



УДК 531.3

EDN LGEXGO (<https://elibrary.ru/lgexgo>)

## ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ РАУСА В ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ЗАДАЧАМ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН\*

Жаворонок С.И., Курбатов А.С.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия  
ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (Национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия  
НИУ Московский государственный строительный университет,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Предложена новая формулировка начально-краевой задачи теории N-го порядка ортотропных оболочек, основанная на методах аналитической механики континуальных систем. Введена некоторая гладкая базисная поверхность, и на двумерном многообразии, соответствующем данной поверхности, определены криволинейные координаты. Модель нетонкой оболочки как трехмерного упругого тела определена множеством переменных поля первого рода, пространственной и граничной плотностями функционала Лагранжа. В качестве переменной поля первого рода рассмотрен псевдовектор перемещения, заданный ковариантными компонентами вектора истинного перемещения в базисе касательного расслоения двумерного многообразия. Компоненты псевдовектора обобщенного напряжения на площадках с нормалью, сонаправленной базисному вектору одной из криволинейных координат базисной поверхности, определены дифференцированием пространственной плотности функционала Лагранжа по ковариантным производным компонентом псевдовектора перемещения по выбранному направлению. Преобразованием Лежандра пространственной плотности функционала Лагранжа по данным ковариантным производным переменной поля получена пространственная плотность смешанного функционала, зависящего от переменных состояния – введенного псевдовектора напряжения, псевдовекторов перемещения и скорости, а также ковариантных производных компонент псевдовектора перемещения по второму координатному направлению. Введена биортогональная базисная система функций нормальной координаты, определена система новых переменных состояния, заданных на касательном расслоении двумерного многообразия, соответствующего базисной поверхности, коэффициентами разложения переменных состояния по биортогональному базису. Поверхностная и контурная плотности смешанного функционала, определяющие двумерную модель оболочки, порождаются соответствующей редукцией пространственной и граничной плотностей смешанного функционала при удержании N+1 коэффициента разложения. Уравнения Эйлера-Лагранжа, вытекающие из принципа Гамильтона-Остроградского, разрешены относительно ковариантных производных новых переменных состояния и в определенном смысле эквивалентны уравнениям Рауса механики дискретных систем. Приложение обобщенных уравнений Рауса теории оболочек N-го порядка к задачам о дисперсии нормальных волн приводит к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, позволяющей построить действительные, мнимые и комплексные ветви дисперсионных кривых, соответствующие распространяющимся и затухающим модам.

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект №22-21-00800).

Для изотропного плоского слоя получено решение спектральной задачи и исследована сходимость решения на базе теории N-го порядка для мнимых ветвей к точному решению во втором квадранте комплексной плоскости в некоторых узлах решетки Миндлина.

**Ключевые слова:** оболочки ортотропные; теория N-го порядка; динамика аналитическая; системы Лагранжевы; Лежандра преобразование; Пауса уравнения обобщенные; волны нормальные; ветви дисперсионные; моды затухающие

## **THE GENERALIZED ROUTH EQUATIONS IN THE ORTHOTROPIC SHELL THEORY OF N-TH ORDER AND THEIR APPLICATION TO NORMAL WAVE DISPERSION PROBLEMS**

Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia  
National Research University MGSU, Moscow, Russia*

### **ABSTRACT**

A new formulation of the initial-boundary value problem of the N-th order orthotropic shells theory based on the methods of analytical mechanics of continuum systems is proposed below. Some smooth base surface is introduced, and curvilinear coordinates are determined on the two-dimensional manifold corresponding to the base surface. The model of a non-thin shell as a three-dimensional elastic body is defined by a set of field variables of the first kind, and the spatial and boundary densities of the Lagrange functional. As a field variable of the first kind, a pseudovector of displacement is considered, given by covariant components of the vector of true displacement in the basis of the tangent bundle of a two-dimensional manifold. The components of the generalized stress pseudovector on sections with normal unit co-directed to the base vector of one of the curvilinear coordinates are defined by differentiating the spatial density of the Lagrange functional by covariant derivatives of the components of the displacement pseudovector in the selected direction. By Legendre transformation of the spatial density of the Lagrange functional with respect to the covariant derivatives of the field variables, the spatial density of the mixed functional is obtained, depending on the state variables – the introduced stress pseudovector, displacement and velocity pseudovectors, as well as covariant derivatives of the components of the displacement pseudovector in the second coordinate direction. A biorthogonal base system of functions of the dimensionless normal coordinate is introduced, a system of new state variables defined on the tangent bundle of a two-dimensional manifold corresponding to the basis surface is determined by the series coefficients of state variables with respect to the biorthogonal base system. The surface and contour densities of the mixed functional defining the two-dimensional shell model are obtained by the corresponding reduction of the spatial and boundary densities of the mixed functional while retaining first N+1 series coefficient. The Euler-Lagrange equations, which follow from the Hamilton-Ostrogradsky principle, are resolved hence with respect to covariant derivatives of new state variables and, in a certain sense, are equivalent to the known Routh equations of the analytical mechanics of discrete systems. The application of the generalized Routh equations of the N-th order shell theory to problems of normal wave dispersion leads to a spectral problem linear with respect to the wavenumber, which allows one to construct as well real as imaginary and complex branches of dispersion curves corresponding to propagating and evanescent wave modes. A solution of the spectral problem for an isotropic plane layer is obtained and the solution convergence based on the N-th order theory to the exact solution in the second quadrant of the complex plane at some nodes of the Mindlin grid is studied for imaginary branches.

**Keywords:** orthotropic shells; shell theory of N-th order; analytical dynamics of continua; Lagrangian systems; Legendre transform; generalized Routh equations; normal waves; dispersion branches; evanescent modes

## ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи о дисперсии нормальных волн в тонкостенных волноводах является теоретической основой разработки методов неразрушающего контроля и выявления дефектов в различных элементах из композиционных материалов [1] – как слоистых, так и функционально-градиентных [2,3]. Полное исследование дисперсии требует построения не только действительных ветвей дисперсионных кривых, соответствующих распространяющимся модам нормальных волн, но также мнимых и комплексных ветвей, соответствующих затухающим модам. С теоретической точки зрения роль комплексных корней особенно важна «...для построения полных наборов частных решений, дающих возможность удовлетворить граничным условиям на торцах волновода» ([4], с.128). В инженерной практике затухающие нормальные волны играют существенную роль в неразрушающей диагностике. Так, автор работы [5] доказал возможность экспериментального обнаружения усталостных трещин, излучающих затухающие моды, которые «...вносят значительный вклад в локальные амплитуды моды (волн) Лэмба на границе трещины»<sup>†</sup> ([5], с. 134). Известные методы передаточных и реверберационных матриц (см. обзор [2]), одним из ключевых недостатков которых является неустойчивость решения либо на высоких, либо на низких частотах [2], а также метод глобальных матриц требуют сложных итерационных алгоритмов вычисления корней трансцендентного характеристического уравнения, особенно комплексных [2]; к решению трансцендентного уравнения сводится и метод степенных рядов (см. напр. [6]). Эффективной альтернативой являются методы полуаналитических конечных элементов ([7,8], см. также обзор [3]) и особенно метод, именуемый зарубежными авторами «методом ортогональных полиномов», предложенный в работах [9-11], основанный на разложении неизвестных задачи в обобщенные ряды Фурье по некоторой ортогональной системе (напр., для слоя – по полиномам Лежандра); таким образом, осуществляется пространственная редукция модели волновода в трансверсальном направлении. Заметным преимуществом данного подхода является приведение задачи о дисперсии волн к спектральной задаче  $|\mathbf{A}(\kappa) - \omega^2 \mathbf{I}| = 0$ , где собственным значением в исходном варианте метода [9-14] является квадрат фазовой частоты волны  $\omega^2(\kappa)$ ,  $\kappa$  – волновое число; алгоритмы численного решения спектральных задач, как правило, устойчивы. Метод применим в случае слоистых волноводов с близкими свойствами слоев [12], функционально-градиентных волноводов различной формы [13,14] и допускает обобщение на случай слоистых волноводов с существенно различными физическими константами слоев [15,16] (см. также обзор [3]), а также на случай моментно-упругих материалов [17]. Вычисление эффективных упругих постоянных двумерной модели волновода для неоднородного материала сводится к операции интегрирования, причем использование известных рекуррентных

<sup>†</sup> Crack-induced NPLs are the attractive feature to identify and localize an invisible crack, because they ... significantly contribute to local Lamb mode amplitudes at a crack interface

соотношений для ортогональных полиномов [18] существенно снижает затраты машинного времени [19,20].

Построение мнимых и комплексных ветвей дисперсионных кривых на основе метода ортогональных полиномов не приводит к вычислительным затруднениям, но требует перехода к спектральной задаче  $|\mathbf{B}(\omega) - \kappa \mathbf{I}| = 0$ , линейной относительно волнового числа  $\kappa(\omega)$ . Большинство авторов такой переход осуществляется на этапе постановки спектральной задачи введением переменной  $P_i^{(k)} = \kappa U_i^{(k)}$ , где  $U_i^{(k)}$  – амплитуда перемещения, соответствующее  $k$ -й базисной функции  $p_{(k)}(\zeta)$ ,  $\zeta$  – трансверсальная координата [21-23]. Уравнения движения формулируются, как и в случае традиционного метода ортогональных полиномов, в обобщенных перемещениях. В работе [21] построены дисперсионные ветви распространяющихся и затухающих волн для однородного, в [24] – функционально-градиентного пьезоупругого цилиндрического волновода секториального сечения; в работе [23] – для окружных волн в пьезоупругой, в [22] – упругой функционально-градиентной, а в [25] – в ортотропной упругой полой сферической оболочке из волокнистого композиционного материала. Позднее авторами решены задачи о дисперсии волн в вязкоупругих волноводах: функционально-градиентном полом цилиндре [26] на базе модели Кельвина-Фойхта и пластине с предварительными напряжениями [27] на основе модели дробного порядка. Наконец, в [28] приводятся результаты для термоупругого призматического волновода, полученные на основе теории Грина-Линдси.

Следует заметить, что «метод ортогональных полиномов» представляет собой одно из приложений общей «трехмерной» (в соответствии с терминологией А.А. Амосова [29]) теории оболочек к рассматриваемому классу стационарных задач динамики тонких тел. Здесь и далее под теориями оболочки понимаются модели, формулируемые в терминах двумерного многообразия  $S$  [30] и являющиеся континуально-дискретными [31]. Трехмерные теории оболочек, допускающие адекватное приближение напряженно-деформированного состояния в т.н. областях неприводимости (т.е. в тех областях  $V_3 \in V$ , где трехмерное поле тензора напряжения  $\boldsymbol{\sigma}(M')$ ,  $M' \in V_3$  не может быть с допустимой погрешностью восстановлено по главному вектору  $\mathbf{T}(M)$  и главному моменту  $\mathbf{M}(M)$  внутренних сил, заданных на соответствующей подобласти  $S_3 \subseteq S$  двумерного многообразия [31]), подразумевают введение дополнительных степеней свободы, кроме вектора перемещения  $\mathbf{u}(M)$  и, возможно, вектора вращения  $\boldsymbol{\varphi}(M)$ ,  $M \in S$ . Так как решение проблемы приведения трехмерной начально-краевой задачи механики деформируемого твердого тела к двумерной задаче теории оболочек не единственно [31], существуют различные классы трехмерных теорий, основанные на разных методах приведения: полуобратном (т.е. методе гипотез) [32], асимптотическом интегрировании уравнений механики деформируемого твердого тела [33-36], вариационно-асимптотическом подходе [37], методе множественных базовых поверхностей (напр., [38,39]), разложении неизвестных в ряды Маклорена [31] или ряды Фурье по некоторой системе базисных функций нормальной координаты [29,31,40], и др. (см. напр. обзорные работы [41,42]). Приложение метода гипотез к задачам динамики оболочек ограничивается, в основном, низкочастотными приближениями и низшими ветвями

дисперсионных кривых; кроме того, построение полуобратным методом непротиворечивых теорий высокого порядка затруднительно [43-45]. Асимптотический подход – как к построению двумерных моделей [35], так и к анализу решений на их основе [46] – является на текущий момент наиболее эффективным инструментом качественного анализа динамики тонкого неоднородного тела [47], позволяя выявлять новые эффекты (кромочные волны в пластинах [48] и оболочках [49], волны в наследственно-упругих волноводах [50] и вязкоупругих волноводах [51], низкочастотные волны в кровеносных сосудах [52] и др.). однако, построение высших приближений (там, где они необходимы) на базе асимптотического сталкивается с трудностями, особенно в случае неоднородных тел. В свою очередь, метод редукции пространственной размерности трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела, предложенный в работах [29,40,53-57] и ряде других обладает рядом преимуществ: в первую очередь, обеспечивает построение иерархии моделей различного порядка на основе единой формулировки [29,58], кроме того, «... иерархические модели, полученные таким образом, способны аппроксимировать решение полной трехмерной задачи... в различных нормах, что не свойственно моделям, полученным, например, с помощью методов асимптотического разложения»<sup>‡</sup> ([59], с.2). В качестве системы базисных функций в пространстве  $H[-1,1]$  при построении теорий оболочек вводятся, как правило, ортогональные на отрезке  $[-1,1]$  полиномы Лежандра [40,53-57,60-63] (либо полиномы Чебышёва [64]). Таким образом, редукционный подход к построению иерархических теорий оболочек высокого порядка идентичен методу ортогональных полиномов в задачах о дисперсии нормальных волн [1] и приводит к начально-краевой задаче динамики тонкого тела, обеспечивая моделирование криволинейных волноводов различной формы и решение нестационарных задач для оболочек (см. напр. монографию [53]).

