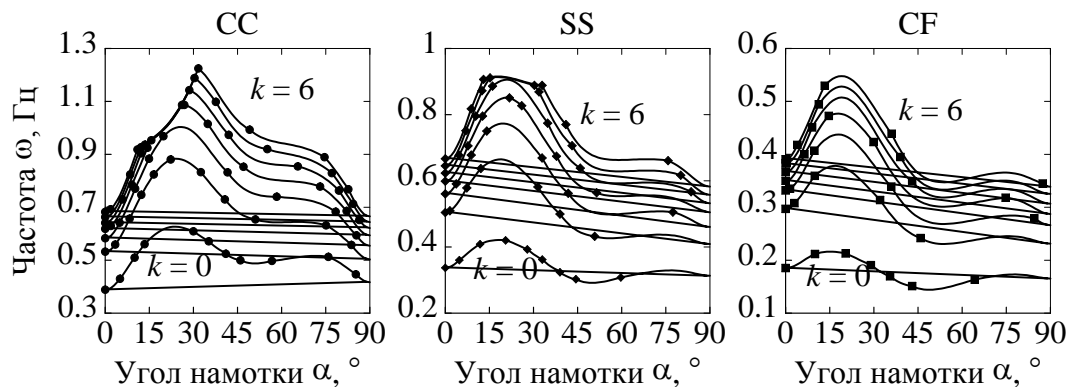


Рис.4. Зависимости низших собственных частот колебаний  $\omega$  двухслойной цилиндрической оболочки с жидкостью от угла намотки  $\alpha$ , полученные при различных значениях жёсткости упругого основания  $k$ .

После перехода к балочной моде частота колебаний становится фактически неизменной и не реагирует на повышение жёсткости упругого основания. Это демонстрируется данными приведёнными на рис.5. Здесь показаны зависимости нижней частоты колебаний  $\omega$  от безразмерного коэффициента постели  $k$ , полученные при различных значениях угла армирования  $\alpha$  для двухслойной оболочки с разными комбинациями граничных условий. При фиксированном угле намотки минимальный номер окружной гармоники снижается с ростом параметра  $k$ , составляя, например, следующие последовательности для оболочек с жёстким закреплением:  $\alpha = 10^\circ - 14 \rightarrow \dots \rightarrow 5$ ;  $\alpha = 20^\circ - 15 \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 1$ . Для свободно опёртых оболочек:  $\alpha = 15^\circ - 14 \rightarrow \dots \rightarrow 7 \rightarrow 1$ ;  $\alpha = 30^\circ - 12 \rightarrow \dots \rightarrow 8 \rightarrow 1$ .

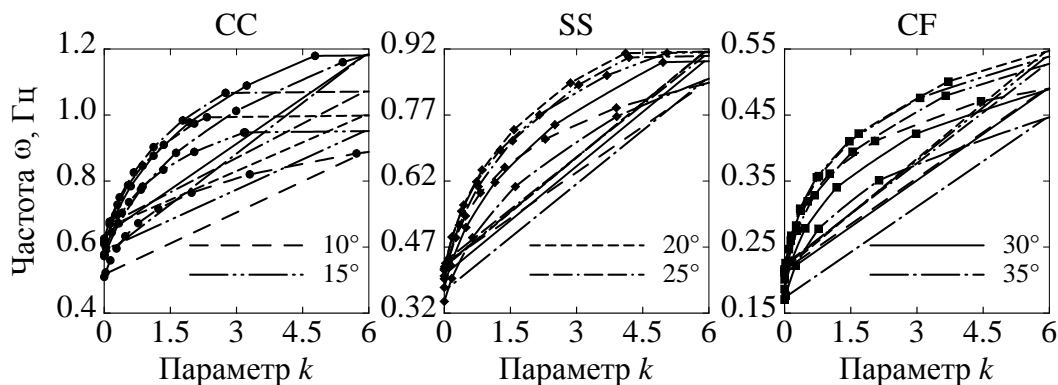


Рис.5. Зависимости низших собственных частот колебаний  $\omega$  двухслойной цилиндрической оболочки от жёсткости упругого основания  $k$ , полученные при различных значениях угла намотки  $\alpha$ .

