

УДК 539.375
EDN AXADBS (<https://elibrary.ru/axadbs>)
DOI 10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08



ВЛИЯНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗОН ПЛАСТИЧНОСТИ И ЗНАЧЕНИЯ J-ИНТЕГРАЛА В СОСТОЯНИИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ*

Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассмотрено упругопластическое деформирование тонкого адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца, соответствующее нагружению нормального разрыва. Толщина адгезионного слоя входит в вариационное условие равновесия в качестве линейного параметра. На основе конечноэлементного анализа исследовалось влияние линейного параметра на тенденцию формирования областей необратимого деформирования и значение J-интеграла. В качестве структурного элемента слоя определен квадратный в плане элемент с длиной грани, равной линейному параметру. Рассмотрены два клея с различными механическими свойствами. Показано, что для адгезива с выраженными пластическими свойствами в состоянии предразрушения прослеживаются две зоны пластических деформаций с разными знаками гидростатического давления, разделенные упругой областью. Зона с положительным гидростатическим давлением локализуется в вершине трещиноподобного дефекта и ее размер, как и размер вторичной области, связан с линейным параметром. При уменьшении линейного параметра область с отрицательным гидростатическим напряжением приближается к пластической области с растягивающими напряжениями. Для квазихрупкого адгезива пластической области с отрицательным гидростатическим давлением не образуется. При этом прослеживается образование и локализация пластической области с растягивающими напряжениями в вершине трещиноподобного дефекта с определенного значения линейного параметра. Уменьшение значения линейного параметра приводит к уменьшению размера пластической области с положительным гидростатическим давлением. В пластических областях имеет место практическое совпадение двух главных напряжений слоя, действующих в направлениях ортогональных отрыву. Показано, что значение J-интеграла в критическом состоянии имеет вычислительную сходимость при уменьшении значения линейного параметра. Упругопластическое решение в слое конечной толщины приводит к большему значению J-интеграла при сравнении с упругим решением, что обусловлено влиянием диссипации. Стремление линейного параметра к нулю нивелирует разницу в соответствующих значениях J-интегралов.

Ключевые слова: линейный параметр; упругопластическое деформирование; адгезив; J-интеграл

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> в Тульском государственном университете.

INFLUENCE OF THE PLASTIC PROPERTIES OF A THIN ADHESION LAYER ON THE DISTRIBUTION OF PLASTICITY ZONES AND THE VALUES OF THE J-INTEGRAL IN THE PLANE DEFORMATION STATE

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.

Tula State University, Tula, Russian

ABSTRACT

The elastoplastic deformation of a thin adhesive layer by the elastic cantilevers of a DCB sample, which corresponds to normal rupture loading, is considered. The thickness of the adhesive layer is included in the variational equilibrium condition as a linear parameter. On the basis of finite element analysis, the influence of a linear parameter on the tendency for the formation of irreversible deformation regions and the value of the J-integral was studied. As a structural element of the layer, a square in plan element with a face length equal to the linear parameter is defined. Two adhesives with different mechanical properties are considered. It is shown that for an adhesive with pronounced plastic properties in the pre-fracture state, two zones of plastic deformations with different signs of hydrostatic pressure, separated by an elastic region, are traced. The zone with positive hydrostatic pressure is localized at the tip of the crack-like defect, and its size, as well as the size of the secondary region, is related to a linear parameter. As the linear parameter decreases, the region with negative hydrostatic stress approaches the plastic region with tensile stresses. For a quasi-brittle adhesive, a plastic region with a negative hydrostatic pressure is not formed. In this case, the formation and localization of a plastic region with tensile stresses at the tip of a crack-like defect is traced from a certain value of the linear parameter. A decrease in the value of the linear parameter leads to a decrease in the size of the plastic region with a positive hydrostatic pressure. In plastic regions, there is a practical coincidence of the two principal stresses of the layer, acting in directions orthogonal to separation. It is shown that the value of the J-integral in the critical state has computational convergence as the value of the linear parameter decreases. The elastic-plastic solution in a layer of finite thickness leads to a larger value of the J-integral when compared with the elastic solution, which is due to the effect of dissipation. The tendency of the linear parameter to zero eliminates the difference in the corresponding values of the J-integrals.

Keywords: linear parameter; elastic-plastic deformation; adhesive; J-integral

ВВЕДЕНИЕ

Использование клеевых соединений находит широкое применение в механике композиционных материалов. В этом плане анализ их прочностных свойств является достаточно актуальным. В настоящее время основной моделью расчета критериальных характеристик в окрестности трещиноподобных дефектов адгезивов является модель математического разреза механики квазихрупкого разрушения [1-7]. При этом адгезив, лежащий на продолжении математического разреза, рассматривается в виде слоя нулевой толщины. Данная модель исключает из рассмотрения реальные механические свойства адгезивов и ее следствием является либо сингулярное поле напряжений, либо когезионный закон взаимодействия берегов трещины, обеспечивающий конечность напряженного состояния [8-11]. При этом закон взаимодействия берегов трещины задается априори и напряжения, действующие ортогонально напряжению отрыва, не рассматриваются. Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла [12,13] в плоском

напряженном состоянии предполагает постоянство сил сцепления, ассоциируемых с пределом текучести материала. Таким образом зона предразрушения в данном случае характеризуется одной областью пластических деформаций с растягивающими напряжениями. Для состояния плоской деформации размер пластической зоны в окрестности трещиноподобного дефекта существенно меньше. Ирвиным [14] была введена поправка, согласно которой предел текучести материала увеличивается в $\sqrt{3}$ раз, что приводит к уменьшению длины пластической зоны в 3 раза по сравнению с плоским напряженным состоянием. Эффект локализации зоны пластичности наблюдался в эксперименте для стали, но его объяснения не приведено.

