

УДК 539.3
EDN HSQEQY (<https://elibrary.ru/hsqeqy>)



ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ В ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ*

Старовойтов Э.И.¹, Леоненко Д.В.¹, Абдусаттаров А.²

¹Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

²Ташкентский государственный транспортный университет,
г. Ташкент, Узбекистан

АННОТАЦИЯ

Исследован изгиб упругопластической трехслойной круговой пластины при знакопеременном нагружении осесимметричной кольцевой нагрузкой. Учтено воздействие температурного поля. Пакет пластины несимметричен по толщине. Предполагается, что его деформирование подчиняется гипотезе ломаной линии. Внешние несущие слои принимаются тонкими, для них справедливы гипотезы Кирхгофа. Материалы несущих слоев упругопластические. В более толстом жестком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Изменение радиальных перемещений принимается линейным по толщине слоя. Материал заполнителя нелинейно упругий.

Пластина принимается теплоизолированной по торцу и внешней поверхности нижнего несущего слоя. Падающий перпендикулярно верхнему слою тепловой поток создает в пластине температурное поле. Формула для его расчета получена при помощи усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета. Учтено влияние температуры на упругие и пластические характеристики материалов слоев пластины.

Для вывода дифференциальных уравнений равновесия при первичном нагружении пластины применен вариационный метод Лагранжа. Учтена работа касательных напряжений в заполнителе в тангенциальном направлении. На контуре пластины сформулированы граничные условия. Рассмотрен случай кольцевой равномерно распределенной нагрузки. Для решения соответствующей краевой задачи применен приближенный метод, базирующийся на методе упругих решений Ильюшина. Итерационное аналитическое решение выписано в функциях Бесселя. При повторном знакопеременном нагружении использована теория переменного нагружения Москвитина. Учтено упрочнение материала несущих слоев. Для полученных аналитических решений проведен численный анализ зависимости от физических уравнений состояния, температуры, граничных условий.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина; упругопластичность; знакопеременная кольцевая нагрузка; температурное поле; численные результаты

BENDING OF A THREE-LAYER PLATE IN A TEMPERATURE FIELD ALTERNATING RING LOAD

Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Abdusattarov A.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

* Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект №Т22УЗБ-015).

ABSTRACT

The bending of an elastic-plastic three-layer circular plate under alternating loading by an axisymmetric ring load is investigated. The effect of the temperature field is taken into account. The plate package is asymmetrical in thickness. It is assumed that its deformation obeys the polyline hypothesis. The outer bearing layers are assumed to be thin, and Kirchhoff's hypotheses are valid for them. The materials of the bearing layers are elastic-plastic. In a thicker rigid filler, Timoshenko's hypothesis about the straightness and incompressibility of the deformed normal is fulfilled. The change in radial displacements is assumed to be linear in the thickness of the layer. The filler material is non-linearly elastic.

The plate is assumed to be thermally insulated at the end and the outer surface of the lower bearing layer. The heat flow incident perpendicular to the upper layer creates a temperature field in the plate. The formula for its calculation is obtained by averaging the thermophysical characteristics of the materials of the layers over the thickness of the package. The influence of temperature on the elastic and plastic characteristics of the materials of the plate layers is taken into account.

The Lagrange variational method is used to derive differential equations of equilibrium under primary loading of the plate. The work of tangential stresses in the filler in the tangential direction is taken into account. Boundary conditions are formulated on the contour of the plate. The case of an annular uniformly distributed load is considered. To solve the corresponding boundary value problem, an approximate method based on the Iyushin method of elastic solutions is applied. The resulting iterative analytical solution is written out in Bessel functions. The iterative analytical solution is written out in Bessel functions. In case of repeated alternating loading, Moskvitin's theory of alternating loading was used. The hardening of the material of the bearing layers is taken into account. For the obtained analytical solutions, a numerical analysis of the dependence on the physical equations of state, temperature, and boundary conditions is carried out.

Keywords: three-layer circular plate; elasticity; plasticity; alternating ring load; temperature field; numerical results

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость создания механико-математических моделей для расчета слоистых элементов конструкций, учитывающих физическую нелинейность составляющих материалов и воздействие внешней среды, обусловлено их широким использованием в технике, строительстве и транспортном машиностроении.

В монографиях [1-5] разрабатываются общие подходы к построению теорий деформирования неоднородных элементов конструкций при квазистатических и динамических нагрузках. В статье [6] приводится решение задачи о косом ударном нагружении трехслойной пластины. В работе [7] предложена уточненная теория свободных и вынужденных колебаний трехслойных пластин. Публикации [8,9] посвящены разработке теорий нелинейного деформирования трехслойных оболочек как с трансверсально-мягким наполнителем, так и с вязкоупругопластическими несущими слоями. Статья [10] посвящена изучению сверхзвуковых флаттерных характеристик многослойных композитных пластин. Нестационарное нагружение балки Тимошенко и сферической оболочки исследовано в [11,12].

В статьях [13-15] исследуются свободные и вынужденные колебания упругих трехслойных пластин и цилиндрических оболочек под действием непрерывных и локальных нагрузок различных видов. Для трехслойного пакета принята

кинематическая гипотеза ломаной линии, наполнитель легкий. Построена система собственных ортонормированных функций. Исследованы собственные частоты и амплитуды колебаний трехслойной оболочки при резонансных нагрузках.

Изучение несущей способности трехслойной волокнистой композитной пластины с отверстием проведено в [16]. Работы [17-20] посвящены исследованию изгиба сэндвич-пластин в зависимости от их формы, наличия упругих либо жестких опор, упругого основания, вида ячеистого наполнителя.

Термосиловое деформирование трехслойных несимметричных по толщине пластин, выполненных из функционально-градиентных материалов, рассмотрено в [21,22]. Квазистатическому деформированию многослойных пластин посвящены также статьи [23,24].

В публикациях [25,26] проведено исследование квазистатического термосилового нагружения упругопластических трехслойных стержней и оболочек. Для несущих слоев принимаются физические соотношения малых упругопластических деформаций, в них предполагается выполнение гипотез Кирхгофа. Заполнитель – нелинейно упругий, для него выполняется гипотеза Тимошенко. Решения получены в функциях Бесселя, проведена их численная апробация. Изгиб упругих и физически нелинейных трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем исследован в статьях [27,28]. Решения краевых задач о деформировании упругой круговой трехслойной пластины, расположенной на основании Пастернака, приведены в публикациях [29,30]. Деформирование трехслойных круглых пластин под действием неосесимметричных нагрузок рассмотрено в работах [31,32].

