



## ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЕ ТИМОШЕНКО БОЛЬШОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ\*

Макаревский Д.И.<sup>1</sup>, Сердюк Д.О.<sup>1</sup>, Федотенков Г.В.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена построению аналитического решения задачи о распространении нестационарных волн в тонкой анизотропной пластине большой протяженности. Подход к решению основан на принципе суперпозиции и методе функций Грина. Его суть заключается в связи искомого решения с нагрузкой при помощи интегрального оператора типа свёртки по пространственным переменным и по времени. Ядром этого оператора является функция Грина для анизотропной пластины. Она представляет собой нормальные перемещения в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки. Для математического описания сосредоточенной нагрузки используется дельта-функция Дирака.

Пространственные нестационарные функции Грина для анизотропной пластины Тимошенко построены впервые с помощью аналитических методов. В качестве модели анизотропного материала рассматривается упругая среда с единственной плоскостью симметрии, геометрически совпадающей со срединной плоскостью пластины.

Движение пластины рассмотрено в декартовой системе координат. В начальный момент времени пластина находится в невозмущенном состоянии. Для решения использованы интегральные преобразования Лапласа по времени и двумерное интегральное преобразование Фурье по координатам. Оригиналы искомого функции по Лапласу построены при помощи второй теоремы разложения для преобразования Лапласа. Оригиналы по Фурье построены с помощью связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале.

Полученные функции Грина позволили представить искомым нестационарный прогиб и углы поворота в виде тройных сверток функций Грина с функцией нестационарной нагрузки. Для вычисления интеграла свёртки и построения искомого решения использован метод прямоугольников. Результаты решения представлены графически.

**Ключевые слова:** нестационарная динамика, анизотропный материал, пластина Тимошенко, функции Грина

## WAVES IN AN ANISOTROPIC TIMOSHENKO'S PLATE OF LARGE EXTENT

Makarevskij D.I.<sup>1</sup>, Serdyuk D.O.<sup>1</sup>, Fedotenkov G.V.<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia

<sup>2</sup>Research Institute of Mechanics MSU by M.V. Lomonosov, Moscow, Russia

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №20-19-00217).

## ABSTRACT

This work is devoted to the construction of an analytical solution to the problem of the propagation of transitional waves in a thin anisotropic plate of large extent. The approach to the solution is based on the principles of superposition and the Green's function method. Its essence lies in the connection of the desired solution with the load using an integral operator of the convolution type in spatial variables and in time. The core of this operator is the Green's function for an anisotropic plate. It represents normal displacements in response to a single point load. The Dirac delta function is used to mathematically describe the concentrated load.

Spatial transitional Green's functions for an anisotropic Timoshenko's plate are constructed for the first time using analytical methods. An elastic medium with a single plane of symmetry geometrically coinciding with the median plane of the plate is considered as a model of an anisotropic material.

The motion of the plate is considered in the Cartesian coordinate system. At the initial moment of time, the plate is in an unperturbed state. The integral Laplace transformations in time and the two-dimensional integral Fourier transform in coordinates are used for the solution. The originals of the desired Laplace functions are constructed using the second decomposition theorem for the Laplace transform. The Fourier originals are constructed using the connection of the inverse integral of the Fourier transform with the Fourier series on a variable interval.

The obtained Green's functions made it possible to represent the desired unsteady deflection and rotation angles in the form of triple convolutions of Green's functions with a nonstationary load function. The method of rectangles was used to calculate the convolution integral and construct the desired solution. The solution results are presented graphically.

**Keywords:** transitional dynamics, anisotropic material, Timoshenko's plate, Green's functions

## ВВЕДЕНИЕ

Пластины широко распространены в качестве элементов конструкций в аэрокосмической и атомной отрасли, а также в общем машиностроении. Неотъемлемым этапом проектирования новых перспективных агрегатов является проведение стационарных и нестационарных расчетов элементов их конструкций. Развитие аддитивных технологий [1], технологий трехмерной печати полимерами [2,3], технологий производства полимерных композитных материалов с пространственным армированием [4] требует разработки новых математических моделей и методов расчетов элементов, созданных из анизотропных материалов. Кроме того известно, что заготовки листовой стали, полученные технологией листового проката, также обладают анизотропией свойств [5,6].

Среди имеющихся публикаций, посвященных стационарным и статическим задачам для анизотропных пластин, следует отметить работы [7-9]. Вопросы нестационарной динамики изотропных пластин затронуты в работах [10,11], ортотропных пластин – в статьях [12-14]. Стационарным и нестационарным колебаниям анизотропных и многослойных пластин посвящены работы [15-27]. Среди методов решения задач о нестационарном деформировании анизотропных пластин [20-27] применяются метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод функции Грина, метод Хоуболта интегрирования во временной области, метод интегрирования быстро осциллирующих функций в пространственной области, квадратурный метод свертки, методы Рунге-Кутты.

В настоящей работе исследуется нестационарная динамика анизотропной тонкой упругой пластины большой протяженности. Для решения задачи

используется метод функций Грина. В качестве математических инструментов применяются интегральные преобразования по времени и пространственным координатам. В работах [28-31] этот метод эффективно использован применительно к решению различных нестационарных задач теории упругости и теории оболочек.

Целью настоящей работы являются построение и исследование функций Грина для нормального перемещения и углов поворотов тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко большой протяженности.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является тонкая пластина постоянной толщины  $h$  и большой протяженности. Материал пластины упругий и анизотропный. Он имеет одну плоскость симметрии, совпадающую со срединной плоскостью пластины. Плотность материала обозначена буквой  $\rho$ . На пластину действует нестационарная нагрузка  $p$  с переменной во времени амплитудой. В начальный момент времени  $t$  пластина находится в невозмущенном состоянии. Движение пластины рассматривается в декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Ось  $x_3$  ортогональна к срединной плоскости пластины (рис.1).

