

УДК 539.4
EDN WQRAAQ (<https://elibrary.ru/wqraaq>)



УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Сформулирована связанная начально-краевая задача неизотермического упругопластического деформирования гибких армированных пластин при использовании уточненной теории изгиба. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Температура конструкций по толщине аппроксимируется полиномами высоких порядков. Решение поставленной нелинейной двумерной задачи строится на базе явной численной схемы. Исследовано термоупругопластическое деформирование плоско-перекрестно и пространственно армированных металлокомпозитных и стеклопластиковых пластин, динамически изгибаемых под действием воздушной взрывной волны. Показано: для адекватного расчета температуры в тонкостенных конструкциях ее нужно аппроксимировать полиномами 7-го порядка по толщине; для адекватного определения деформированного состояния компонентов композиции необходимо использовать уточненную теорию изгиба пластин, простейшим вариантом которой является теория Амбарцумяна. Для стеклопластиковых пластин приращение температуры при их динамическом изгибе составляет 3-18°C, а для металлокомпозитных пластин 30-35°C. Поэтому динамический упругопластический расчет стеклопластиковых конструкций при нагрузках взрывного типа можно проводить без учета тепловыделения в них. При аналогичных расчетах металлокомпозитных пластин можно не учитывать термочувствительность материалов композиции, но необходимо учитывать тепловое воздействие.

Ключевые слова: гибкие пластины; плоское многонаправленное армирование; пространственное многонаправленное армирование; динамический изгиб; уточненная теория изгиба; термоупругопластическое деформирование; явная численная схема

REFINED MODEL OF THERMO-ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES

Yankovskii A.P.

Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia

ABSTRACT

A coupled initial-boundary value problem of non-isothermal elastoplastic deformation of flexible reinforced plates is formulated using the refined theory of bending. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The temperature of structures over the thickness is approximated by high-order polynomials. An explicit

* Работа выполнена в рамках государственного задания (№ гос.регистрации 121030900260-6).

numerical scheme is used to solve the formulated nonlinear two-dimensional problem. Thermo-elastoplastic deformation of plane-cross and spatially reinforced metal-composite and fiberglass plates dynamically bent under the action of an air blast wave has been studied. It is shown that in order to adequately calculate the temperature in thin-walled structures, it must be approximated by polynomials of the 7th order in thickness; to adequately determine the strain of the composition components, it is necessary to use the refined theory of plate bending, the simplest version of which is the Ambartsumian theory. For fiberglass plates, the temperature increment during their dynamic bending is 3-18°C, and for metal-composite plates 30-35°C. Therefore, the dynamic elastic-plastic calculation of fiberglass structures under explosive loads can be carried out without taking into account the heat release in them. In similar calculations of metal-composite plates, the thermal sensitivity of the composition materials can be ignored, but the thermal effect must be taken into account.

Keywords: flexible plates; planar multidirectional reinforcement; spatial multidirectional reinforcement; dynamic bending; refined theory of bending; thermo-elastic-plastic deformation; explicit numerical scheme

ВВЕДЕНИЕ

Конструкции из композиционных материалов (КМ) все более активно используются в инженерной практике [1-20]. Изделия из таких материалов часто подвергаются высокоинтенсивному термосиловому нагружению [1,12-14,16,20], при котором материалы компонентов композиции могут деформироваться пластически [13,14,16,21-23], поэтому проблема моделирования неизотермического упругопластического деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций является актуальной и на данный момент времени находится в стадии становления [8,15,22-26]. В работе [25] предложена структурная модель термомеханического поведения многонаправленно армированной среды, компоненты композиции которой деформируются упругопластически. Эта структурная модель была использована в [26] для расчета неизотермического неупругого деформирования динамически изгибаемых КМ-пластин.

Для учета слабого сопротивления тонкостенных элементов КМ-конструкций поперечному сдвигу традиционно используют неклассические теории Рейсснера [1,10,13,16,27], Амбарцумяна [2,26] или Редди-Немировского [3,6,12], реже применяются более точные теории [10,11,13], использующие, как правило, гипотезу ломаной линии.

В работе [26] было показано, что для адекватного расчета температурного поля в динамически изгибаемой КМ-пластине температуру по ее толщине необходимо аппроксимировать полиномами 6-7 порядка. Для описания же механического поведения КМ-пластины в [26] использовалась одна из простейших неклассических теорий – теория Амбарцумяна [2].

Известно, что при кратковременном интенсивном нагружении конструкции основным источником тепловыделения является механическая диссипация энергии, зависящая от уровня напряжений и скоростей деформаций [28,29], которые в тонкостенных элементах конструкций могут быть аппроксимированы по толщине с разной степенью точности [1-3,6,10-13,16,27,30], поэтому в [26] остался открытым вопрос: достаточно ли использовать для расчета термоупругопластического динамического изгиба КМ-пластин теорию Амбарцумяна или следует применять более точные теории деформирования тонкостенных элементов КМ-конструкций [10,11,13,30].

В связи с вышеизложенным данная работа посвящена моделированию неізотермического динамического поведения упругопластически деформируемых армированных пластин в рамках уточненной теории изгиба [30]. Численное решение связанной термомеханической нелинейной задачи строится с использованием явных методов шагов по времени [13,26,28,30].