Из представления Н.А. Кильчевского об оболочке как системе с редуцированным числом степеней свободы в направлении, нормальном базисной поверхности [31], иерархического подхода А.А. Амосова к построению теорий оболочек высшего порядка [29] и возможности распространения вариационного формализма аналитической динамики на континуальные системы [65] следует дальнейшее развитие иерархической теории оболочек как двумерных Лагранжевых систем. Модель оболочки [66-68] задается на двумерном многообразии, соответствующем некоторой гладкой базисной поверхности (в общем случае не срединной) конфигурационным пространством с переменными поля первого рода [65], определенными коэффициентами разложения вектора перемещения по биортогональной системе базисных функций нормальной координаты, поверхностной и контурной плотностями функционала Лагранжа, вытекающими из пространственной и граничной плотностей Лагранжиана в результате редукции; удержание  $N+1$  члена в частичной сумме порождает теорию  $N$ -го порядка [29,66]. Уравнения движения оболочки [66-68] являются уравнениями Лагранжа второго рода двумерной континуальной системы. Приложения теории  $N$ -го порядка к задачам о дисперсии нормальных волн в упругих системах рассмотрено в работах [69-79]. В статье [69] получена

<sup>‡</sup> The hierarchical models obtained in this way are capable of approximating the solution of the full, three-dimensional problem... in various norms, a feature not shared by models obtained from, for example, asymptotic expansion techniques.

формулировка спектральной задачи и показана сходимость решений в плоском упругом слое, полученных на базе теорий различного порядка, к точному решению задачи Рэлея-Лэмба [4] для частот запириания распространяющихся мод нормальных волн, а в [71] – при некоторых характерных ненулевых значениях волнового числа. В работе [70] показана сходимость форм распространяющихся мод на частотах запириания, вытекающих из приближенного решения, к точному решению [4] по норме евклидова пространства. В статье [72] исследовано явление т.н. «обратной волны» [4], т.е. второй дисперсионной ветви продольных мод в области отрицательных групповых скоростей, и показана достаточность теорий 6-7 порядков для его описания, а в [73] построены формы продольной волны в области  $c_g < 0$ . Следует заметить, что применение в общем случае биортогональных разложений и ковариантная формулировка уравнений движения теории оболочек  $N$ -го порядка [68] позволяет применять в качестве базиса, помимо ортогональных полиномов, также и финитные функции формы; в последнем случае приложение теории к задачам о дисперсии нормальных волн приводит к спектральной задаче, соответствующей полуаналитическому методу конечных элементов; сравнение сходимости решений, полученных на основе единой формулировки иерархической теории оболочек при использовании полиномиального и финитного базисов приведено в статье [78]. Таким образом, как метод ортогональных полиномов, так и метод полуаналитических конечных элементов являются частными случаями теории оболочек  $N$ -го порядка в классе задач о дисперсии нормальных волн в тонкостенных упругих волноводах.

Сходимость решения спектральной задачи зависит в том числе от удовлетворения условиям отражения волн на поверхностях волновода [4], т.е. от краевых условий на лицевых поверхностях оболочки. Вариационный формализм аналитической динамики континуальных систем позволяет обеспечить точное удовлетворение краевых условий, переносимых на базисную поверхность оболочки и рассматриваемых в качестве уравнений связей вариационной задачи [74]; уравнения движения строятся методом множителей Лагранжа [74,77]. Решение спектральной задачи в данном случае возможно как путем исключения множителей с переходом к вырожденной обобщенной спектральной задаче, так и на базе метода Голуба [80] решения задачи о стационарных значениях с ограничениями [75-77,79]. Сравнение решений при учете или пренебрежении связями, показывает заметное снижение эффектов запириания в том случае, когда краевые условия на лицевых поверхностях удовлетворены точно [77].

Вариационная формулировка теории  $N$ -го порядка обеспечивает определение приведенных упругих постоянных материала волновода, неоднородного по толщине, как на основе численного интегрирования, так и в случае применения в качестве базиса систем ортогональных полиномов [18] аналитически с помощью рекуррентных соотношений (аналогично работам). Решение задачи о дисперсии волн в неоднородном функционально-градиентном слое получено в работах [78] (для слоя со степенным законом распределения объемных долей структурных составляющих по толщине плоского волновода симметричной структуры) и [76] (для слоя несимметричной структуры), исследована сходимость решения спектральной задачи по частотам запириания, построены профили компонентов тензора напряжения, соответствующие формам нормальных волн, при нулевом волновом числе [79].

Таким образом, показано, что «трехмерная» теория оболочек  $N$ -го порядка является основой для решения задач о дисперсии распространяющихся волн в упругих неоднородных волноводах, обеспечивая вполне удовлетворительную сходимость решения при использовании как ортогонального полиномиального базиса, так и финитных функций формы на базе единого формализма. Однако полное решение задач о дисперсии волн требует описания не только исследованных в цитируемых выше работах распространяющихся мод (соответствующих действительным собственным значениям, определяемым спектральной задачей, квадратичной как относительно фазовой частоты, так и волнового числа), но и затухающих мод (соответствующих как мнимым, так и комплексным собственным значениям). Такие решения на базе теории оболочек  $N$ -го порядка до сих пор получены не были. Вычисление комплексных собственных значений возможно при переходе к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа при рассмотрении фазовой частоты как параметра. В известных работах такой переход осуществляется апостериори путем замены переменной. В то же время Лагранжев формализм аналитической динамики континуальных систем позволяет, применяя преобразование Лежандра, естественным образом построить системы уравнений, разрешенных относительно производных первого порядка по одной из пространственных переменных и тем самым получить требуемую формулировку спектральной задачи, линейной относительно волнового числа; при этом вводимые новые переменные имеют физический смысл обобщенных усилий. Данный подход схож с квази-Гамильтоновым формализмом [81-85], однако отличается от метода решения задач о дисперсии волн, основанного на формализме фазового пространства [86-92]. В самом деле, работы [81,82] посвящены решению пространственных задач статики упругих тел (криволинейных призматических стержней [81,82], ортотропных и анизотропных упругих и пьезоупругих пластин [83,84] и трансверсально-изотропных цилиндров [85]) путем преобразования функционала Лагранжа по частным производным, соответствующим некоторой выбранной координате. Доказываются симплектические свойства полученных в результате преобразования матричных операторов системы разрешающих уравнений, и строятся решения соответствующих спектральных задач. В работах [86-92] в качестве выделенной рассматривается трансверсальная координата; задача, тем не менее, сводится к одному векторному уравнению в производных второго порядка по данной координате; для решения данного уравнения далее применяется разложение неизвестной в обобщенный ряд Фурье по полиномам Лежандра, тогда как дальнейшее преобразование к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, осуществляется аналогично работам [21-28]. Согласно терминологии авторов [81-82], полученные уравнения первого порядка именуется Гамильтоновыми; ниже используется терминология Н.А. Кильчевского [65], в соответствии с которой квазиканоническими гамильтоновыми именуется уравнения не содержащие пространственных или временных производных выше первого порядка. В данной статье описано построение смешанного вариационного функционала для произвольной ортотропной оболочки на базе общей формулировки функционала Лагранжа теории оболочек  $N$ -го порядка и уравнений, являющихся условиями его экстремали и разрешенных относительно ковариантных производных первого порядка по одной из координат на двумерном многообразии. Данные уравнения, содержащие производные второго порядка по времени и второй криволинейной

координате, в определенном смысле аналогичны известным уравнениям Рауса аналитической механики. Рассмотрено приложение уравнений Рауса к решению задачи о дисперсии распространяющихся и затухающих волн в упругом слое; показана сходимость решения для дисперсионных ветвей, соответствующих мнимым волновым числам.

## 1. ТРЕХМЕРНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ДИНЕМИКИ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ

### 1.1. Основные геометрические соотношения.

Геометрической моделью оболочки, как двумерного континуума [66,68], является гладкое двумерное многообразие  $S$  с определенными на нем криволинейными координатами  $\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$  [55]. Здесь и далее, где не указано иное, греческие индексы пробегают значения 1,2. Касательное расслоение  $TS$

$$TS = \coprod_{M \in S} T_M S, \quad T_M S = \{d\xi^\alpha \mathbf{r}_\alpha : \mathbf{r}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{r}, \quad d\xi^\alpha \in \mathbb{R}^2\}, \quad \partial_\alpha \equiv \partial/\partial \xi^\alpha; \quad (1.1)$$

задано полями векторов  $\mathbf{r}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  ковариантного базиса;  $\forall M \in S \quad \mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(\xi^\alpha)$  – радиус-вектор, оснащено метрикой  $a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta$ ,  $a = \det(a_{\alpha\beta})$  [68,93]; далее всюду принято правило Эйнштейна суммирования по повторяющемуся индексу. Нормальное расслоение  $NS$  многообразия  $S$  определено так [93]

$$NS = \coprod_{M \in S} N_M S, \quad N_M S = \{d\zeta \mathbf{n} : \mathbf{n} = \mathbf{r}^1 \wedge \mathbf{r}^2, \quad d\zeta \in \mathbb{R}\}, \quad (1.2)$$

здесь и далее символами « $\cdot$ » и « $\wedge$ » обозначены скалярное и векторное произведения,  $\mathbf{r}^\alpha = a^{\alpha\gamma} \mathbf{r}_\gamma$ ,  $a^{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} = \delta_\beta^\alpha$ . Ковариантные компоненты тензора кривизны  $S$ , определенные соотношениями Вайнгартена  $b_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\beta$ ;  $c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta}$  – компоненты тензора третьей квадратичной формы. Векторные поля Ковариантное дифференцирование на  $TS$  далее обозначено символом  $\bar{\nabla}_\alpha$ . Для произвольного векторного поля на  $TS \oplus NS$  справедлива запись  $\mathbf{u} = u^\alpha \mathbf{r}_\alpha + u^3 \mathbf{n}$ .

Моделью оболочки как трехмерного тела является многообразие  $V \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\bar{V} = V \cup \partial V$ ,  $\partial V = S_\pm + S_B$ , где  $S_\pm$  – лицевые поверхности оболочки,  $S_B$  – ее боковая поверхность. Пусть  $S$  – базовая поверхность  $\bar{V}$ , т.е.  $\xi^\alpha, \zeta \in [-1, 1]$  – нормально связанная с  $S$  пространственная система криволинейных координат [40], такая, что  $\forall M' \in \bar{V} \quad \mathbf{R}(M') = \mathbf{r}(\xi^\alpha) + h\zeta \mathbf{n}(\xi^\alpha)$  [68], где  $h$  – толщина оболочки (предположим далее  $h \neq h(\xi^\alpha)$ ). Расслоение многообразия  $V$  определено следующим образом

$$TV = \coprod_{M' \in V} T_{M'} V, \quad (1.3)$$

$$T_{M'} V = \{d\xi^\alpha \mathbf{R}_\alpha + d\zeta \mathbf{n} : \mathbf{R}_\alpha = \partial_\alpha \mathbf{R}, \quad d\xi^\alpha \in \mathbb{R}^2, \quad d\zeta \in \mathbb{R}\};$$

для произвольного векторного поля на  $TV$  справедлива запись  $\mathbf{u} = \hat{u}^\alpha \mathbf{R}_\alpha + u^3 \mathbf{n}$ . Базисы  $TV$  и  $TS \oplus NS$  связаны уравнениями параллельного переноса [40]

$$\mathbf{R}_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{R}^\alpha = A_\beta^\alpha \mathbf{r}^\beta; \quad \mathbf{r}_\alpha = A_\alpha^\beta \mathbf{R}_\beta, \quad \mathbf{r}^\alpha = A_\beta^\alpha \mathbf{R}^\beta; \quad A_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta - h\zeta b_\alpha^\beta, \quad (1.4)$$



$$A_{\alpha}^{\beta} = \sqrt{\frac{a}{g}} \left[ (1 - 2h\zeta H) \delta_{\alpha}^{\beta} + h\zeta b_{\alpha}^{\beta} \right], \quad \sqrt{\frac{a}{g}} = 1 - 2h\zeta H + h^2 \zeta^2 K,$$

$K = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha}$ ,  $H = \det(b_{\alpha}^{\beta})$ ,  $A_{\alpha}^{\beta}$ ,  $A_{\alpha}^{\beta}$  являются компонентами тензоров  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}^{-1}$  [93]

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}_{\beta} \mathbf{r}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn};$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{r}_{\alpha} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{R}_{\beta} \mathbf{R}^{\alpha} + \mathbf{nn} = A_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}^{\alpha} \mathbf{r}_{\beta} + \mathbf{nn},$$

аналогичных градиентам места в нелинейной теории упругости [94]

$$\mathbf{A} : TS \oplus NS \rightarrow TV, \quad \mathbf{A} : T^*V \rightarrow T^*S \oplus NS;$$

$$\mathbf{A}^{-1} : T^*S \oplus NS \rightarrow T^*V, \quad \mathbf{A}^{-1} : TV \rightarrow TS \oplus NS. \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения кокасательных расслоений  $T^*S$  и  $T^*V$

$$T^*S = \coprod_{M \in S} T_M^*S, \quad T_M^*S = \{ \beta_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} : \beta_{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \};$$

$$T^*V = \coprod_{M' \in V} T_{M'}^*V, \quad T_{M'}^*V = \{ \beta_{\alpha} \mathbf{R}^{\alpha} + d\zeta \mathbf{n} : \beta_{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \}.$$

## 1.2. Кинематика деформирования оболочки как трехмерного тела.

Пусть  $\mathbf{u}(M, \zeta, t)$  – поле вектора перемещения, являющегося в терминах Лагранжевой механики континуальных систем [65] переменной поля I рода

$$u_{\beta} \mathbf{R}^{\beta} + u_3 \mathbf{n} = \mathbf{u}(\xi^{\alpha}, \zeta, t) : V \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow T^*V \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}). \quad (1.6)$$

В силу (1.1), (1.2), (1.3) и (1.5) существует биективное отображение [93]

$$T^*V = T^*S \oplus NS \times [-1, 1], \quad (1.7)$$

и поле вектора перемещения (1.6) может быть задано на  $T^*S \oplus NS \times [-1, 1]$

$$\begin{aligned} u_{\beta} \mathbf{r}^{\beta} + u_3 \mathbf{n} = \mathbf{u} : S \times [-1, 1] \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow \\ \rightarrow T^*S \oplus NS \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}), \end{aligned} \quad (1.8)$$

т.е. переменная поля первого рода определена в базисе  $\mathbf{r}^{\alpha}, \mathbf{n}$ , не зависящем от  $\zeta$ .