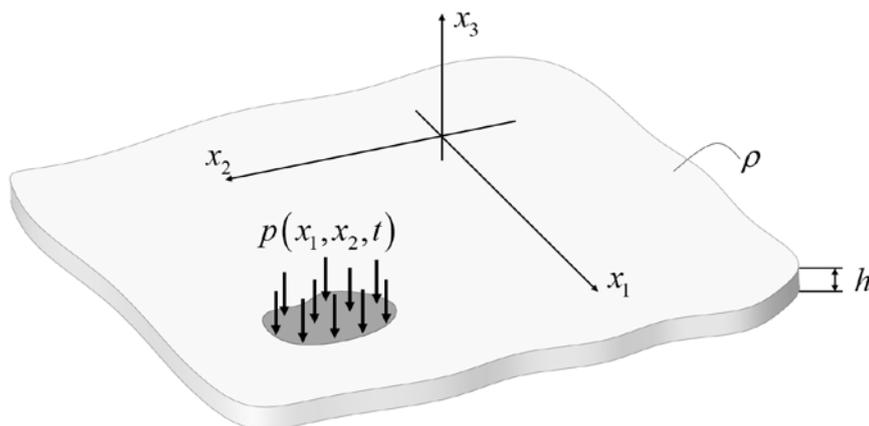


Рис.1. Тонкая упругая анизотропная пластина большой протяженности.

Для пластины используются уравнения теории Тимошенко. В них учитываются девять независимых компонент тензора упругих постоянных для рассматриваемого случая анизотропии упругой среды.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения в перемещениях для анизотропной пластины [32]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = L(\mathbf{w}) + \mathbf{p}, \quad (1)$$

$$\mathbf{w} = (\chi_1, \chi_2, w)^T, \quad \mathbf{p} = (0, 0, p/\rho h)^T, \quad L = (L_{ij})_{3 \times 3},$$

$$L_{11}(\chi_1) = \frac{1}{\rho} \left( c_{11} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1^2} + 2c_{16} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{66} \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial x_2^2} \right) - \frac{hk^2}{\rho I} c_{55} \chi_1,$$

$$L_{12}(\chi_2) = \frac{1}{\rho} \left( c_{16} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1^2} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{26} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{hk^2}{\rho I} c_{45} \chi_2,$$

$$\begin{aligned}
 L_{13}(w) &= -\frac{hk^2}{\rho I} \left( c_{55} \frac{\partial w}{\partial x_1} + c_{45} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right), & L_{21}(\chi_1) &= L_{12}(\chi_1), \\
 L_{22}(\chi_2) &= \frac{1}{\rho} \left( c_{66} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1^2} + 2c_{26} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{22} \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial x_2^2} \right) - \frac{hk^2}{\rho I} c_{44} \chi_2, \\
 L_{23}(w) &= -\frac{hk^2}{\rho I} \left( c_{45} \frac{\partial w}{\partial x_1} + c_{44} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right), & L_{31}(\chi_1) &= -\frac{I}{h} L_{13}(\chi_1), \\
 L_{32}(\chi_2) &= -\frac{I}{h} L_{23}(\chi_2), & L_{33}(w) &= \frac{k^2}{\rho} \left( c_{55} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2c_{45} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right),
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= C^{1111}, & c_{12} &= C^{1122}, & c_{16} &= C^{1112}, & c_{22} &= C^{2222}, & c_{26} &= C^{2212}, & c_{44} &= C^{2323}, & c_{45} &= C^{2313}, \\
 c_{55} &= C^{1313}, & c_{66} &= C^{1212}, & I &= \frac{h^3}{12}, & k &= \sqrt{\frac{5}{6}}.
 \end{aligned}$$

Уравнения (1) дополняются начальными условиями

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}|_{t=0} = \chi_1|_{t=0} = \frac{\partial \chi_1}{\partial t}|_{t=0} = \chi_2|_{t=0} = \frac{\partial \chi_2}{\partial t}|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

В (1), (2)  $w$  – нормальное перемещение,  $\chi_i$  – векторы углов отклонения ортогонального к срединной поверхности волокна за счёт сдвига,  $k$  – коэффициент сдвига,  $I$  – погонный момент инерции,  $C^{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных.

## 2. ФУНКЦИИ ГРИНА

Решение задачи (1), (2) может быть представлено в интегральной форме с использованием функций Грина  $G(x_1, x_2, t)$  и  $X_1(x_1, x_2, t)$ ,  $X_2(x_1, x_2, t)$

$$\begin{aligned}
 w(x_1, x_2, t) &= G(x_1, x_2, t) *** p(x_1, x_2, t), \\
 \chi_i(x_1, x_2, t) &= X_i(x_1, x_2, t) *** p(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В (3) символ  $*$  означает интегральный оператор типа свертки по пространственным координатам  $x_1, x_2$  и времени  $t$

$$g *** f = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1 - \xi, x_2 - \zeta, t - \tau) f(\xi, \zeta, \tau) d\tau d\xi d\zeta.$$

Постановка задачи о функциях Грина для тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко большой протяженности в соответствии с соотношениями (1) и (2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial t^2} = L(\mathbf{G}) + \mathbf{q}, \tag{4}$$

$$\mathbf{G} = (X_1, X_2, G)^T, \quad \mathbf{q} = (0, 0, q)^T, \quad q = \delta(x_1, x_2) \delta(t) / \rho h,$$

$$G|_{t=0} = \frac{\partial G}{\partial t}|_{t=0} = X_1|_{t=0} = \frac{\partial X_1}{\partial t}|_{t=0} = X_2|_{t=0} = \frac{\partial X_2}{\partial t}|_{t=0} = 0. \tag{5}$$

В (4), (5)  $G(x_1, x_2, t)$  – функция Грина для нормального перемещения  $w$ ,  $X_1(x_1, x_2, t)$  и  $X_2(x_1, x_2, t)$  – функции Грина для углов отклонения  $\chi_1$  и  $\chi_2$  соответственно.