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассматривается гибкая КМ-пластина толщиной $2h$ (рис.1) в декартовой прямоугольной системе координат x_i такой, что плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) – срединная ($|x_3| \leq h$). Конструкция армирована плоско-перекрестно или пространственно K семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). В поперечном направлении x_3 структура армирования однородна. На рис.1а изображена ортогональная структура армирования в двух ($K = 2$) направлениях [31,32], а на рис.1б – пространственная структура армирования в четырех ($K = 4$) направлениях [32].

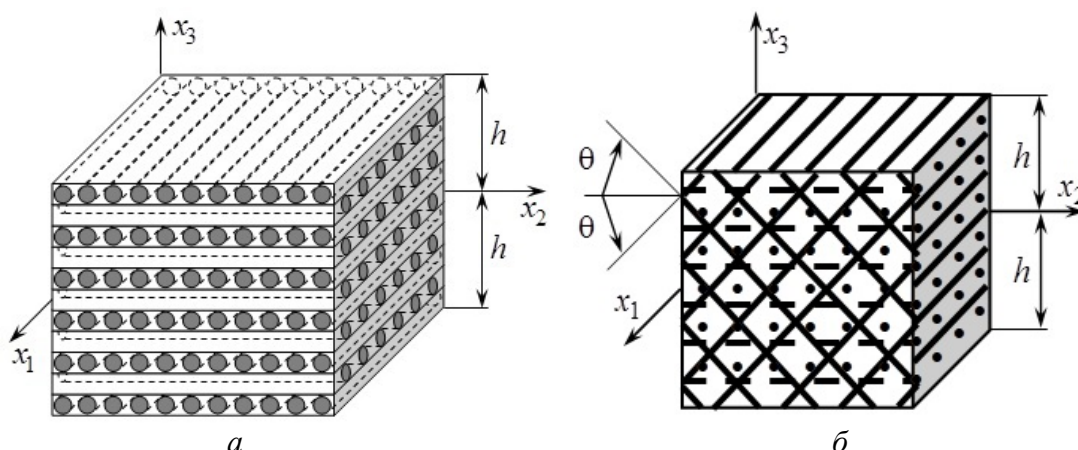


Рис.1. Элемент КМ-пластины: а) плоское ортогональное армирование; б) пространственное армирование в четырех направлениях.

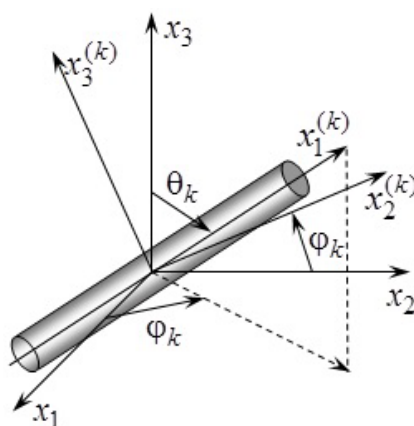


Рис.2. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства.

С каждым k -м семейством волокон связана локальная прямоугольная система координат $x_i^{(k)}$. При этом ось $x_1^{(k)}$ направлена вдоль траектории

армирования и задана углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис.2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1, 3}, 1 \leq k \leq K$) определяются по формулам (41) из [25].

Предполагаем, что касательные внешние силы на лицевых плоскостях конструкции отсутствуют, а структура пространственного армирования удовлетворяет требованиям, изложенным в замечании в [26]. (В частности, для структуры, изображенной на рис.1б, эти условия выполняются.) Тогда согласно результатам работы [30], осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек пластины U_i в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем соотношениями (при этом геометрическую нелинейность задачи учитываем в приближении Кармана)

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}),$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3),$$

где w – прогиб; u_i – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в направлениях x_i ; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по x_i ($i = 1, 2$); Ω – область, занимаемая конструкцией в плане. При $M = 0$ из равенств (1), (2) получаем кинематические соотношения теорий Амбарцумяна [2,26] и Редди – Немировского [3,6,12]. Неизвестными в (1) и (2) являются функции $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

В настоящем исследовании рассматривается поведение КМ-пластины как гибкой тонкостенной механической системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать по толщине конструкции так [1]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостях, известные из силовых граничных условий.

К соотношениям (1)-(3) необходимо присоединить двумерные уравнения движения гибкой пластины (см. (10) и (11) в [30]) и определяющие уравнения, связывающие скорости усредненных напряжений в композиции $\dot{\sigma}_{ij}$ со скоростями деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ и температурой Θ . Согласно результатам работы [25],

в фиксированный момент времени t эти соотношения можно записать в матричном виде

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad (4)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv (\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12})^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv (\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\varepsilon}_{12})^T; \quad (5)$$

6×6 -матрица \mathbf{B} и шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p} определяются матричными равенствами (38) в [25], их элементы зависят от структуры армирования (углов θ_k, φ_k и плотностей ω_k армирования), характеристик материалов компонентов композиции и их текущего термомеханического состояния; точка – производная по t ; индекс T – операция транспонирования.

Согласно соотношениям (5), из третьего уравнения системы (4) можно выразить скорость линейной деформации в поперечном направлении

$$\dot{\varepsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\varepsilon}_{11} - b_{32}\dot{\varepsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\varepsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\varepsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\varepsilon}_{12}), \quad (6)$$

где b_{3i}, p_3 ($i = \overline{1,6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектора-столбца \mathbf{p} в (4); производная $\dot{\varepsilon}_{33}$ определяется путем дифференцирования по времени выражения (3). Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в правой части равенства (6) получаются после дифференцирования по t соотношений (1), т.е. выражаются через двумерные функции w, \dot{w}, \dot{u}_i и $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

Как и в [26], температура Θ по толщине пластины аппроксимируется полиномом L -го порядка

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния конструкции; Θ_l ($0 \leq l \leq L$) – искомые двумерные функции.