Компоненты вектора  $\mathbf{u}$  на  $T^*S \oplus NS$  и на  $T^*V$  связаны соотношениями (1.9)

$$\hat{u}_{\gamma} = A_{\gamma}^{\alpha} u_{\alpha}, \quad u_{\alpha} = A_{\alpha}^{\gamma} \hat{u}_{\gamma}. \quad (1.9)$$

Введем вектор квазиперемещения  $\mathbf{U}$ , определенный следующим образом

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A} = \hat{u}_{\alpha} \mathbf{r}^{\alpha} + u_3 \mathbf{n}. \quad (1.10)$$

Пусть  $\nabla = \mathbf{R}^{\alpha} \partial_{\alpha} + \mathbf{n} \partial_{\zeta}$  – оператор «набла» на  $TV$  [68]; с учетом (1.8) тензор дисторсии  $\mathbf{d} = \nabla \otimes \mathbf{u}$  записывается в двухточечном представлении [66]

$$\mathbf{d} : S \times D_{\zeta} \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow T^*V \otimes (T^*S \oplus NS) \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$$

$$\mathbf{d} = (\mathbf{R}^{\alpha} \partial_{\alpha} + \mathbf{n} \partial_{\zeta}) \otimes (u_{\beta} \mathbf{r}^{\beta} + u_3 \mathbf{n}) = \bar{d}_{\alpha\beta} \mathbf{R}^{\alpha} \mathbf{r}^{\beta} + \bar{d}_{\alpha 3} \mathbf{R}^{\alpha} \mathbf{n} + \bar{d}_{3\beta} \mathbf{n} \mathbf{r}^{\beta} + \bar{d}_{33} \mathbf{nn}; \quad (1.11)$$

$$\bar{d}_{\alpha\beta} = \nabla_{\alpha} u_{\beta} - b_{\alpha\beta} u_3, \quad \bar{d}_{\alpha 3} = \nabla_{\alpha} u_3 + b_{\alpha 3}^{\beta} u_{\beta}; \quad \bar{d}_{3\beta} = \partial_{\zeta} u_{\beta}, \quad \bar{d}_{33} = \partial_{\zeta} u_3. \quad (1.12)$$

С другой стороны, с учетом (1.4) тензор дисторсии может быть записан так

$$\mathbf{d} = \hat{d}_{\gamma\beta} \mathbf{R}^{\beta} \mathbf{R}^{\gamma} + \hat{d}_{3\beta} \mathbf{R}^{\beta} \mathbf{n} + \hat{d}_{\gamma 3} \mathbf{n} \mathbf{R}^{\gamma} + \hat{d}_{33} \mathbf{nn}, \quad (1.13)$$

$$\hat{d}_{\gamma\beta} = A_{\gamma}^{\alpha} \bar{d}_{\alpha\beta}; \quad \hat{d}_{3\beta} = \bar{d}_{3\beta}; \quad \hat{d}_{\gamma 3} = A_{\gamma}^{\alpha} \bar{d}_{\alpha 3}; \quad \hat{d}_{33} = \bar{d}_{33}. \quad (1.14)$$

Линейный тензор пространственной деформации оболочки  $\mathbf{e} = \frac{1}{2} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T$  определяется с учетом (1.13), (1.12) и (1.14) следующим образом

$$\begin{aligned}\widehat{e}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\beta \widehat{u}_\alpha + \overline{\nabla}_\alpha \widehat{u}_\beta) - \widehat{u}_\delta A_{\gamma\delta}^\delta \overline{\nabla}_\beta A_{\alpha\gamma}^\gamma - A_{\alpha\gamma}^\gamma b_{\beta\gamma} u_3; \\ \widehat{e}_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_\alpha u_3 + h^{-1} \partial_\zeta \widehat{u}_\alpha) + A_{\gamma\delta}^\delta b_{\alpha\gamma}^\gamma \widehat{u}_\delta; \quad e_{33} = h^{-1} \partial_\zeta u_3,\end{aligned}\quad (1.15)$$

где  $\overline{\nabla}_\beta \widehat{u}_\gamma$  – ковариантные производные компонентов вектора  $\mathbf{U}$  (1.10).

### 1.3. Вариационная формулировка задачи динамики оболочки как трехмерного упругого тела на основе функционала Лагранжа и обобщенного функционала Рауса.

Динамика оболочки описывается принципом Гамильтона-Остроградского

$$\delta H = 0, \quad H = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_V \mathcal{L}_V dV + \int_{\partial V} \mathcal{L}_{\partial V} dS \right) dt. \quad (1.16)$$

Здесь  $\mathcal{L}_V$  – пространственная плотность функционала Лагранжа,  $\mathcal{L}_{\partial V} = \mathcal{L}_\pm + \mathcal{L}_B$  – его граничная плотность (здесь и далее принято обозначение  $\dot{u} \equiv \partial u / \partial t$ )

$$\mathcal{L}_V = \frac{1}{2} \rho \dot{\widehat{u}}_i \dot{\widehat{u}}^i - \frac{1}{2} \widehat{C}^{ijpq} \widehat{e}_{ij} \widehat{e}_{pq} + \rho \widehat{F}^i \widehat{u}_i, \quad i, j, p, q = 1, 2, 3; \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}_\pm = \widehat{q}_\pm^\alpha \widehat{u}_\alpha \Big|_{S_\pm} + \widehat{q}_\pm^3 u_3 \Big|_{S_\pm}; \quad \mathcal{L}_B = \widehat{q}_B^\alpha \widehat{u}_\alpha \Big|_{S_B} + \widehat{q}_B^3 u_3 \Big|_{S_B}; \quad (1.18)$$

контравариантные компоненты  $\widehat{C}^{ijpq}$  тензора упругих констант  $\widehat{\mathbf{C}}$ , также как и компоненты главного вектора внешних сил  $\rho \mathbf{F}$  отнесены к базису  $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}$

$$\rho \widehat{\mathbf{F}} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = \rho (\widehat{F}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + F^3 \mathbf{n}), \quad \widehat{\mathbf{q}}_B = \mathbf{q} \cdot \mathbf{A} = \widehat{q}^\alpha \mathbf{r}_\alpha + q^3 \mathbf{n}.$$

Вариационную постановку задачи динамики (1.16) замыкают начальные условия

$$\widehat{u}_\alpha \Big|_{t=t_0} = \widehat{u}_\alpha^0; \quad u_3 \Big|_{t=t_0} = u_3^0; \quad \dot{\widehat{u}}_\alpha \Big|_{t=t_0} = \dot{\widehat{v}}_\alpha^0; \quad u_3 \Big|_{t=t_0} = v_3^0. \quad (1.19)$$

Принимая во внимание (1.15), приведем плотность  $\mathcal{L}_V$  (1.17) к виду

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_V(\widehat{u}_\alpha, u_3, \dot{\widehat{u}}_\alpha, \dot{u}_3, \overline{\nabla}_\beta \widehat{u}_\alpha, \overline{\nabla}_\beta u_3) &= \frac{1}{2} \rho (\dot{\widehat{u}}_\alpha \dot{\widehat{u}}^\alpha + \dot{u}_3 \dot{u}_3) + \rho (\widehat{F}^\alpha \widehat{u}_\alpha + F^3 u_3) - \\ &- \left[ \frac{1}{2} \widehat{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left( \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\gamma \widehat{u}_\delta + \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\delta \widehat{u}_\gamma - \widehat{u}_\nu A_{\mu\nu}^\nu \overline{\nabla}_\delta A_{\gamma\mu}^\mu - A_{\gamma\mu}^\mu b_{\delta\mu} u_3 \right) + \widehat{C}^{\alpha\beta 33} h^{-1} \partial_\zeta u_3 \right] \times \\ &\times \left( \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\beta \widehat{u}_\alpha + \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\alpha \widehat{u}_\beta - \widehat{u}_\varepsilon A_{\lambda\varepsilon}^\varepsilon \overline{\nabla}_\beta A_{\alpha\lambda}^\lambda - A_{\alpha\lambda}^\lambda b_{\beta\lambda} u_3 \right) - \frac{1}{2} C^{3333} h^{-2} \partial_\zeta u_3 \partial_\zeta u_3 - \\ &- \widehat{C}^{\alpha\beta 33} \left( \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\alpha u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \widehat{u}_\alpha + A_{\gamma\delta}^\delta b_{\alpha\gamma}^\gamma \widehat{u}_\delta \right) \left( \frac{1}{2} \overline{\nabla}_\beta u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \widehat{u}_\beta + A_{\lambda\delta}^\delta b_{\beta\lambda}^\lambda \widehat{u}_\delta \right).\end{aligned}\quad (1.20)$$

Таким образом, лагранжева модель оболочки в трехмерном представлении задана конфигурационным пространством  $\Omega^3 = \{\mathbf{U}\}$ , пространственной (1.20) и поверхностной (1.18) плотностями функционала Лагранжа. Выделим далее одну из координат на  $S$  (напр.,  $\xi^1$ ) и введем обобщенные напряжения на основе (1.20)

$$\widehat{\sigma}^{1\alpha} = -\partial \mathcal{L}_V / \partial (\overline{\nabla}_1 \widehat{u}_\alpha); \quad \widehat{\sigma}^{13} = -\partial \mathcal{L}_V / \partial (\overline{\nabla}_1 u_3). \quad (1.21)$$

Учитывая соотношения Петерсона-Кодацци и (1.4), из (1.21) получим

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}^{11} &= \widehat{C}^{1111} (\overline{\nabla}_1 \widehat{u}_1 - \widehat{u}_\alpha A_{\beta\alpha}^\alpha \overline{\nabla}_1 A_{1\beta}^\beta - A_{1\beta}^\beta b_{1\beta} u_3) + \\ &+ \widehat{C}^{1122} (\overline{\nabla}_2 \widehat{u}_2 - \widehat{u}_\alpha A_{\beta\alpha}^\alpha \overline{\nabla}_2 A_{2\beta}^\beta - A_{2\beta}^\beta b_{2\beta} u_3) + \widehat{C}^{1133} h^{-1} \partial_\zeta u_3;\end{aligned}\quad (1.22)$$

$$\widehat{\sigma}^{12} = \widehat{C}^{1212} (\overline{\nabla}_1 \widehat{u}_2 + \overline{\nabla}_2 \widehat{u}_1 - 2 \widehat{u}_\alpha A_{\beta\alpha}^\alpha \overline{\nabla}_1 A_{2\beta}^\beta - 2 A_{2\beta}^\beta b_{2\beta} u_3); \quad (1.23)$$

$$\widehat{\sigma}^{13} = \widehat{C}^{1313} (\overline{\nabla}_1 u_3 + h^{-1} \partial_\zeta \widehat{u}_1 + 2 A_{\gamma\delta}^\delta b_{1\gamma}^\gamma \widehat{u}_\delta). \quad (1.24)$$

Определяющие уравнения (1.22)-(1.24) разрешимы относительно производных  $\bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\bar{\nabla}_1 u_3$ ; обратные определяющие уравнения имеют вид

$$\bar{\nabla}_1 \hat{u}_1 = \frac{\hat{\sigma}^{11}}{\hat{C}^{1111}} - \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - \hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_2 A_2^\beta - A_1^\beta b_{2\beta} u_3) - \frac{\hat{C}^{1133}}{\hat{C}^{1111}} h^{-1} \partial_\zeta u_3 + \hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_1 A_1^\beta + A_1^\beta b_{1\beta} u_3; \quad (1.25)$$

$$\bar{\nabla}_1 \hat{u}_2 = \frac{\hat{\sigma}^{12}}{\hat{C}^{1212}} - \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1 + 2\hat{u}_\alpha A_\beta^\alpha \bar{\nabla}_1 A_2^\beta + 2A_1^\beta b_{2\beta} u_3; \quad (1.26)$$

$$\bar{\nabla}_1 u_3 = \frac{\hat{\sigma}^{13}}{\hat{C}^{1313}} - h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_1 - 2A_\gamma^\delta b_1^\gamma \hat{u}_\delta. \quad (1.27)$$

