



РЕОНОМНЫЕ СВОЙСТВА БРЕКЕРНОЙ РЕЗИНЫ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ*

Шешенин С.В., Бушманов О.Е., Чистяков П.В., Артамонова Н.Б.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В работе исследовано реономное поведение резины, используемой в шинах в брекере, при квазистатическом нагружении с постоянной скоростью. На основе проведенных экспериментов сделан вывод, что вязкие свойства следует учитывать даже для достаточно медленного квазистатического нагружения. Причиной служит скачок скорости в начале нагружения. Такое нагружение реализуется в опыте, называемом тестом на разрыв. Смысл этого испытания состоит в измерении силы в зависимости от глубины внедрения индентера при его внедрении в накачанную шину в радиальном направлении вплоть до разрыва или соприкосновения с ободом колеса. Нагружение в таком тесте происходит достаточно медленно. Его вполне можно считать квазистатическим. Таким образом, проведенное исследование реономного поведения брекерной резины и резинокордного слоя брекера представляет интерес с прикладной точки зрения.

Для аппроксимации экспериментальных результатов использованы две модели. Первая – это обобщенная модель Максвелла, вторая – ее модификация на основе идеи референсной кривой. Получены материальные константы рассматриваемых моделей. Использование модели Максвелла не привело к достаточному по точности описанию измеренных диаграмм напряжение – деформация для разных скоростей деформации. Однако показано, что диаграммы напряжение – деформация хорошо приближаются с помощью модели на основе референсной кривой.

Для анализа влияния вязкости на развитие прогиба пластины численно решена задача цилиндрического изгиба. Выявлено, что при медленных нагружениях прогибы достаточно различаются в зависимости от скорости нагружения как при использовании геометрически линейной модели, так и геометрически нелинейной.

Ключевые слова: резина брекера; резинокордный слой брекера; тест на разрыв; реономное поведение; референсная кривая задача на изгиб; метод конечных элементов

RHEONOMIC PROPERTIES OF BREAKER RUBBER UNDER QUASI-STATIC LOADING

Sheshenin S.V., Bushmanov O.E., Chistyakov P.V., Artamonova N.B.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

* Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

ABSTRACT

The paper presents the experimental study of the rheonomic behavior of rubber used in a tire breaker under quasi-static loading at a constant strain speed. On the basis of the experiments carried out, it was concluded that viscous properties should be taken into account even for fairly slow quasi-static loading. The reason is a jump in speed at the start of loading. Such loading type is employed in so-called breaker test. The aim of this test consists in measuring the loading force versus the depth of indenter penetration as the indenter penetrates an inflated tire in the radial direction until the tire breaks or the indenter reaches the wheel rim. Loading in such a test is rather slow. It can be reasonably considered as quasi-static. Thus, the study of the rheonomic behavior of the breaker rubber and the breaker rubber-cord layer is also of interest from a practical point of view.

Two models were used to approach the experimental results. The first is a generalized Maxwell model, the second is its modification based on the idea of a reference curve. Both models' material parameters were obtained. The use of the Maxwell model did not lead to a sufficiently accurate approximation of the measured stress-strain diagrams for different strain rates. However, the experimental stress-strain diagrams have been shown to be fitted well with the reference curve model.

To analyze the effect of viscosity on the development of plate deflection, the problem of cylindrical bending was numerically solved. For slow loading, it was found that the deflections are quite different depending on the loading rate, both when using a geometrically linear model and a geometrically nonlinear one.

Keywords: breaker rubber; breaker rubber-cord layer; breaker test; rheonomic behavior; reference curve; bending problem; finite element method

ВВЕДЕНИЕ

Реономные свойства резины пневматических шин обычно изучают в связи с проблемой моделирования потери механической энергии при осцилляциях [1,2], возникающих, например, при качении шины. Однако в работе показывается, что вязкоупругие свойства резины, используемой в шинной промышленности, имеет смысл учитывать не только в связи с отмеченной задачей, но также и в случае достаточно медленного квазистатического нагружения. Например, такое нагружение реализуется в так называемом тесте на разрыв. Смысл этого испытания, практикуемого в зарубежных странах, состоит в измерении прочности автомобильной пневматической шины при внедрении в накачанную шину индентера в радиальном направлении вплоть до разрыва или соприкосновения с ободом колеса. Вязкоупругость здесь проявляется за счет скачка скорости в начале нагружения. Поэтому описываемое ниже исследование вязкоупругих свойств брекерной резины и резинокордного слоя брекера представляет интерес с прикладной точки зрения, поскольку брекер является одним из основных силовых элементов конструкции шины.