Чтобы замкнуть систему разрешающих уравнений неизотермического упругопластического деформирования КМ-пластины, к соотношениям (1)-(7) нужно добавить двумерные уравнения теплового баланса (см. (63) в [26]), необходимые механические (см. (22), (24) в [30]) и тепловые (см. (61) и (70) в [26]) граничные условия, а также начальные условия в момент времени t_0 (см. (20), (25) в [30] и (72) в [26]).

Для интегрирования нелинейной рассматриваемой задачи используем явные пошаговые численные схемы, определяя решения в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$). В связи с этим считаем, что при $t = t_m$ уже известны значения следующих функций [26,30]

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(p)m}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \\ \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad U^{(r)m}(\mathbf{x}) \equiv U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i^n(\mathbf{r}) \equiv q_i(t_n, \mathbf{r}), \\ \Theta_s^m(\mathbf{x}) &\equiv \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s^{n-1}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \quad q_\infty^{(\pm)n}(\mathbf{x}) \equiv q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \\ \sigma_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)m}(\mathbf{r}) \equiv \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\ l &= 1, 2, \quad i, j = \overline{1,3}, \quad m = n-1, n, \quad 0 \leq p \leq M+1, \quad 0 \leq r \leq L-2, \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad |x_3| \leq h,$$

где

$$u_l^{(p)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_l(t, \mathbf{r}) x_3^p dx_3, \quad U^{(r)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U(t, \mathbf{r}) x_3^r dx_3, \quad (9)$$

$$l = 1, 2, \quad 0 \leq p \leq M + 1, \quad 0 \leq r \leq L - 2;$$

U – удельная внутренняя энергия КМ; $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ – напряжения и деформации в k -м компоненте композиции ($k = 0$ – связующее, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); $\chi^{(k)}$ – параметр Одквиста в том же материале; q_i – компоненты теплового потока в КМ; $q_\infty^{(\pm)}$ – заданные тепловые потоки через верхнюю (+) и нижнюю (–) лицевые поверхности. Неизвестные функции $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$) в (1) и (2) однозначно выражаются через кинематические переменные $u_i^{(p)}$ (см. (9)) с помощью матричного соотношения (30) в [30].

Производные по времени в механической составляющей исследуемой связанной термоупругопластической задачи аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную численную схему. Заменяя вторые производные по времени от кинематических переменных w и $u_i^{(p)}$ в двумерных уравнениях движения гибкой КМ-пластины их конечно-разностными аналогами и учитывая (2), (3), (9) и обозначения, аналогичные (8), получим [30]

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n, \\ \mathbf{x} \in \Omega, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &\equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &\equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 - (-1)^l \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l}{l+1} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 + (-1)^l \right) \right], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \end{aligned} \quad (11)$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности связующего и арматуры k -го семейства; $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени t . Массовые нагрузки в уравнениях (10) не учитываются. Усредненные напряжения в композиции σ_{ij} в соотношениях (11) выражаются через напряжения в компонентах композиции $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = \overline{1, 3}, 0 \leq k \leq K$) по структурным формулам, полученным в [25].

Используя (11) и предположения (8), в данный момент времени t_n можно вычислить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$ и внешние нагрузки $\sigma_{33}^{(\pm)}$, входящие в правые части равенств (10). Следовательно, при учете соответствующих граничных условий [30] из уравнений (10) можно вычислить по явной схеме значения неизвестных функций w^{n+1} и u_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} .

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой задачи также используем явную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. Тогда двумерные уравнения теплового баланса при учете (7), (9) и обозначений, аналогичных (8), примут вид [26]

$$\frac{\rho}{\tau} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) = -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$-\sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)} (\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}),$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_\infty^{(+)} - \Theta^0) - q_\infty^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad (13)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0;$$

$$C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j +$$

$$+ \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (14)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$H(s) \equiv \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1,3}),$$

$$\bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m-1)}(t, \mathbf{x}), \quad (15)$$

$$W^{(m)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2),$$

$$\lambda_{33}^{(\pm)} \equiv \lambda_{33} |_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} \equiv q_\infty^{(\pm)};$$

λ_{33} – коэффициент теплопроводности композиции в направлении x_3 (вычисляется по структурным формулам из [33]); $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициент теплоотдачи со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевых плоскостей; $\Theta_\infty^{(\pm)}$ – температуры окружающей среды со стороны тех же поверхностей; $c_l^{(k)}$ – коэффициент разложения удельной теплоемкости k -го компонента композиции $c_k (\Theta - \Theta^0)$ по формуле (в случае учета термочувствительности)

$$c_k (\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)} (\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)} (\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K. \quad (16)$$

Равенства (13) – это тепловые граничные условия общего вида, заданные на лицевых плоскостях КМ-пластины и преобразованные с учетом разложения (7). Равенство (14) задает связь между двумерными величинами $U^{(m)}$ (см. (9)) и коэффициентами разложения температуры (7) в предположении выполнения соотношений (16). Равенства (13) и (14) справедливы в любой момент времени.