Осуществляя преобразование Лежандра плотности функционала Лагранжа (1.20) по  $\bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  и  $\bar{\nabla}_1 u_3$ , получим плотности смешанного функционала  $\mathcal{R}_V$

$$\begin{aligned} & \hat{\sigma}^{11} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_1 + \hat{\sigma}^{12} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_2 + \hat{\sigma}^{13} \bar{\nabla}_1 u_3 + \mathcal{L}_V = \mathcal{R}_V(\hat{\sigma}^{1\alpha}, \hat{\sigma}^{13}, \hat{u}_\alpha, u_3, \dot{\hat{u}}_\alpha, \dot{u}_3, \bar{\nabla}_2 \hat{u}_\alpha, \bar{\nabla}_2 u_3) = \\ & = \frac{1}{2} \rho [\dot{\hat{u}}_\alpha \dot{\hat{u}}^\alpha + \dot{u}_3^2] + \rho (\hat{F}^\alpha \hat{u}_\alpha + F^3 u_3) + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\hat{\sigma}^{11})^2}{\hat{C}^{1111}} + \frac{(\hat{\sigma}^{12})^2}{\hat{C}^{1212}} + \frac{(\hat{\sigma}^{13})^2}{\hat{C}^{1313}} \right] - \\ & - \hat{\sigma}^{11} \left[ \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 + \frac{\hat{C}^{1133}}{\hat{C}^{1111}} h^{-1} \partial_\zeta u_3 \right) - \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma + A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_1 A_1^\gamma \right) \hat{u}_\delta - \right. \\ & - \left. \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} A_2^\gamma b_{2\gamma} + A_1^\gamma b_{1\gamma} \right) u_3 \right] - \hat{\sigma}^{12} [\bar{\nabla}_2 \hat{u}_1 - 2(A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_1 A_2^\gamma \hat{u}_\delta + A_2^\gamma b_{1\gamma} u_3)] - \\ & - \hat{\sigma}^{13} (h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_1 + 2A_\gamma^\delta b_1^\gamma u_\delta) - \frac{1}{2} \tilde{C}^{2222} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma \hat{u}_\delta - A_2^\gamma b_{2\gamma} u_3)^2 - \\ & - \tilde{C}^{2233} (\bar{\nabla}_2 \hat{u}_2 - A_\gamma^\delta \bar{\nabla}_2 A_2^\gamma \hat{u}_\delta - A_2^\gamma b_{2\gamma} u_3) h^{-1} \partial_\zeta u_3 - \frac{1}{2} \tilde{C}^{3333} h^{-2} (\partial_\zeta u_3)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \tilde{C}^{2323} \left( \frac{1}{2} \bar{\nabla}_2 u_3 + \frac{1}{2} h^{-1} \partial_\zeta \hat{u}_2 + A_\gamma^\delta b_2^\gamma \hat{u}_\delta \right)^2, \\ & \mathcal{R}_\pm = \hat{q}_\pm^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_\pm} + q_\pm^3 u_3|_{S_\pm}, \quad \mathcal{R}_B = \hat{q}_B^\alpha \hat{u}_\alpha|_{S_B} + q_B^3 u_3|_{S_B}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

где использованы следующие обозначения обобщенных упругих констант

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{2222} &= \hat{C}^{2222} \left[ 1 - \frac{(\hat{C}^{1122})^2}{\hat{C}^{1111} \hat{C}^{2222}} \right]; \quad \tilde{C}^{3333} = \hat{C}^{3333} \left[ 1 - \frac{(\hat{C}^{1133})^2}{\hat{C}^{1111} \hat{C}^{3333}} \right]; \\ \tilde{C}^{2233} &= \hat{C}^{2233} \left[ 1 - \frac{(\hat{C}^{1122} \hat{C}^{1133})}{(\hat{C}^{1111} \hat{C}^{2233})} \right]. \end{aligned}$$

Соотношения (1.28) и (1.29), таким образом, определяют преобразование Лежандра функционала Лагранжа по ковариантным производным переменных поля первого рода по координате  $\xi^1$ , т.е. задают функционал на пространстве  $\Psi_1^3 = \{U, s^1\}$  состояний системы, где  $s = \hat{\sigma}^{1\alpha} r_\alpha + \hat{\sigma}^{13} n$  – вектор квазинпряжения

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{1\alpha} r_\alpha + \hat{\sigma}^{13} n = s : S \times [-1, 1] \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\}) \rightarrow \\ \rightarrow (TS \oplus NS) \times \mathcal{H}[-1, 1] \times C^{(1)}(\mathbb{R}_+ \cup \{0\}). \end{aligned} \quad (1.30)$$

В работах [81-85] функционал, полученных аналогичным образом для задач статики призматического стержня или цилиндра, назван гамильтонианом, а уравнения, являющиеся условиями его стационарности – гамильтоновыми.

Следуя терминологии [65], а также [95], под гамильтонианом будем понимать функционал, полученный в результате преобразования Лежандра функционала Лагранжа по всем пространственным и временным производным переменных поля первого рода. Полученный выше функционал аналогично (1.28), (1.29) представляется в определенном смысле аналогичным функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем [96]. С учетом (1.28) и (1.29) принцип Гамильтона-Остроградского (1.16) записывается следующим образом

$$H = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_V (\mathcal{R}_V - \bar{\sigma}^{1\alpha} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha - \bar{\sigma}^{13} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_3) dV + \int_{S_\pm} \mathcal{R}_\pm dS_\pm + \int_{S_B} \mathcal{R}_B dS_B \right] dt. \quad (1.31)$$

## 2. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

Введем на гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}[-1,1]$  базисную систему  $p_{(k)}(\zeta)$ ,  $\zeta \in [-1,1]$ , вообще говоря, биортогональную, так что  $\mathcal{H}[-1,1] = \{p_{(k)}\}_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$

$$\begin{aligned} \exists p^{(m)}(\zeta): \quad (p_{(k)}, p^{(m)})_1 &\equiv \int_{-1}^1 p_{(k)}(\zeta) p^{(m)}(\zeta) d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}; \\ G_{(km)} &= (p_{(k)}, p_{(m)})_1, \quad G^{(nm)} G_{(km)} = \delta_{(k)}^{(m)}; \quad p^{(m)} = G^{(nm)} p_{(k)}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее к латинским индексам, заключенным в скобки и пробегающим значения, принадлежащие  $\mathbb{R} \cup \{0\}$ , применяется правило Эйнштейна.

Предполагая  $\hat{u}_\alpha(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $u_3(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $\bar{\sigma}^{1\alpha}(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ ,  $\bar{\sigma}^{13}(\xi^\beta, \zeta, t) \in \mathcal{H}[-1,1]$ , определим  $\hat{u}_\alpha$ ,  $u_3$  их коэффициентами разложения Фурье по базису  $p_{(k)}(\zeta)$  (2.1)

$$\begin{aligned} \hat{u}_\alpha(\xi^\beta, \zeta, t) &= \hat{u}_\alpha^{(k)}(\xi^\beta, t) p_{(k)}(\zeta), \quad \hat{u}_\zeta^{(k)}(\xi^\beta, t) = (\hat{u}_\alpha, p^{(k)})_1; \\ u_3(\xi^\beta, \zeta, t) &= u_3^{(k)}(\xi^\beta, t) p_{(k)}(\zeta), \quad u_3^{(k)}(\xi^\alpha, t) = (u_3, p^{(k)})_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

тогда как  $\bar{\sigma}^{1\alpha}$ ,  $\bar{\sigma}^{13}$  зададим их моментами относительно базиса  $p^{(k)}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{1\alpha}(\xi^\beta, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{a}{g}} \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}(\xi^\beta, t) p^{(k)}(\zeta), \quad \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}(\xi^\beta, t) = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{\sigma}^{1\alpha}, p_{(k)} \right)_1; \\ \bar{\sigma}^{13}(\xi^\beta, \zeta, t) &= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{a}{g}} \bar{\sigma}_{(k)}^{13}(\xi^\beta, t) p^{(k)}(\zeta), \quad \bar{\sigma}_{(k)}^{13}(\xi^\beta, t) = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \bar{\sigma}^{13}, p_{(k)} \right)_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (2.2), (2.3) и (2.4) пространственная (1.28) и граничная (1.29) плотности обобщенного функционала Рауса преобразуются к виду (2.5) и (2.6)

$$\begin{aligned} \int_V \mathcal{R}_V dV &= \int_S h dS \int_{-1}^1 \mathcal{R}_V \sqrt{g/ad} d\zeta: \\ \mathcal{R}_S \left( \bar{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}, \bar{\sigma}_{(k)}^{13}, \hat{u}_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)}, \partial_t \hat{u}_\alpha^{(k)}, \partial_t u_3^{(k)}, \bar{\nabla}_2 \hat{u}_\alpha^{(k)}, \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \rho_{(k)}^{(m)} \left( \dot{\hat{u}}_\alpha^{(k)} \dot{\hat{u}}_\alpha^{(m)} + \dot{u}_3^{(k)} \dot{u}_3^{(m)} \right) + \hat{F}_{(k)}^\alpha \hat{u}_\alpha^{(k)} + F_{(k)}^3 u_3^{(k)} + \\ &+ \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{(k)}^{1\lambda} B_{1\lambda 1\mu}^{(km)} \bar{\sigma}_{(m)}^{1\mu} - \bar{\sigma}_{(k)}^{11} \left[ K_{11(m)}^{22(k\cdot)} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - \right. \\ &\left. - \left( \bar{K}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} + \bar{A}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} \right) \hat{u}_\alpha^{(m)} - \left( b_{2\beta} \bar{K}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} + b_{1\beta} \bar{A}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} - h^{-1} K_{11(n)}^{33(k\cdot)} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 & -\hat{\sigma}_{(k)}^{12} \left[ \bar{\nabla}_2 \hat{u}_1^{(k)} - 2\bar{A}_{12(m)}^{\alpha(k)} \hat{u}_\alpha^{(m)} + 2b_{1\beta} \bar{A}_{12(m)}^{\beta(k)} u_3^{(m)} \right] - \\
 & -\hat{\sigma}_{(k)}^{13} \left( h^{-1} D_{(m)}^{(k)} \hat{u}_1^{(m)} + 2b_1^\beta \bar{A}_{13,\beta(m)}^{\alpha(k)} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right) - \\
 & -\frac{1}{2} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(k)} \left[ \tilde{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - 2\bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} - 2 \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \\
 & -\frac{1}{2} \hat{u}_\alpha^{(k)} \left[ \left( \bar{\bar{C}}_{(km)}^{\alpha\beta} + b_2^\gamma b_2^\delta \bar{\bar{C}}_{\gamma\delta(km)}^{\alpha\beta} \right) \hat{u}_\beta^{(m)} + 2 \left( b_{2\beta} \bar{\bar{C}}_{(km)}^{\alpha\beta} - h^{-1} \bar{\bar{C}}_{(kn)}^{33,\alpha} D_{(m)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] - \\
 & -\frac{1}{2} h^{-1} D_{(k)}^{(l)} u_3^{(k)} \left( h^{-1} \tilde{C}_{(ln)}^{3333} D_{(m)}^{(n)} - b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{33,\beta} - b_{2\alpha} b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} \right) u_3^{(m)} - \\
 & -\frac{1}{2} \left[ \tilde{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)} + h^{-1} D_{(l)}^{(k)} \hat{u}_2^{(l)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right] \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n)}^{(m)} \hat{u}_2^{(n)} \right), \\
 \mathcal{R}_\Gamma \left( \hat{u}_\alpha^{(k)}, u_3^{(k)} \right) &= \hat{q}_{\Gamma(k)}^\alpha \hat{u}_\alpha^{(k)} \Big|_\Gamma + q_{B(k)}^3 u_3^{(k)} \Big|_\Gamma, \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

где  $k, m, n, \dots \in [0, N] \cap \mathbb{Z}$ , (2.5) – поверхностная, (2.6) – контурная плотности функционала теории оболочек  $N$ -го порядка [68]. Вариационная постановка начально-краевой задачи динамики оболочки вытекает из принципа Гамильтона-Остроградского (2.7) при начальных условиях (1.19), приведенных к виду (2.8)

$$\mathbb{H} = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \int_S \left( \mathcal{R}_S - \hat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} \bar{\nabla}_1 \hat{u}_\alpha^{(k)} - \hat{\sigma}_{(k)}^{13} \bar{\nabla}_1 u_3 \right) dS + \int_{\partial S} \mathcal{R}_\Gamma d\Gamma \right] dt; \tag{2.7}$$

$$\hat{u}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \hat{u}_\alpha^{(k)0}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = u_3^{(k)0}; \quad \dot{\hat{u}}_\alpha^{(k)} \Big|_{t=t_0} = \dot{v}_\alpha^{(k)0}; \quad u_3^{(k)} \Big|_{t=t_0} = v_3^{(k)0}. \tag{2.8}$$

Здесь и далее использованы следующие обозначения

$$\hat{F}_{(k)}^\alpha = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{F}^\alpha, \mathbf{p}_{(k)} \right)_1 + \hat{q}_+^\alpha - (-1)^k \hat{q}_-^\alpha, \quad F_{(k)}^3 = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} F^3, \mathbf{p}_{(k)} \right)_1 + q_+^3 - (-1)^k q_-^3$$

– компоненты главного вектора внешних сил на моделирующей поверхности  $S$ ;

$$\rho_{(m)}^{(k)} = h \left( \sqrt{g/a} \rho^{(k)}, \mathbf{p}_{(m)} \right)_1$$

– обобщенные моменты инерции модели оболочки  $N$ -го порядка;

$$\mathbb{B}_{1\lambda 1\mu}^{(km)} = h^{-1} \left( \sqrt{a/g} \left( \hat{C}^{1\lambda 1\mu} \right)^{-1} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(m)} \right)_1$$

– коэффициенты податливости модели оболочки  $N$ -го порядка;

$$\mathbb{K}_{11(m)}^{22(k)} = \left( \frac{\hat{C}^{1122}}{\hat{C}^{1111}} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(m)} \right)_1; \quad \bar{\mathbb{K}}_{12(m)}^{12(k)} = \delta_{(m)}^{(k)}; \quad \mathbb{K}_{11(m)}^{33(k)} = \left( \frac{\hat{C}^{1133}}{\hat{C}^{1111}} \mathbf{p}^{(k)}, \mathbf{p}^{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{\mathbb{K}}_{11(m)}^{\alpha(k)} = \left( \frac{\hat{C}^{11\lambda\mu}}{\hat{C}^{1111}} \mathbf{p}^{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\alpha \bar{\nabla}_\lambda A_{\cdot\mu}^\gamma \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{\mathbb{K}}_{11(m)}^{\mu,\alpha(k)} = \left( \frac{\hat{C}^{11\lambda\mu}}{\hat{C}^{1111}} \mathbf{p}^{(k)}, A_{\cdot\lambda}^\alpha \mathbf{p}_{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{\mathbb{K}}_{12(m)}^{\alpha(k)} = \left( \mathbf{p}^{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\alpha \bar{\nabla}_\lambda A_{\cdot\mu}^\gamma \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{\mathbb{K}}_{12(m)}^{\gamma(k)} = \left( \mathbf{p}^{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\gamma \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{\mathbb{K}}_{13,\gamma(m)}^{\alpha(k)} = \left( \mathbf{p}^{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\alpha \mathbf{p}_{(m)} \right)_1$$