В связи с отмеченной задачей возникает необходимость выбора модели для описания процессов деформирования брекерной резины при квазистатических нагружениях. При достаточно больших деформациях, имеющих место в тесте на разрыв, резина проявляет нелинейное поведение. Существуют различные модели нелинейной вязкоупругости. Среди них квазилинейная и главная квазилинейная теории [3], одномерная теория нелинейной вязкоупругости [4]. Популярным является сочетание определяющих соотношений гиперупругости и линейной вязкоупругости [5]. Часто в таком случае модели нелинейной вязкоупругости строятся как аддитивное

и мультипликативное обобщения модели Максвелла. Популярной также является модель Бергстрема-Бойса [6].

В работе описаны эксперименты на одноосное растяжение с постоянной скоростью пластин брекерной резины и двухслойного резинокорда. Получены данные о напряженно-деформированном состоянии для различных скоростей деформирования. Произведена аппроксимация полученных данных такими моделями, как обобщенная модель Максвелла и модель с использованием референсной кривой [7,8]. Эта модель позволяет избавиться от проведения эксперимента с крайними скоростями: максимально большой и предельно медленной. Оценена применимость моделей для описания деформационных процессов для скоростей разной величины. Получены материальные константы.

Чтобы оценить влияние реономности при квазистатическом нагружении пластины из резины, решена модельная задача об изгибе пластины равномерно распределенной нагрузкой. В опыте на разрыв резинокордные слои испытывают состояния растяжения с изгибом. Отмеченная задача решена методом конечных элементов. На основании полученных данных сделаны выводы о зависимости развития прогиба во времени от скорости приложения нагрузки.

1. АДДИТИВНОЕ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В общем случае определяющее соотношение линейной анизотропной вязкоупругости для нестареющего материала выглядит следующим образом [1,3,4]

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t-\tau) d\varepsilon_{kl}(\tau),$$

где $R_{ijkl}(t)$ – функции релаксации.

Считаем, что в случае резинокорда вязкоупругими свойствами обладает только резина, в то время как стальной корд представляет из себя линейно упругий материал. Также считаем, что для резины объемная релаксация проявляется существенно меньше сдвиговой, т.е. можно полагать, что $R_{vol} = 0$. Следовательно для резины и корда имеем определяющие соотношения вида

$$\mathbf{s}(t) = \int_0^t R_{sh}(t-\tau) d\mathbf{e}(\tau),$$

$$\sigma = K\theta,$$

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c,$$

где \mathbf{s} , \mathbf{e} – девиаторы напряжений и деформаций, σ , τ – среднее гидростатическое напряжение и объемная деформация, R_{sh} – функция сдвиговой релаксации, σ_c , ε_c – одномерные напряжения и деформация в корде.

При одноосном напряженном состоянии определяющее соотношение выглядит следующим образом

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau). \quad (1)$$

В обобщенной модели Максвелла в теории линейной вязкоупругости функции релаксации принимают вид

$$R(t) = C_\infty + \sum_{k=1}^n C_k \exp\left(-\frac{t}{t_k}\right).$$

Тогда

$$s_{ij} = C_{\infty} e_{ij}(t) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n C_k e^{-\frac{t-\tau}{t_k}} \right) de_{ij}(\tau). \quad (2)$$

Широко известны два варианта обобщения данной модели (2) для физически нелинейного материала – аддитивный и мультипликативный. В первом случае определяющее соотношение принимает вид

$$s_{ij} = \frac{\partial W_{\infty}}{\partial e_{ij}}(t) + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^n C_k e^{-\frac{t-\tau}{t_k}} \right) de_{ij}(\tau), \quad (3)$$

где W_{∞} – упругий потенциал предельно медленного нагружения, C_k, t_k – параметры модели, соответственно, релаксационные модули и времена релаксации. В случае мультипликативного обобщения

$$s_{ij} = \int_0^t \left(\gamma_{\infty} + \sum_{k=1}^n \gamma_k e^{-\frac{t-\tau}{t_k}} \right) d \left[\frac{\partial W_0}{\partial e_{ij}}(\tau) \right], \quad (4)$$

где W_0 – упругий потенциал предельно быстрого нагружения. Параметры $\gamma_i, \gamma_{\infty}$ удовлетворяют условию $\gamma_{\infty} + \sum_{k=1}^n \gamma_k = 1$. Модель (4) описана в документации ANSYS.