На основании формул (15) при учете предположений (8) в текущий момент времени t_n можно вычислить правые части в (12), а затем по явной схеме при учете соответствующих граничных (заданных на контуре Γ , ограничивающем область Ω) и начальных условий [26] определяем значения функций $U^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Далее, рассматривая при $t = t_{n+1}$ уравнения (13) и (14) (в которых правые части уже известны) с учетом (15), определяем коэффициенты разложения температуры $\Theta_l^{(n+1)}(\mathbf{x})$ ($0 \leq l \leq L$) в формуле (7). В случае учета термочувствительности материалов композиции система (13) и (14) нелинейна. Для ее линеаризации можно использовать метод переменных теплофизических параметров, аналогичный методу переменных параметров упругости. В остальном разработанная численная схема (10) и (12) при учете соотношений (1), (6), (11), (15) и структурных формул, полученных в [25,33], реализуется так, как описано в [26,30].

В работе [26] показано, что шаг по времени τ в равенствах (10) и (12) необходимо выбирать, исходя из условия устойчивости Куранта [13].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Как и в [26], исследуем термоупругопластическое динамическое поведение изгибаемых пластин толщиной $2h = 2$ см. Область, занимаемая ими в плане, Ω : $|x_1| \leq a/2$, $|x_2| \leq b/2$, $a = 3b$. Кромки конструкций жестко закреплены: $w = 0$, $u_i^{(m)} = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $t \geq t_0$ (см. (9) и (10)). До начального момента времени $t_0 = 0$ пластины покоятся ($w = 0$, $u_i^{(m)} = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t = t_0$, $i = 1, 2$, $0 \leq m \leq M + 1$) при температуре естественного состояния ($\Theta = \Theta^0 = \text{const}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $|x_3| \leq h$, $t = t_0$). При $t = t_0$ конструкции нагружаются снизу давлением $p(t)$, порожденным воздушной взрывной волной [34]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (18)$$

t_{\max} – момент времени, когда $p(t)$ достигает наибольшего значения p_{\max} ;

t_{\min} – момент времени, при превышении которого можно пренебречь $p(t)$ по сравнению с p_{\max} (так, формула (18) справедлива при $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$).

На основании экспериментальных данных [34] в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс и $t_{\min} = 2$ мс.

Через лицевые поверхности ($x_3 = \pm h$) осуществляется конвективный теплообмен с окружающей средой ($q_\infty^{(\pm)} \equiv 0$) в условиях естественной конвекции ($\alpha^{(\pm)} = 30 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ [35]) при температуре воздуха, равной температуре естественного состояния конструкций: $\Theta_\infty^{(\pm)} = \Theta^0 = 20^\circ\text{C}$ (см. (13)). На торцевых поверхностях пластин заданы температурные граничные условия, причем температура конструкций поддерживается равной температуре их естественного состояния Θ^0 .

Пластины изготовлены из магниевых сплава ВТ65 [36] и армированы стальной проволокой марки У8А [31] (металлокомпозиция) или из эпоксисвязующего [37], усиленного стеклянными волокнами [31] (стеклопластик). Упругопластическое деформирование компонентов композиции при активном нагружении и постоянстве температуры Θ описывается билинейной диаграммой

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)} \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε – осевые напряжение и деформация; $E^{(k)} = E^{(k)}(\Theta)$, $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta)$ – модули Юнга и линейного упрочнения материала k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta)$ – предел текучести того же компонента при фиксированной температуре ($\Theta = \text{const}$). Физико-механические характеристики материалов композиций приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент линейного теплового расширения, а в скобках указана температура ($\Theta, ^\circ\text{C}$), при которой определено значение соответствующей характеристики. Зависимости всех физико-механических характеристик от температуры Θ в расчетах аппроксимировались линейно по данным, представленным в Таблице 1.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики материалов композиций [31,36,37]

Характеристика материала	Эпоксидная смола	Стеклянные волокна	Магниевый сплав ВТ65 (Mg)	Стальная проволока У8А
ρ , кг/м ³	1210,0 (20) 1208,0 (40)	2520,0 (20) 2519,6 (80)	1800,0 (20) 1796,2 (100)	7800,0 (20) 7791,8 (100)
E , ГПа	2,8 (20) 2,3 (40)	86,8 (20) 86,3 (80)	43,0 (20) 38,5 (100)	210,0 (20) 195,0 (100)
ν	0,33 (20) 0,333 (40)	0,25 (20) 0,254 (80)	0,330 (20) 0,334 (100)	0,3 (20) 0,305 (100)
σ_s , МПа	20 (20) 18 (40)	4500 (20) 4400 (80)	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
E_s , ГПа	1,114 (20) 0,783 (40)	6,230 (20) 5,168 (80)	0,379 (20) 0,367 (100)	6,973 (20) 5,014 (200)
λ , Вт/(м·К)	0,243 (20) 0,240 (40)	0,89 (20) 0,86 (80)	117,23 (20) 121,42 (100)	42,7 (20) 41,7 (100)
$\alpha \cdot 10^6$, К ⁻¹	68,1 (20) 70,3 (40)	2,5 (20) 2,6 (80)	20,9 (20) 22,6 (100)	12,3 (20) 13,2 (100)

$c, \text{кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$	1,54 (20)	0,800 (20)	1,032 (20)	0,485 (20)
	1,60 (40)	0,839 (80)	1,054 (100)	0,488 (100)

Для проведения расчетов по пространственным переменным x_1 и x_2 вводилась равномерная сетка $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/100$, а шаг по времени τ выбирался равным 0,25 мкс. Рассматривались относительно тонкие ($b = 1 \text{ м}$, $2h/b = 1/50$) и относительно толстые ($b = 20 \text{ см}$, $2h/b = 1/10$) КМ-пластины, для которых при указанном способе дискретизации задачи необходимые условия устойчивости разработанной явной численной схемы заведомо выполняются (см. (80) в [26]).