Используемые в настоящее время адгезионные слои наряду с упругими характеристиками имеют и выраженные пластические свойства [15,16]. При этом предел текучести адгезивов значительно меньше предела текучести сопрягаемых ими материалов. Данное обстоятельство предполагает развитие областей пластического деформирования в рамках клеевых слоев. Однако формирование соответствующих областей связано с их напряженным состоянием, нахождение которого предполагает решение упругопластической задачи. Учет реальных механических свойств в постановке задачи предполагает наличие материального объема, деформация которого рассматривается в рамках определяющих соотношений. В данной статье на основе деформационной теории пластичности [17] рассматривается деформация тонкого адгезионного слоя упругими консолями ДКБ-образца. При этом в слое учитываются все диагональные компоненты тензора напряжений, комбинация которых определяет переход в состояние пластичности. Напряженно-деформированное состояние слоя рассматривается на основе средних по толщине напряжений, являющихся неизвестными. Данная постановка принципиально отличается от подходов связанных с усреднением получаемых решений уравнений механики сплошной среды [18-21], где имеет место сингулярность, связанная с геометрией особых точек и гипотезой существования бесконечно малого, в том числе и нулевого объема рассматриваемого материала. Отметим альтернативные постановки задач, связанные с отказом от гипотезы сплошности, и введения в рассмотрение конечных материальных объемов [22]. Толщина адгезионного слоя в исследуемой постановке рассматривается в качестве линейного параметра, принимающего малое, но не нулевое значение. Из решения упругопластической задачи в состоянии плоской деформации определены зоны пластичности и их связь с линейным параметром. Показано, что для адгезива с выраженными пластическими свойствами прослеживаются две зоны пластических деформаций с разными знаками гидростатического давления, разделенных упругой областью. Изучено влияние линейного параметра на значение J-интеграла при упругой и упругопластической модели поведения адгезива.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Упругие тела 1 и 2 на рис.1 сопряжены адгезионным слоем 3, с конечной толщиной δ_0 и упругопластическими свойствами, по длине ℓ . Предполагается жесткая заделка правой границы образца при действующей на левый торец антисимметричной распределенной нагрузки интенсивностью P . Остальная поверхность свободна от напряжений. Тела 1 и 2 имеют одинаковые механические и геометрические характеристики. Принимается во внимание, что в образце высота консоли h гораздо меньше длины сопряжения консолей ℓ и жесткая заделка

правой границы образца не оказывает существенного влияния на распределение напряжений в зоне обрыва связей консолей в торцевой области слоя.

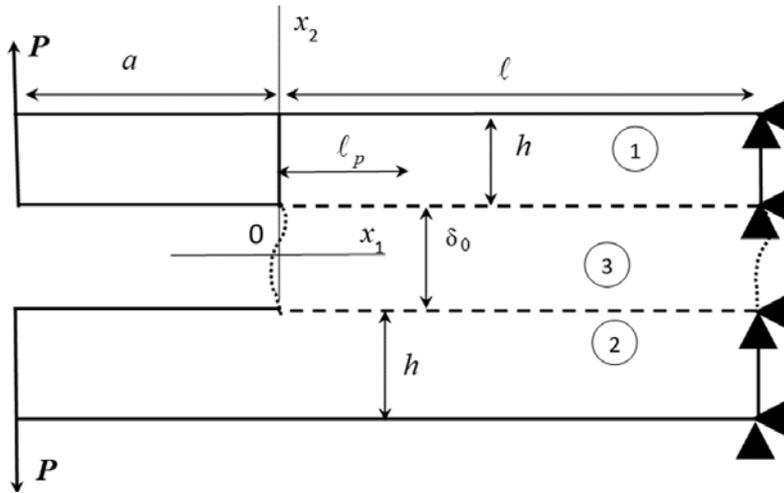


Рис.1. Модель ДКБ-образца.

В силу геометрической симметрии и антисимметричной внешней нагрузки связанная система уравнений равновесия тел 1 и 2 [23] преобразуется в вариационное уравнение для тела 1 [24]

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0.5 \delta_0 \int_{\ell} \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где S_1 – площадь тела 1; \mathbf{u} – векторное поле перемещений тела 1; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя; u_s^+ – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя; $s=1,2$; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела 1; $\cdot \cdot$ – двойное скалярное умножение; \cdot – скалярное умножение. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областью 1. В уравнении учтено, что в слое выполняется условие по средним касательным напряжениям: $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{21} \equiv 0$.

Компоненты средних деформаций слоя определяются через его граничные перемещения в виде

$$\bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = \frac{du_1^+(x_1)}{dx_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \frac{2u_2^+(x_1)}{\delta_0}. \quad (2)$$

Определяющие соотношения для тела 1 принимаем в форме закона Гука

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = 2G_e \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3)$$

$$p = 3K\theta, \quad (4)$$

где \sim – девиатор тензора; K – коэффициент объемной деформации; G_e – модуль сдвига; $\theta = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{E}$; $p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E}$; \mathbf{E} – единичный тензор.

Предполагается, что свойства материала слоя характеризуются универсальной зависимостью $T = T(\gamma)$ – «единой кривой» [19], показанной на рис.2 в виде двухзвенной прямой, где γ – интенсивность деформации сдвига; G – сдвиговой модуль: $G = G_e$ при $T \leq T_p$, $G = G_p$ при $T > T_p$; T_p – предел текучести;

T – интенсивность касательных напряжений; $G_c = T/\gamma$ – секущий модуль сдвига (см. рис.2).