Для решения задачи (4), (5) применим интегральное преобразование Лапласа по времени  $t$  и Фурье по пространственным координатам  $x_1, x_2$ .

Задача (4), (5) в пространстве интегральных преобразований Лапласа и Фурье принимает вид

$$\mathbf{A}\mathbf{g}^{FL} + \mathbf{q}^{FL} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{g} = (X_1^{FL}, X_2^{FL}, G^{FL})^T, \quad \mathbf{q}^{FL} = (0, 0, q^{FL})^T, \quad q^{FL} = 1/\rho h,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + Q_1 & Q_2 & -\frac{h}{I}Q_3 \\ Q_2 & s^2 + Q_4 & -\frac{h}{I}Q_5 \\ Q_3 & Q_5 & s^2 + Q_6 \end{pmatrix},$$

$$Q_1 = \frac{1}{\rho} \left( c_{11}q_1^2 + 2c_{16}q_1q_2 + c_{66}q_2^2 + \frac{hk^2}{I}c_{55} \right),$$

$$Q_2 = \frac{1}{\rho} \left[ c_{16}q_1^2 + (c_{12} + c_{66})q_1q_2 + c_{26}q_2^2 + \frac{hk^2}{I}c_{45} \right],$$

$$Q_3 = \frac{k^2 i}{\rho} (c_{55}q_1 + c_{45}q_2), \quad Q_4 = \frac{1}{\rho} \left( c_{66}q_1^2 + 2c_{26}q_1q_2 + c_{22}q_2^2 + \frac{hk^2}{I}c_{44} \right),$$

$$Q_5 = \frac{k^2 i}{\rho} (c_{45}q_1 + c_{44}q_2), \quad Q_6 = \frac{k^2}{\rho} (c_{55}q_1^2 + 2c_{45}q_1q_2 + c_{44}q_2^2).$$

В (6)  $s$  – параметр интегрального преобразования Лапласа,  $q_1, q_2$  – параметры интегрально преобразования Фурье, верхние индексы  $L, F$  обозначают изображения функций по Лапласу и Фурье соответственно,  $i$  – мнимая единица.

Решая (6) получим

$$G^{LF}(q_1, q_2, s) = \frac{1}{\rho h} \frac{s^4 + R_1 s^2 + R_2}{s^6 + R_3 s^4 + R_4 s^2 + R_5},$$

$$X_1^{LF}(q_1, q_2, s) = \frac{12}{\rho h^3} \frac{Q_3 s^2 + R_6}{s^6 + R_3 s^4 + R_4 s^2 + R_5}, \quad (7)$$

$$X_2^{LF}(q_1, q_2, s) = \frac{12}{\rho h^3} \frac{Q_5 s^2 + R_7}{s^6 + R_3 s^4 + R_4 s^2 + R_5},$$

$$R_1 = R_1(q_1, q_2) = Q_1 + Q_4,$$

$$R_2 = R_2(q_1, q_2) = Q_1 Q_4 - Q_2^2, \quad R_3 = R_3(q_1, q_2) = Q_1 + Q_4 + Q_6,$$

$$R_4 = R_4(q_1, q_2) = Q_1 Q_4 + Q_1 Q_6 - Q_2^2 + Q_4 Q_6 + \frac{12}{h^2} Q_3^2 + \frac{12}{h^2} Q_5^2,$$

$$R_5 = R_5(q_1, q_2) = Q_1 Q_4 Q_6 - Q_6 Q_2^2 + \frac{12}{h^2} Q_1 Q_5^2 - 2 \frac{12}{h^2} Q_2 Q_3 Q_5 + \frac{12}{h^2} Q_4 Q_3^2,$$

$$R_6 = R_6(q_1, q_2) = Q_3Q_4 - Q_2Q_5, \quad R_7 = R_7(q_1, q_2) = Q_1Q_5 - Q_3Q_2.$$

Оригиналы функций Грина (7) по Лапласу найдены аналитически с применением второй теоремы разложения для преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} G^F(q_1, q_2, t) &= \frac{1}{\rho h} \sum_{k=1}^6 A_k e^{s_k t}, \quad A_k = (s - s_k) G^{LF}(q_1, q_2, s_k), \\ X_1^F(q_1, q_2, t) &= \frac{12}{\rho h^3} \sum_{k=1}^6 B_k e^{s_k t}, \quad B_k = (s - s_k) X_1^{LF}(q_1, q_2, s_k), \\ X_2^F(q_1, q_2, t) &= \frac{12}{\rho h^3} \sum_{k=1}^6 C_k e^{s_k t}, \quad C_k = (s - s_k) X_2^{LF}(q_1, q_2, s_k), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$A_1 = \frac{s_1^4 + s_1^2 R_1 + R_2}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, \quad A_2 = -A_1,$$

$$A_3 = \frac{s_3^4 + s_3^2 R_1 + R_2}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, \quad A_4 = -A_3,$$

$$A_5 = \frac{s_5^4 + s_5^2 R_1 + R_2}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, \quad A_6 = -A_5,$$

$$B_1 = \frac{Q_3 s_1^2 + R_6}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, \quad B_2 = -B_1,$$

$$B_3 = \frac{Q_3 s_3^2 + R_6}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, \quad B_4 = -B_3,$$

$$B_5 = \frac{Q_3 s_5^2 + R_6}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, \quad B_6 = -B_5,$$

$$C_1 = \frac{Q_5 s_1^2 + R_7}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, \quad C_2 = -C_1,$$

$$C_3 = \frac{Q_5 s_3^2 + R_7}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, \quad C_4 = -C_3,$$

$$C_5 = \frac{Q_5 s_5^2 + R_7}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, \quad C_6 = -C_5.$$