Здесь приведена постановка и получено аналитическое решение краевой задачи об осесимметричном деформировании трехслойной круговой пластины с упругопластическими несущими слоями и нелинейно упругим наполнителем при нагружении из естественного состояния и повторном знакопеременном нагружении кольцевой равномерно распределенной нагрузкой. Учтено воздействие температурного поля. Аналитическое решение получено в рекуррентном виде с использованием гипотезы Москвитина о переменном нагружении [33]. Проведено численное исследование полученных перемещений.

1. НАГРУЖЕНИЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ ЕСТЕСТВЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Пусть на трехслойную круговую пластину действует кольцевая равномерно распределенная нагрузка и падает тепловой поток (рис.1)

$$q = q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \quad (1)$$

где $H_0(r)$ функция Хевисайда нулевого порядка

$$H_0(r) = \begin{cases} 1, & r \geq 0, \\ 0, & r < 0. \end{cases}$$

При постановке краевой задачи используется цилиндрическая система координат, связанная со срединной плоскостью наполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами $h_1 \neq h_2$ справедливы гипотезы Кирхгофа. Для относительно толстого наполнителя ($h_3 = 2c$) принята гипотеза Тимошенко о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Радиальные перемещения линейно изменяются по толщине слоев.

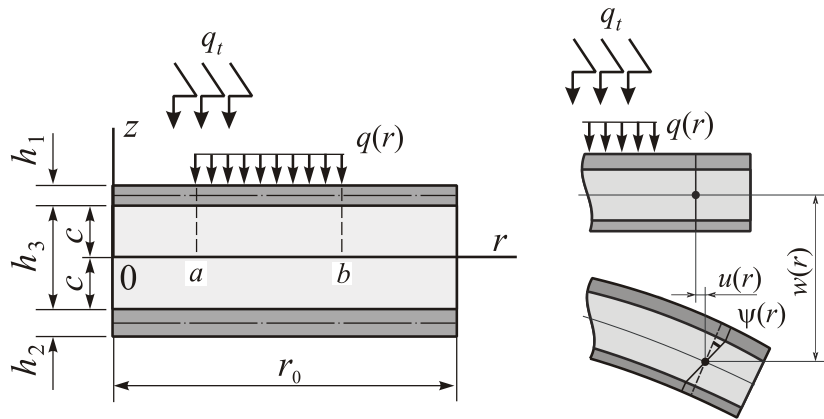


Рис.1. Нагружение трехслойной пластины.

На внешнюю поверхность первого слоя ($z = c + h_1$) падает тепловой поток q_t . Пластина теплоизолированная по контуру и нижнему слою ($z = -c - h_2$). В этом случае температурное поле $T(t, z)$ определяется формулой, полученной с помощью усреднения теплофизических характеристик материалов слоев по толщине пакета [4]

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (2)$$

где $\tau = at/H^2$; $s = z/H$; $a = \lambda/C$; $\lambda = \sum_{k=1}^3 \lambda_k h_k/H$; $C = \sum_{k=1}^3 C_k h_k \rho_k/H$; H – суммарная толщина пластины; λ_k , C_k , ρ_k – коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотность материала k -го слоя ($k = 1, 2, 3$); t – время.

При осесимметричной нагрузке (1) окружных перемещений в слоях нет $u_\phi^{(k)} = 0$. Искомыми функциями при решении задачи будут: прогиб пластины $w(r)$, относительный сдвиг в заполнителе $\psi(r)$ (см. рис.1) и радиальное перемещение координатной плоскости $u(r)$. На контуре пластины находится жесткая диафрагма, не позволяющая относительный сдвиг слоев ($\psi = 0$ при $r = r_0$).

Исходя из гипотезы прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_r^{(3)} + w_{,r} = \psi,$$

после интегрирования получим радиальные перемещения в слоях, выраженные через искомые функции

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & c \leq z \leq c + h_1, \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & -c \leq z \leq c, \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & -c - h_2 \leq z \leq -c, \end{aligned} \quad (3)$$

где запятой в нижнем индексе обозначена операция дифференцирования по следующей за ней соответствующей координате.

С помощью напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = r, \phi$), $\sigma_{rz}^{(3)}$, возникающих в слоях, вводятся обобщенные внутренние усилия и моменты

$$T_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \quad (4)$$

$$H_\alpha = M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad Q = \int_{-c}^c \sigma_{rz}^{(3)} dz.$$

Деформации в слоях можно получить с помощью соотношений Коши [4], используя перемещения (3). Для связи напряжений и деформаций применяются уравнения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [34]

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)\right) \vartheta_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \left(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T^{(k)}\right), \quad (5)$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3 \left(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T)\right) \vartheta_{rz}^{(3)} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi),$$

где $s_\alpha^{(k)}$, $\vartheta_\alpha^{(k)}$ – девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровые компоненты напряжений и деформаций в слоях; $s_{rz}^{(3)}$, $\vartheta_{rz}^{(3)}$ – касательное напряжение и деформация в заполнителе; G_k , K_k – температурно-зависимые модули сдвига и объемного деформирования материалов; α_{0k} – коэффициент линейного температурного удлинения.

Функции пластичности материалов несущих слоев $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T)$ при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ следует положить $\omega^{(k)} \equiv 0$ ($\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций; $\varepsilon_y^{(k)}(T)$ – предел текучести по деформациям). Аналогично функция физической нелинейности заполнителя будет $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) = 0$, если $\varepsilon_u^{(3)} \leq \varepsilon_s^{(3)}$ ($\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала заполнителя).

Для функций пластичности принимается аналитический вид ($T_0 = 293 \text{ K}$)

$$\omega_1(\varepsilon_u, T_0) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_{y0}, \\ A_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_u}\right)^{\alpha_1}, & \varepsilon_u > \varepsilon_{y0}, \end{cases} \quad (6)$$

где для дюралюминия $A_1 = 0,96$; $\alpha_1 = 2,34$; $\varepsilon_{y0}(T_0) = 0,735\%$ [4].