Для рассматриваемого напряженного состояния адгезионного слоя образца при отсутствии средних касательных напряжений

$$T = \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2} / \sqrt{6};$$

$$\gamma = 2\sqrt{(\bar{\varepsilon}_{11} - \bar{\varepsilon}_{22})^2 + (\bar{\varepsilon}_{22} - \bar{\varepsilon}_{33})^2 + (\bar{\varepsilon}_{33} - \bar{\varepsilon}_{11})^2} / \sqrt{6}.$$

Определяющие соотношения слоя считаем справедливыми для средних по толщине слоя характеристик НДС

$$\tilde{\sigma} = 2G_c \tilde{\varepsilon}, \tag{5}$$

$$\bar{p} = 3K\bar{\theta}. \tag{6}$$

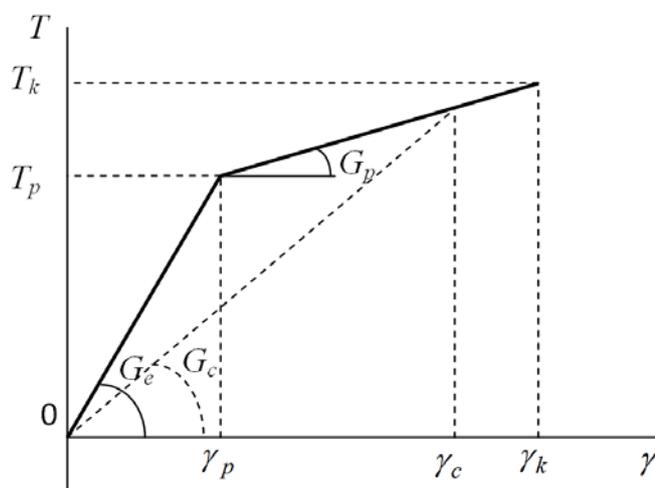


Рис.2. Кривая свойств материала.

Таким образом, решение системы (1)-(6) сводится к определению поля перемещений $u(x_1, x_2)$ в прямоугольной области тела 1.

Найденное поле перемещений по (3)-(6) определяет напряженное состояние тела 1 и слоя при заданной внешней нагрузке. Условие $G_c < G_e$ будет определять области пластического деформирования в слое.

Согласно работе [16] приведем в Таблице 1 свойства смол Araldite AV138 и Sikaforce 7752.

Таблица 1.

Механические свойства адгезивов.

Механические свойства	Araldite AV138	Sikaforce 7752
E (ГПа)	4.9	0.49
ν	0.35	0.3
σ_0 (МПа)	36.49	3.24
σ_c (МПа)	39.45	11.48
ε_c (%)	1.21	19.18
G_{IC} (Н/м)	200	2360

В Таблице 1 приняты следующие обозначения: G_{IC} – критический поток энергии; σ_0 – предел текучести; σ_c – предел прочности; ε_c – предельная деформация; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона.

Для введенных характеристик в соотношениях (3)-(6) используем известные связи: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$; $G_c = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Из сравнения приведенных механических характеристик видно, что смола Sikaforce 7752 имеет более выраженные пластические свойства по сравнению со смолой Araldite AV138. Кроме того, трещиностойкость Sikaforce 7752 на порядок превосходит Araldite AV138.

Согласно работе [15] рассмотрим консоли со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $h = 0.0127$ м, $\ell = 0.245$ м, $E_1 = 204$ ГПа, $\nu_1 = 0.3$, $\sigma_0 = 278$ МПа. Композиция консолей и адгезива формирует экспериментальный ДКБ-образец с начальной длиной трещины $a = 0.055$ м. Отметим, что предел текучести материала консоли на порядок превышает соответствующую характеристику рассматриваемых смол и предполагает их упругое деформирование вплоть до разрушения адгезивов. Данный образец использовался для нахождения потока упругой энергии в вершину трещины согласно формуле податливости Ирвина [25], что подразумевает линейно упругое поведение образца и докритический рост трещины в виде математического разреза.

Критическую сосредоточенную нагрузку ДКБ-образца для слоя нулевой толщины определим согласно формуле [26]

$$Q_c = \sqrt{\frac{G_{IC} h E_1}{12(1-\nu_1^2)}} \left(\left(\frac{a}{h} \right) \left(1 + 0.673 \left(\frac{h}{a} \right) \right) \right)^{-1}.$$

Критическую распределенной нагрузку по левому торцу тела 1 найдем согласно следующей связи: $P = Q_c/h$. Данную нагрузку будем использовать в расчетах при различных значениях линейного параметра.

Рассмотрим подход к нахождению J-интеграла в данной схеме нагружения.

На рис.3 показан элемент слоя взаимодействия, включающий в себя все области диссипации.

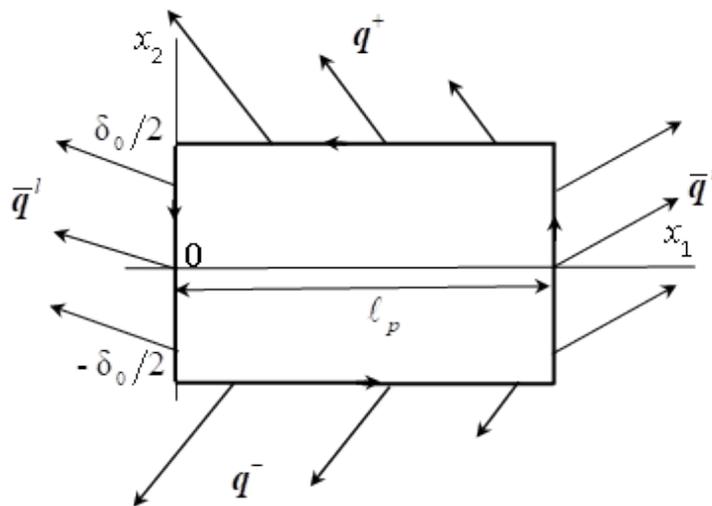


Рис.3. Равновесие упругопластического элемента слоя.

Данный элемент находится в равновесии под воздействием распределенной внешней нагрузки \mathbf{q} , где \mathbf{q}^+ – нагрузка по верхней границе слоя; \mathbf{q}^- – нагрузка по нижней границе слоя; $\bar{\mathbf{q}}^r$ – нагрузка по правому торцу слоя; $\bar{\mathbf{q}}^l$ – нагрузка по левому торцу слоя. Замкнутый контур z охватывает область диссипации в слое.

Следуя работе [27] запишем термомеханическое соотношение в следующем виде

$$\oint_z \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) dz = - \int_s \frac{\partial w}{\partial x_1} ds, \quad (7)$$

где ψ – удельная свободная энергия; w – удельная диссипация; n_1 – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1 .