В (8)  $s_k$  – корни бикубического уравнения  $s^6 + R_3 s^4 + R_4 s^2 + R_5 = 0$ , полученные методом Кардано

$$\begin{aligned} s_1 &= f_1^{\frac{1}{2}}, \quad s_2 = -s_1, \quad s_3 = f_2^{\frac{1}{2}}, \quad s_4 = -s_3, \quad s_5 = f_3^{\frac{1}{2}}, \quad s_6 = -s_5, \\ f_1 &= A + B - \frac{R_3}{3}, \quad f_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{A-B}{2} - \frac{R_3}{3}, \\ A &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{D}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{D}}, \quad D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2, \\ P &= \frac{3R_4 - R_3^2}{3}, \quad Q = \frac{2R_3^3 - 9R_3R_4 + 27R_5}{27}. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом вида корней (9) функции Грина в изображении по Фурье (8) примут вид

$$\begin{aligned} G^F(q_1, q_2, t) &= \frac{2}{\rho h} (A_1 \cdot \text{sh}(s_1 \cdot t) + A_3 \cdot \text{sh}(s_3 \cdot t) + A_5 \cdot \text{sh}(s_5 \cdot t)), \\ X_1^F(q_1, q_2, t) &= \frac{24}{\rho h^3} (B_1 \cdot \text{sh}(s_1 \cdot t) + B_3 \cdot \text{sh}(s_3 \cdot t) + B_5 \cdot \text{sh}(s_5 \cdot t)), \\ X_2^F(q_1, q_2, t) &= \frac{24}{\rho h^3} (C_1 \cdot \text{sh}(s_1 \cdot t) + C_3 \cdot \text{sh}(s_3 \cdot t) + C_5 \cdot \text{sh}(s_5 \cdot t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Для построения оригиналов функций (10) по Фурье использован метод основанный на связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(q_1, q_2, t) e^{-i(q_1 x_1 + q_2 x_2)} dq_1 dq_2 = \\ &= \frac{1}{4L^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^F\left(\frac{\pi n}{L}, \frac{\pi m}{L}, t\right) e^{-\frac{i\pi}{L}(nx_1 + mx_2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11) величина интервала разложения  $L$  может быть выбрана произвольно, но для повышения скорости сходимости целесообразно положить  $L = l(t) = ct$ ,  $c = \sqrt{c_{66}/\rho}$ , что приводит к ряду на переменном интервале разложения

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{4 \cdot c^2 t^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f^F(\lambda_{1n}, \lambda_{2m}, t) e^{-i(\lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2m} x_2)}, \\ \lambda_{1n} &= \frac{\pi n}{ct}, \quad \lambda_{2m} = \frac{\pi m}{ct}. \end{aligned} \quad (12)$$

Применив к соотношениям (10) формулу (12), получим аналитические представления для оригиналов функций Грина

$$G(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4c^2 t^2} H(c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G^F(\lambda_{1n}, \lambda_{2m}, t) e^{-i(\lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2m} x_2)}, \quad (13)$$

$$X_1(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4c^2 t^2} H(c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_1^F(\lambda_{1n}, \lambda_{2m}, t) e^{-i(\lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2m} x_2)}, \quad (14)$$

$$X_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4c^2 t^2} H(c^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_2^F(\lambda_{1n}, \lambda_{2m}, t) e^{-i(\lambda_{1n} x_1 + \lambda_{2m} x_2)}, \quad (15)$$

где  $H(\bullet)$  – функция Хэвисайда.

Функции Грина (13)-(15) позволяют исследовать нестационарную динамику тонких упругих анизотропных пластин. Они могут быть использованы в прикладных задачах для исследования распространения нестационарных волн в анизотропных, ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных пластинах больших размеров, в том случае, если в рассматриваемые моменты времени волны не будут достигать опор исследуемых конструктивных элементов. Кроме того, построенные функции Грина открывают возможность решения широкого круга нестационарных задач для анизотропных пластин. Например, нестационарных контактных и обратных задач. Также они могут быть использованы при построении интегральных уравнений метода граничных элементов или метода компенсирующих нагрузок.

### 3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Рассмотрим анизотропную пластину толщиной  $h = 0.002$  м, плотностью  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Материал пластины – стеклопластик с тензором упругих постоянных (размерность упругих постоянных – ГПа) [33]

$$C = \begin{pmatrix} 95.5 & 28.9 & 4.03 & 0 & 0 & 44.7 \\ 28.9 & 25.9 & 4.65 & 0 & 0 & 15.6 \\ 4.03 & 4.65 & 16.3 & 0 & 0 & 0.54 \\ 0 & 0 & 0 & 4.4 & -1.78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.78 & 6.45 & 0 \\ 44.7 & 15.6 & 0.54 & 0 & 0 & 32.7 \end{pmatrix}.$$

На рис.2а,б представлены функции Грина для нормального перемещения анизотропной пластины Тимошенко и анизотропной пластины Кирхгофа [23] в моменты времени 1 мкс и 2 мкс (рис.2а) и 1 мс и 2 мс (рис.2б). Сплошная линия – функция Грина для пластины Тимошенко, точки – функция Грина для пластины Кирхгофа. В статье [23] представлена функция Грина для нестационарного нормального перемещения тонкой упругой анизотропной пластины Кирхгофа большой протяженности. Она построена с применением интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам. Оригинал преобразования Лапласа найден аналитически, а оригинал по Фурье найден численно с применением метода интегрирования быстро осциллирующих функций.