Таким образом, для слоистых оболочек, содержащих жидкость, и погруженных в упругое основание низшим частотам может соответствовать балочная мода колебаний. Детально оценить зависимость минимальных частот колебаний от схемы укладки, угла армирования и жёсткости упругого основания

для оболочек с разными граничными условиями предоставляют данные, показанные на рис.6. Приведённые здесь поверхности относительного изменения низшей собственной частоты колебаний  $\Omega$  дают более наглядную информацию о распределении частотного спектра. В частности, на показанных поверхностях видны как неровности, обусловленные сменой окружной гармоники с минимальной частотой, так и области, соответствующие балочной моде колебаний. Оценивая колебательные характеристики расположенных на упругом основании слоистых композитов с жидкостью, можно заключить, что для рассмотренных конфигураций трёхслойная схема укладки является более предпочтительной, так как она обеспечивает несколько большую максимизацию низшей частоты по сравнению с однонаправленным материалом, не содержит явных зон ее минимизации, а низкочастотные колебания не осуществляются на окружных гармониках, неблагоприятных с точки зрения некоторых динамических нагрузок.

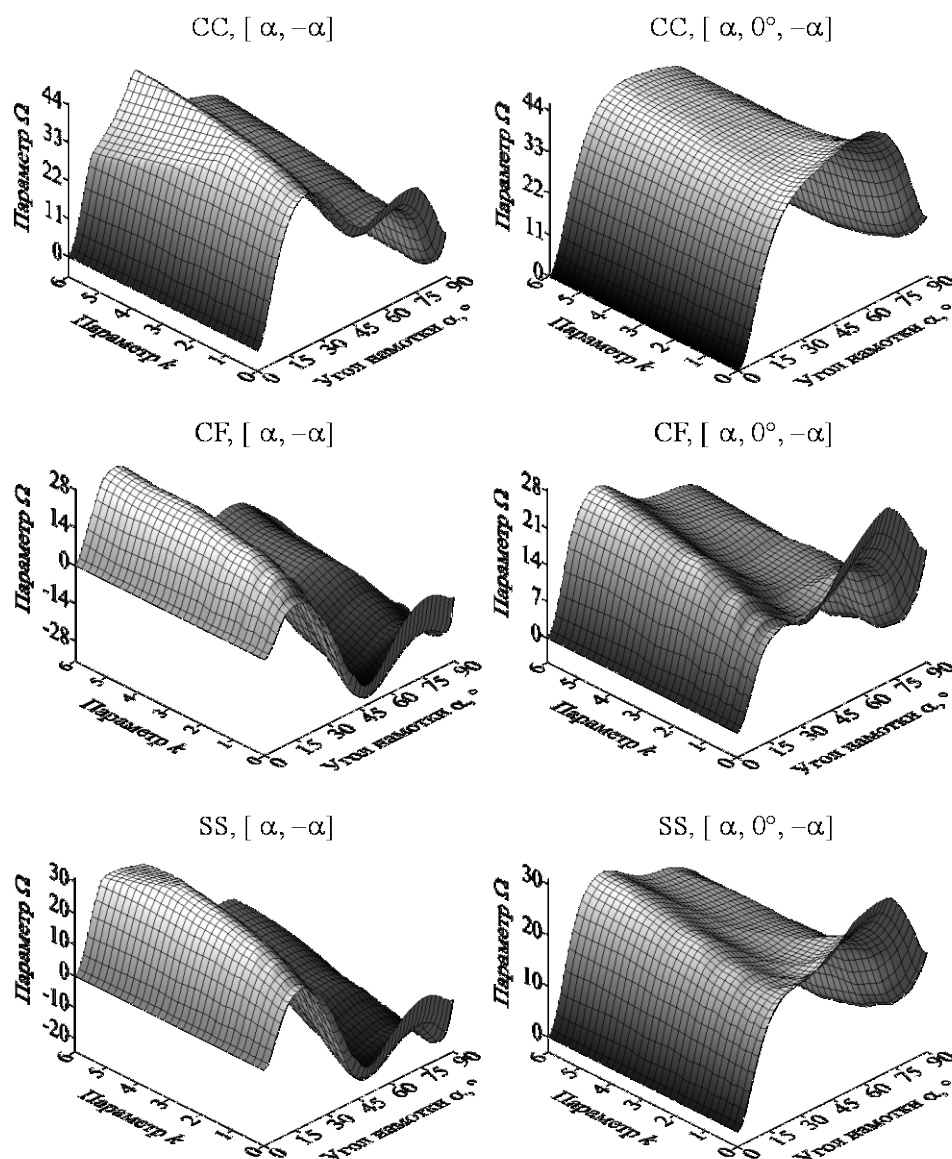


Рис.6. Поверхности относительного изменения низшей частоты колебаний  $\Omega$  двухслойной и трёхслойной цилиндрической оболочки с различными