В левой части равенства (7) стоит интеграл по замкнутому контуру с одного берега консоли на другой, охватывающий область диссипации, и проходящий по левому торцу слоя.

С учетом рассмотрения средних термомеханических характеристик по толщине слоя имеем

$$- \int_s \frac{\partial w}{\partial x_1} ds = \delta_0 w_c; \quad \oint_z (n_1 \psi) dz = \delta_0 (\psi_e - \psi_c), \quad (8)$$

где w_c – общая диссипация; $\psi_c = \psi|_{x_1=0}$; $\psi_e = \psi|_{x_1=\ell_p}$.

Из (7), (8) приходим к следующему определению J-интеграла

$$J = \delta_0 (\psi_c + w_c) = \delta_0 \psi_e - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\ell_p} - \int_0^{\ell_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (9)$$

где $\bar{\mathbf{u}} = 0.5(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ – вектор средних перемещений; $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$; $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$; $\sigma_{12}^\pm, \sigma_{22}^\pm$ – граничные напряжения слоя; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}$ – средние напряжения на торцах слоя.

Рассмотрим условия равновесия слоя [23]

$$\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = \sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+, \quad (10)$$

$$\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_1} = \sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+. \quad (11)$$

Для случая нормального отрыва имеем: $\bar{\sigma}_{12} = 0$; $\sigma_{12}^- = -\sigma_{12}^+$; $u_1^+ = u_1^-$; $u_2^+ = -u_2^-$.

Из (10), (11) получаем

$$\sigma_{12}^+ = -0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1}, \quad \sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^-. \quad (12)$$

С учетом определения средних напряжений посредством граничных: $\bar{\sigma}_{22} = 0.5(\sigma_{22}^+ + \sigma_{22}^-)$ и (12) из (9) приходим к следующему выражению

$$J = \delta_0 \psi_e + \delta_0 \bar{\sigma}_{11} \left. \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} - \delta_0 \bar{\sigma}_{11} \left. \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right|_{x_1=\ell_p} - 2 \int_0^{\ell_p} \left(\bar{\sigma}_{22} \frac{\partial u_2^+}{\partial x_1} - 0.5 \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u_1^+}{\partial x_1} \right) dx_1.$$

Из последнего выражения с учетом связи граничных перемещений со средними деформациями (2) слоя получаем

$$J = \delta_0 \left(\psi_e + \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=0} - \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=\ell_p} - 0.5 \int_0^{\ell_p} \left(\bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1 \right). \quad (13)$$

При отсутствии областей диссипации в адгезионном слое длина ℓ_p может принимать любые значения. Для $\ell_p = 0$ выражение (13) принимает вид $J^e = \delta_0 \psi_e$, полученный в работе [27]. Использование последнего представления для вычисления J-интеграла посредством конечноэлементного анализа линейно упругого образца [28] показало хорошую вычислительную сходимость к решению, полученному в рамках модели трещины в виде математического разреза.

В силу обратимого деформирования объема (4) на всех стадиях деформирования наряду с (13) рассмотрим энергетическое произведение энергии объема на торце слоя в следующем виде: $2\gamma^p = \delta_0 \frac{\bar{p}\bar{\theta}}{6}$. Отметим, что для нулевого значения линейного параметра энергетическое произведение энергии объема теряет смысл.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Представим адгезионный слой набором квадратных $\delta_0 \times \delta_0$ в плане δ_0 -элементов. Для тела 1 используем неравномерное конечноэлементное разбиение со сгущением к слою до характерного размера δ_0 с квадратичными функциями формы. Использование деформационной теории пластичности предполагает, что каждый элемент слоя в результате решения задачи будет характеризоваться постоянным секущим модулем, определяемым на основе осредненного напряженного состояния по элементу [24].

Критическое состояние ДКБ-образца определяем для следующих значений толщин адгезионного слоя $\delta_0 = 10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}; 10^{-6}$ м. Поведение адгезионного слоя будем рассматривать в рамках идеальной упругопластической модели, когда $G_p = 0$ (см. рис.2). Для рассмотренных толщин в критическом состоянии адгезионного слоя зону ограничивающую область пластических деформаций слоя длиной ℓ_p представим тремя аддитивными слагаемыми: $\ell_p = \sum_{i=1}^3 \ell_i$, где ℓ_1 – длина первичной пластической зоны; ℓ_3 – длина вторичной пластической зоны; ℓ_2 – промежуточная область обратимых деформаций.

Для анализа вклада каждой из зон области интегрирования последнего слагаемого (13) рассмотрим следующие выражения

$$I_1 = 0.5 \delta_0 \int_0^{\ell_1} \left(\bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1, \quad I_2 = 0.5 \delta_0 \int_{\ell_1}^{\ell_2} \left(\bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1,$$

$$I_3 = 0.5 \delta_0 \int_{\ell_2}^{\ell_3} \left(\bar{\sigma}_{22} \frac{\partial \bar{\varepsilon}_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} \bar{\varepsilon}_{11} \right) dx_1.$$

Использование деформационной теории пластичности предполагает, что каждый i -элемент слоя в результате решения задачи будет характеризоваться постоянным секущим модулем G_c^i . Модуль K считается постоянным на всех стадиях деформирования. В пределах элемента определяющие соотношения (5), (6) в состоянии плоской деформации представим в форме

$$\bar{\sigma}_{11} = D_1 \bar{\varepsilon}_{11} + D_2 \bar{\varepsilon}_{22}, \tag{14}$$

$$\bar{\sigma}_{22} = D_1 \bar{\varepsilon}_{22} + D_2 \bar{\varepsilon}_{11}, \tag{15}$$

где $D_1 = \frac{E_3^i (1 - \nu_3^i)}{(1 + \nu_3^i)(1 - 2\nu_3^i)}$; $D_2 = \frac{E_3^i \nu_3^i}{(1 + \nu_3^i)(1 - 2\nu_3^i)}$; $E_3^i = \frac{9G_c^i K}{3K + G_c^i}$; $\nu_3^i = \frac{3K - 2G_c^i}{6K + 2G_c^i}$.