Гиперупругая составляющая тензора напряжений в соотношениях (3) и (4) получается дифференцированием по соответствующим компонентам тензора деформаций упругого потенциала W . Для изотропных материалов потенциал является функцией от трех инвариантов тензора меры деформации Коши-Грина $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$. Здесь \mathbf{F} – деформационный градиент [9], т.е.

$$W = W(I_1, I_2, I_3),$$

где $I_1 = tr(\mathbf{C})$, $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(C^2))$, $I_3 = det(\mathbf{C})$. При этом потенциал обычно представляют в виде сдвиговой и объемной частей [9], т.е.

$$W = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{vol}(I_3),$$

где $\bar{I}_1 = I_1(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-2/3} I_1$, $\bar{I}_2 = I_2(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-4/3} I_2$, $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C}$, $J = det(\mathbf{F})$.

В случае, когда деформации не превышают 20%, сдвиговая часть гиперупругого потенциала хорошо описывается потенциалом Муни, имеющим две константы

$$W_{sh} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3),$$

где c_{10}, c_{01} – параметры материала. Объемная составляющая потенциала часто принимается в виде квадратичного потенциала

$$W_{vol}(J) = \frac{K}{2}(J - 1)^2.$$

Для экспериментального определения констант c_{10}, c_{01} предполагают полную несжимаемость материала. Тогда в главных осях напряжения выражаются в виде

$$\sigma_{\alpha} = \lambda_{\alpha} \partial \frac{W^{sh}}{\partial \lambda_{\alpha}} + \sigma.$$

В опыте на одноосное растяжение $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ и $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$. Тогда определяющие соотношения принимают вид

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \mu \left[(1 + \beta) \lambda_1^2 - (1 - \beta) \lambda_1^{-2} \right] + \sigma,$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{2} \mu \left[(1 + \beta) \lambda_\beta^2 - (1 - \beta) \lambda_\beta^{-2} \right] + \sigma = 0, \quad \beta = 2, 3.$$

где $\mu = 2(c_{10} + c_{01})$, $\beta = 2(c_{10} - c_{01})/\mu$. Вычитая из первого уравнения второе, исключаем гидростатическое давление σ

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \mu \left((1 + \beta) \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) - (1 - \beta) \left(\frac{1}{\lambda^2} - \lambda \right) \right).$$

Для получения из экспериментальных данных гиперупругих параметров μ , β был использован метод спрямляющих координат.

2. ПРОВЕДЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Были проведены опыты по одноосному растяжению до деформации 10% пластин брекерной резины и до деформации 3% и 6% пластин двухслойного резинокорда размерами 200 мм x 80 мм x 2 мм. Эксперименты выполнены в НИИ Механики МГУ на испытательной машине ZWICK Z-100. Процесс нагружения в начальный момент имел скачок скорости, который приводит к проявлению вязкости испытуемого материала. Дальнейший процесс деформирования осуществлялся на участках нагрузки и разгрузки со скачком. В результате измерены напряжения для трех скоростей деформирования $V_1 \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $V_2 \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $V_3 \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. На рис.1 показаны диаграммы деформирования образца резины.

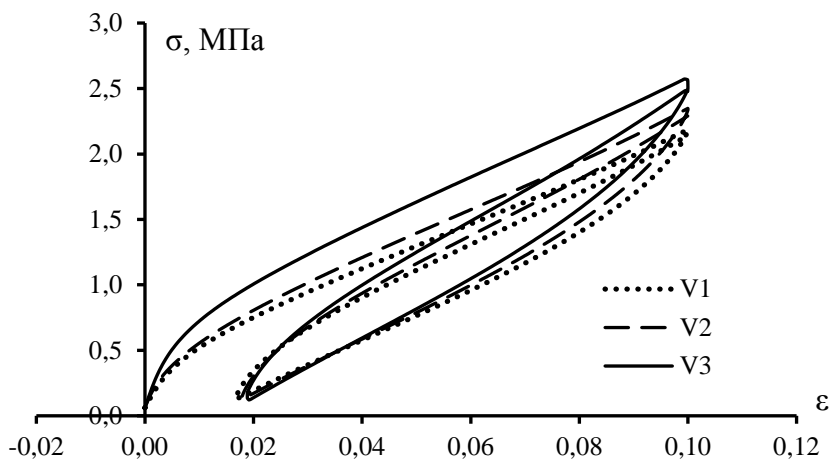


Рис.1. Диаграммы напряжение–деформация для трех скоростей нагружения: $V_1 \approx 8 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, $V_2 \approx 8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $V_3 \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

На рис.1 хорошо видна характерная для вязкоупругого материала петля гистерезиса, так же как и наличие эффекта Патрикеева-Маллинза. Из графиков очевидно, что скорость деформации влияет на наклон петли гистерезиса.