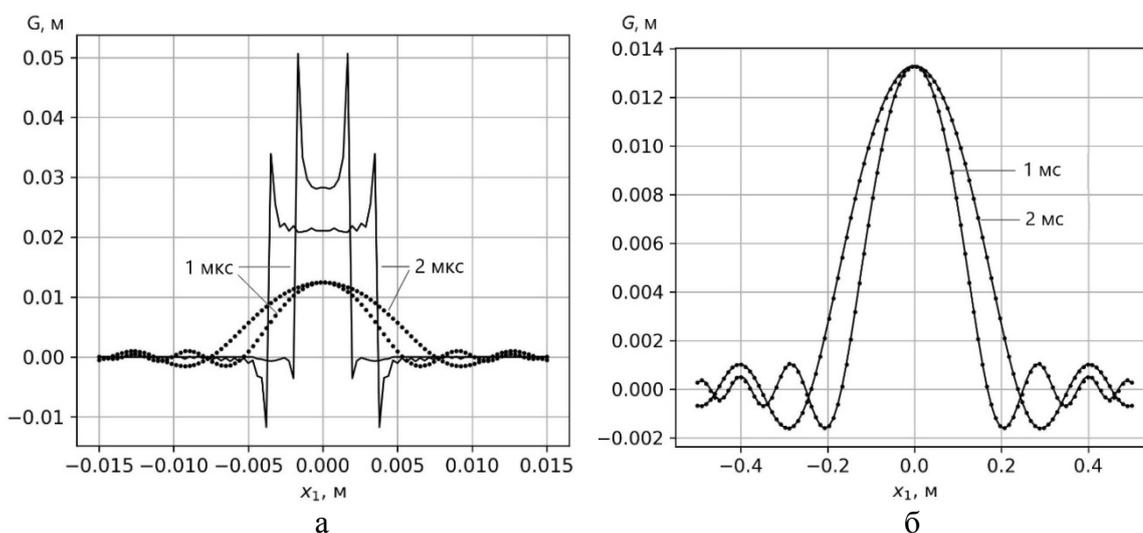


Рис.2. Функции Грина для нормального перемещения: а) в момент времени 1 мкс и 2 мкс; б) в момент времени 1 мс и 2 мс.

Из результатов, представленных на рис.2а, видно, что в моменты времени 1 мкс и 2 мкс, когда возмущения проходят расстояния соизмеримые с несколькими толщинами пластины, функции Грина для нормальных перемещений имеют существенные отличия. При этом функции имеют явные отличия. Они объясняются различным типом используемых моделей пластин [32,34]. Из рис.2б видно, что с течением времени функции Грина нормальных перемещений для анизотропной пластины Тимошенко приобретают вид, характерный для функции Грина анизотропной пластины Кирхгофа. Очевидно,

что и перемещения, построенные по формулам (3) для модели пластин Тимошенко, будут давать отличный от модели пластин Кирхгофа результат только в начальные моменты времени.

При построении графиков на рис.2 в соотношении (13) удержано по 800 членов каждой суммы, а для анизотропной пластины Кирхгофа [23]  $Q = 2500$ ,  $N = 5575$ , что обусловлено анализом сходимости результатов по непрерывной норме функций. Стоит отметить, что с точки зрения времени машинного счета результаты, представленные на рис.2 для анизотропной пластины Тимошенко, получены в 75 раз быстрее, что с практической точки зрения является существенным преимуществом.

Исследуем характер распространения волн (3) в случае действия на анизотропную пластину в центре координат сосредоточенной нестационарной нагрузки вида

$$p(x_1, x_2, t) = p(t)H(t)\delta(x_1, x_2), \quad p(t) = -210 \cdot 10^6 \cdot t^2 e^{-1500t},$$

с быстро затухающей амплитудой  $p(t)$ .

При этом свёртки по пространственным переменным с учетом свойств дельта-функции Дирака вычисляются аналитически. Для численного интегрирования по времени в (3) использован метод прямоугольников

$$w(x_1, x_2, t) \approx \frac{t}{m} \sum_{j=0}^{m-1} G\left(x_1, x_2, t - \frac{tj}{m}\right) p\left(\frac{tj}{m}\right), \quad (16)$$

$$\chi_i(x_1, x_2, t) \approx \frac{t}{m} \sum_{j=0}^{m-1} X_i\left(x_1, x_2, t - \frac{tj}{m}\right) p\left(\frac{tj}{m}\right), \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

На рис.3а,б представлены: нестационарный нормальный прогиб  $w(x_1, x_2, t)$  и углы поворотов  $\chi_1(x_1, x_2, t)$  анизотропной пластины Тимошенко в момент времени 10 мс.

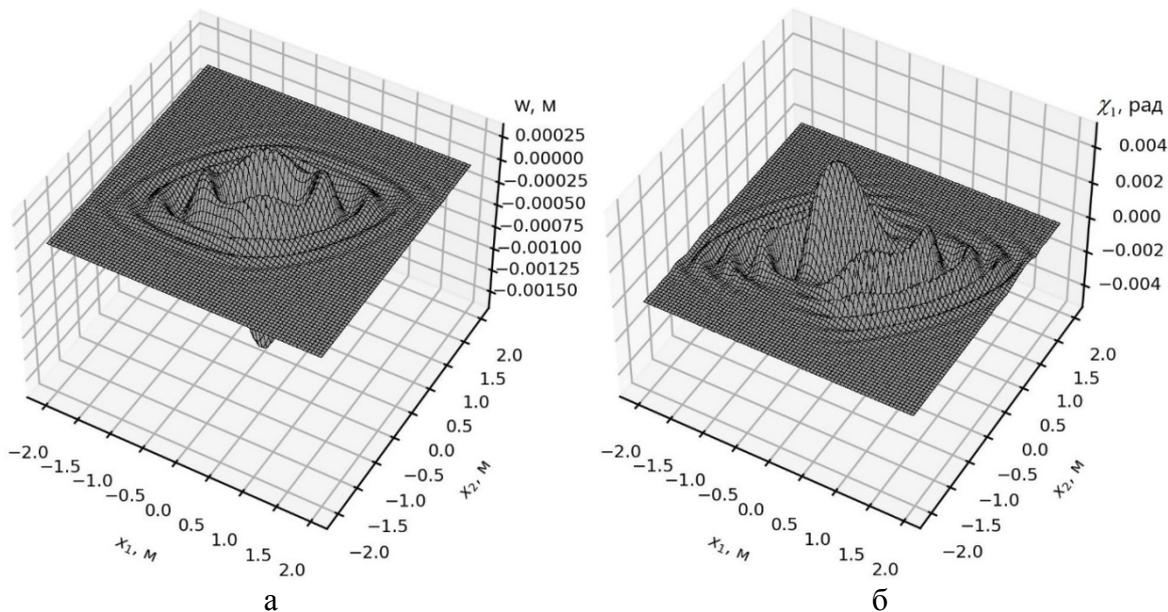


Рис.3. Нестационарная динамика анизотропной пластины Тимошенко: а) нормальный прогиб; б) угол поворота.