Уравнения равновесия в обобщенных усилиях (4) для рассматриваемой упругой пластины получены в [4] без применения соотношений, связывающих напряжения и деформации, поэтому они остаются справедливыми и здесь. В случае нагрузки (1) система принимает вид

$$T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = 0,$$

$$H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) - Q = 0, \quad (7)$$

$$M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = q_0(H_0(b-r) - H_0(a-r)).$$

В напряжениях $\sigma_\alpha^{(k)}$, $\sigma_{rz}^{(3)}$, используя соотношения (5), выделим линейные (индекс «e») и нелинейные (индекс «o»), включающие температуру, составляющие

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{ae}^{(k)} - \sigma_{a\omega}^{(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)}, \\
\sigma_{ae}^{(k)} &= 2G_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad \sigma_{a\omega}^{(k)} = 2G_k \omega_k \left(\varepsilon_u^{(k)}, T \right) \vartheta_{\alpha}^{(k)} + 3K_k \alpha_k T^{(k)}, \\
\sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_3 \vartheta_{rz}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = 2G_3 \omega_3 \left(\varepsilon_u^{(3)}, T \right) \vartheta_{rz}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi).
\end{aligned} \tag{8}$$

Аналогичную операцию проведем с обобщенными внутренними усилиями и моментами

$$\begin{aligned}
T_{\alpha} &= T_{ae} - T_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 T_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{a\omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha} = M_{ae} - M_{a\omega} = \sum_{k=1}^3 M_{ae}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{a\omega}^{(k)}, \\
H_{ae} &= M_{ae}^{(3)} + c \left(T_{ae}^{(1)} - T_{ae}^{(2)} \right), \quad H_{a\omega} = M_{a\omega}^{(3)} + c \left(T_{a\omega}^{(1)} - T_{a\omega}^{(2)} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Входящие в (9) слагаемые $T_{ae}^{(k)}, T_{a\omega}^{(k)}, M_{ae}^{(k)}, M_{a\omega}^{(k)}, H_{ae}^{(k)}, H_{a\omega}^{(k)}, Q_e, Q_{\omega}$ вычисляются по формулам, совпадающим по виду с (4), в которых следует напряжения $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ заменить соответственно линейными $\sigma_{ae}^{(k)}, \sigma_{rze}^{(3)}$ или нелинейными слагаемыми $\sigma_{a\omega}^{(k)}$, введенными в (8), например,

$$\begin{aligned}
M_{re} &= \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[K_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
&+ \left[cK_1^+ h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^+ h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
&+ \left[cK_1^- h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) + cK_2^- h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
&- \left[K_1^+ h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
&- \left[K_1^- h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \\
M_{a\omega} &= 2 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega_k \vartheta_{\alpha}^{(k)} z dz + \sum_{k=1}^3 3K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz.
\end{aligned} \tag{10}$$

Систему дифференциальных уравнений для определения искомым функций $u(r), \psi(r), w(r)$ получим из (7), подставив в нее обобщенные усилия, выраженные через эти функции с помощью соотношений (5). В результате имеем

$$\begin{aligned}
L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= -p + p_{\omega}, \\
L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) - 2cG_3 \psi &= h_{\omega}, \\
L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) &= -q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)) + q_{\omega},
\end{aligned} \tag{11}$$

где a_i – коэффициенты, определяемые через упругие и геометрические параметры слоев

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}), \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}, \quad a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}), \\
a_5 &= K_{32} + c(K_{11} + K_{21}), \quad a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},
\end{aligned}$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T^{(k)}) + \frac{4}{3} G_k(T^{(k)}) \right] z^m dz \quad (m = 0, 1, 2);$$

L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы второго и третьего порядков

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r}(rg) \right)_{,r}, \quad L_3(g) \equiv \frac{1}{r}(rL_2(g))_{,r},$$

$$L_2(g) \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2},$$

$$L_3(g) \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Нелинейные составляющие внутренних усилий $T_{\alpha\omega}^{(k)}, M_{\alpha\omega}^{(k)}, H_{\alpha\omega}^{(k)}, Q_{\omega}$ сгруппированы в правых частях системы (11) и входят в слагаемые с индексом « ω »

$$p_{\omega} = T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_{\omega} = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}) - Q_{\omega},$$

$$q_{\omega} = M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}).$$
(12)

Система дифференциальных уравнений (11) является нелинейной. Для ее решения применим приближенный метод упругих решений Ильюшина, сходимость которого доказана в широких пределах [33]. Для n -ой итерации система (11) принимает следующий вид

$$L_2(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) = p_{\omega}^{(n-1)},$$

$$L_2(a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) - 2cG_3 \psi^{(n)} = h_{\omega}^{(n-1)},$$

$$L_3(a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) = -q_{\omega} (H_0(b-r) - H_0(a-r)) + q_{\omega}^{(n-1)}.$$
(13)

Входящие в (13) величины $p_{\omega}^{(n-1)}, h_{\omega}^{(n-1)}, q_{\omega}^{(n-1)}$ служат «дополнительными» внешними нагрузками. На первом шаге итерации они нулевые, а в дальнейшем на каждом шаге они вычисляются по результатам предыдущего приближения в соответствии с формулами (12), в которых во все слагаемые нужно добавить сверху индекс « $n-1$ »

$$T_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} dz +$$

$$+ 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} dz,$$

$$M_{\alpha\omega}^{(n-1)} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k^{n-1} \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)} z dz +$$

$$+ 3 \sum_{k=1}^3 K_k \alpha_{0k} \int_{h_k} T^{(k)} z dz,$$

$$H_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)}) \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$Q_{\omega}^{(n-1)} = \int_{-c}^c 2G_3 \omega_3^{n-1} \vartheta_{rz}^{(3,n-1)} dz, \quad \omega_k^{n-1} \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}, T^{(k)}).$$
(14)

Таким образом, система дифференциальных уравнений (13) является на каждом шаге линейной. Для замыкания краевой задачи по определению

функций $u^{(n)}$, $\psi^{(n)}$, $w^{(n)}$ необходимо добавить к системе уравнений (11) граничные условия. Рассмотрим двое из них, например,

- при заделанном контуре ($r = r_0$)

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0;$$

- при шарнирном опирании пластины по контуру ($r = r_0$)

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = 0, \quad M_r^{(n)} = M_{re}^{(n)} - M_{r\omega}^{(n-1)} = 0, \quad (15)$$

где $M_r^{(n)}$, $M_{re}^{(n)}$, $M_{r\omega}^{(n-1)}$ – обобщенные внутренние радиальные моменты на n -ом и $n-1$ -ом шагах приближения, выражения для которых следуют из (9), (10).