– безразмерные коэффициенты;

$$\bar{\bar{C}}_{(km)}^{22,\alpha} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2222} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\alpha \bar{\nabla}_2 A_{\cdot\beta}^\gamma \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2222} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\cdot\beta}^\beta \mathbf{p}_{(m)} \right)_1;$$

$$\bar{\bar{C}}_{(km)}^{33,\alpha} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2233} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\cdot\gamma}^\alpha \bar{\nabla}_2 A_{\cdot\beta}^\gamma \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{(km)}^{33,\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \hat{C}^{2233} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\cdot\beta}^\beta \mathbf{p}_{(m)} \right)_1;$$

$$\begin{aligned}\bar{C}_{\gamma(km)}^{23,\alpha} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \widehat{C}^{2323} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\gamma}^{\alpha} \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{\gamma\delta(km)}^{\alpha\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \widehat{C}^{2323} A_{\gamma}^{\alpha} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\delta}^{\beta} \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \\ \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \widehat{C}^{2222} A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_{2,\gamma} \mathbf{p}_{(k)}, A_{2,\beta} \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \quad \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} = h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \widehat{C}^{2222} A_{2,\alpha} \mathbf{p}_{(k)}, A_{2,\beta} \mathbf{p}_{(m)} \right)_1; \\ \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} &= h \left( \sqrt{\frac{g}{a}} \widehat{C}^{2222} A_{\gamma}^{\alpha} \bar{\nabla}_2 A_{2,\gamma} \mathbf{p}_{(k)}, A_{\delta}^{\beta} \bar{\nabla}_2 A_{2,\delta} \mathbf{p}_{(m)} \right)_1\end{aligned}$$

– коэффициенты жесткости,  $D_{(k\cdot)}^{(m)} = \left( \partial_{\zeta} \mathbf{p}_{(k)}, \mathbf{p}_{(m)} \right)_1$ .

Условием  $\delta H = 0$  экстремали действия по Гамильтону (2.7) являются уравнения в общем виде (2.9) и (2.10)

$$\bar{\nabla}_1 \widehat{u}_{\alpha}^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \widehat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha}}; \quad \bar{\nabla}_1 u_3^{(k)} = \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \widehat{\sigma}_{(k)}^{13}}, \quad k \in [0, N] \cap \mathbb{Z}; \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \widehat{u}_{\alpha}^{(k)}} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial (\partial_t \widehat{u}_{\alpha}^{(k)})} + \bar{\nabla}_2 \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_{\alpha}^{(k)}}; \\ \bar{\nabla}_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{13} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial u_3^{(k)}} + \partial_t \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial (\partial_t \widehat{u}_3^{(k)})} + \bar{\nabla}_2 \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_3^{(k)}};\end{aligned} \quad (2.10)$$

именуемые обобщенными уравнениями Рауса двумерной континуальной системы, и естественные краевые условия (2.11);  $v_{\alpha}$  – компоненты единичной нормали на  $\Gamma$

$$\begin{aligned}\left[ v_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{1\alpha} - v_2 \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_{\alpha}^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{R}_{\Gamma}}{\partial u_{\alpha}^{(k)}} \right] \delta \widehat{u}_{\alpha}^{(k)} \Big|_{\Gamma} &= 0; \\ \left[ v_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{13} - v_2 \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_3^{(k)}} + \frac{\partial \mathcal{R}_{\Gamma}}{\partial u_3^{(k)}} \right] \delta \widehat{u}_3^{(k)} \Big|_{\Gamma} &= 0.\end{aligned} \quad (2.11)$$

В случае теории оболочек  $N$ -го порядка с учетом (2.5) и (2.6) обобщенные уравнения Рауса (2.9), (2.10) и краевые условия (2.11) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \widehat{u}_1^{(k)} &= B_{1111}^{(km)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{11} - K_{11(m)}^{22(k\cdot)} \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_2^{(m)} - h^{-1} K_{11(n)}^{33(k\cdot)} D_{(m)}^{(n)} u_3^{(m)} + \\ &+ \left( \bar{K}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} + \bar{A}_{11(m)}^{\alpha(k\cdot)} \right) \widehat{u}_{\alpha}^{(m)} + \left( b_{2\beta} \bar{K}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} + b_{1\beta} \bar{A}_{11(m)}^{\beta(k\cdot)} \right) u_3^{(m)}; \\ \bar{\nabla}_1 \widehat{u}_2^{(k)} &= B_{1212}^{(km)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{12} - \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_1^{(k)} + 2 \bar{A}_{12(m)}^{\alpha(k\cdot)} \widehat{u}_{\alpha}^{(m)} - 2 b_{1\beta} \bar{A}_{12(m)}^{\beta(k\cdot)} u_3^{(m)}; \\ \bar{\nabla}_1 u_3^{(k)} &= B_{1313}^{(km)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{13} - h^{-1} D_{(m)}^{(k\cdot)} \widehat{u}_1^{(m)} - 2 b_1^{\beta} \bar{A}_{13,\beta(m)}^{\alpha(k\cdot)} \widehat{u}_{\alpha}^{(m)},\end{aligned} \quad (2.12)$$

– определяющие уравнения для ковариантных производных  $\bar{\nabla}_1 \widehat{u}_{\alpha}^{(k)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\bar{\nabla}_1 u_3^{(k)}$ ;

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{11} &= -\bar{\nabla}_2 \widehat{\sigma}_{(k)}^{12} - \left( \bar{K}_{11(k\cdot)}^{1(m\cdot)} + \bar{A}_{11(k\cdot)}^{1(m\cdot)} \right) \widehat{\sigma}_{(m)}^{11} - 2 \bar{A}_{12(k\cdot)}^{1(m\cdot)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{12} + \\ &+ \left( h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(m)} + 2 b_1^{\beta} \bar{A}_{13,\beta(m)}^{1(k\cdot)} \right) \widehat{\sigma}_{(m)}^{13} - \bar{C}_{(km)}^{22,1} \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_2^{(m)} + b_2^{\beta} \bar{C}_{\beta(km)}^{23,1} \bar{\nabla}_2 \widehat{u}_3^{(m)} + \\ &+ \rho_{(k)}^{(m)} \ddot{u}_{(m)}^1 + \left( \bar{C}_{(km)}^{1\beta} + b_2^{\gamma} b_2^{\delta} \bar{C}_{\gamma\delta(km)}^{1\beta} \right) \widehat{u}_{\beta}^{(m)} + 2 h^{-1} b_2^{\beta} \bar{C}_{\beta(km)}^{23,1} D_{(m)}^{(n)} \widehat{u}_2^{(m)} - \widehat{F}_{(k)}^1; \\ \bar{\nabla}_1 \widehat{\sigma}_{(k)}^{12} &= -\bar{\nabla}_2 \left( K_{11(k\cdot)}^{22(m\cdot)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{11} \right) - \left( \bar{K}_{11(k\cdot)}^{2(m\cdot)} + \bar{A}_{11(k\cdot)}^{2(m\cdot)} \right) \widehat{\sigma}_{(m)}^{11} - 2 \bar{A}_{12(k\cdot)}^{2(m\cdot)} \widehat{\sigma}_{(m)}^{12} +\end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 & + 2b_1^\beta \bar{A}_{13,\beta(m)}^{2(k\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{13} - \bar{\nabla}_2 \left[ \tilde{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} + \bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right] + \rho_{(k)}^{(m)} \hat{u}_{(m)}^2 + \left( \bar{C}_{(km)}^{2\beta} + b_2^\gamma b_2^\delta \bar{C}_{\gamma\delta(km)}^{2\beta} \right) \hat{u}_\beta^{(m)} + \\
 & + \left( h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(l)} \hat{C}_{(lm)}^{2323} + b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,1} \right) \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m)} \hat{u}_2^{(n)} \right) + \\
 & + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m)} b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} - \hat{F}_{(k)}^2; \\
 \bar{\nabla}_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{13} & = - \left( b_{2\beta} \bar{K}_{11(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} + b_{1\beta} \bar{A}_{11(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} - h^{-1} K_{11(n\cdot)}^{33(m\cdot)} D_{(k\cdot)}^{(n)} \right) \hat{\sigma}_{(m)}^{11} + 2b_{1\beta} \bar{A}_{12(k\cdot)}^{\beta(m\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{12} - \\
 & + \bar{\nabla}_2 \left[ \hat{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(m)} + h^{-1} D_{(n\cdot)}^{(m)} \hat{u}_2^{(n)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right] - \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - \right. \\
 & \left. - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} + \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} - h^{-1} \bar{C}_{(kn)}^{33,\alpha} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) \hat{u}_\alpha^{(m)} + \\
 & + h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(l)} u_3^{(k)} \left( h^{-1} \tilde{C}_{(ln)}^{3333} D_{(m\cdot)}^{(n)} - b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{33,\beta} - b_{2\alpha} b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{\alpha\beta} \right) u_3^{(m)} - F^3
 \end{aligned}$$

– уравнения движения, разрешенные относительно ковариантных производных  $\bar{\nabla}_1$ ;

$$\begin{aligned}
 & \left[ v_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{11} - v_2 \hat{\sigma}_{(k)}^{12} \right] \delta \hat{u}_1^{(k)} \Big|_\Gamma = 0; \\
 & \left[ v_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{12} - v_2 \left( K_{11(k\cdot)}^{22(m\cdot)} \hat{\sigma}_{(m)}^{11} - \tilde{C}_{(km)}^{2222} \bar{\nabla}_2 \hat{u}_2^{(m)} - \bar{C}_{(km)}^{22,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left( b_{2\beta} \bar{C}_{(km)}^{22,\beta} - h^{-1} \tilde{C}_{(kn)}^{2233} D_{(m\cdot)}^{(n)} \right) u_3^{(m)} \right) \delta \hat{u}_2^{(k)} \right] \Big|_\Gamma = 0; \\
 & \left[ v_1 \hat{\sigma}_{(k)}^{13} - v_2 \left( \hat{C}_{(km)}^{2323} \left( \bar{\nabla}_2 u_3^{(k)} + h^{-1} D_{(l\cdot)}^{(k)} \hat{u}_2^{(l)} \right) + 2b_2^\beta \bar{C}_{\beta(km)}^{23,\alpha} \hat{u}_\alpha^{(m)} \right) \right] \delta \hat{u}_1^{(k)} \Big|_\Gamma = 0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

– естественные краевые условия на контуре  $\Gamma$ . Постановку начально-краевой задачи теории оболочек  $N$ -го порядка замыкают начальные условия (2.8).

Формулировка статической краевой задачи, вытекающая из (2.12)-(2.14), приводит в пространственно-одномерном случае для плоского слоя к решению в форме [97,98], для толстостенных оболочек вращения – к решениям [99,100].

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ РАУСА ТЕОРИИ N-ГО ПОРЯДКА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ ВОЛНОВОДЕ

#### 3.1. Постановка задачи о дисперсии нормальных волн в упругом слое.

Рассмотрим задачу стационарной динамики для плоского упругого изотропного слоя с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , отнесенного к прямоугольной декартовой системе координат  $Ox^1x^2x^3$  так, что

$$V : (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2; \quad x^3 \in [-h/2, h/2]; \quad t \in [0, \infty); \quad S_B \equiv \emptyset, \quad S_\pm : x^3 = \pm h/2.$$

Пусть  $F^\alpha = F^3 \equiv 0$ . Обобщенные уравнения Рауса (2.12), (2.13) для слоя в рамках теории пластин ( $b_{\alpha\beta} \equiv 0, A_\alpha^\beta = A_\alpha^\beta \equiv 0$ ) имеют следующий вид [101]

$$\begin{aligned}
 \partial_1 u_1^{(k)} & = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \bar{E}^{(km)} \sigma_{11(m)} - \frac{\nu}{1-\nu} h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(k)} u_3^{(m)}; \\
 \partial_1 u_3^{(k)} & = 2(1+\nu) \bar{E}^{(km)} \sigma_{13(m)} - h^{-1} D_{(m\cdot)}^{(k)} u_1^{(m)};
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1 \sigma_{11(k)} &= h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(m)} \sigma_{13(m)} + \rho_{(km)} \dot{u}_1^{(m)}; \\
\partial_1 \sigma_{13(m)} &= \frac{\nu}{1-\nu} h^{-1} D_{(k\cdot)}^{(m)} \sigma_{11(m)} + \rho_{(km)} \dot{u}_3^{(m)} + \frac{1}{1-\nu^2} E_{(ln)} h^{-2} D_{(k\cdot)}^{(l)} D_{(m\cdot)}^{(n)} u_3^{(m)}. \\
E_{(km)} &= h \left( E(\zeta) \rho_{(k)}, \rho_{(m)} \right), \quad \bar{E}^{(km)} = h^{-1} \left( E^{-1}(\zeta) \rho^{(k)}, \rho^{(m)} \right)_1.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Рассмотрим далее нормальную волну, распространяющуюся вдоль оси  $Ox^1$

$$u_{1,3}^{(k)} = U_{1,3}^{(k)} \exp[i(\kappa x - \omega t)], \quad \sigma_{11,13(k)} = S_{11,13(k)} \exp[i(\kappa x - \omega t)], \tag{3.3}$$