Результаты, представленные на рис.3, демонстрируют асимметричный характер распространения нестационарных волн, что объясняется анизотропией материала пластины.

На рис.4 представлен нестационарный прогиб анизотропной пластины Тимошенко (16) и Кирхгофа [23] вдоль оси  $x_1$  в моменты времени 4 мс и 8 мс (сплошные линии – результаты для анизотропной пластины Тимошенко, точки – результаты для анизотропной пластины Кирхгофа).

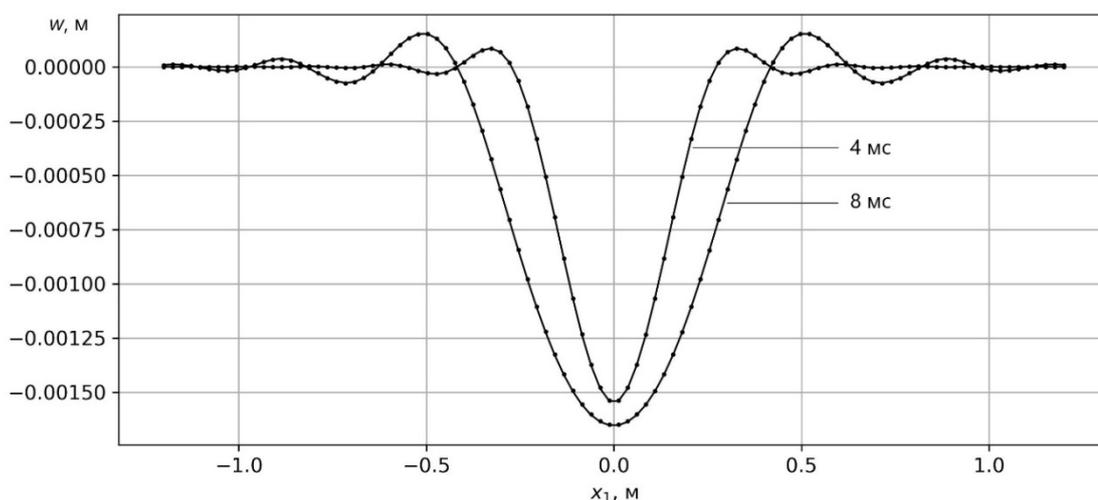


Рис.4. Сопоставление нестационарных нормальных перемещений анизотропных упругих пластин Тимошенко и Кирхгофа.

Из рис.4 видно, что в рассматриваемые моменты времени нестационарные нормальные прогибы анизотропной пластины Тимошенко и Кирхгофа имеют одинаковый характер и близки численно. Нормы разности представленных на рис.4 функций составили

$$\begin{aligned} & \|w(x_1, 0, 0.004) - w_*(x_1, 0, 0.004)\| = \\ & = \max_{-1.2 \leq x_1 \leq 1.2} |w(x_1, 0, 0.004) - w_*(x_1, 0, 0.004)| = 4.4 \times 10^{-6} \text{ м}, \\ & \|w(x_1, 0, 0.008) - w_*(x_1, 0, 0.008)\| = \\ & = \max_{-1.2 \leq x_1 \leq 1.2} |w(x_1, 0, 0.008) - w_*(x_1, 0, 0.008)| = 3.8 \times 10^{-6} \text{ м}, \end{aligned}$$

где  $w$  – прогиб анизотропной пластины Тимошенко,  $w_*$  – прогиб анизотропной пластины Кирхгофа. При построении графиков на рис.3 и рис.4 в соотношениях (16), (17)  $m$  принято равным 40, что обусловлено анализом сходимости результатов.

Проведенный анализ результатов, представленных на рис.2 и рис.4, позволяет говорить о верификации построенных новых функций Грина для тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко большой протяженности.

Реализация алгоритмов и построение графических результатов выполнено при помощи языка программирования Python.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены новые функции Грина для тонкой упругой анизотропной пластины Тимошенко большой протяженности. Для решения применены

интегральные преобразования Лапласа и Фурье. Оригиналы по Лапласу найдены при помощи второй теоремы разложения для преобразования Лапласа, а оригиналы по Фурье построены с помощью связи интеграла обращения преобразования Фурье с рядом Фурье на переменном интервале.

Достоверность результатов подтверждена численным исследованием. Выполнено сопоставление результатов, полученных для двух различных моделей пластин: пластины Тимошенко и пластины Кирхгофа. Раскрыты принципиальные отличия в результатах для этих моделей.