На конечном участке деформирования для второго нагружения можно заметить небольшое проявление нелинейности.

3. АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛЬЮ МАКСВЕЛЛА

Рассмотрим результат аппроксимации экспериментальных данных обобщенной моделью Максвелла. Дело в том, что кривые, изображенные на рис.1, выходят почти на прямые линии, что точно соответствует модели Максвелла. Небольшое отклонение от нелинейности наблюдается только при приближении деформации к 10%. Вариант обобщенной модели Максвелла (2) в случае линейной вязкоупругости при одноосном растяжении (1) при постоянной скорости приводит к соотношению

$$\sigma = C_{\infty}\varepsilon + V_{\alpha} \sum_{k=1}^n C_k t_k \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{V_{\alpha} t_k}} \right), \quad (5)$$

где V_{α} – соответствующая скорость деформирования.

Согласно приведенному соотношению, графики становятся прямолинейными и параллельными друг другу для различных V_{α} после некоторого начального участка. Тангенс угла наклона этих прямых равен длительному модулю. Поэтому чтобы аппроксимировать диаграммы напряжений – деформаций для нескольких скоростей параметрами C_k , t_k , следует сначала найти длительный модуль C_{∞} . В качестве аппроксимации был выбран средний тангенс угла наклона по прямолинейным участкам на диаграммах напряжений – деформаций, изображенных на рис.1.

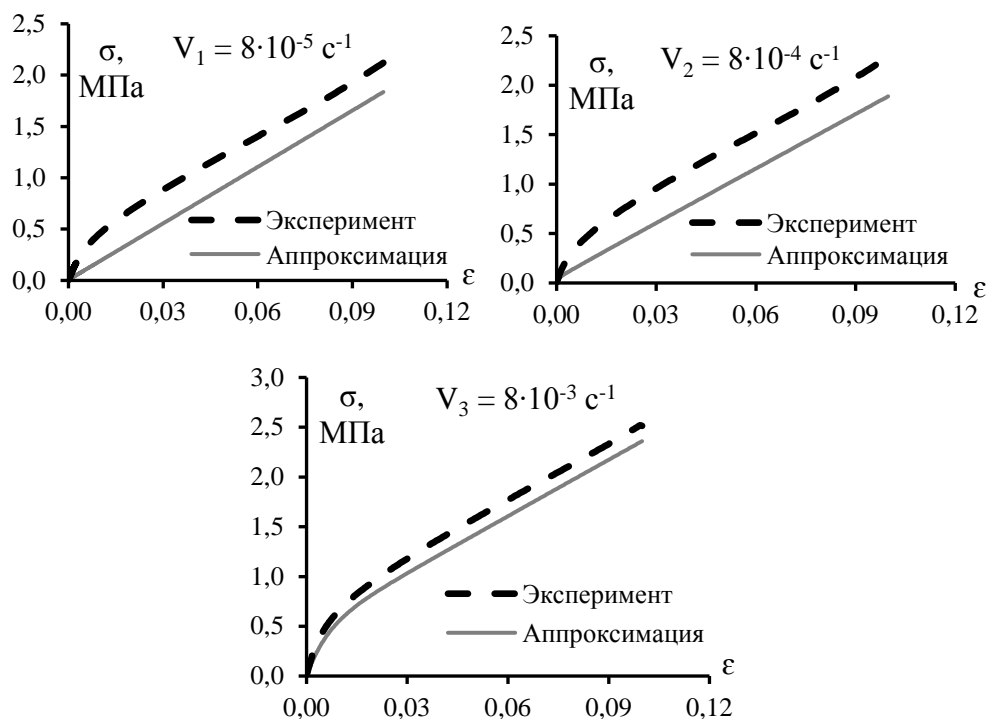


Рис.2. Результаты аппроксимации кривых напряжения – деформации одноосного растяжения бреккерной резины со скоростями деформации V_i , $i = 1, 2, 3$.