Предполагая, что область интегрирования ℓ_p разбита на n отрезков с длинами δ_0 , представим выражение (13) с учетом (14), (15), (2) в следующем виде

$$J = \delta_0 \left(\psi_e + \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=0} - \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=\ell_p} - 0.5 \sum_{i=1}^n D_1^i \left(\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2 \right) \Big|_{a_i}^{a_i + \delta_0} \right), \tag{16}$$

где $a_i = (i - 1) \delta_0$ – координата левой границы i -го отрезка.

В Таблице 2 приведены значения длин рассматриваемых зон, значения J -интеграла и его составляющих при критической внешней нагрузке для адгезива Sikaforce 7752. Величина J^e определяет значение J -интеграла для линейно упругого расчета деформирования адгезива.

Таблица 2.

Результаты расчетов.

ℓ_i	$\delta_0 = 10^{-3}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-4}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-5}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-6}$ (м)
ℓ_1 (м)	0.016	0.0096	0.0058	0.0045
ℓ_2 (м)	0.005	0.00025	0.00016	0.00043
ℓ_3 (м)	0.03	0.0284	0.0238	0.0227
J (Н/м)	3358	2713	2453	2417
I_1 (Н/м)	3273	2696	2450	2417
I_2 (Н/м)	26	2	0.2	0.02
I_3 (Н/м)	-20	-1	-0.2	-0.01
$2\gamma^p$ (Н/м)	3097	2634	2431	2414
J^e (Н/м)	3105	2541	2330	2295

Из результатов расчетов видим, что уменьшение значения линейного параметра приводит уменьшению размера первичной области и вторичной области необратимых деформаций при сближении зон пластичности. Основной вклад в значение J -интеграла вносит напряженно-деформируемое состояние первичной зоны пластичности.

На рис.4 показано распределение напряжений по длине ℓ_p при $\delta_0 = 10^{-4}$ м.

График 1 определяет напряжение $\bar{\sigma}_{22}$, график 2 – напряжение $\bar{\sigma}_{11}$, а график 3 – напряжение $\bar{\sigma}_{33}$.

Первичную область пластических деформаций, примыкающую к торцу адгезионного слоя, характеризует положительное гидростатическое давление $p > 0$, во вторичной области пластических деформаций реализуется напряженное состояние с отрицательной гидростатической составляющей $p < 0$.

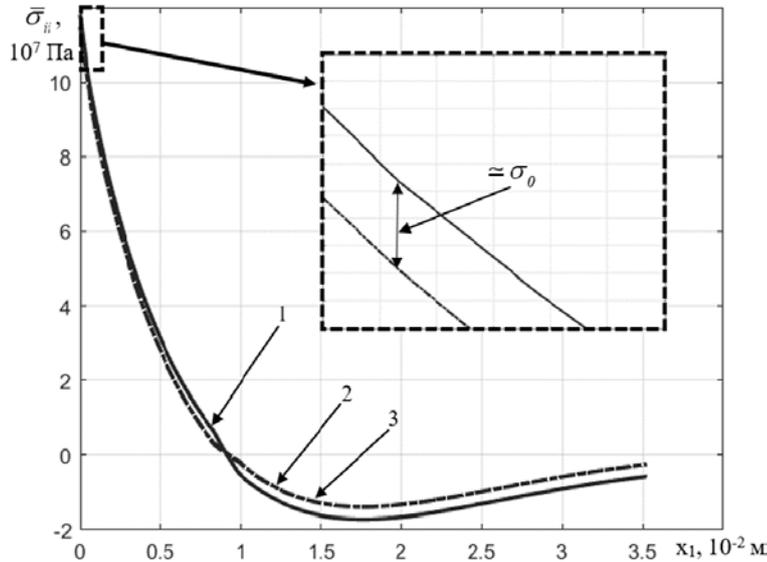


Рис.4. Распределение напряжений в адгезиве Sikaforce 7752.

В Таблице 3 приведены значения длин рассматриваемых зон при критической внешней нагрузке для адгезива Araldite AV138.

Таблица 3.

Результаты расчетов.

ℓ_i	$\delta_0 = 10^{-3}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-4}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-5}$ (м)	$\delta_0 = 10^{-6}$ (м)
ℓ_1 (м)	0	0.0014	0.0012	0.0010
ℓ_2 (м)	0	0	0	0
ℓ_3 (м)	0	0	0	0
J (Н/м)	225	211	212	214
$2\gamma^p$ (Н/м)	160	173	198	210
J^e (Н/м)	225	194	190	193

На рис.5 показано распределение напряжений по длине слоя при $\delta_0 = 10^{-4}$ м. Нумерация графиков соответствует рис.4.

Из Таблиц 2 и 3 видим, что значения J-интеграла, полученные с учетом упругопластических свойств адгезива, превышают соответствующие значения для модели обратимого деформирования в рассмотренном диапазоне линейного параметра. Данный результат сопряжен с учетом диссипативного механизма в конечном материальном объеме адгезива. Таким образом рассмотрение адгезивов в качестве слоев нулевой толщины дает заниженный результат в значении J-интеграла. При стремлении линейного параметра к нулевому значению величина

J-интеграла, вычисленная с учетом упругопластических свойств, как и в рамках линейно упругой модели имеет вычислительную сходимость. Кроме того, для упругопластической модели поведения адгезива значение J-интеграла приближается к энергетическому произведению объема на торце слоя, что предполагает «упругий» характер его формирования в модели математического разреза.