Структуры армирования КМ-пластин однородны: $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $\omega_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq K$ (см. (11) и рис.2). Рассматриваются две схемы армирования: 1) плоское ортогональное армирование (рис.1а), когда два ($K = 2$) семейства волокон уложены по направлениям x_1 и x_2 с плотностями армирования $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно; 2) пространственное армирование в четырех ($K = 4$) направлениях (рис.1б), когда два первых семейства волокон уложены по-прежнему в направлениях x_1 и x_2 , а третье и четвертое – наклонно в плоскости x_2x_3 по направлениям, которые задаются углами (см. рис.2): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (на рис.1б угол $\theta = \pi/4$). Во второй структуре плотности армирования таковы: $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,2$, $\omega_3 = \omega_4 = 0,05$. В обеих схемах армирования общий расход волокон одинаков.

В работе [26] были проведены расчеты для рассматриваемых конструкций при задании в (1) и (2) значения $M = 0$ (простейшая неклассическая аппроксимация кинематических переменных) и при варьировании значения $L \geq 2$ в разложении температуры (7) и было показано, что для адекватного определения температурных полей в динамически изгибаемых КМ-пластинах в соотношении (7) необходимо задавать $L = 6$ или $L = 7$.

Однако, как показано в [30], в случае изотермического динамического изгибного деформирования КМ-пластин для адекватного описания механического поведения таких тонкостенных элементов конструкций в соотношениях (1) и (2) следует принимать не $M = 0$ (теория Амбарцумяна [2]), а $M = 6$ или $M = 7$ (т.е. нужно использовать уточненную теорию изгиба).

Как отмечалось во Введении, в настоящем исследовании изучается влияние уточненных соотношений (1) и (2) (при $M = 7$) на расчетное термомеханическое поведение динамически изгибаемых КМ-пластин при упругопластическом деформировании их компонентов композиции.

На рис.3 изображены осцилляции максимальных значений температуры $\Theta_m(t; M, L) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M, L)$ в зависимости от времени t в металлокомпозитных пластинах разной относительной толщины при 2D-структуре армирования (см. рис.1а). Кривые на рис.3а рассчитаны для относительно тонкой конструкции при $p_{\max} = 10 \text{ МПа}$ (см. (17)), а на рис.3б – для относительно толстой КМ-пластины при $p_{\max} = 50 \text{ МПа}$. Кривые 1 и 2 на рис.3 рассчитаны по уточненной теории изгиба (при $M = 7$ в (1), (2)) и при простейшей аппроксимации температуры по толщине (при $L = 2$ в (7)) – кривые 1 – или при использовании

уточненного разложения (7) ($L=7$) – кривые 2. Сравнение поведения кривых 1 и 2 на рис.3, как и в случае использования теории изгиба Амбарцумяна [26], демонстрирует тот факт, что расчет зависимости $\Theta_m(t; M, L)$ при простейшей квадратичной аппроксимации температуры ($L=2$) лишь качественно (причем на рис.3а очень приближенно), но не количественно, позволяет рассчитать осцилляции наибольших значений Θ в рассматриваемых КМ-конструкциях.