В результате аппроксимации экспериментальных графиков, изображенных на рис.2, были получены константы $C_\infty \approx 18,3$ МПа, $t_1 \approx 0,75$ с, $t_2 \approx 16,8$ с, $C_1 \approx 75,3$ МПа, $C_2 \approx 0,95$ МПа. Как следует из приведенных графиков, результаты аппроксимации не являются удовлетворительными. Средняя относительная погрешность для трех рассматриваемых кривых в порядке убывания скоростей – 13%, 25%, 34%. Можно заметить, что кривые на последних двух графиках, построенных по модели Максвелла, близки друг другу и близки к прямым. Это означает, что для соответствующих малых скоростей деформации влияние вязкости почти не проявляется. Поэтому для столь медленных процессов, согласно модели Максвелла, скорость мало влияет на вид диаграммы. С другой стороны, в эксперименте наличие скачка скорости в начале деформирования приводит к существенному отличию диаграмм от прямых линий. Экспериментальные кривые для двух медленных скоростей также близки друг к другу, но существенно отличаются от прямых.

Аппроксимация кривых напряжение – деформация получается точнее для резинокорда. Это связано с менее выраженным влиянием реономности резины, входящей в состав резинокорда с упругим кордом.

4. ИДЕЯ РЕФЕРЕНСНОЙ КРИВОЙ

Чтобы улучшить аппроксимацию экспериментальных данных, была использована аппроксимация на основе референсной кривой [7,8]. Эта модель обобщает аддитивное и мультипликативное представления. Идея состоит в том, чтобы вместо использования длительного модуля C_∞ (или потенциала W_∞ , так же как и W_0) определяющее соотношение переписать в виде

$$s(\mathbf{e}) = s_{ref}(\mathbf{e}) + \int_0^t R(t-\tau)(\dot{\mathbf{e}} - \dot{\mathbf{e}}_{ref}) d\tau,$$

где $s_{ref}(\mathbf{e})$ есть соотношение напряжение–деформация при выбранной референсной скорости деформации. Референсная зависимость предполагается известной из опытов и может быть выбрана в виде соотношения гиперупругости $s_{ij} = \frac{\partial W_{ref}}{\partial e_{ij}}$. В случае одноосного состояния имеем

$$s(e) = s_{ref}(e) + \int_0^t R(t-\tau)(\dot{e} - \dot{e}_{ref}) d\tau.$$

При обработке экспериментальных данных в качестве референсной скорости была выбрана самая медленная скорость деформирования V_1 . Тогда соотношение (5) примет вид

$$\sigma_\alpha(\varepsilon) - \sigma_1(\varepsilon) = (V_\alpha - V_1) \sum C_n t_n \left(1 - e^{\frac{-\varepsilon}{V_\alpha t_n}} \right), \quad \alpha = 2, 3,$$

где σ_α – напряжения, соответствующие процессу деформирования со скоростью V_α .

После приближения параметрами C_n , t_n разностей напряжений, кривые напряжения – деформация $\sigma_\alpha(\varepsilon)$ для скоростей V_α восстанавливаются по формуле (5). В результате аппроксимации с $V_{ref} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ для резины

получены времена релаксации (с): $t_1 \approx 0,47$, $t_2 \approx 5,13$, $t_3 \approx 5,81 \cdot 10^2$ и релаксационные модули (МПа): $C_1 \approx 46,0$, $C_2 \approx 3,02$, $C_3 \approx 1,67$. Качество аппроксимации, полученное в этом подходе, можно оценить по рис.3. Средняя относительная погрешность для двух рассматриваемых кривых в порядке убывания скоростей 0,8%, 0,7%.

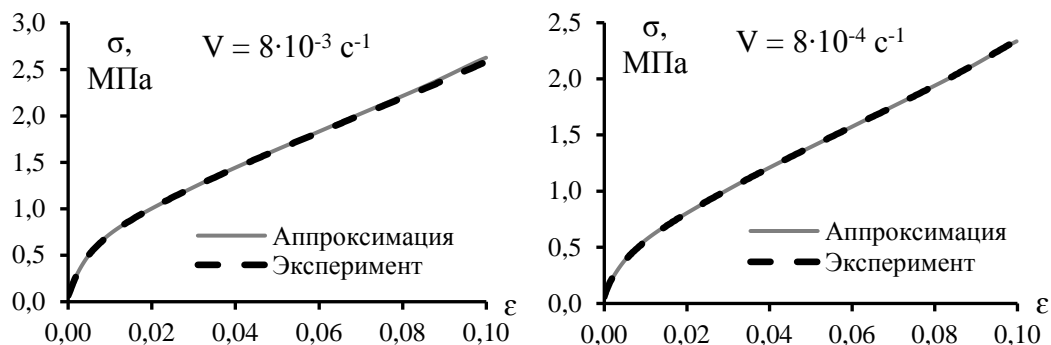


Рис.3. Результаты аппроксимации кривых напряжение – деформация для резины в случае использования референсной кривой.