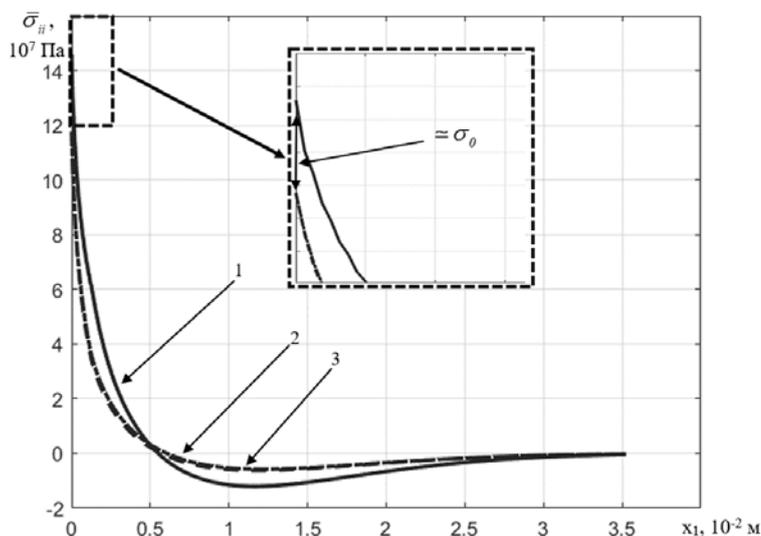


Рис.5. Распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138.

Из рис.4 и 5 видно, что имеет место практическое совпадение двух главных напряжений в слое $\bar{\sigma}_{33} \approx \bar{\sigma}_{11}$. Таким образом реализуется условие полной пластичности [29,30] равенства двух главных напряжений.

Рассмотрим модель реализации упругопластического деформирование в рамках условия полной пластичности для плоской деформации

$$\bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{11}, \tag{17}$$

соотношения (6) и постоянства интенсивности касательных напряжений на стадии упругопластического деформирования

$$T = T_p. \tag{18}$$

При одноосном растяжении $T_p = \sqrt{\frac{1}{3}}\sigma_0$. Из последнего равенства, связей (17), (18), с учетом, что $\bar{\sigma}_{22} > \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{11}$ получаем

$$\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = \sigma_0. \tag{19}$$

Из условий (5) и (19) приходим к следующим определяющим соотношениям для первичной области упругопластического деформирования

$$\bar{\sigma}_{11} = K(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22}) - \frac{1}{3}\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{22} = K(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22}) + \frac{2}{3}\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{11}. \tag{20}$$

Выражение (13) с учетом (20) преобразуется к следующему виду

$$J = \delta_0 \left(\psi_e + \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=0} - \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=\ell_p} - \right. \\ \left. 0.5 \left[\left(K(\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2) + \frac{4}{3} \sigma_0 \bar{\varepsilon}_{22} \right) \Big|_0^{\ell_1} + (D_1(\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2)) \Big|_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(K(\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2) - \frac{4}{3} \sigma_0 \bar{\varepsilon}_{22} \right) \Big|_{\ell_1+\ell_2}^{\ell_2+\ell_3} \right] \right). \quad (21)$$

Расчеты J-интеграла по (16) и (21) привели к идентичному результату.

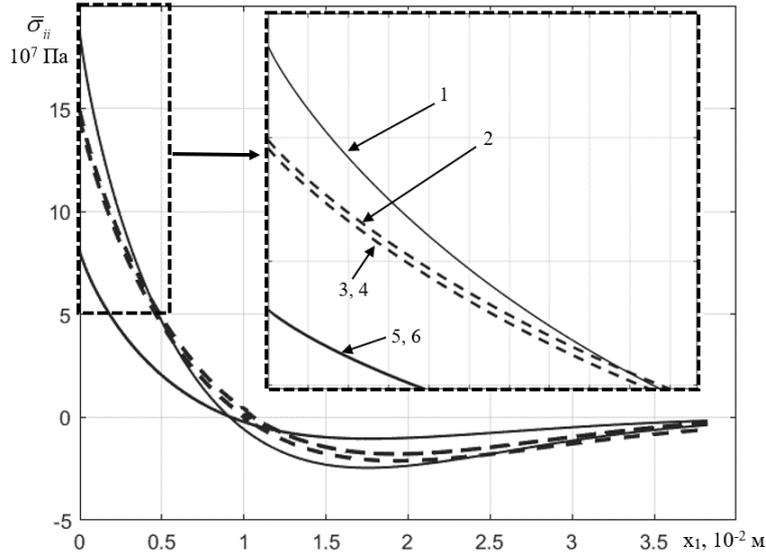


Рис.6. Распределение напряжений в адгезиве Sikaforce 7752 при различных моделях поведения.

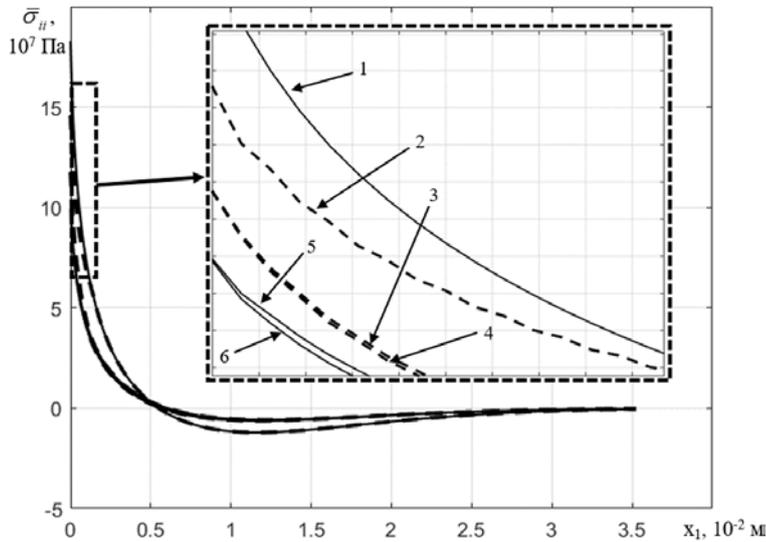


Рис.7. Распределение напряжений в адгезиве Araldite AV138 при различных моделях поведения.