$i = \sqrt{-1}$ . С учетом (3.3) определяющие уравнения (3.1) и уравнения движения (3.2) приводятся к безразмерной матричной форме записи (3.4) [101]

$$[\mathbf{A}(\tilde{\omega}) - i\tilde{\kappa}\mathbf{I}] \mathbf{Y} = 0, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{A}(\tilde{\omega}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\nu}{1-\nu} D_{(m\cdot)}^{(k)} & \frac{1-2\nu}{2-2\nu} \tilde{E}^{(km)} & 0 \\ -D_{(m\cdot)}^{(k)} & 0 & 0 & \tilde{E}^{(km)} \\ -\tilde{\omega}^2 \tilde{\rho}_{(km)} & 0 & 0 & D_{(m\cdot)}^{(k)} \\ 0 & -\tilde{\omega}^2 \tilde{\rho}_{(km)} + \frac{2}{1-\nu} \tilde{E}_{(ln)} D_{(k\cdot)}^{(l)} D_{(m\cdot)}^{(n)} & \frac{\nu}{1-\nu} D_{(k\cdot)}^{(m)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{Y} = \left( U_1^{(0)} \dots U_1^{(N)}, U_3^{(0)} \dots U_3^{(N)}, \tilde{S}_{11(0)} \dots \tilde{S}_{11(N)}, \tilde{S}_{13(0)} \dots \tilde{S}_{13(N)} \right)^T.$$

Здесь  $c_2 = \sqrt{(2+2\nu)^{-1} \rho_0^{-1} E_0}$  – скорость волны сдвига в среде с некоторыми значениями  $\rho_0$ ,  $E_0$  массовой плотности и модуля Юнга,  $\tilde{S}_{11,13(k)} = 2(1+\nu) E_0^{-1} S_{11,13(k)}$ ,  $\tilde{U}_{1,3}^{(k)} = h^{-1} U_{1,3}^{(k)}$  – безразмерные амплитуды,  $\tilde{\kappa} = h\kappa$ ,  $\tilde{\omega} = hc_2^{-1}\omega$  – безразмерные волновое число и фазовая частота,  $\tilde{E}_{(km)} = E_0^{-1} E_{(km)}$ ,  $\tilde{E}^{(km)} = E_0 \bar{E}^{(km)}$ ,  $\tilde{\rho}_{(km)} = \rho_0^{-1} \rho_{(km)}$ .

Условием существования нетривиального решения (3.4) является дисперсионное уравнение (3.6), линейное относительно волнового числа  $i\tilde{\kappa}$

$$|\mathbf{A}(\tilde{\omega}) - \tilde{\kappa}\mathbf{I}| = 0. \tag{3.6}$$

Собственными значениями оператора (3.5) являются  $\tilde{\kappa} \in \mathbb{C} \quad \forall \tilde{\omega} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ .

### 3.2. Сходимость приближенного решения задачи о дисперсии волн в плоском однородном изотропном упругом слое.

Рассмотрим далее плоский однородный изотропный слой ( $E = E_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ); точное решение задачи Рэлея-Лэмба приведено, в частности, в монографии [4].

Дисперсионные кривые, соответствующие распространяющимся модам ( $\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}$ ) и затухающим модам (мнимые ветви  $i\tilde{\kappa} \in \mathbb{R}$  и комплексные ветви  $\tilde{\kappa} \in \mathbb{C}$ ) нормальных волн, вычисленные на основе теории пластин 19 порядка, приведены на рис.1а (продольные волны), рис.1б (изгибные волны).

В работах [69-79] приведены результаты исследования сходимости решений задач о дифракции нормальных волн в упругих волноводах, полученных на основе теории  $N$ -го порядка для действительных собственных значений, т.е. для распространяющихся мод. Полученное выше решение спектральной задачи (3.6) для оператора (3.5) для мнимых ветвей дисперсионных кривых



исследовано на сходимость к точному решению задачи Рэля-Лэмба [4] в следующих четырех характерных точках второго квадранта, заданных пересечениями 3, 4, 5, 6 эллипсов решетки Миндлина с 5, 6, 7 и 8 окружностями (рис.2а,б)

- 1:  $2\tilde{\kappa}/\pi = 1,709$ ;  $2\tilde{\omega}/\pi = 4,698$ ;
- 2:  $2\tilde{\kappa}/\pi = 2,898$ ;  $2\tilde{\omega}/\pi = 5,254$ ;
- 3:  $2\tilde{\kappa}/\pi = 3,985$ ;  $2\tilde{\omega}/\pi = 5,754$ ;
- 4:  $2\tilde{\kappa}/\pi = 5,036$ ;  $2\tilde{\omega}/\pi = 6,216$ ;

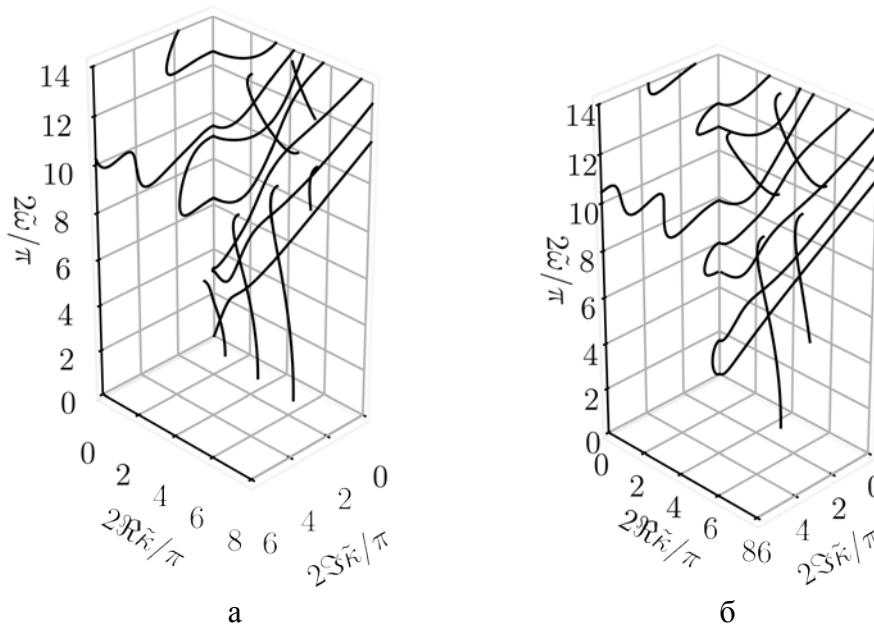


Рис.1. Дисперсионные кривые продольных волн (а) и изгибных волн (б) в плоском изотропном упругом слое.

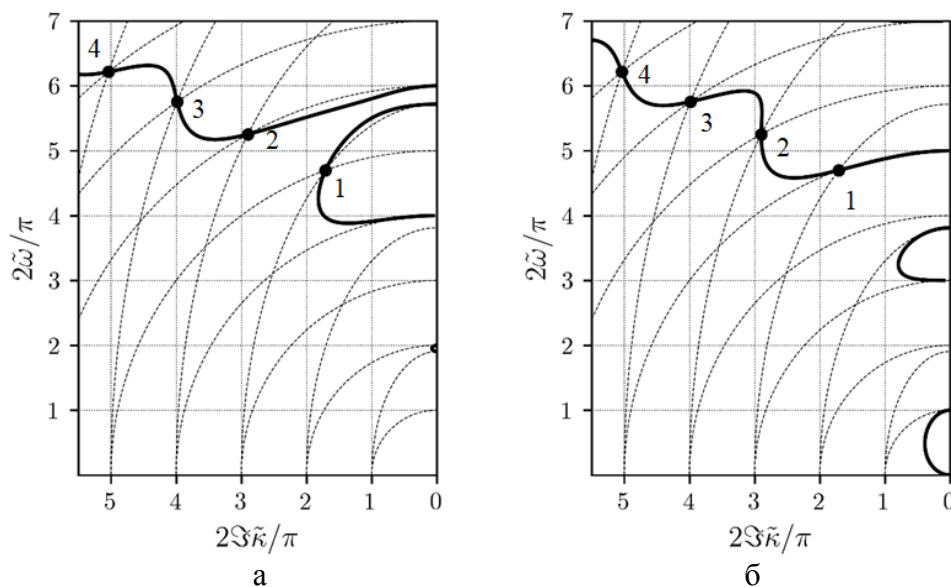


Рис.2. Дисперсионные кривые, соответствующие мнимым собственным значениям: продольные волны (а), изгибные волны (б) (теория 19 порядка).

Результаты исследования сходимости решения приведены в Таблице 1 (продольные моды) и Таблице 2 (изгибные моды) для теорий 7-21 порядков. Допустимая погрешность мнимого безразмерного волнового числа  $\Im\tilde{\kappa}_K^N$  вычисляемого в  $K$ -м узле решетки Миндлина на основе теории  $N$ -го порядка, определяются соотношением

$$\delta\tilde{\kappa}_K^N = (\Im\tilde{\kappa}_K^*)^{-1} |\Im\tilde{\kappa}_K^N - \Im\tilde{\kappa}_K^*| \leq 0.05, \quad K = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\Im\tilde{\kappa}_K^*$  – абсцисса точки пересечения соответствующих эллипсов решетки.

Таблица 1.

Погрешность вычисления безразмерного волнового числа  $2\Im\tilde{\kappa}_K^N/\pi$  в узлах решетки Миндлина: продольные волны.

$K$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$	$N = 15$	$N = 17$	$N = 19$	$N = 21$	$\Im\tilde{\kappa}_K^*$
1	0,002	0,074	0,006	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	1,709
2	2,502	2,898	0,055	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	2,898
3	3,985	3,985	3,985	0,259	0,018	0,001	0,000	0,000	3,985
4	0,126	5,036	5,036	5,036	0,189	0,004	0,000	0,000	5,036

Таблица 2.

Погрешность вычисления безразмерного волнового числа  $2\Im\tilde{\kappa}_K^N/\pi$  в узлах решетки Миндлина: изгибные волны.

$K$	$N = 7$	$N = 9$	$N = 11$	$N = 13$	$N = 15$	$N = 17$	$N = 19$	$N = 21$	$\Im\tilde{\kappa}_K^*$
1	0,215	0,032	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	1,709
2	1,787	1,642	1,580	0,014	0,000	0,000	0,000	0,000	2,898
3	3,985	3,985	0,271	0,040	0,002	0,000	0,000	0,000	3,985
4	5,036	2,495	1,330	1,036	0,902	0,012	0,001	0,001	5,036

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая вариационная формулировка теории  $N$ -го порядка отротропных упругих оболочек, основанная на Лагранжевом формализме аналитической механики континуальных систем. Оболочка отнесена к системе криволинейных координат, нормально связанной с некоторой гладкой реперной поверхностью. В отличие от работ [67-69], в качестве переменной поля, определяющей трехмерную модель оболочки, в рассмотрение введен вектор квазиперемещения, определенный компонентами вектора пространственного перемещения на расслоении двумерного многообразия, соответствующего реперной поверхности и связанный с перемещением линейным преобразованием, заданным тензором параллельного переноса. Получен функционал Лагранжа в трехмерном представлении и определен вектор квазинапряжения на площадках, ортогональных некоторому выбранному координатному направлению, также заданный на расслоении двумерного многообразия, связанный с истинным напряжением линейным преобразованием переноса. Путем преобразования Лежандра функционала Лагранжа по ковариантным производным компонентом вектора квазиперемещения, соответствующим выбранному координатному направлению, и соответствующим компонентам вектора квазинапряжения

получен новый смешанный функционал для оболочки как трехмерного тела и произведена его пространственная редукция, основанная на разложении аргументов функционала по некоторой биортогональной базисной системе функций нормальной координаты. Модель оболочки  $N$ -го порядка, таким образом, определена на расслоении двумерного многообразия пространством состояний с переменными поля, заданными коэффициентами разложения компонентов векторов квазиперемещения и квазинапряжения, поверхностной и контурной плотностями смешанного функционала, аналогичного функции Рауса в аналитической динамике дискретных систем. На основе принципа Гамильтона-Остроградского получены уравнения, являющиеся условиями экстремали функционала, в силу выбора в качестве переменных поля квазиперемещения и квазинапряжения разрешенные относительно их ковариантных производных первого порядка по выбранной координате и по форме записи аналогичные уравнениям Рауса. Получены естественные краевые условия, соответствующие выведенным обобщенным уравнениям Рауса теории  $N$ -го порядка, и выполнена постановка начально-краевой задачи динамики ортотропной оболочки.

Одним из основных приложений полученных новых уравнений теории оболочек  $N$ -го порядка является решение задач о дисперсии нормальных волн в неоднородных упругих волноводах. Система уравнений, разрешенная относительно пространственных производных по направлению, совпадающему с волновым вектором, обеспечивает переход к спектральной задаче, линейной относительно волнового числа, а, следовательно, и определение всех ветвей дисперсионных кривых – действительных, соответствующих распространяющимся модам нормальных волн, чисто мнимых и комплексных ветвей, соответствующих затухающим модам. Для плоского изотропного слоя получено решение спектральной задачи и проведен анализ сходимости решения по величинам мнимых волновых чисел в некоторых точках, соответствующих узлам решетки Миндлина. Показано, что для достижения погрешности приближенного решения в пределах 0,05 точного значения волнового числа в четырех узлах, соответствующих пересечению 3-6 эллипсов решетки Миндлина с 5-8 окружностями, достаточными являются теория 15 порядка в случае продольных мод и теория 17 порядка в случае изгибных мод затухающих волн.