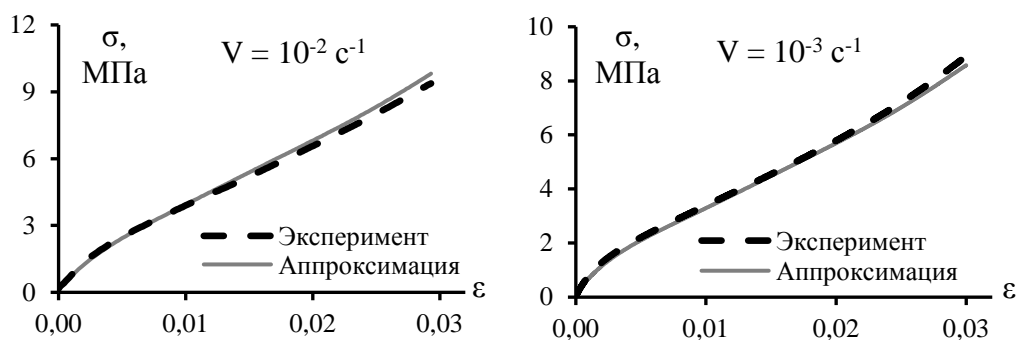


Рис.4. Результаты аппроксимации диаграмм напряжение – деформация для резинокорда с кордным углом 30° .

В результате аппроксимации с $V_{ref} = 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ для резинокорда с кордным углом 30° получены времена релаксации (с): $t_1 \approx 1,12$, $t_2 \approx 19,76$, $t_3 \approx 9,86 \cdot 10^2$ и модули (МПа): $C_1 \approx 101,8$, $C_2 \approx 42,5$, $C_3 \approx 12,0$. Средняя относительная погрешность для двух рассматриваемых кривых в порядке убывания скоростей 3,9%, 4,3% (рис.4).

Аналогичный способ аппроксимации был применен к обработке экспериментальных данных, полученных для резинокордного образца с кордным углом 45° (рис.5). В результате аппроксимации с $V_{ref} = 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ для резинокорда с кордным углом 45° получены константы (с): $t_1 \approx 0,34$, $t_2 \approx 11,62$, $t_3 \approx 8,95 \cdot 10^2$ и модули (МПа): $C_1 \approx 71,8$, $C_2 \approx 6,12$, $C_3 \approx 5,34$. Средняя относительная погрешность для двух рассматриваемых кривых в порядке убывания скоростей 2,2%, 2,6%.

Таким образом, можно сделать вывод, что наблюдается хорошее качество аппроксимации диаграмм напряжение – деформация для скоростей деформирования, по крайней мере, в 100 раз больше референсной.

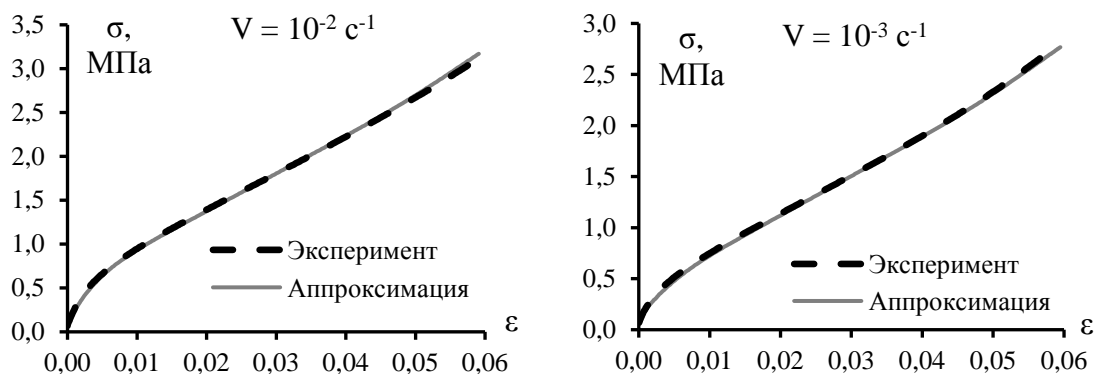


Рис.5. Результаты аппроксимации кривых напряжение – деформация для резинокорда с кордным углом 45° .

5. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИН

В этом параграфе на примере решения модельной задачи об изгибе пластины рассмотрим, насколько сильно влияет учет реономности резины на развитие прогиба в начальный момент времени. Для этого получены решения в задаче о цилиндрическом изгибе прямоугольной изотропной пластинки под действием равномерно распределенной нагрузки (см. рис.6). Решения получены по теории линейной вязкоупругости без учета и с учетом геометрической нелинейности. На основании полученных решений сделан вывод о достаточном влиянии вязких свойств резины на развитие прогиба во времени в зависимости от скорости возрастания нагрузки. Решение получено методом конечных элементов с помощью программного комплекса ANSYS в рамках студенческой лицензии. В качестве конечного элемента взят элемент shell 181, согласно документации ANSYS подходящий для моделирования упругого и вязкоупругого изгиба пластины. Пластина имела размеры: $200 \times 80 \times 2$ мм.

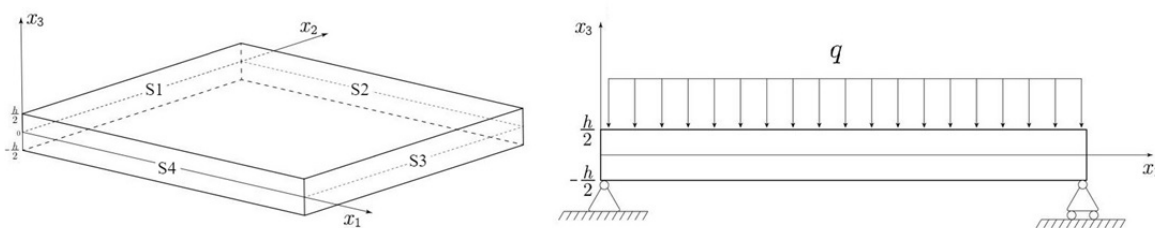


Рис.6. Схематичное изображение задачи об изгибе пластины.

Граничные условия принимались следующими. На частях границы S_1 и S_3 заданы нулевые перемещения. На частях границы S_2 и S_4 заданы нулевые перемещения $u_2 = 0$. К верхней поверхности пластины приложена равномерно распределенная нагрузка q , возрастающая во времени с постоянной скоростью $q = V_i \cdot t$ вплоть до максимального давления $p_{\max} = 10^{-6} C_\infty$. Расчеты произведены для скоростей V_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Скорости V_i подобраны так, что времена нагружения T_i равны соответственно: $T_1 = 0.1t_2$, $T_2 = t_2$, $T_3 = 10t_2$, $T_4 = 100t_2$, где t_1, t_2 – времена релаксации. Коэффициент Пуассона $\nu = 0,49$. Поскольку

целью расчета было лишь выяснение влияния вязкости на прогиб пластины, то использовалась обобщенная модель Максвелла и найденные материальные параметры модели.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В результате решения задачи об изгибе получены приведенные ниже графики зависимости максимального прогиба w от приложенной нагрузки в рамках теории вязкоупругости при разных скоростях нагружения (см. рис.7) без учета (левый график) и с учетом (правый график) геометрической нелинейности. Графики показывают развитие максимального прогиба по мере возрастания нагрузки.

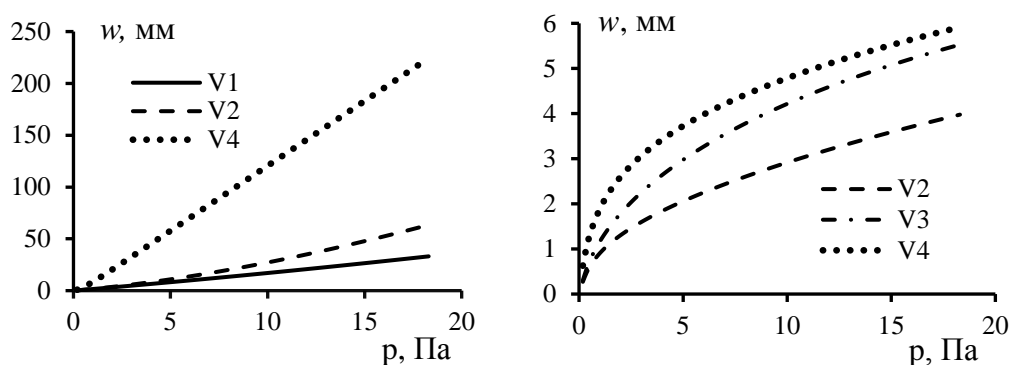


Рис.7. Развитие максимального прогиба w (мм) пластины при возрастании поперечной нагрузки p (Па).