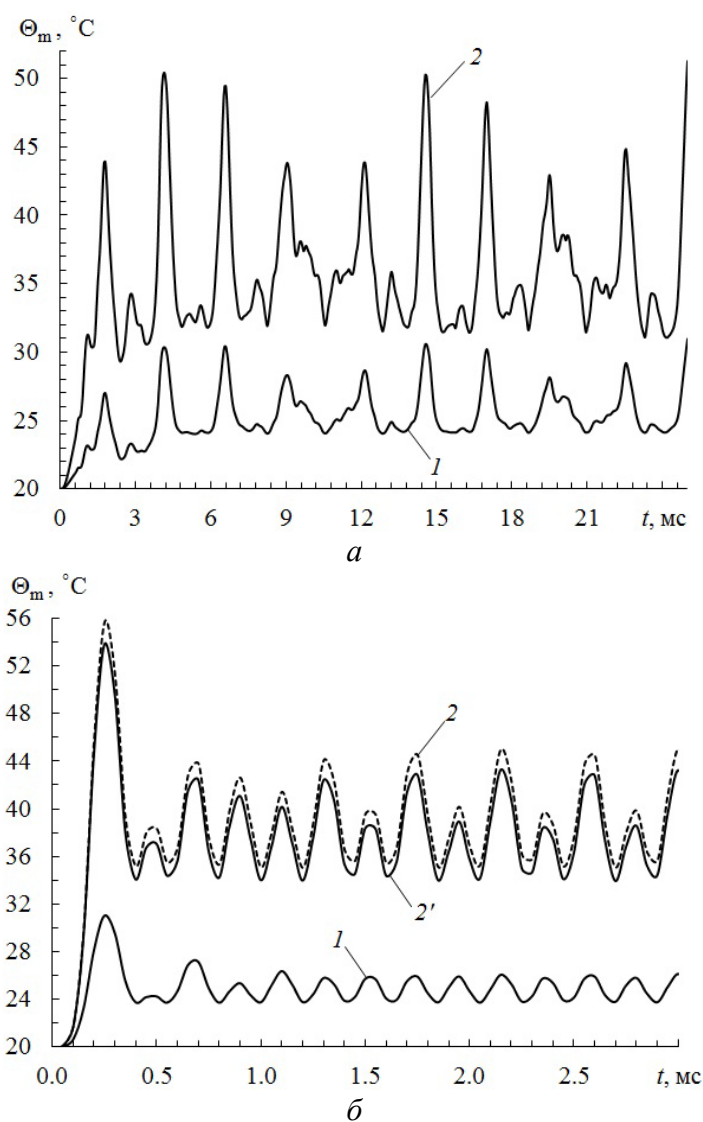


Рис.3. Зависимость от времени наибольшего значения температуры в относительно тонкой (а) и толстой (б) металлокомпозитных пластинах, рассчитанные с использованием разных аппроксимаций температурного поля и тангенциальных перемещений в поперечном направлении.

Кривая 2' на рис.3б приведена для сравнения и рассчитана по теории Амбарцумяна (при $M=0$ в (1) и (2)) при уточненной аппроксимации температуры (при $L=7$ в (7)). Сравнение кривых 2 и 2' на рис.3б показывает, что использование уточненной теории изгиба (при $M=7$) для относительно толстой металлокомпозитной пластины приводит к незначительному (примерно на 3°C) увеличению расчетного максимального значения температуры в конструкции по

сравнению с расчетом по теории Амбарцумяна. В других рассматриваемых КМ-конструкциях это различие максимальных расчетных значений температур, определенных с использованием теории Амбарцумяна или уточненной теории изгиба, еще меньше. Так, для относительно тонких как стеклопластиковых, так и металлокомпозитных пластин эта разность максимальных значений температур составляет менее 1°C, поэтому кривая 2' на рис.3а не изображена, так как визуально она практически не отличается от кривой 2. Для относительно толстых же стеклопластиковых конструкций эта разность температур составляет примерно 1,5°C. Однако для таких КМ-пластин приращение температуры в процессе осцилляций невелико: максимально достигаемое значение равно примерно 23°C, т.е. всего на 3°C больше температуры естественного состояния конструкции.

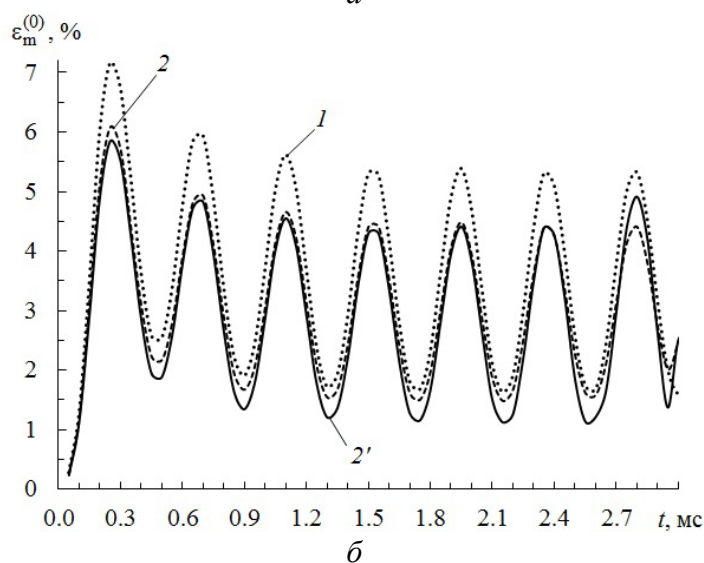
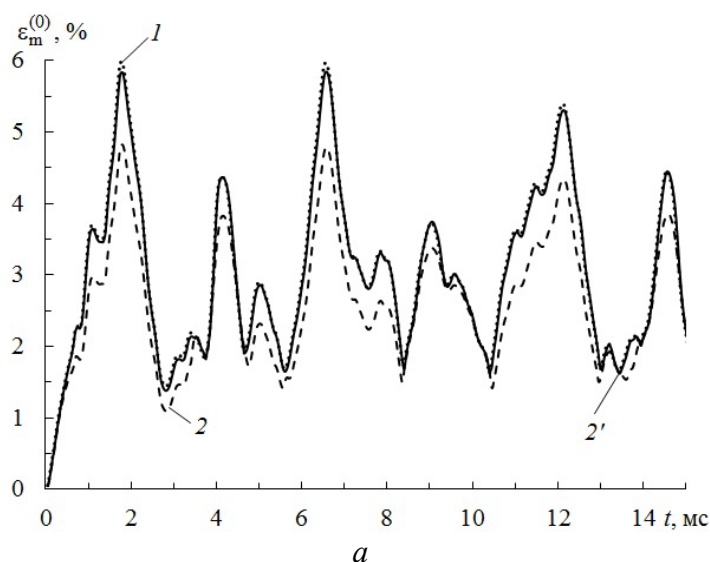
Несмотря на то, что при использовании уточненной теории изгиба КМ-пластин расчетное температурное поле незначительно отличается от случая использования теории Амбарцумяна, деформированные состояния компонентов композиции, рассчитанные по этим теориям, могут различаться достаточно сильно. На рис.4 изображены осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций связующего $\varepsilon_*^{(0)}$ исследуемых композиций ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $|x_1| \leq a/2$, $|x_2| \leq b/2$, $|x_3| \leq h$). Кривые на рис.4а,б рассчитаны для тех же КМ-конструкций, что и на рис.3а,б соответственно. Кривые 1 на рис.4а,б получены по уточненной теории изгиба без учета теплового воздействия (расчет проводился по теории из [30]); кривые 2 определены также по уточненной теории изгиба при уточненной аппроксимации температуры в (7) ($L=7$): сплошные кривые 2' приведены для сравнения и рассчитаны по теории изгиба Амбарцумяна при использовании уточненной аппроксимации температуры ($L=7$).