Аналитическая форма для функций Грина позволяет использовать их в решении прямых, обратных и контактных нестационарных задачах для анизотропных, ортотропных, трансверсально-изотропных и изотропных пластин большой протяжённости. Они также могут быть использованы и для пластин конечных размеров в начальные моменты времени, когда наличие опор не является существенным.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Pogodin V.A., Rabinskij L.N., Sitnikov S.A. *3D printing of components for the gas-discharge chamber of electric rocket engines* // Russian Engineering Research. – 2019. – Vol.39. – No.9. – Pp.797-799.
2. Xin Qian, Mayur Ostwal, Ayse Asatekin, Geoffrey M. Geise, Zachary P. Smith, William A. Phillip, Ryan P. Lively, Jeffrey R. McCutcheon. *A critical review and commentary on recent progress of additive manufacturing and its impact on membrane technology* // J. of Membrane Science. – 2022. – Vol.645. – 120041.
3. Абрамов А.А., Цыганков П.Ю., Меньшутина Н.В. *Изучение методов и технологий трехмерной печати для получения высокопористых материалов* // Успехи в химии и химической технологии. – 2020, – Т.34. – №6(229). – С.85-87.
4. Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. *О прочности модифицированного волокнистого композита с вискеризованными волокнами* // Композиты и наноструктуры. – 2019. – Т.11. – №1(41). – С.1-15.
5. Осипок Т.В., Зайдес С.А. *Оценка анизотропии механических свойств листового проката из углеродистой стали* // Polytech Journal. – 2020. – Т.24(5). – С.1007-1018. DOI: 10.21285/1814-3520-2020-5-1007-1018.
6. Trzepieciński T., Gelgele H.L. *Investigation of anisotropy problems in sheet metal forming using finite element method* // Intern. J. of Material Forming. – 2011. – Vol.4. – Pp.357-369.
7. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. – М.-Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 355 с.
8. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
9. Адемаску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. *Анизотропия физических свойств материалов*. – М.: Металлургия, 1985. – 137 с.
10. Жигалко Ю.П., Садыкова М.М. *Динамика тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружении* // Вопросы динамики пластин и оболочек. – 1990. – Т.20. – С.184-191.
11. Моргачев К.С. *Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины* // Вестник Самарского государственного технического

- университета. Серия: Физико-математические науки. – 2007. – №2 (15). – С.162-164.
12. Шевченко В.П., Ветров О.С. *Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок* // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т.22. – С.207-215.
  13. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. *Prediction of impact damage in composite sandwich plates* // *Materiaux & Techniques*. – 2019. – Vol.107. – No.2. – 201.
  14. Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. *Фундаментальное решение задачи изгиба ортотропной пластины, лежащей на упругом основании типа Винклера* / 3-я Всероссийская научная конференция «Математическое моделирование и краевые задачи». Сборник трудов. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2006. – С.51-54.
  15. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. *Free Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media* // *J. of applied mechanics-transactions of the ASME*. – 1989. – Vol.56. – No.4. – Pp.881-886.
  16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Thermoelastic Deformation of a Circular Sandwich Plate by Local Loads* // *Mechanics of Composite Materials*. – 2018. – Vol.54. – No.3. – Pp.299-312.
  17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads* // *Mechanics of Composite Materials*. – 2016. – Vol.52. – No.5. – Pp.665-672.
  18. Alshits V.I., Maugin G.A. *Dynamics of anisotropic multilayers* // *Wave Motion*. – 2008. – Vol.45. – No.5. – Pp.629-640.
  19. Sun C.T., Chattopadhyay S. *Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates Under Initial Stress to Impact of a Mass* // *J. of Applied Mechanics*. – 1975. – Vol.42. – No.3. – Pp.639-698.
  20. Daros C.H. *The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates* // *Engineering analysis with boundary elements*. – 2015. – Vol.54. – No.2. – Pp.19-27.
  21. Igumnov L.A., Markov I.P. *A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates* // *Materials physics and mechanics*. – 2018. – Vol.37. – No.1. – Pp.79-83.
  22. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. *Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method* // *J. of Mechanics*. – 2014. – Vol.30. – No.6. – Pp.561-570.
  23. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Stress-Strain State of a Composite Plate Under the Action of a Transient Movable Load* // *Mechanics of Composite Materials*. – 2021. – Vol.57. – No.4. – Pp.493-502.
  24. Reddy J.N. *Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates* // *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*. – 1983. – Vol.19. – No.2. – Pp.237-255.
  25. Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. *Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates* // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2020. – Vol.27. – No.13. – Pp.1076-1084.
  26. Dewangan H.C., Katariya P.V., Panda S.K. *Time-dependent transverse deflection responses of the layered composite plate with concentric circular cut-out* // *Materials Today: Proceedings*. – 2020. – Vol.33. – No.8. – Pp.4961-4965.
  27. Dinghe Li. *Extended layerwise method* / In: *Analysis of Composite Laminates*. – Elsevier, 2022. – Pp.139-233.

28. Vahterova Y.A., Min Y.N. *Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials* // Turkish J. of Computer and Mathematics Education. – 2021. – Vol.12. – No.2. – Pp.2703-2708.
29. Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force* // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.489-498.
30. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Non-stationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell* // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol.50. – No.2. – Pp.208-217.
31. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff-Love shell* // J. of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol.18. – No.4. – Pp.737-744.
32. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах: Учебное пособие: для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
33. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. *Гранично-элементное решение краевых задач трехмерной анизотропии теории упругости* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2013. – №1(3). – С.115-119.
34. Вахтерова Я.А., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Нестационарная динамика балок и пластин: Учебное пособие.* – М.: Изд-во МАИ, 2022. – 104 с.

## REFERENCES

1. Pogodin V.A., Rabinskij L.N., Sitnikov S.A. *3D printing of components for the gas-discharge chamber of electric rocket engines.* Russian Engineering Research, 2019, Vol.39, No.9, Pp.797-799.
2. Xin Qian, Mayur Ostwal, Ayse Asatekin, Geoffrey M. Geise, Zachary P. Smith, William A. Phillip, Ryan P. Lively, Jeffrey R. McCutcheon. *A critical review and commentary on recent progress of additive manufacturing and its impact on membrane technology.* Journal of Membrane Science, 2022, Vol.645, 120041.
3. Abramov A.A., Tsygankov P.U., Menshutina N.V. *Izuchenie metodov i tekhnologij trekhmernoj pechati dlya polucheniya vysokoporistykh materialov [Studying methods and technologies of 3d printing for obtaining highly-porous materials].* Uspekhi v khimii i khimicheskoy tekhnologii, 2020, Vol.34, No.6(229), Pp.85-87.
4. Lur'e S.A., Kriven' G.I., Rabinskij L.N. *O prochnosti modifitsirovannogo voloknistogo kompozita s viskerizovannymi voloknami [On the strength of a modified fiber composite with whiskerized fibers].* Kompozity i nanostruktury, 2019, Vol.11, No.1(41), Pp.1-15.
5. Osipok T.V., Zaides S.A. *Otsenka anizotropii mekhanicheskikh svojstv listovogo prokata iz uglerodistoj stali [Evaluation of anisotropy of mechanical properties of carbon steel flat products].* iPolytech Journal, 2020, Vol.24(5), Pp.1007-1018.
6. Trzepieciński T., Gelgele H.L. *Investigation of anisotropy problems in sheet metal forming using finite element method.* International Journal of Material Forming, 2011, Vol.4, Pp.357-369.
7. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates].* Moskva-Leningrad, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1947, 355 p.
8. Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of elasticity of an anisotropic body].* Moskva, Nauka, 1977, 416 p.

9. Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mityushov E.A. *Anizotropiya fizicheskikh svojstv materialov [Anisotropy of physical properties of materials]*. Moskva, Metallurgiya, 1985, 137 p.
10. Zhigalko Yu.P., Sadykova M.M. *Dinamika tonkoj krugloj plastinki pri nestatsionarnom lokal'nom nagruzhenii [Dynamics of a thin round plate under unsteady local loading]*. Voprosy dinamiki plastin i obolochek, 1990, Vol.20, Pp.184-191.
11. Morgachev K.S. *Nestatsionarnaya dinamika kol'tsevoj plastiny Timoshenko peremennoj tolshhiny [Unsteady dynamics of a Timoshenko ring plate of variable thickness]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2007, Vol.15, No.2. Pp.162-164.
12. Shevchenko V.P., Vetrov O.S. *Dinamika ortotropnoj plastiny pod dejstviem lokal'nykh vnezapno prilozhennykh nagruzok [Dynamics of an orthotropic plate under the action of local suddenly applied loads]*. Trudy IPMM NAN Ukrainy, 2011, Vol.22, Pp.207-215.
13. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. *Prediction of impact damage in composite sandwich plates*. *Materials & Techniques*, 2019, Vol.107, No.2, 201.
14. Artyuhin Yu.P., Velikanov P.G. *Fundamental'noe reshenie zadachi izgiba ortotropnoj plastiny, lezhashhej na uprugom osnovanii tipa Vinklera [A fundamental solution to the problem of bending an orthotropic plate lying on an elastic Winkler-type base]*. 3-ya Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya "Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi". Sbornik trudov. Chast' 3: Differentsial'nye uravneniya i kraevye zadachi. Samara, SamGTU, 2006, Pp.51-54.
15. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. *Free Wave Propagation in Plates of General Anisotropic Media*. *Journal of applied mechanics-transactions of the ASME*, 1989, Vol.56, No.4, Pp.881-886.
16. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Thermoelastic Deformation of a Circular Sandwich Plate by Local Loads*. *Mechanics of Composite Materials*, 2018, Vol.54, No.3, Pp.299-312.
17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads*. *Mechanics of Composite Materials*, 2016, Vol.52, No.5, Pp.665-672.
18. Alshits V.I., Maugin G.A. *Dynamics of anisotropic multilayers*. *Wave Motion*, 2008, Vol.45, No.5, Pp.629-640.
19. Sun C.T., Chattopadhyay S. *Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates Under Initial Stress to Impact of a Mass*. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, Vol.42, No.3, Pp.639-698.
20. Daros C. H. *The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates*. *Engineering analysis with boundary elements*, 2015, Vol.54, No.2, Pp.19-27.
21. Igumnov L.A., Markov I.P. *A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates*. *Materials physics and mechanics*, 2018, Vol.37, No.1. Pp.79-83.
22. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. *Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method*. *Journal of mechanics*, 2014, Vol.30, No.6, Pp.561-570.
23. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Stress-Strain State of a Composite Plate Under the Action of a Transient Movable Load*. *Mechanics of Composite Materials*, 2021, Vol.57, No.4, Pp.493-502.

24. Reddy J.N. *Dynamic (transient) analysis of layered anisotropic composite-material plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, Vol.19, No.2, Pp.237-255.
25. Raghu P., Rajagopal A., Reddy J.N. *Nonlocal transient dynamic analysis of laminated composite plates*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020, Vol.27, No.13, Pp.1076-1084.
26. Dewangan H.C., Katariya P.V., Panda S.K. *Time-dependent transverse deflection responses of the layered composite plate with concentric circular cut-out*. Materials Today: Proceedings, 2020, Vol.33, No.8, Pp.4961-4965.
27. Dinghe Li. *Extended layerwise method*. In: Analysis of Composite Laminates. Elsevier, 2022, Pp.139-233.
28. Vahterova, Y.A., Min, Y.N. *Effect of shape of armoring fibers on strength of composite materials*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2021, Vol.12, No.2, Pp.2703-2708.
29. Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4. Pp.489-498.
30. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Non-stationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.208-217.
31. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchoff-Love shell*. Journal of Applied Engineering Science, 2020, Vol.18, No.4, Pp.737-744.
32. Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L.N., Tarlakovskij D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in continuous media]*. Uchebnoe posobie dlya vuzov. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
33. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. *Granichno-ehlementnoe reshenie kraevykh zadach trekhmernoj anizotropii teorii uprugosti [Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3d anisotropic elasticity]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2013, No.1(3), Pp.115-129.
34. Vakhterova Ya.A., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnaya dinamika balok i plastin [Transition dynamics of beams and plates]*. Uchebnoe posobie. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2022, 104 p.

*Поступила в редакцию 16 января 2023 года.*

---

Сведения об авторах:

Макаревский Дмитрий Игоревич – к.т.н., доц., Кафедра «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [makarevskiy194301@gmail.com](mailto:makarevskiy194301@gmail.com)

Сердюк Дмитрий Олегович – к.т.н., доц., Кафедра «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [d.serduk55@gmail.com](mailto:d.serduk55@gmail.com)

Федотенков Григорий Валерьевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [greghome@mail.ru](mailto:greghome@mail.ru)