Левый график на рис.7 демонстрирует типичную для линейной вязкоупругости зависимость от скорости деформирования. При достаточно медленной или достаточно большой скоростях деформирования зависимость прогиба от нагрузки линейная. Правый график (рис.7) показывает, что влияние вязкости сохраняется в случае учета геометрической нелинейности, когда при развитии прогиба существенное влияние имеет мембранная жесткость.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны проведенные опыты с образцами резины и резиноркорда при линейно возрастающей во времени деформации. Для аппроксимации экспериментальных результатов использована обобщенная модель Максвелла и ее модификация на основе идеи референсной кривой. Получены материальные константы рассматриваемых моделей. Удовлетворительной аппроксимации с помощью модели Максвелла получить не удалось. Однако показано, что диаграммы напряжение – деформация для разных скоростей деформации хорошо приближаются с помощью модели на основе референсной кривой.

Для анализа влияния вязкости на развитие прогиба пластины численно решена задача цилиндрического изгиба пластины из линейно вязкоупругого материала. Выявлено, что влияние скорости нагружения при учете геометрической нелинейности меньше, чем в случае геометрически линейной формулировки, но остается существенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
2. Семенов В.К., Белкин А.Е. *Математическая модель вязкоупругого поведения резины при циклическом нагружении* // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2014. – №2. – С.46-51.
3. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. – М.: Наука, 1970. – 281 с.
4. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной теории механики твердых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
5. Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T. *A visco-hyperelastic approach to modeling the constitutive behaviour of rubber* // International Journal of Impact Engineering. – 2000. – Vol.24. – No.6. – Pp.545-560.
6. Bergstrom J.S., Boyce M.C. *Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers* // J. Mech. Phys. Solids. – 1998. – Vol.46. – No.5. – Pp.931-954.
7. Шешенин С.В., Ду Икунь, Чистяков П.В., Артамонова Н.Б. *Моделирование резинокордных слоев при квазистатическом нагружении* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2021. – №4. – С.49-59.
8. Sheshenin S.V., Du Yikun, Chistyakov P.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D. *Experimental study of the rheonomic properties of breaker rubber and rubber-cord composite under quasi-static loading* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2023. – Vol.14. – No.1. – Pp.55-77.
9. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. – New York: Cambridge University Press, 2008. – 340 p.

REFERENCES

1. Christensen R. *Vvedenie v teoriyu vyzkoupругosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]*. Moskva, Mir, 1974, 340 p.
2. Semenov V.K., Belkin A.E. *Matematicheskaya model' vyzkoupругogo povedeniya reziny pri tsiklicheskom nagruzhenii [Mathematical model of viscoelastic behavior of rubber under cyclic loading]*. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Mashinostroenie, 2014, No.2, Pp.46-51.
3. Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyzkoupругosti [Fundamentals of the mathematical theory of thermoviscoelasticity]*. Moskva, Nauka, 1970, 281 p.
4. Rabotnov Yu.N. *Ehlementy nasledstvennoj teorii mekhaniki tverdykh tel [Elements of the hereditary theory of solid mechanics]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
5. Yang L.M., Shim V.P.W., Lim C.T. *A visco-hyperelastic approach to modeling the constitutive behaviour of rubber*. International Journal of Impact Engineering, 2000, Vol.24, No.6, Pp.545-560.
6. Bergstrom J.S., Boyce M.C. *Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers*. J. Mech. Phys. Solids, 1998, Vol.46, No.5, Pp.931-954.
7. Sheshenin S.V., Du Yikun, Chistyakov P.V., Artamonova N.B. *Modeling of rubber-cord layers under quasi-static loading*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2021, Vol.2021, No.4, Pp. 49-59.

8. Sheshenin S.V., Du Yikun, Chistyakov P.V., Artamonova N.B., Klement'ev P.D. *Experimental study of the rheonomic properties of breaker rubber and rubber-cord composite under quasi-static loading*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2023, Vol.14, No.1, Pp. 55-77.
9. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York, Cambridge University Press, 2008, 340 p.

Поступила в редакцию 9 марта 2023 года.

Сведения об авторах:

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru

Бушманов Олег Евгеньевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: stelz@mail.ru

Чистяков Петр Владимирович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: chist206@yandex.ru

Артамонова Нина Брониславовна – к.ф.-м.н., к.г.-м.н., с.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: artamonovanb@mail.ru