Сравнение максимальных значений ординат на кривых 1 и 2 на рис.4а,б показывает, что в случае относительно тонкой металлокомпозитной пластины (рис.4а) расчет, выполненный без учета теплового воздействия (кривая 1), приводит к завышению максимума интенсивности деформаций связующего на 27,3% по сравнению с термоупругопластическим расчетом (см. значения $\varepsilon_m^{(0)}$ на кривых 1 и 2 рис.4а при $t \approx 1,85$ мс), а в случае относительно толстой конструкции – на 17,6% (см. значения $\varepsilon_m^{(0)}$ на кривых 1 и 2 рис.4б при $t \approx 0,25$ мс). Следовательно, в случае металлокомпозитных пластин неучет теплового воздействия может приводить к существенному завышению (на десятки процентов) значений интенсивности деформаций связующего материала. Для армирующих волокон это различие не столь велико.

Сравнение кривых 2 и 2' на рис.4а показывает, что при использовании теории изгиба Амбарцумяна в относительно тонкой металлокомпозитной пластине максимальное расчетное значение интенсивности деформаций связующего оказывается на 20,8% больше, чем в аналогичном термоупругопластическом расчете, выполненном по уточненной теории изгиба (см. значения $\varepsilon_m^{(0)}$ на кривых 2 и 2' рис.4а при $t \approx 1,85$ мс). Аналогичное сравнение кривых 2 и 2' на рис.4б свидетельствует о том, что в случае относительно толстой металлокомпозитной пластины термоупругопластические расчеты, выполненные по теории Амбарцумяна и по уточненной теории изгиба, приводят к близким значениям максимумов на этих кривых. Так, ордината точки глобального

максимума на кривой 2' всего на 3,9% меньше, чем на кривой 2 (см. значения $\varepsilon_m^{(0)}$ на кривых 2 и 2' рис.4б при $t \approx 0,25$ мс). Следовательно, для относительно толстых металлокомпозитных пластин термоупругопластический расчет можно проводить с использованием теории изгиба Амбарцумяна при уточненной аппроксимации температуры.

На рис.4в изображены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, полученные для относительно толстой стеклопластиковой пластины при $p_{\max} = 7$ МПа (см. (17)). Все кривые рассчитаны с учетом теплового воздействия при значении $L = 7$ в разложении температуры (7). (Расчеты, выполненные без учета теплового воздействия, приводят к зависимостям $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, которые визуально практически не отличаются от кривых на рис.4в, поэтому не изображены, чтобы его не загромождать.) Кривые 1 и 2 определены для конструкции с 2D-структурой армирования (см. рис.1а), а кривая 3 – для пластины с 4D-структурой (см. рис.1б). Кривые 1 и 3 рассчитаны по уточненной теории изгиба, а кривая 2 – по теории Амбарцумяна.



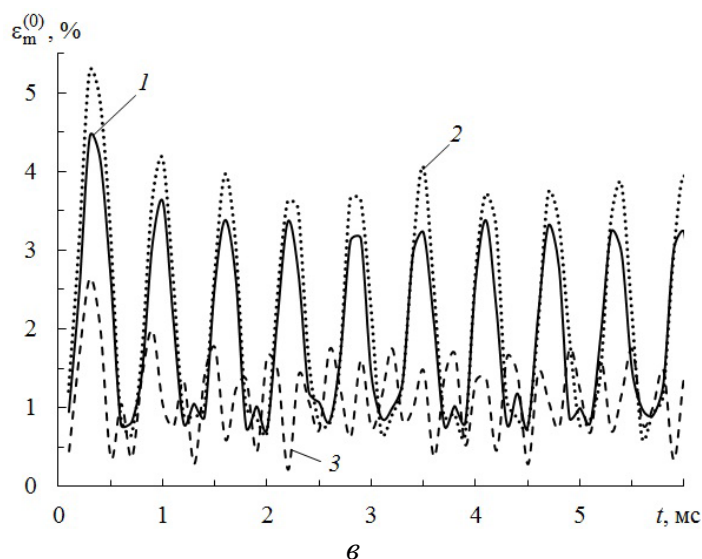


Рис.4. Зависимость от времени максимального значения интенсивности деформаций связующего в относительно тонкой (а) и толстой (б) металлокомпозитных пластинах и в относительно толстой стеклопластиковой конструкции при 2D- и 4D-структурах армирования (в).

Сравнение кривых 1 и 2 на рис.4в показывает, что в случае относительно толстой стеклопластиковой пластины с плоско-перекрестной структурой армирования (в отличие от металлокомпозитной конструкции) использование теории Амбарцумяна приводит к завышению максимального значения $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ на 18,2% по сравнению с расчетом, выполненным по уточненной теории изгиба (см. значения $\varepsilon_m^{(0)}$ на кривых 1 и 2 при $t \approx 0,3$ мс). Сопоставление же кривых 1 и 3 свидетельствует о том, что замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру в относительно толстой стеклопластиковой пластине позволяет существенно (почти вдвое) уменьшить максимальное расчетное значение интенсивности деформаций связующего в термоупругопластическом случае. Дополнительные расчеты показали, что в случаях относительно тонких стеклопластиковых пластин (при $p_{\max} = 4$ МПа) и металлокомпозитных конструкций разной относительной толщины замена традиционной 2D-структуры армирования (см. рис.1а) на пространственную структуру 4D-армирования (см. рис.1б) является неэффективной, так как приводит к увеличению наибольших значений интенсивности деформаций компонентов композиции.