Решение линейной системы (13) при непрерывной нагрузке известно [4]. Так как система дифференциальных уравнений (13) является линейной, то ее решение, полученное по аналогии, является рекуррентным решением задачи о деформировании рассматриваемой трехслойной упругопластической пластины

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} &= C_2^{(n)} I_1(\beta r) + C_3^{(n)} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)}, \\ u^{(n)} &= \frac{a_3}{a_1} w_{,r}^{(n)} - \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + \frac{C_7^{(n)} r}{2} + \frac{C_8}{r}, \\ w^{(n)} &= \frac{1}{b_3} \left[b_2 \int \psi^{(n)} dr + \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) + L_3^{-1}(q - q_\omega^{(n-1)}) \right) dr + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} C_1 r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)} r^2}{4} \right] + C_6 \ln r + C_4^{(n)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $I_1(\beta r)$, $K_1(\beta r)$ – модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда; C_1, C_2, \dots, C_8 – константы интегрирования, $\psi_r^{(n)}(r)$ – некоторое частное решение уравнения Бесселя, выделяемого из системы (13) для функции $\psi^{(n)}$; L_2^{-1} , L_3^{-1} – линейные интегральные операторы

$$\begin{aligned} L_2^{-1}(f) &\equiv \frac{1}{r} \int r \int f(r) dr dr, \quad L_3^{-1}(f) \equiv \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int r f(r) dr dr dr, \\ \beta^2 &= \frac{2cb_3 G_3}{b_1 b_3 - b_2^2}, \quad b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2^2}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_3^2}{a_1}. \end{aligned}$$

Интегральный оператор от нагрузки (1) будет

$$\begin{aligned} \int L_3^{-1}(q) dr &= q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} + \frac{b^2 r^2}{16} - \left(\frac{b^4}{16} + \frac{b^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{b} \right) \right) H_0(b-r) - \\ &\quad - q_0 \left(\frac{r^4 - 5a^4}{64} + \frac{a^2 r^2}{16} - \left(\frac{a^4}{16} + \frac{a^2 r^2}{8} \right) \ln \left(\frac{r}{a} \right) \right) H_0(a-r). \end{aligned} \quad (17)$$

Частное решение $\psi_r^{(n)}$ для сдвига в заполнителе и интеграл от сдвига на n -ом шаге будут

$$\psi_r^{(n)}(r) = \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \left\{ H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b) I_1(\beta r) - I_1(\beta b) K_1(\beta r)) \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -H_0(a-r) \left[\frac{a^2}{r} - r + 2a(K_1(\beta a)I_1(\beta r) - I_1(\beta a)K_1(\beta r)) \right] \Bigg\} + \frac{C_1^{(n)}\gamma_1}{\beta^2 r} - \\
 & -K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\
 & \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \\
 & + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\
 & \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right], \\
 \int \psi^{(n)} dr = & \frac{C_2^{(n)} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{\gamma_1 q_0}{2\beta^2} \times \\
 & \times \left\{ H_0(b-r) \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \right. \\
 & \left. - H_0(a-r) \left[\frac{a^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{2a}{\beta} (K_1(\beta a)I_0(\beta r) + I_1(\beta a)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] \right\} - \\
 & - \int \left(K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] + \right. \\
 & \left. + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \right) dr.
 \end{aligned}$$

(18)

В случае заделки или шарнирного опирания контура пластины $r = r_0 = 1$ должны выполняться условия $\psi^{(n)} = w^{(n)} = 0$. В центре пластины решение должно быть ограничено. Отсюда получаем следующие константы интегрирования

$$C_1^{(n)} = -\frac{q_0(b^2 - a^2)}{2}, \quad C_6^{(n)} = \frac{q_0(b^4 - a^4)}{16b_3}, \quad C_8^{(n)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 C_3^{(n)} = & \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} (bI_1(\beta b) - aI_1(\beta a)) + \\
 & + \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left(\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right) - \right. \\
 & \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \Bigg|_{r=0}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2^{(n)} = & -\frac{1}{I_1(\beta)} \left(C_3^{(n)} K_1(\beta) + \frac{C_1^{(n)} \gamma_1}{\beta^2} \right) - \frac{1}{I_1(\beta)} \times \\
& \times \left(-K_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \right. \\
& \left. \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right] \right)_{r=1} + \\
& + I_1(\beta) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)} r dr \right] - \right. \\
& \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)} r dr \right) dr \right]_{r=1} \Big), \\
C_4^{(n)} = & -\frac{C_1^{(n)}}{4b_3} - \frac{C_5^{(n)}}{4b_3} - \\
& - \frac{b_2}{b_3} \int \psi^{(n)} dr \Big|_{r=1} - \frac{a_3}{b_3 a_1} \int L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=1} + \frac{1}{b_3} \int L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) dr \Big|_{r=1}.
\end{aligned} \tag{19}$$

При шарнирно опертом контуре пластины должны выполняться еще два условия $u^{(n)} = 0$, $M_{re}^{(n)} = M_{r\omega}^{(n-1)}$. Отсюда константы интегрирования $C_5^{(n)}$, $C_7^{(n)}$

$$\begin{aligned}
C_5^{(n)} = & 2 \frac{a_7 a_1 + a_3^2}{a_1 (a_6 + a_7)} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + \\
& + \frac{b_3}{a_6 + a_7} 2 \left(L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \right)_{,r} \Big|_{r=1} - \frac{2b_3}{a_6 + a_7} \left(3 \sum_{k=1}^3 \alpha_{0k} \int_{h_k} K_k T^{(k)} z dz + M_{r\omega}^{(n-1)} \right) + \\
& + \left(b_3 - a_7 - \frac{a_3^2}{a_1} \right) \frac{b_3}{a_6 + a_7} \left(\frac{C_1^{(n)}}{2b_3} + 2C_6^{(n)} \right), \\
C_7^{(n)} = & -2 \frac{a_6}{b_3 a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 \frac{a_3}{b_3 a_1} L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} - \\
& - \frac{a_3}{2b_3 a_1} C_1^{(n)} - 2 \frac{a_3}{a_1} C_6^{(n)} - \frac{a_3}{a_1 b_3} C_5^{(n)}.
\end{aligned} \tag{20}$$

При защемленном контуре аналогичные константы следуют из условий $u^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0$ при $r = 1$

$$\begin{aligned}
C_5^{(n)} = & -2b_3 C_6^{(n)} - \frac{C_1^{(n)}}{2} - \frac{2a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1} + 2 L_3^{-1}(q_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}, \\
C_7^{(n)} = & -\frac{2}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)}) \Big|_{r=1}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, на первом цикле нагружения (нагружение из естественного состояния) упругопластической трехслойной пластины кольцевой нагрузкой прогиб $w^{(n)}(r)$, радиальное перемещение $u^{(n)}(r)$ и сдвиг в заполнителе $\psi^{(n)}(r)$

определяются формулами (16). Входящие в них интегралы от кольцевой нагрузки и сдвига определяются формулами (17), (18), константы интегрирования при шарнирно опертом или защемленном контуре – формулами (19)-(21). При этом решение явным образом зависит от температуры через константы C_5, C_7 в случае шарнирно опертого контура.