Полученная новая формулировка теории оболочек ковариантна и сводится к единой форме записи уравнений движения и определяющих соотношений при использовании различных базисных систем – полиномов Лежандра или финитных базисных функций, соответственно, известные в теории дисперсии методы ортогональных полиномов и полуаналитических конечных элементов могут рассматриваться как ее частные случаи. Следует заметить, что представляется возможной также вариационная формулировка модели оболочки  $N$ -го порядка в переменных поля второго рода (обобщенных скоростях) и соответствующих им скоростях изменения обобщенных сил. Такой подход позволяет, в частности, перейти к постановке пространственно-одномерных начально-краевых задач в частных производных первого порядка как по пространственной, так и по временной переменным и, следовательно, обеспечить эффективное численное решение в случае неустановившегося движения на базе алгоритмов [102], например, для оболочек, взаимодействующих с окружающей средой [103,104].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Othmani C., Zhang H., Lu C., Wang Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review* // Composite Structures. – 2022. – Vol.286. – 115245.
2. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.227-260.
3. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть II* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2022. – Т.28. – №1. – С.36-86.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах*. – Киев: Наукова думка, 1981.
5. An Y.K. *Measurement of crack-induced non-propagating Lamb wave modes under varying crack widths* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2015. – Vol.62. – Pp.134-143.
6. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique* // NDT&E International. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.
7. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section* // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol.295. – Pp.685-707.
8. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lanza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides* // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol.318. – No.3. – Pp.488-505.
9. Maradudin A.A., Wallis R. F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals* // Physical Reviews B. – 1972. – Vol.6. – Pp.1106-1111.
10. Maradudin A. *Edge modes* // Japanese Journal of Applied Physics. Suppl. 2. – 1974. – Part 2. – Pp.871-878.
11. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions* // Journal of Applied Physics. – 1978. – Vol.49. – Pp.475-479.
12. Lefebvre J.E., Zhang V., Gzalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // Journal of Applied Physics. – 1999. – Vol.85. – 3419.
13. Lefebvre J.E., Zhang V., Gzalet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2001. – Vol.48. – Pp.1332-1340.
14. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length* // Wave Motion. – 2005. – Vol.42. – Pp.177-189.
15. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method* // Composite Structures. – 2013. – Vol.95. – Pp.419-429.
16. Yu J.G., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach* // Acta Mechanica Sinica. – 2014. – Vol.27. – Pp.542-550.

17. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory* // *Thin-Walled Structures*. – 2021. – Vol.161. – 107527.
18. Сеге Г. *Ортогональные полиномы*. – М.: Физматгиз, 1982. – 500 с.
19. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach* // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – Vol.99. – Pp.57-80.
20. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach* // *Composite Structures*. – 2021. – Vol.256. – 112997.
21. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section* // *Applied Mathematical Modelling*. – 2018. – Vol.63. – Pp.288-302.
22. Zhang X.M., Li Z.H., Yu J.G. *Evanescent waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment* // *Meccanica*. – 2018. – Vol.53. – Pp.2145-2160.
23. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate* // *Advances in Mechanical Engineering*. – 2018. – Vol.10. – No.12. – Pp.1-11.
24. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells* // *Advanced Mechanical Engineering*. – 2019. – Vol.11. – No.4. – Pp.1-15.
25. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites* // *Acta Mechanica*. – 2019. – Vol.230. – Pp.1219-1231.
26. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder* // *Applied Mathematical Modelling*. – 2021. – Vol.89. – Pp.299-313.
27. Zhang B., Wu S., Yu J., Wang P., Zhang X., Zhang Y. *Propagation and attenuation of Lamb waves in functionally graded fractional viscoelastic soft plates with a pre-deformation* // *Composite Structures*. – 2022. – Vol.293. – 115727.
28. Zhang B., Li L.J., Yu J.G., Elmaimouni L. *Generalized thermo-elastic waves propagating in bars with a rectangular cross-section* // *Archive of Applied Mechanics*. – 2022. – Vol.92. – Pp.785-799.
29. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит* / Диссертация на соискание ученой степени доктора техн. наук. – Ташкент: Ташкентский политехнический ин-т им. Р.А. Беруни, 1989. – 343 с.
30. Жилин П.А. *Прикладная механика. Основы теории оболочек*. – СПб: СПбГУ, 2006. – 167 с.
31. Кильчевский Н.А. *Основы аналитической механики оболочек*. – Киев: Изд. АН УССР, 1963. – 355 с.
32. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – Л: Наука, 1974. – 448 с.
33. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. – М.: Физматлит, 1976. – 512 с.
34. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. *Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек* // *Известия АН СССР. Механика твердого тела*. – 1988. – №4. – С.152-162.

35. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. *Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №6. – С.124-138.
36. Karplunov J.D., Kossovich L.Y. *Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies*. – London: Academic Press, 1998.
37. Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды*. – М: Наука, 1983. – 448 с.
38. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory* // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol.15. – Pp.715-726.
39. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.1. – Pp.31-44.
40. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
41. Немиш Ю.Н., Хома И.Ю. *Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория (обзор)* // Прикладная механика. – 1993. – Т.29. – №11. – С.3-34.
42. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. *Неклассические модели в теории пластин и оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т.57. – №5. – С.5-14.
43. Kienzler R., Schneider P. *Consistent theories of isotropic and anisotropic plates* // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2012. – Vol.50. – No.3. – Pp.755-768.
44. Kienzler R., Schneider P. *Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second-order approximation* / In: Shell Structures: Theory and Applications. – Leiden: Balkema, Taylor & Francis Gr. – 2013. – Vol.3. – Pp.109-112.
45. Kienzler R., Schneider P. *Direct approach versus consistent approximation* // Advanced Structured Materials. – 2016. – Vol.60. – Pp.415-433.
46. Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. *Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т.12. – №2. – С.56-64.
47. Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Асимптотическая модель дальнего поля волны Рэлея в многослойной пластине* // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т.11. – №4. – С.74-86.
48. Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т.13. – №1. – С.50-56.
49. Ардазишвили Р.А., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке* // Вестник Чувашского государственного педагогического ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – №4(26). – С.109-124.
50. Вильде М.В., Сергеева Н.В. *Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра* // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. – 2017. – Т.17. – №2. – С.183-195.

51. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model* / 2017 Days of Diffraction (DD 2017). – St. Petersburg, 2017. – Pp.294-299.
52. Вильде М.В., Гуляев Ю.П. *Низкочастотные осесимметричные волны в кровеносных сосудах постоянного сечения: асимптотический подход* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – №4. – С.136-151.
53. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
54. Пелех Б.Л., Сухорольский М.А. *Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
55. Хома И.Ю. *Обобщенная теория анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1986. – 167 с.
56. Волчков Ю.М. *Модифицированные уравнения слоистых пластин конечных размеров из ортотропного материала. Сравнение результатов численных расчетов с аналитическими решениями* // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т.58. – №5(345). – С.167-177.
57. Волчков Ю.М., Дергилева Л.А. *Сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной на основе аппроксимации перемещений и напряжений полиномами Лежандра* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т.48. – №3(283). – С.450-459.
58. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G. *Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates* // Comput. Math. Appl. – 2006. – Vol.51. – Pp.1789-1808.
59. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models* // J. of Elasticity. – 1995. – Vol.38. – Pp.1-40.
60. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Лежандра к теории тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.54-56.
61. Никабадзе М.У. *Вариант системы уравнений тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.30-34.
62. Zozulya V.V. *A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories* // Journal of Engineering. – 2013. – 590480.
63. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vol.103. – Pp.40-54.
64. Никабадзе М.У. *Некоторые вопросы варианта теории тонких тел с применением разложения по системе многочленов Чебышева второго рода* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2007. – №3. – С.73-106.
65. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. *Аналитическая механика континуальных систем*. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 188 с.
66. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
67. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications* / In: Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. – Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013. – Vol.3. – Pp.341-344.

68. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells* // ZAMM. – 2014. – Vol.94. – No.1-2. – Pp.164-184.
69. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Vol.16. – No.4-2. – Pp.693-701.
70. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
71. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек  $N$ -го порядка для различных значений волновых чисел* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
72. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории  $N$ -го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.
73. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О приложении различных вариантов теории оболочек  $N$ -го порядка к некоторым задачам о прогрессивных волнах* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2014. – №11-1. – С.255-266.
74. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О вариационных уравнениях расширенной теории  $N$ -го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.
75. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems* // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.
76. Жаворонок С.И. *Применение расширенной теории пластин  $N$ -го порядка к решению задачи о дисперсии волн в градиентно-неоднородном слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.240-258.
77. Жаворонок С.И. *О применении различных уравнений трехмерной теории пластин  $N$ -го порядка в задачах о дисперсии нормальных волн в упругом слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.595-613.
78. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2020. – Vol.11. – No.2. – Pp.159-185.
79. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides* // Archives of Mechanics. – 2020. – Vol.72. – No.1. – Pp.1-13.
80. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. – Stanford University, Technical Report CS 142. – 1969.
81. Tarn J.Q., Tseng W.D. *Exact analysis of curved beams and arches with arbitrary end conditions: a Hamiltonian state-space approach* // Journal of Elasticity. – 2012. – Vol.107. – Pp.39-63.



82. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers* // Journal of Elasticity. – 2010. – Vol.101. – Pp.207-237.
83. Chang H.H., Tarn J.Q. *Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates* // Journal of Elasticity. – 2012. – Vol.108. – Pp.49-66.
84. Tarn J.Q., Chang H.H. *A Hamiltonian state space approach to anisotropic elasticity and piezoelectricity* // Acta Mechanica. – 2013. – Vol.224. – Pp.1271-1284.
85. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach* // Journal of Elasticity. – 2009. – Vol.97. – Pp.131-154.
86. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method* // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol.104. – 02015.
87. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
88. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
89. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector and Legendre polynomial hybrid formalism* // Composite Structures. – 2021. – Vol.255. – 112950.
90. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling Guided Wave Propagation in Functionally Graded Plates by State-vector Formalism and the Legendre Polynomial Method* // Ultrasonics. – 2019. – Vol.99. – 105953.
91. Gao J., Zhang J., Lyu J., Song S., He C. *Lamb Waves Propagation Characteristics in Functionally Graded Sandwich Plates* // Sensors. – 2022. – Vol.22. – No.11. – 4052.
92. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials* // Composite Structure. – 2019. – Vol.228. – 111319.
93. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.1. – Pp.72-81.
94. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. – М: Наука, 1980. – 512 с.
95. Zhavoronok S.I. *On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Vol.13. – No.4. – Pp.82-95.
96. Маркеев А.П. *Теоретическая механика: учебник для университетов*. – М: ЧеРо, 1999. – 572 с.
97. Амосов А.А., Жаворонок С.И. *К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т.3. – №1. – С.69-80.
98. Амосов А.А., Князев А.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции* //

- Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №1. – С.60-72.
99. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
100. Жаворонок С.И., Леонтьев А.Н., Леонтьев К.А. *Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2010. – Т.6. – №1-2. – С.105-111.
101. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave Dispersion in Heterogeneous Waveguides* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022. – Vol.43. – No.7. – Pp.2010-2018.
102. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений*. – М: Физматлит, 2000. – 608 с.
103. Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Осесимметричная задача нестационарного взаимодействия акустической волны давления с упругой оболочкой вращения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2006. – Т.12. – №4. – С.541-554.
104. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Взаимодействие оболочки средней толщины с акустической волной* // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т.17. – №2. – С.127-135.

## REFERENCES

- Othmani C., Zhang H., Lu C., Wang Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review*. Composite Structures, 2022, Vol.286, 115245.
- Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' I [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part I]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.227-260.
- Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor). Chast' II [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part II]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2022, Vol.28, No.1, Pp.36-86.
- Grinchenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic Oscillations & Waves in Elastic Bodies]*. Kiev, Naukova dumka, 1981.
- An Y.K. *Measurement of crack-induced non-propagating Lamb wave modes under varying crack widths*, Intern. J. of Solids and Structures, 2015, Vol.62, Pp.134-143.
- Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique*, NDT&E International, 2011, Vol.44, Pp.84-92.

7. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*. Journal of Sound and Vibration, 2006, Vol.295, Pp.685-707.
8. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lanza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides*. Journal of Sound and Vibration, 2008, Vol.318, No.3, Pp.488-505.
9. Maradudin A.A., Wallis R. F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals*. Physical Reviews B, 1972, Vol.6, Pp.1106-1111.
10. Maradudin A. *Edge modes*. Japanese Journal of Applied Physics, Suppl. 2, 1974, Part 2, Pp.871-878.
11. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions*. Journal of Applied Physics, 1978, Vol.49, Pp.475-479.
12. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates*. Journal of Applied Physics, 1999, Vol.85, 3419.
13. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2001, Vol.48, Pp.1332-1340.
14. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length*. Wave Motion, 2005, Vol.42, Pp.177-189.
15. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method*. Composite Structures, 2013, Vol.95, Pp.419-429.
16. Yu J.G., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach*. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014, Vol.27, Pp.542-550.
17. Liu C., Yu J., Xu W., Zhang X., Wang X. *Dispersion characteristics of guided waves in functionally graded anisotropic micro/nano-plates based on the modified couple stress theory*. Thin-Walled Structures, 2021, Vol.161, 107527.
18. Szegő G. *Orthogonal Polynomials*. New York, American Mathematical Soc., 1959.
19. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.99, Pp.57-80.
20. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach*. Composite Structures, 2021, Vol.256, 112997.
21. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section*. Applied Mathematical Modelling, 2018, Vol.63, Pp.288-302.
22. Zhang X.M., Li Z.H., Yu J.G. *Evanescence waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment*. Meccanica, 2018, Vol.53, Pp.2145-2160.
23. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate*. Advances in Mechanical Engineering, 2018, Vol.10, No.12, Pp.1-11.

24. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells*. Advanced Mechanical Engineering, 2019, Vol.11, No.4, Pp.1-15.
25. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites*. Acta Mechanica, 2019, Vol.230, Pp.1219-1231.
26. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.89, Pp.299-313.
27. Zhang B., Wu S., Yu J., Wang P., Zhang X., Zhang Y. *Propagation and attenuation of Lamb waves in functionally graded fractional viscoelastic soft plates with a pre-deformation*. Composite Structures, 2022, Vol.293, 115727.
28. Zhang B., Li L.J., Yu J.G., Elmaimouni L. *Generalized thermo-elastic waves propagating in bars with a rectangular cross-section*. Archive of Applied Mechanics, 2022, Vol.92, Pp.785-799.
29. Amosov A.A. *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya netonkih uprugih obolochek i plit. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhn. nauk [Approximate three-dimensional theory of non-thin elastic shells and plates. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences]*. Tashkent, Tashkentskij politekhnicheskij institut im. R.A. Beruni, 1989, 343 p.
30. Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek [Applied Mechanics. Basics of the Shell Theory]*. SPb, SpbGU, 2006, 167 p.
31. Kil'chevskij N.A. *Osnovy analiticheskoy mekhaniki obolochek [Fundamentals of analytical mechanics of shells]*. Kiev, Izdatel'stvo AN USSR, 1963, 355 p.
32. Ambarcumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnyh obolochek [General theory of anisotropic shells]*. Leningrad, Nauka, 1974, 448 p.
33. Gol'denveizer A.L. *Teoriya uprugih tonkih obolochek [Theory of thin elastic shells]*. Moskva, Fizmatlit, 1976, 512 p.
34. Goldenveizer A.L., Kaplunov Yu.D. *Dynamic boundary layer in problems of shell vibrations*. Mechanics of Solids, 1988, No.4, Pp.152-162.
35. Gol'denveizer A.L., Kaplunov Yu.D., Nol'de E.V. *Asymptotic analysis and refinement of theories of plates and shells of the Timoshenko-Reissner type*. Mechanics of Solids, 1990, No.6, Pp.124-138.
36. Kaplunov J.D., Kossovich L.Y. *Dynamics of Thin-Walled Elastic Bodies*. London, Academic Press, 1998.
37. Berdichevskij V.L. *Variatsionnye printsipy mekhaniki sploshnoj sredy [Variational principles of the continuum mechanics]*. Moskva, Nauka, 1983, 448 p.
38. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory*. Advanced Structured Materials, 2011, Vol.15, Pp.715-726.
39. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.1, Pp.31-44.
40. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
41. Nemish Yu.N., Homa I.Yu. *Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie netonkikh obolochek i plastin. Obobshhennaya teoriya (obzor) [Stress-strain state of non-thin shells and plates. Generalized Theory (review)]*. Prikladnaya mekhanika, 1993, Vol.29, No.11, Pp.3-34.

42. Annin B.D., Volchkov Yu.M. *Nonclassical models of the theory of plates and shells. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, Vol.57, Pp.769-776.
43. Kienzler R., Schneider P. *Consistent theories of isotropic and anisotropic plates*, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, Vol.50, No.3, Pp.755-768.
44. Kienzler R., Schneider P. *Comparison of various linear plate theories in the light of a consistent second-order approximation*. In: Shell Structures: Theory and Applications. Leiden, Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013, Vol.3, Pp.109-112.
45. Kienzler R., Schneider P. *Direct approach versus consistent approximation*. Advanced Structured Materials, 2016, Vol.60, Pp.415-433.
46. Kossovich L.Y., Wilde M.V., Shevtsova Y.V. *Asimptoticheskoe integrirovaniye dinamicheskikh uravneniy teorii uprugosti dlya sluchaya mnogoslojnoj tonkoj obolochki [Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2012, Vol.12, Iss.2, Pp.56-64.
47. Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Asimptoticheskaya model' dal'nego polya volny Releya v mnogoslojnoj plastine [An Asymptotic Model for the Far-Field of Rayleigh Wave in Multilayered Plate]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2011, Vol.11, Iss.4, Pp.74-86.
48. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Antisimmetrichnye kromochnye volny vysshego poryadka v plastinakh [Antisymmetric Higher Order Edge Waves in Plates]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2013, Vol.13, Iss.1, Pp.50-56.
49. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Y. *Trekhmernye fundamental'nye kromochnye volny v tonkoj obolochke [Three-dimensional fundamental edge waves in thin shell]*. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 2015, No.4(26), Pp.109-124.
50. Wilde M.V., Sergeeva N.V. *Razvitie asimptoticheskikh metodov analiza dispersionnykh sootnosheniy dlya nasledstvenno-uprugogo sploshnogo tsilindra [Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2017, Vol.17, Iss.2, Pp.183-195.
51. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model*, 2017 Days of Diffraction (DD 2017), St. Petersburg, 2017, Pp.294-299.
52. Wilde M.V., Gulyaev Yu.P. *Low-frequency axisymmetric waves in blood vessels of constant cross-section: an asymptotic approach*, Mechanics of Solids, 2009, Vol.44, Pp.608-620.
53. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems]*. L'vov, Vishcha shkola, 1978, 192 p.
54. Pelekh B.L., Suhorol'skij M.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugikh anizotropnykh obolochek [Contact problems of the theory of elastic anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1979, 216 p.

55. Homa I.Yu. *Obobshhennaya teoriya anizotropnykh obolochek [Generalized theory of anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1986, 167 p.
56. Volchkov Yu.M. *Modified equations of finite-size layered plates made of orthotropic material. Comparison of the results of numerical calculations with analytical solutions*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, Pp.904-913.
57. Volchkov Yu.M., Dergileva L.A. *Reducing three-dimensional elasticity problems to two-dimensional problems by approximating stresses and displacements by legendre polynomials*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007, Vol.48, Pp.450-459.
58. Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G. *Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates*. Comput. Math. Appl, 2006, Vol.51, Pp.1789-1808.
59. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models*. Journal of Elasticity, 1995, Vol.38, Pp.1-40.
60. Nikabadze M.U. *Primenenie sistemy polinomov Lezhandra k teorii tonkikh tel [Application of the Legendre polynomial system to the thin bodies theory]* Vestnik Moskovskogo universiteta im. M.V. Lomonosova. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.5, Pp.54-56.
61. Nikabadze M.U. *Variant sistemy uravnenij tonkikh tel [A variant of the system of equations of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo universiteta im. M.V. Lomonosova. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2006, No.1, Pp.30-34.
62. Zozulya V.V. *A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories*. Journal of Engineering, 2013, 590480.
63. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods*. International Journal of Mechanical Sciences, 2015, Vol.103, Pp.40-54.
64. Nikabadze M.U. *Some issues concerning a version of the theory of thin solids based on expansions in a system of Chebyshev polynomials of the second kind*, Mechanics of Solids, 2007, Vol.42, Pp.391-421.
65. Kil'chevskij N.A., Kil'chinskaya G.A., Tkachenko N.E. *Analiticheskaya mekhanika kontinual'nykh sistem [Analytical Dynamics of Continuum Systems]*. Kiev, Naukova Dumka, 1979, 188 p.
66. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell's theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
67. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications*. In Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013, Vol.3, Pp.341-344.
68. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells*, ZAMM, 2014, Vol.94, No.1-2, Pp.164-184.
69. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
70. Zhavoronok S.I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-*

- dimensional shells theory*]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.278-287.
71. Zhavoronok S.I. *Issledovanie kinematiki normal'nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel* [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wavenumbers investigation based on  $n$ -th order three-dimensional shells' theory]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.
  72. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal'no-kraevoy zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshhennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoy dinamiki* [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of  $N$ -th order using generalized displacements and its application to steady dynamics]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.3, Pp.333-344.
  73. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O prilozhenii razlichnykh variantov teorii obolochek N-go poryadka k nekotorym zadacham o progressivnykh volnakh* [An application of various  $N$ -th order shell theories to normal waves propagation problems]. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, No.11-1, Pp.255-266.
  74. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O variatsionnykh uravneniyakh rasshirennoj teorii N-go poryadka uprugikh obolochek i ikh prilozhenii k nekotorym zadacham dinamiki* [An application of various  $N$ -th order shell theories to normal waves propagation problems]. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2015, No.2, Pp.36-59.
  75. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
  76. Zhavoronok S.I. *Primenenie rasshirennoj teorii plastin N-go poryadka k resheniyu zadachi o dispersii voln v gradientno-neodnorodnom sloe* [An application of the  $n$ th order extended plate theory in the wave dispersion problem for a functionally graded layer]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.240-258.
  77. Zhavoronok S.I. *O primenении razlichnykh uravnenij trekhmernoj teorii plastin N-go poryadka v zadachakh o dispersii normal'nykh voln v uprugom sloe* [On the use of various equations of the  $n$  order plate theory in problems of normal wave dispersion in an elastic layer]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.595-613.
  78. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2020, Vol.11, No.2, Pp.159-185.
  79. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I. N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides*. Archives of Mechanics, 2020, Vol.72, No.1, Pp.1-13.
  80. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. Stanford University, Technical Report CS 142, 1969.

81. Tarn J.Q., Tseng W.D. *Exact analysis of curved beams and arches with arbitrary end conditions: a Hamiltonian state-space approach*. Journal of Elasticity, 2012, Vol.107, Pp.39-63.
82. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *A Hamiltonian State Space Approach for 3D Analysis of Circular Cantilevers*. Journal of Elasticity, 2010, Vol.101, Pp.207-237.
83. Chang H.H., Tarn J.Q. *Three-Dimensional Elasticity Solutions for Rectangular Orthotropic Plates*. Journal of Elasticity, 2012, Vol.108, Pp.49-66.
84. Tarn J.Q., Chang H.H. *A Hamiltonian state space approach to anisotropic elasticity and piezoelectricity*. Acta Mechanica, 2013, Vol.224, Pp.1271-1284.
85. Tarn J.Q., Chang H.H., Tseng W.D. *Axisymmetric Deformation of a Transversely Isotropic Cylindrical Body: A Hamiltonian State-Space Approach*. Journal of Elasticity, 2009, Vol.97, Pp.131-154.
86. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method*. MATEC Web of Conferences, 2017, Vol.104, 02015.
87. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.
88. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates*. Journal of Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.
89. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector and Legendre polynomial hybrid formalism*. Composite Structures, 2021, Vol.255, 112950.
90. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling Guided Wave Propagation in Functionally Graded Plates by State-vector Formalism and the Legendre Polynomial Method*. Ultrasonics, 2019, Vol.99, 105953.
91. Gao J., Zhang J., Lyu J., Song S., He C. *Lamb Waves Propagation Characteristics in Functionally Graded Sandwich Plates*. Sensors, 2022, Vol.22, No.11, 4052.
92. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials*. Composite Structure, 2019, Vol.228, 111319.
93. Zhavoronok S.I. *On different definitions of strain tensors in general shell theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol.17, No.1, Pp.72-81.
94. Lur'e A.I. *Nelinejnaya teoriya uprugosti [Nonlinear Elasticity Theory]*. Moskva, Nauka, 1980.
95. Zhavoronok S.I. *On Hamiltonian formulations and conservation laws for plate theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Vol.13, No.4, Pp.82-95.
96. Markeev A.P. *Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik dlya universitetov [Theoretical Mechanics: A Textbook for Universities]*. Moskva, CheRo, 1999.
97. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *K probleme reduksii ploskoj zadachi teorii uprugosti k posledovatel'nosti odnomernykh kraevykh zadach [Reduction of the plane problem of elasticity theory to a sequence of one-dimensional boundary-value problems]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1997, Vol.3, No.1, Pp.69-80.



98. Amosov A.A., Knyazev A.A., Zhavoronok S.I. *O reshenii nekotorykh kraevykh zadach o ploskom napryazhennom sostoyanii krivolinejnoj trapetsii [On solution of 2D-problem of stressed curvilinear trapezoid]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1999, Vol.5, No.1, Pp.60-72.
99. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'ev K.A. *O reshenii nekotorykh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashheniya v trekhmernoj postanovke [About solving some problem on the stressed-strained state thick anisotropic shells of revolution in three-dimensional statement]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
100. Zhavoronok S.I., Leont'ev A.N., Leont'ev K.A. *Analiz skhodimosti resheniya pri raschete tolstostennykh obolochek vrashheniya proizvol'noj formy [Analysis of thick-walled rotation shells based on Legendre polynomials]*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2010, Vol.6, Nos.1-2, Pp.105-111.
101. Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S., Rabinskii L.N. *The Generalized Routh Equations in the Plate Theory of Nth Order and their Use in Problems of Normal Wave Dispersion in Heterogeneous Waveguides*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol.43, No.7, Pp.2010-2018.
102. Kulikovskij A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravnenij [Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic systems of equations]*. Moskva, Fizmatlit, 2000, 608 p.
103. Zhavoronok S.I., Rabinskij L.N. *Osesimmetrichnaya zadacha nestatsionarnogo vzaimodejstviya akusticheskoy volny davleniya s uprugoj obolochkoj vrashheniya [Axisymmetric problem of unsteady interaction of acoustic pressure waves with elastic shell of revolution]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2006, Vol.12, No.4, Pp.541-554.
104. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Rabinskij L.N. *Vzaimodejstvie obolochki srednej tolshhiny s akusticheskoy volnoj [Interaction of a medium-thickness shell and an acoustical wave]*. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2010, Vol.17, No.2, Pp.127-135.

Поступила в редакцию 26 мая 2022 года.

---

Сведения об авторах

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [zhavoronok@iam.ras.ru](mailto:zhavoronok@iam.ras.ru)

Курбатов Алексей Сергеевич – к.т.н., н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [defunt@inbox.ru](mailto:defunt@inbox.ru)