комбинациями граничных условий как функции угла армирования  $\alpha$  и жёсткости упругого основания  $k$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты численного исследования собственных частот колебаний круговых композитных цилиндрических оболочек, полностью заполненных идеальной сжимаемой жидкостью. Конструкция целиком окружена двухпараметрической упругой средой Пастернака. Проанализировано влияние разных схем укладки слоистого композита на минимальные частоты колебаний оболочек, имеющих разнообразные граничные условия при различных значениях угла армирования и жёсткости упругого основания. В результате вычислительных экспериментов для рассмотренных конфигураций выявлено различие в динамическом поведении двухслойных и трёхслойных оболочек. Продемонстрировано, что варьируя угол намотки композитного материала и жёсткость упругого основания изменение окружной гармоники, отвечающей минимальной частоте, можно осуществлять в широком диапазоне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
2. Muggeridge D.B., Buckley T.J. *Flexural vibration of orthotropic cylindrical shells in a fluid medium* // AIAA J. – 1979. – Vol.17. – No.9. – Pp.1019-1022.
3. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. *Free vibration of a laminated composite circular cylindrical shell partially filled with fluid* // Compos. B Eng. – 1997. – Vol.28. – No.4. – Pp.359-374.
4. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. *Free vibration of a partially fluid-filled cross-ply laminated composite circular cylindrical shell* // J. Acoust. Soc. Am. – 1997. – Vol.101. – No.2. – Pp.909-917.
5. Toorani M.H., Lakis A.A. *Dynamics behavior of axisymmetric and beam-like anisotropic cylindrical shells conveying fluid* // Journal of Sound and Vibration. – 2003. – Vol.259. – No.2. – Pp.265-298.
6. Okazaki K., Tani J., Qiu J., Kosugo K. *Vibration test of a cross-ply laminated composite circular cylindrical shell partially filled with liquid* // Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C. – 2007. – Vol.73. – No.727. – Pp.724-731.
7. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Viswanathan K.K. *Free vibration of anti-symmetric angle-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory* // Compos. Struct. – 2018. – Vol.193. – Pp.189-197.
8. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Ghostine R., Lee J.H., Viswanathan K.K. *Free vibration of cross-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory* // Int. J. Press. Vessel. Pip. – 2019. – Vol.170. – Pp.73-81.
9. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K. *Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical shells filled with fluid* // PLoS ONE. – 2019. – Vol.14. – No.7. – e0219089.

10. Thinh T.I., Nguyen M.C. *Dynamic stiffness method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid* // Appl. Math. Model. – 2016. – Vol.40. – No.21-22. – Pp.9286-9301.
11. Zhu H.-Z., Wu J.-H. *Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method* // Acta Mech. – 2020. – Vol.231. – No.9. – Pp.3961-3978.
12. Yao S., Zhang Y., Xue J., Jin F., He Z. *Free vibration of non-shallow, laminated cylinders submerged in a fluid with general boundary conditions* // Appl. Ocean Res. – 2022. – Vol.125. – 103232.
13. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. *Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells* // Struct. Eng. Mech. – 2022. – Vol.81. – No.6. – Pp.769-780.
14. Пастернак П.Л. *Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели.* – М.: Госстройиздат, 1954. – 56 с.
15. Bochkarev S.A. *Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation* // Int. J. Struct. Stab. Dyn. – 2022. – Vol.22. – 2250071.
16. Бочкарёв С.А. *Численное моделирование собственных колебаний покоящейся на упругом основании цилиндрической оболочки, частично заполненной жидкостью* // Вычислительные технологии. – 2022. – Т.27. – №4. – С.15-32.
17. Paknejad R., Ghasemi F.A., Fard M.K. *Natural frequency analysis of multilayer truncated conical shells containing quiescent fluid on elastic foundation with different boundary conditions* // Int. J. Appl. Mech. – 2021. – Vol.13. – No.7. – 2150075.
18. Годунов С.К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т.1: Краевые задачи. Учебное пособие.* – Новосибирск: НГУ, 1994. – 264 с.
19. Юдин А.С., Сафроненко В.Г. *Виброакустика структурно-неоднородных оболочек.* – Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. – 424 с.
20. Юдин А.С., Амбалова Н.М. *Вынужденные колебания коаксиальных подкрепленных цилиндрических оболочек при взаимодействии с жидкостью* // Прикладная механика. – 1989. – Т.25. – №12. – С.63-68.
21. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. *Собственные колебания усечённых конических оболочек, содержащих жидкость* // ПММ. – 2022. – Т.86. – №4. – С.505-526.
22. Sheinman I., Greif S. *Dynamic analysis of laminated shells of revolution* // J. Compos. Mater. – 1984. – Vol.18. – No.3. – Pp.200-215.
23. Кармишин А.В., Лясковец В.А., Мяченков В.И. Фролов А.Н. *Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций.* – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
24. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов В.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов.* – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
25. Авербух А.З., Вецман Р.И., Генкин М.Д. *Колебания элементов конструкции в жидкости.* – М.: Наука, 1987. – 158 с.
26. Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering.* – London: Springer-Verlag, 2000. – 340 p.