Численные результаты. Рассмотрим трехслойную круговую пластину со слоями из материалов Д16Т–фторопласт–4–Д16Т и шарнирно опертым контуром. Функция пластичности дюралюминия принята в виде (6), функции нелинейности фторопласта – в подобном виде. Соответствующие параметры нелинейности и упругости приведены в [4]. Толщины слоев, отнесенные к радиусу r_0 , при расчетах принимались следующие: $h_1=0,02$; $h_2=0,06$; $h_3=0,4$. Температура считалась осредненной по толщине пластины. Зависимость модулей упругости от температуры описывается известной линейной формулой Белла [4]. Кольцевая нагрузка принята постоянной относительной ширины $b-a=0,25$.

Графики на рис.2 позволяют анализировать сходимость метода упругих решений. Нагрузка $q_0=5$ МПа принималась распределенной по всей верхней поверхности пластины, температура – $T_2=323$ К: a – относительный сдвиг $\psi(r)$; b – прогиб пластины $w(r)$. Номер кривой совпадает с номером приближения. За искомое решение принято 5-е приближение, которое отличается от предыдущего примерно на 0,5%. Отличие от упругого решения составляет 19%.

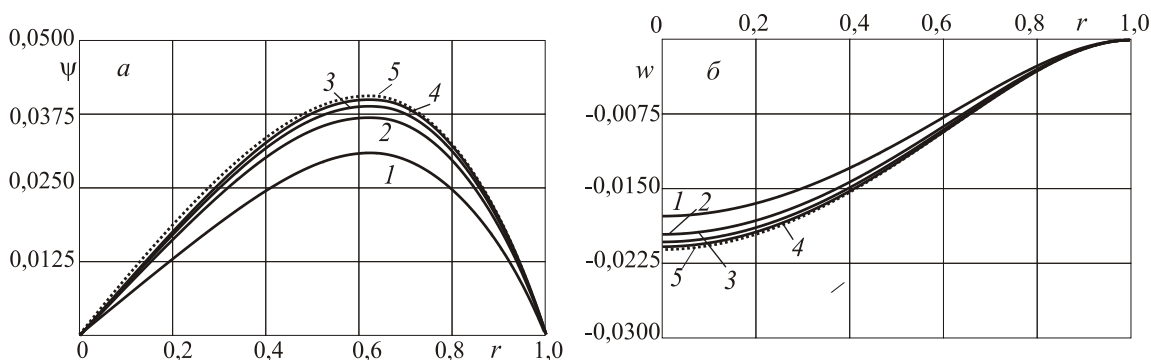


Рис.2. Сходимость метода упругих решений ($T_2 = 323$ К).

По рис.3 можно судить об изменении прогиба в центре пластины в зависимости от внутреннего радиуса кольца нагрузки (см. рис.1): 1, 2 – упругий и физически нелинейный прогиб при комнатной температуре $T_1 = 293$ К; 3, 4 – упругий и физически нелинейный прогиб при осредненной температуре $T_2 = 323$ К. Интенсивность распределенной нагрузки здесь $q_0 = 8$ МПа.

При внутреннем радиусе кольца $a=0$ нагрузка распределена по кругу радиуса b . Если $a=0,75$, то нагрузка примыкает к контуру пластины. Максимум прогиба достигает при кольцевой нагрузке, расположенной в средней части пластины ($a=0,25$).

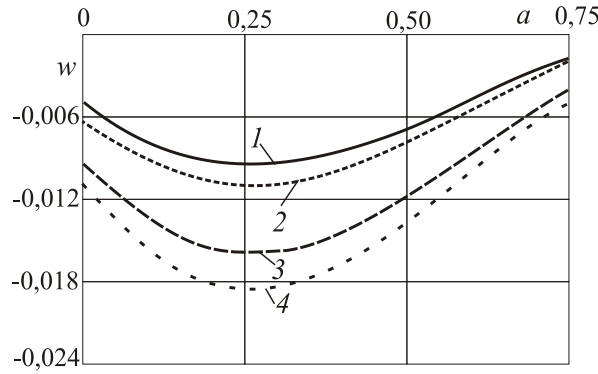


Рис.3. Упругий и физически нелинейный прогибы в центре пластины ($T_1 = 293$ К, $T_2 = 323$ К).

2. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ

Предположим, что с момента $t = t_1$, мгновенно происходит разгрузка и последующее нагружение пластины усилиями $q''(r)$

$$q''(r) = -q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)). \quad (22)$$

При этом считаем, что в течение этого процесса температура T_1 во всех точках пластины остается неизменной, равной температуре при начале разгрузки, т.е. $T_1(z) = T(z, t_1)$.

Эта нагрузка создаст в рассматриваемой трехслойной пластине перемещения u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_\alpha^{n(k)}$ и напряжения $\sigma_\alpha^{n(k)}$, $\sigma_{rz}^{n(3)}$ ($\alpha = r, \varphi$). Следуя теории Москвитина [33], введем для напряжений, деформаций, перемещений и нагрузок разности

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^{(k)*} &= \sigma_\alpha^{r(k)} - \sigma_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)*} = \sigma_{rz}^{r(3)} - \sigma_{rz}^{n(3)}, \\ s_\alpha^{(k)*} &= s_\alpha^{r(k)} - s_\alpha^{n(k)}, \quad \sigma^{(k)*} = \sigma^{r(k)} - \sigma^{n(k)}, \\ \varepsilon_\alpha^{n(k)} &= \varepsilon_\alpha^{r(k)} - \varepsilon_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon_{rz}^{n(3)} = \varepsilon_{rz}^{r(3)} - \varepsilon_{rz}^{(3)*}, \\ \vartheta_\alpha^{n(k)} &= \vartheta_\alpha^{r(k)} - \vartheta_\alpha^{(k)*}, \quad \varepsilon^{n(k)} = \varepsilon^{r(k)} - \varepsilon^{(k)*}, \\ \psi'' &= \psi' - \psi^*, \quad u'' = u' - u^*, \quad w'' = w' - w^*, \\ q^*(r) &= q(r) - q''(r) = 2q_0 (H_0(b-r) - H_0(a-r)), \end{aligned} \quad (23)$$

где одним штрихом помечены параметры НДС пластины перед разгрузкой, двумя штрихами – аналогичные величины при повторном нагружении.