На рис.6 и 7 построены графики распределения напряжений для рассматриваемых адгезивов при линейно-упругом и упругопластическом деформировании. Графики 1, 5, 6 определяют напряжения $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{33}$ при

линейно-упругом деформировании адгезива. Графики 2, 3, 4 – соответствующие напряжения с учетом упругопластических свойств.

Из анализа графиков на рис.6 и 7 видим, что в состоянии плоской деформации характер поведения поля напряжений в адгезионных слоях для упругопластических областей с положительным гидростатическим давлением близок к соответствующему поведению для линейно упругой модели поведения. С учетом вычислительной сходимости J-интегралов данное обстоятельство позволяет оценивать их критические значения при нулевых толщинах адгезионных слоев в рамках механики квазихрупкого разрушения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено упругопластическое поведение тонкого адгезионного слоя с однородным распределением напряженно-деформированного состояния по толщине в композиции с упругими консолями при нормальном разрыве в окрестности трещиноподобного дефекта с толщиной равной толщине слоя. В напряженном состоянии слоя учитываются все диагональные компоненты тензора напряжений. Толщина слоя входит в исследуемое вариационное уравнение равновесия в качестве линейного параметра. Показано, что при выраженных пластических свойствах адгезива в критическом состоянии адгезионного слоя возможно образование нескольких зон упругопластического деформирования с разными знаками гидростатического давления. При этом основной вклад в формирование J-интеграла вносит область с положительным гидростатическим давлением. Значение J-интеграла, вычисленное с учетом упругопластического поведения адгезива, превышает соответствующее значение при упругой модели поведения, что обусловлено учетом диссипативного механизма в слое конечной толщины. При стремлении линейного параметра к нулевому значению учет модели поведения не оказывает принципиального значения на величину J-интеграла, что подтверждает корректность его расчета посредством коэффициента интенсивности напряжений для модели математического разреза. Однако в случае упругопластического деформирования энергетическое произведение энергии объема будет ближе к потоку энергии в вершину математического разреза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Фудзии Т., Дзако М. *Механика разрушения композиционных материалов*. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
4. Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. *The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams* // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – Vol.201. – Pp.298-321.
5. Ustinov K. B. *On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings* // Engineering Failure Analysis. – 2015. – Vol.47. – Pp.338-344.
6. Ustinov K. B., Massabo R. *On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers* // Intern. J. of Solids & Structures. – 2022. – Vol.248. – Pp.11-16.

7. Sheinman I., Kardomateas G. *Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates* // Intern. J. of Solids & Structures. – 1997. – Vol.34. – No.4. – Pp.451-459.
8. Barenblatt G.I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture* // Advances in Applied Mechanics. – 1962. – Vol.7. – Pp.55-129.
9. The special issue: *Cohesive models* // Engineering Fracture Mechanics. – 2003. – Vol.70. – Iss.14. – Pp.1741-1987.
10. Гольдштейн Р.В., Перельмутер М.Н. *Рост трещин по границе соединения материалов* / В кн.: Проблемы механики. Сборник статей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – С.221-239.
11. De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M., Chousal J.A.G., Campilho R.D.S.G. *Cohesive and continuum mixed-mode damage models applied to the simulation of the mechanical behaviour of bonded joints* // Intern. J. of Adhesion & Adhesives. – 2008. – Vol.28. – Pp.419-426.
12. Dugdale D.S. *Yielding of steel sheets containing slits* // J. of the Mechanics & Physics of Solids. – 1960. – Vol.8. – No.2. – Pp.100-104.
13. Леонов М.Я., Панасюк В.В. *Развитие мельчайших трещин в твердом теле* // Прикладная механика. – 1959. – Т.5. – №4. – С.391-401.
14. Irwin G.R. *Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control* // Engineering Fracture Mechanics. – 1968. – Vol.1. – No.2. – Pp.241-257.
15. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. *Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints* // Intern. J. of Adhesion & Adhesives. – 2016. – Vol.67. – Pp.103-111.
16. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. *Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility* // Intern. J. of Fracture. – 2017. – Vol.207. – No.1. – Pp.55-71.
17. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 376 с.
18. Назаров С.А., Паукшто М.В. *Дискретные модели и осреднение в задачах теории упругости*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1984. – 93 с.
19. Новожилов В.В. *О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности* // ПММ. – 1969. – Т.33. – №2. – С.212-222.
20. Морозов Н.Ф., Семенов Б.Н. *Применение критерия хрупкого разрушения В.В. Новожилова при определении разрушающих нагрузок для угловых вырезов в условиях сложного напряженного состояния* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1986. – №1. – С.122-126.
21. Нейбер Г. *Концентрация напряжений*. М.-Л.: ОГИЗ: Гостехиздат, 1947. – 204 с.
22. Васильев В.В., Лурье С.А. *Дифференциальные уравнения и проблема сингулярности решений в прикладной механике и математике* // Прикладная механика и техническая физика. – 2023. – Т.64. – №1. – С.114-127.
23. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter* // Intern. J. of Solids & Structures. – 2019. – Vol.158. – Pp.141-149.
24. Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. *Определение напряженно-деформированного состояния упругопластических тел с боковым трещиноподобным дефектом с использованием модели с линейным размером* // Прикладная механика и техническая физика. – 2018. – Т.59. – №6. – С.143-154.
25. Irwin G.R., Kies J.A. *Critical energy rate analysis of fracture strength* // Welding Journal Research Supplement. – 1954. – Vol.33. – Pp.193-198.