27. Khalifa M.A. *Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation* // J. Vib. Control. – 2016. – Vol.22. – No.1. – Pp.37-50.
28. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. *Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid* // IOP J. Phys.: Conf. Ser. – 2021. – Vol.1945. – 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012034.
29. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. *Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations* // Acta Mech. – 2011. – Vol.216. – No.1-4. – Pp.17-28.
30. Shahbazzabar A., Izadi A., Sadeghian M., Kazemi M. *Free vibration analysis of FGM circular cylindrical shells resting on the Pasternak foundation and partially in contact with stationary fluid* // Appl. Acoust. – 2019. – Vol.53. – Pp.87-101.
31. Gonçalves P.B., Batista R.C. *Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid* // Journal of Sound and Vibration. – 1987. – Vol.113. – No.1. – Pp.59-70.
32. Gonçalves P.B., Ramos N.R.S.S. *Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid* // Journal of Sound and Vibration. – 1996. – Vol.195. – No.3. – Pp.429-444.
33. Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A. *Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom* // Journal of Sound and Vibration. – 1998. – Vol.213. – No.2. – Pp.259-299.
34. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. *Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges* // AIAA J. – 1992. – Vol.30. – No.3. – Pp.790-796.
35. Бочкарёв С.А. *Собственные колебания цилиндрической оболочки, частично лежащей на упругом основании* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т.10. – №4. – С.406-415.

## REFERENCES

1. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
2. Muggeridge D.B., Buckley T.J. *Flexural vibration of orthotropic cylindrical shells in a fluid medium*. AIAA J., 1979, Vol.17, No.9, Pp.1019-1022.
3. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. *Free vibration of a laminated composite circular cylindrical shell partially filled with fluid*. Compos. B Eng., 1997, Vol.28, No.4, Pp.359-374.
4. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. *Free vibration of a partially fluid-filled cross-ply laminated composite circular cylindrical shell*. J. Acoust. Soc. Am., 1997, Vol.101, No.2, Pp.909-917.
5. Toorani M. H., Lakis A. A. *Dynamics behavior of axisymmetric and beam-like anisotropic cylindrical shells conveying fluid*. Journal of Sound and Vibration, 2003, Vol.259, No.2, Pp.265-298.
6. Okazaki K., Tani J., Qiu J., Kosugo K. *Vibration test of a cross-ply laminated composite circular cylindrical shell partially filled with liquid*. Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C, 2007, Vol.73, No.727, Pp.724-731.



7. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Viswanathan K.K. *Free vibration of anti-symmetric angle-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory*. Compos. Struct., 2018, Vol.193, Pp.189-197.
8. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Ghostine R., Lee J.H., Viswanathan K.K. *Free vibration of cross-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory*. Int. J. Press. Vessel. Pip., 2019, Vol.170, Pp.73-81.
9. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K. *Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical shells filled with fluid*. PLoS ONE, 2019, Vol.14, No.7, e0219089.
10. Thinh T.I., Nguyen M.C. *Dynamic stiffness method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid*. Appl. Math. Model., 2016, Vol.40, No.21-22, Pp.9286-9301.
11. Zhu H.-Z., Wu J.-H. *Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method*. Acta Mech., 2020, Vol.231, No.9, Pp.3961-3978.
12. Yao S., Zhang Y., Xue J., Jin F., He Z. *Free vibration of non-shallow, laminated cylinders submerged in a fluid with general boundary conditions*. Appl. Ocean Res., 2022, Vol.125, 103232.
13. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. *Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells*. Struct. Eng. Mech., 2022, Vol.81, No.6. Pp.769-780.
14. Pasternak P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshhi dvukh koehffitsientov posteli [On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants]*. Moskva, Gosstrojizdat, 1954, 56 p.
15. Bochkarev S.A. *Natural vibrations of a cylindrical shell with fluid partly resting on a two-parameter elastic foundation*. Int. J. Struct. Stab. Dyn., 2022, Vol.22, 2250071.
16. Bochkarev S.A. *Chislennoe modelirovanie sobstvennykh kolebanij pokoyashhejsya na uprugom osnovanii tsilindricheskoj obolochki, chastichno zapolnennoj zhidkost'yu [Numerical simulation of natural vibrations of a cylindrical shell partially filled with fluid and embedded in an elastic foundation]*. Vychislitel'nye tekhnologii, 2022, Vol.27, No.4, Pp.15-32.
17. Paknejad R., Ghasemi F.A., Fard M.K. *Natural frequency analysis of multilayer truncated conical shells containing quiescent fluid on elastic foundation with different boundary conditions*. Int. J. Appl. Mech., 2021, Vol.13, No.7, 2150075.
18. Godunov S.K. *Ordinary differential equations with constant coefficients*. Providence, American Mathematical Society, 1997, 283 p.
19. Yudin A.S., Safronenko V.G. *Vibroakustika strukturno-neodnorodnykh obolochek [Vibroacoustics of structurally inhomogeneous shells]*. Rostov-na-Donu, Izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta, 2013, 424 p.
20. Yudin A.S., Ambalova N.M. *Forced vibrations of coaxial reinforced cylindrical shells during interaction with a fluid*. Int. Appl. Mech., 1989, Vol.25, No.12, Pp.1222-1227.
21. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. *Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid*. Mech. Solids, 2022, Vol.57, No.8, Pp.1971-1986.
22. Sheinman I., Greif S. *Dynamic analysis of laminated shells of revolution*. J. Compos. Mater., 1984, Vol.18, No.3, Pp.200-215.

23. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolocheknykh konstruksij [The statics and dynamics of thin-walled shell structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1975, 376 p.
24. Alfutov N.A., Zinov'ev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Analysis of multilayer plates and shells of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1984, 264 p.
25. Averbukh A.Z., Veitsman R.I., Genkin M.D. *Kolebaniya ehlementov konstruksii v zhidkosti [Vibration of structural elements in fluid]*. Moskva, Nauka, 1987, 158 p.
26. Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*. London, Springer-Verlag, 2000, 340 p.
27. Khalifa M.A. *Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation*. J. Vib. Control, 2016, Vol.22, No.1, Pp.37-50.
28. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. *Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid*. IOP J. Phys., Conf. Ser., 2021, Vol.1945, 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1945/1/012034
29. Shah A.G., Mahmood T., Naeem M.N., Arshad S.H. *Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations*. Acta Mech., 2011, Vol.216, No.1-4, Pp.17-28.
30. Shahbazzabar A., Izadi A., Sadeghian M., Kazemi M. *Free vibration analysis of FGM circular cylindrical shells resting on the Pasternak foundation and partially in contact with stationary fluid*. Appl Acoust., 2019, Vol.53, Pp.87-101.
31. Gonçalves P.B., Batista R.C. *Frequency response of cylindrical shells partially submerged or filled with liquid*. Journal of Sound and Vibration, 1987, Vol.113, No.1, Pp.59-70.
32. Gonçalves P.B., Ramos N.R.S.S. *Free vibration analysis of cylindrical tanks partially filled with liquid*. Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol.195, No.3, Pp.429-444.
33. Amabili M., Païdoussis M.P., Lakis A.A. *Vibrations of partially filled cylindrical tanks with ring-stiffeners and flexible bottom*. Journal of Sound and Vibration, 1998, Vol.213, No.2, Pp.259-299.
34. Narita Y., Ohta Y., Yamada G., Kobayashi Y. *Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges*. AIAA J., 1992, Vol.30, No.3, Pp.790-796.
35. Bochkarev S.A. *Free vibrations of a cylindrical shell partially resting on elastic foundation*. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2018, Vol.59, No.7, Pp.1242-1250.

*Поступила в редакцию 19 апреля 2023 года.*

---

Сведения об авторе:

Бочкарёв Сергей Аркадьевич – к.ф.-м.н., с.н.с., Отдел комплексных проблем механики деформируемых твердых тел, ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [bochkarev@icmm.ru](mailto:bochkarev@icmm.ru)