Перемещения и деформации со звездочками (23) в несущих слоях будут связаны соотношениями Коши. Физические уравнения состояния для напряжений и деформаций, отмеченных звездочками, принимаются типа (5)

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)*} &= 2G_k (1 - \omega_k^*) \vartheta_\alpha^{(k)*}, \quad \sigma^{(k)*} = 3K_k \varepsilon^{(k)*}, \\ s_{rz}^{(3)*} &= 2G_3 (1 - \omega_k^*) \vartheta_{rz}^{(3)*} \quad (k = 1, 2, 3; \alpha = r, \varphi), \end{aligned} \quad (24)$$

где $G_k(z) = G_k(T_1(z))$, $K_k(z) = K_k(T_1(z))$ – значения модулей упругости, зафиксированные в момент разгрузки.

В отличие от уравнений состояния (5), температура в соотношения (24) в явном виде не входит. Материал заполнителя принят нелинейно упругим, поэтому его нелинейные параметры при циклическом деформировании не изменяются.

Следуя методике Москвитина [33], полагаем, что универсальные функции нелинейности со звездочками, введенные в (24) подобны функциям пластичности при нагружении на первом цикле (6)

$$\omega^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)*}, T_1) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_{y1}^{(k)*}, \\ A_1^* \left(1 - \frac{\varepsilon_{y1}^{(k)*}}{\varepsilon_u^{(k)*}}\right)^{\alpha_1^*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_{y1}^{(k)*}, \end{cases} \quad (25)$$

где для дюралюминия $A_1^* = 0,924$; $\alpha_1^* = 2,27$; $\varepsilon_{y1}^{(k)*} = \beta_1 \varepsilon_{y1}(T_1)$; $\beta_1 = 2,02$ [4].

Проведя операцию вывода уравнений равновесия для величин со звездочками получим систему дифференциальных уравнений, совпадающую по виду с (11). Для ее решения применим метод упругих решений. Соответствующие итерационные уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u^{(n)*} + a_2 \psi^{(n)*} - a_3 w_{,r}^{(n)*}) &= +p_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_2(a_2 u^{(n)*} + a_4 \psi^{(n)*} - a_5 w_{,r}^{(n)*}) - 2cG_3 \psi^{(n)*} &= h_{\omega}^{(n-1)*}, \\ L_3(a_3 u^{(n)*} + a_5 \psi^{(n)*} - a_6 w_{,r}^{(n)*}) &= -q^{(n)*} + q_{\omega}^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (26)$$

Дополнительные «внешние» нагрузки $p_{\omega}^{(n-1)*}$, $h_{\omega}^{(n-1)*}$, $q_{\omega}^{(n-1)*}$ в (26), на первом шаге ($n=1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (12)

$$\begin{aligned} p_{\omega}^{(n-1)*} &= T_{r\omega}^{(n-1)*},r + \frac{1}{r}(T_{r\omega}^{(n-1)*} - T_{\phi\omega}^{(n-1)*}), \\ h_{\omega}^{(n-1)*} &= H_{r\omega}^{(n-1)*},r + \frac{1}{r}(H_{r\omega}^{(n-1)*} - H_{\phi\omega}^{(n-1)*}) - Q_{\omega}^{(n-1)*}, \\ q_{\omega}^{(n-1)*} &= M_{r\omega}^{(n-1)*},rr + \frac{1}{r}(2M_{r\omega}^{(n-1)*},r - M_{\phi\omega}^{(n-1)*},r), \\ T_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)*} dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)*}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)*} dz, \\ M_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &\equiv \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha\omega}^{(k,n-1)*} z dz = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(k,n-1)*}, T_k) \vartheta_{\alpha}^{(k,n-1)*} z dz, \\ H_{\alpha\omega}^{(n-1)*} &= M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)*} + c(T_{\alpha\omega}^{(1,n-1)*} - T_{\alpha\omega}^{(2,n-1)*}), \\ Q_{\omega}^{(n-1)*} &= \int_{-c}^c 2G_k \omega_k(\varepsilon_{\alpha}^{(3,n-1)*}, T^{(k)}) \vartheta_{rz}^{(3,n-1)*} dz \quad (\alpha = r, \phi). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь внутренние обобщенные усилия со звездочками отличаются от (14) отсутствием температуры.

Краевая задача для определения функций $u^{(n)*}(r)$, $\psi^{(n)*}(r)$, $w^{(n)*}(r)$ замыкается присоединением к системе уравнений (26) с учетом (27) силовых или кинематических граничных условий, типа (15).

В этом случае полученная краевая задача для величин со звездочками $u^{(n)*}$, $\psi^{(n)*}$, $w^{(n)*}$ совпадает с краевой задачей для некоторой фиктивной трехслойной упругопластической пластины, которая испытывает изотермическое нагружение из естественного состояния внешними усилиями q^* . Фиктивная пластина геометрически совпадает с рассматриваемой. Ее упругопластические свойства материалов характеризуются переменными по координатам модулем сдвига $G_k(z)$, объемным модулем $K_k(z)$, универсальными функциями нелинейности (25). Система дифференциальных уравнений для величин со звездочками (26) с точностью до обозначений совпадает с (13) и отличается только отсутствием температурных слагаемых в (8), (9). Аналитическое решение этой краевой задачи можно получить из решения (16), в котором необходимо формально заменить нагрузку и функции нелинейности на соответствующие величины со звездочками