26. Andrews M.G., Massabo R. *The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers* // Engineering Fracture Mechanics. – 2007. – Vol.74. – Pp.2700-2720.
27. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. *Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite* // Intern. J. of Fracture. – 2020. – Vol.224. – №2. – Pp.277-284.
28. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. *О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Часть 1. Упругое деформирование* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – №3. – С.116-124.
29. Хаар А., Карман Т. *К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах* / Теория пластичности. Сборник статей. – М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. – С.41-56.
30. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture mechanics of composite materials]*. Moskva, Nauka, 1974, 640 p.
3. Fudzii T., Dzako M. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials]*. Moskva, Mir, 1982, 232 p.
4. Barbieri L., Massabo R., Berggreen C. *The effects of shear and near tip deformations on interface fracture of symmetric sandwich beams*. Engineering Fracture Mechanics, 2018, Vol.201, Pp.298-321.
5. Ustinov K. B. *On influence of substrate compliance on delamination and buckling of coatings*. Engineering Failure Analysis, 2015, Vol.47, Pp.338-344.
6. Ustinov K. B., Massabo R. *On elastic clamping boundary conditions in plate models describing detaching bilayers*. Intern. J. of Solids & Structures, 2022, Vol.248, Pp.11-16.
7. Sheinman I., Kardomateas G. *Energy release rate and stress intensity factors for delaminated composite laminates*. Intern. J. of Solids & Structures, 1997, Vol.34, No.4, Pp.451-459.
8. Barenblatt G.I. *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics, 1962, Vol.7, Pp.55-129.
9. The special issue: *Cohesive models*. Engineering Fracture Mechanics, 2003, Vol.70, Iss.14, Pp.1741-1987.
10. Gol'dshtejn R.V., Perel'muter M.N. *Rost treshhin po granitse soedineniya materialov [Growth of cracks along the interface between materials]*. V knige Problemy mekhaniki. Sbornik statej, Moskva, FIZMATLIT, 2003, Pp. 221-239.
11. De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M., Chousal J.A.G., Campilho R.D.S.G. *Cohesive and continuum mixed-mode damage models applied to the simulation of the mechanical behaviour of bonded joints*. Intern. J. of Adhesion & Adhesives, 2008, Vol.28, Pp.419-426.
12. Dugdale D.S. *Yielding of steel sheets containing slits*. J. of the Mechanics & Physics of Solids, 1960, Vol.8, No.2, Pp.100-104.

13. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. *Razvitie mel'chajshikh treshhin v tverdom tele [The development of tiny cracks in a solid]*. Prikladnaya mekhanika, 1959, Vol.5, No.4, Pp.391-401.
14. Irwin G.R. *Linear fracture mechanics, fracture transition, and fracture control*. Engineering Fracture Mechanics, 1968, Vol.1, No.2, Pp.241-257.
15. Lopes R.M., Campilho R.D.S.G., da Silva F.J.G., Faneco T.M.S. *Comparative evaluation of the Double-Cantilever Beam and Tapered Double-Cantilever Beam tests for estimation of the tensile fracture toughness of adhesive joints*. Intern. J. of Adhesion & Adhesives, 2016, Vol.67, Pp.103-111.
16. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. *Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility*. Intern. J. of Fracture, 2017, Vol.207, No.1, Pp.55-71.
17. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Chast' I. Uprugoplasticheskiye deformatsii [Plastic. Part 1. Elastic-plastic deformations]*. Moskva, Leningrad, GITTL, 1948, 376 p.
18. Nazarov S.A., Paukshto M.V. *Diskretnye modeli i osrednenie v zadachakh teorii uprugosti [Discrete models and averaging in problems of the theory of elasticity]*. Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1984, 93 p.
19. Novozhilov V.V. *O neobkhodimom i dostatochnom kriterii khrupkoj prochnosti [On the necessary and sufficient criteria for brittle strength]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1969, Vol.33, No.2, Pp.212-222.
20. Morozov N.F., Semenov B.N. *Primenenie kriteriya khrupkogo razrusheniya V.V. Novozhilova pri opredelenii razrushayushhikh nagruzok dlya uglovykh vyrezov v usloviyakh slozhnogo napryazhennogo sostoyaniya [Application of the brittle fracture criterion by V.V. Novozhilova in determining breaking loads for corner cutouts under conditions of a complex stress state]*. Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1986, No.1, Pp.122-126.
21. Neyber G. *Kontsentratsiya napryazhenij [Stress concentration]*. Moskva, Leningrad, OGIZ, Gostekhizdat, 1947, 204 p.
22. Vasil'yev V.V., Lur'e S.A. *Differential Equations and the Problem of Singularity of Solutions in Applied Mechanics and Mathematics*. J. of Applied Mechanics & Technical Physics, 2023, Vol.64, No.1, Pp.114-127.
23. Glagolev V.V., Markin A.A. *Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter*. Intern. J. of Solids & Structures, 2019, Vol.158, Pp.141-149.
24. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *Determining the stress-strain state of elastic-plastic solids with a lateral crack-like defect with the use of a model with a linear size*. J. of Applied Mechanics & Technical Physics, 2018, Vol.59, No.6, Pp.1085-1094.
25. Irwin G.R., Kies J.A. *Critical energy rate analysis of fracture strength*. Welding Journal Research Supplement, 1954, Vol.33, Pp.193-198.
26. Andrews M.G., Massabo R. *The effects of shear and near tip deformations on energy release rate and mode mixity of edge-cracked orthotropic layers*. Engineering Fracture Mechanics, 2007, Vol.74, Pp.2700-2720.
27. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. *Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite*. Intern. J. of Fracture, 2020, Vol.224, №2, Pp.277-284.
28. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Part 1. Elastic deformation*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, No.3, Pp.116-124.

29. Haar A., Karman T. *K teorii napryazhennykh sostoyanij v plasticheskikh i sypuchikh sredakh [On the theory of stress states in plastic and granular media]*. Teoriya plastichnosti. Sbornik statej. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel'stvo inostranoj literatury, 1948, Pp.41-56.
30. Ishlinskij A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical theory of plasticity]*. Moskva, FIZMATLIT, 2001, 704 p.

Поступила в редакцию 02 марта 2022 года.

Сведения об авторах:

Богачева Виктория Эдуардовна – асп., Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: v.boga4eva2014@yandex.ru

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: vadim@tsu.tula.ru

Глаголев Леонид Вадимович – к.ф.-м.н., с.н.с., Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: len4ic92@gmail.com

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: markin-nikram@yandex.ru