$$\begin{aligned}\psi^{(n)*} &= C_2^{(n)*} I_1(\beta r) + C_3^{(n)*} K_1(\beta r) + \psi_r^{(n)*}, \\ w^{(n)*} &= \frac{1}{b_3} \left[b_2 \int \psi^{(n)*} dr + \int \left(\frac{a_3}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + L_3^{-1}(q^* - q_\omega^{(n-1)*}) \right) dr - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_1^{(n)*}}{4} r^2 (\ln r - 1) + \frac{C_5^{(n)*} r^2}{4} \right] + C_6^{(n)*} \ln r + C_4^{(n)*}, \\ u^{(n)*} &= \frac{a_3}{a_1} w^{(n)*}, \quad \psi_r^{(n)*} = \frac{a_2}{a_1} \psi^{(n)*} + \frac{1}{a_1} L_2^{-1}(p_\omega^{(n-1)*}) + \frac{C_7^{(n)*} r}{2} + \frac{C_8^{(n)*}}{r},\end{aligned}\tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}\psi_r^{(n)*} &= \frac{2\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \left[\frac{b^2}{r} - r + 2b(K_1(\beta b)I_1(\beta r) - I_1(\beta b)K_1(\beta r)) \right] + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2 r} - \\ &\quad - K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] + \\ &\quad + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right], \\ \int L_3^{-1}(q^*) dr &= 2q_0 \left(\frac{r^4 - 5b^4}{64} - \frac{b^4}{16} \ln\left(\frac{r}{b}\right) - \frac{b^2 r^2}{8} \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{b^2 r^2}{16} \right) H_0(b-r), \\ \int \psi^{(n)*} dr &= \frac{C_2^{(n)*} I_0(\beta r)}{\beta} - \frac{C_3^{(n)*} K_0(\beta r)}{\beta} + \frac{C_1^{(n)*} \gamma_1}{\beta^2} \ln(r) + \frac{2\gamma_1 q_0}{2\beta^2} H_0(b-r) \times \\ &\quad \times \left[\frac{b^2 - r^2}{2} + b^2 \ln\left(\frac{r}{b}\right) + \frac{2b}{\beta} (K_1(\beta b)I_0(\beta r) + I_1(\beta b)K_0(\beta r)) - \frac{2}{\beta^2} \right] - \\ &\quad - \int \left[K_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int I_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int I_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\gamma_1 \int I_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \Big] + \\
 & + I_1(\beta r) \left[\frac{b_3}{b_1 b_3 - b_2^2} \left[\int K_1(\beta r) h_\omega^{(n-1)*} r dr - \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3} \int K_1(\beta r) p_\omega^{(n-1)*} r dr \right] - \right. \\
 & \left. - \gamma_1 \int K_1(\beta r) \left(\int q_\omega^{(n-1)*} r dr \right) dr \right] dr.
 \end{aligned}$$

$C_1^{(n)*} - C_8^{(n)*}$ – константы интегрирования, которые вычисляются по формулам типа (19)-(21) после формального введения в верхний индекс дополнительных нагрузок звездочки, удаления в $C_5^{(n)*}$ температуры и замены q_0 на $2q_0$.

После этого искомые параметры напряженно-деформированного состояния рассматриваемой пластины на втором полуцикле нагружении следуют из соотношений (23) с учетом решений (16), (28), например

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^*.$$

Рис.4 иллюстрирует прогиб – a и относительный сдвиг – b при циклическом изгибе пластины круговой нагрузкой ($a = 0,25, b = 0,75, q_0 = 8$ МПа): 1 – упругая пластина, 2 – изотермическая упругопластичность ($T_1 = 293$ К), 3 – термоупругопластичность ($T_2 = 323$ К). Один штрих – прямая нагрузка, два штриха – обратная.

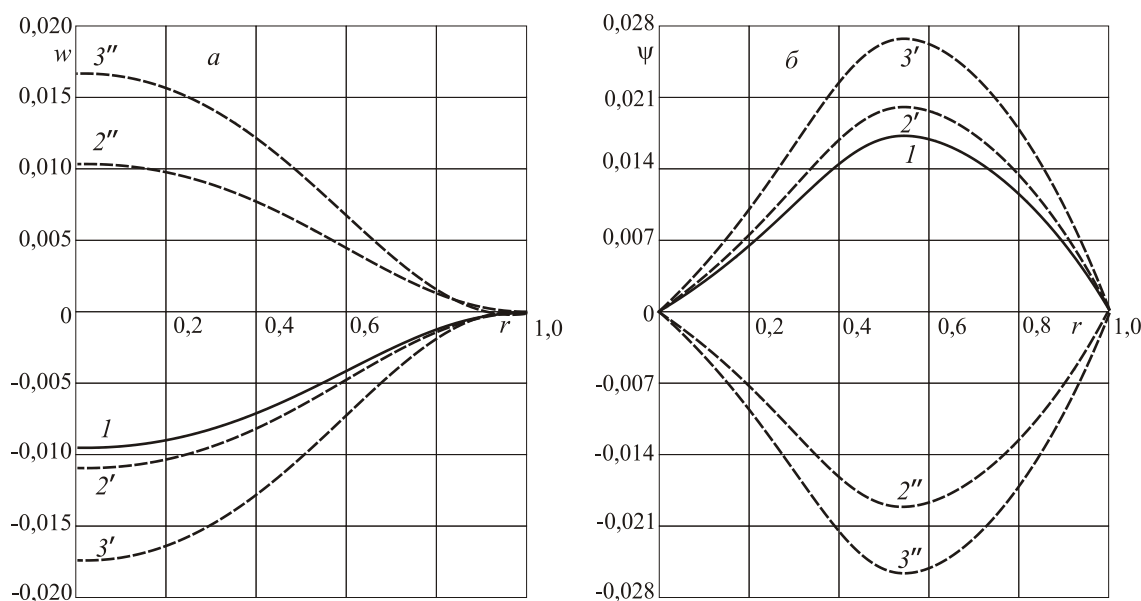


Рис.4. Перемещения в пластине при циклическом термосиловом нагружении.

После перемены знака нагрузки максимальная величина перемещений несколько уменьшилась ($3''$) на 3%, как при «холодной», так и при «горячей» пластичности. Это явление объясняется циклическим упрочнением материалов несущих слоев.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная методика и полученное общее решение краевой задачи позволяют исследовать НДС упругопластических трехслойных круговых пластин при прямых и знакопеременных локальных нагрузках в температурном поле.

Численные результаты подтвердили сходимость метода упругих решений, существенное влияние физической нелинейности материалов слоев и температуры на НДС в пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. – Singapore-London: World Scientific Publishing, 2015. – 376 p.
3. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н. *Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
4. Журавков М.А., Старовойтов Э.И. *Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности*. – Минск: БГУ, 2011. – 540 с.
5. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. – Academic Press, 2016. – 410 p.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates // Composite Structures*. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
7. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
8. Паймушин В.Н. *Нелинейная теория трехслойных оболочек с трансверсально-мягким наполнителем, имеющих участки расслоений и контурную подкрепляющую диафрагму // Прикладная математика и механика*. – 2018. – Т.82. – №1. – С.44-57.
9. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Гармонические колебания трехслойной цилиндрической вязкоупругопластической оболочки // Прикладная механика*. – 2001. – Т.37. – №9. – С.100-107.
10. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology*. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii journal of mathematics*. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
12. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
13. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Яровая А.В. *Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок // Проблемы прочности*. – 2002. – Т.34. – №5. – С.70-79.
14. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.

15. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
16. Джагангиров А.А. *Несущая способность трехслойной волокнистой композитной кольцевой пластинки, заземленной по кромкам* // Механика композитных материалов. – 2016. – Т.52. – №2. – С.385-398.
17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
18. Belinha J., Dints L.M. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method* // Composite Structures. – 2007. – Vol.78. – No.3. – Pp.337-350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels* // Materials Sciences and Applications. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates* // AIAA Journal. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
21. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates* // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2009. – Vol.12. – No.1. – Pp.7-46.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part II: The Homogenized Love–Kirchhoff Model* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2008. – Vol.56. – No.2. – Pp.561-580.
24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method* // Applied Mathematical Modeling. – 2012. – Vol.36. – No.11. – Pp.5657-5677.
25. Старовойтов Э.И. *Термосиловое нагружение трехслойных пологих оболочек* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – №5. – С.114-119.
26. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
27. Захарчук Ю.В. *Перемещения в круговой трехслойной пластине со сжимаемым наполнителем* // Механика. Исследования и инновации. – 2017. – №10. – С.55-66.
28. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.58-73.
29. Козел А.Г. *Деформирование круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Теоретическая и прикладная механика. – 2017. – №32. – С.235-240.
30. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.2. – №3. – С.392-406.

31. Нестерович А.В. *Радиальное и тангенциальное неосесимметричное нагружение круговой трехслойной пластины* // Механика. Исследования и инновации. – 2020. – №13. – С.116-121.
32. Старовойтов Э.И., Нестерович А.В. *Неосесимметричное деформирование свободно опертой трехслойной пластины в своей плоскости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №1. – С.17-30.
33. Москвитин В.В. *Циклическое нагружение элементов конструкций*. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
34. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации*. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Aghalovyan L. *Asymptotic theory of anisotropic plates and shells*. Singapore-London, World Scientific Publ., 2015, 376 p.
3. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Rabinsky L.N. *Deformirovanie trekh-slojnykh fizicheski nelinejnykh sterzhnej [Deformation of three-layer physically nonlinear bars]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2016, 184 p.
4. Zhuravkov M.A., Starovoitov E.I. *Mekhanika sploshnykh sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Continuum mechanics. The theory of elasticity and plasticity]*. Minsk, Belorusskij gosudarstvennyj universitet, 2011, 540 p.
5. Carrera E., Fazzolari F.A., Cinefra M. *Thermal Stress Analysis of Composite Beams, Plates and Shells: Computational Modelling and Applications*. Academic Press, 2016, 410 p.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
7. Paimushin V.N., Ivanov V.I., Khusainov V.R. *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebanij trekh-slojnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Study of free and eigen vibrations of a three-layer plate on the bases of equations of a refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
8. Paimushin V.N. *Nonlinear theory of sandwich shells with a transversely soft core containing delamination zones and edge support diaphragm*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.S(1), Pp.76-87.
9. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Harmonic Vibrations of a Viscoelastoplastic Sandwich Cylindrical Shell*. International applied mechanics, 2001, Vol.37, No.9, Pp.1196-1203.
10. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky, D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam*. Lobachevskii journal of mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.
12. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.

13. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of distributed local loads*. Strength of Materials, 2002, Vol.34, No.5, Pp.474-481.
14. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslonnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
15. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniya trekhslonnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
16. Dzhagangirov A.A. *Load-Carrying Capacity of a Fiber-Reinforced Annular Tree-Layer Composite Plate Clamped on its External and Internal Contours*. Mechanics of composite materials, 2016, Vol.52, No.2, Pp.271-280.
17. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
18. Belinha J., Dints L.M.J.S. *Nonlinear Analysis of Plates and Laminates Using the Element Free Galerkin Method*. Composite Structures, 2007, Vol.78, No.3, Pp.337-350.
19. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. Materials Sciences and Applications, 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
20. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. AIAA Journal, 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
21. Zenkour, A.M., Alghamdi N.A. *Thermomechanical bending response of functionally graded nonsymmetric sandwich plates*. Journal of Sandwich Structures and Materials, 2009, Vol.12, No1, Pp.7-46.
22. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
23. Julien D., Karam S. *Limit analysis of multi-layered plates. Part I: The homogenized Love–Kirchhoff*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, Vol.56, No.2, Pp.561-580.
24. Thai C.H., Tran L.V., Tran D.T., Nguyen-Thoi T., Nguyen-Xuan U. *Analysis of laminated composite plates using higherorder shear deformation plate theory and mode-based smoother discrete shear gap method*. Applied Mathematical Modelling, 2012, Vol.36, No.11, Pp.5657-5677.
25. Starovoitov E.I. *Termosilovoe nagruzhenie trekhslonnykh pologikh obolochek [Thermal force loading of three-layer flat shells]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1989, No.5, Pp.114-119.
26. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslonnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
27. Zakharchuk Yu.V. *Peremeshheniya v krugovoj trekhslonnoj plastine so szhimaemym zapolnitelem [Movements in a circular three-layer plate with a compressible filler]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovacii, 2017, No.10, Pp.55-66.

28. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izgib uprugoplasticheskoj krugovoj trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.58-73.
29. Kozel A.G. *Deformirovanie krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [Deformation of a circular three-layer plate on the Pasternak foundation]*. Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika, 2017, No.32, Pp.235-240.
30. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.392-406.
31. Nesterovich A.V. *Radial'noe i tangentsial'noe neosesimmetrichnoe nagruzhenie krugovoj trekhslojnoj plastiny [Radial and tangential non-axisymmetric loading of a circular three-layer plate]*. Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii, 2020, No.13, Pp.116-121.
32. Starovoitov E.I., Nesterovich A.V. *Neosesimmetrichnoe deformirovanie svobodno opertoj trekhslojnoj plastiny v svoej ploskosti [Non-axisymmetric deformation of a freely supported three-layer plate in its plane]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2021, Vol.27, No.1, Pp.17-30.
33. Moskvitin V.V. *Tsiklichesкое nagruzhenie ehlementov konstruksij [Cyclic Loading of Elements of Designs]*. Moskva, Nauka, 1981, 344 p.
34. Il'jushin A.A. *Plastichnost'. Chast' I. Uprugoplasticheskie deformatsii [Plastic. Part I. Elastic-Plastic Deformation]*. Moskva, Gostekhizdat, 1948, 376 p.

Поступила в редакцию 18 июля 2022 года.

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф. «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: edstar0@yandex.by

Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф. каф. «Строительная механика» Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: leoden@tut.by

Абдусаттаров Абдусамат – д.т.н., проф., проф. каф. «Прикладная механика», Ташкентский государственный транспортный университет, г. Ташкент, Узбекистан; e-mail: abdusattarov4646@gmail.com