ВЫВОДЫ

Разработанная модель термоупругопластического деформирования гибких пластин с произвольными структурами армирования позволяет с разной степенью точности аппроксимировать температуру и тангенциальные перемещения точек таких конструкций по их толщине.

Подтверждены результаты работы [26]: для адекватного расчета температурных полей в КМ-пластинах при их динамическом упругопластическом изгибном деформировании температуру в поперечном направлении необходимо аппроксимировать полиномом 7-го порядка, а не полиномом 2-го порядка, как это традиционно принято делать для тонкостенных элементов конструкций. Расчет

температурных полей вполне обоснованно можно проводить с использованием простейшей неклассической теории изгиба пластин – теории Амбарцумяна [2]. При использовании же уточненной теории изгиба максимальные расчетные значения температуры изменяются незначительно по сравнению со случаем использования теории Амбарцумяна, а именно: увеличиваются всего на $1,5^{\circ}\text{C}$ (и менее) для стеклопластиковых конструкций и на 3°C (и менее) для металлокомпозитных пластин.

Расчеты показали, что при динамическом нагружении КМ-пластин поперечной нагрузкой взрывного типа стеклопластиковые конструкции нагреваются не более, чем на $3...18^{\circ}\text{C}$, а металлокомпозитные – на $30...35^{\circ}\text{C}$. Поэтому для проведения адекватных динамических расчетов стеклопластиковых пластин, изгибно деформируемых нагрузкой, вызванной воздушной ударной волной, можно вполне обоснованно не учитывать влияние теплового воздействия, если отсутствуют дополнительные источники нагрева или охлаждения немеханического происхождения. Однако в металлокомпозитных конструкциях при таком нагружении учет теплового воздействия обязателен (хотя термочувствительность компонентов композиции при этом можно не принимать во внимание), иначе расчеты могут приводить к существенному искажению (на несколько десятков процентов) деформированного состояния компонентов композиции. Аналогично, термоупругопластический расчет, выполненный с использованием теории Амбарцумяна, также может приводить к существенному искажению (на десятки процентов) деформированного состояния компонентов композиции как в случае металлокомпозитных, так и в случае стеклопластиковых конструкций. Поэтому для проведения адекватных расчетов неизотермического упругопластического динамического поведения КМ-пластин следует рекомендовать использование уточненной теории изгиба (см. (1) и (2) при $M = 7$) и уточненную аппроксимацию температуры по толщине таких конструкций (см. (7) при $L = 7$).

Как и в изотермическом случае [30], замена плоской ортогональной структуры армирования (рис.1а) на пространственную структуру армирования (рис.1б) при сохранении общего расхода волокон в относительно толстой стеклопластиковой пластине при ее термоупругопластическом деформировании позволяет уменьшить интенсивность деформаций связующего почти вдвое. Аналогичная замена структур армирования в относительно тонких стеклопластиковых, а также в относительно тонких и относительно толстых металлокомпозитных конструкциях является неэффективной, так как приводит к существенному увеличению максимальных значений интенсивности деформаций связующего материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость, и колебания*. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
3. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.

4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines* // Compos. Struct. – 2001. – Vol.53. – No.1. – Pp.21-42.
5. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective* // Composites. – 2001. – Part A32. – Pp.901-910.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 831 p.
7. Soutis C. *Fibre reinforced composites in aircraft construction* // Progress in Aerospace Sciences. – 2005. – Vol.41. – No.2. – Pp.143-151.
8. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009* // Composite Structures. – 2010. – Vol.93. – Pp.14-31.
9. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites* // Frontiers of Mechanical Eng. – 2013. – Vol.8. – No.2. – Pp.187-200.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. – Amsterdam: Elsevier, 2013. – 412 p.
11. Куликов Г.М. *Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек* // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №2. – С.33-42.
12. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
13. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
14. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review* // Int. J. Impact Eng. – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
16. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
17. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 4th ed. – Taylor & Francis Group, LLC, 2015. – 815 p.
18. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites* // SAMPE J. – 2001. – Vol.37. – No.3. – Pp.3-17.
19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites* // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol.45. – No.2. – Pp.241-254.
20. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. – М.: Физматлит, 2019. – 448 с.
21. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol.52. – Pp.1579-1587.
22. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – Pp.483-508.

23. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle* // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol.36. – Pp.86-112.
24. Ахундов В.М. *Инкрементальная каркасная теория сред волокнистого строения при больших упругих и пластических деформациях* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №3. – С.539-558.
25. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. I. Structural model of the reinforced medium* // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2021. – Vol.64. – No.1. – Pp.137-148.
26. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. II. Statement of the problem and method for solution* // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2021. – Vol.64. – No.2. – Pp.52-68.
27. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates* // Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol.12. – No.2. – Pp.69-77.
28. Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
29. Грешнов В.М. *Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов*. – М.: Физматлит, 2018. – 232 с.
30. Янковский А.П. *Построение уточненной модели упругопластического поведения гибких армированных пластин при динамическом нагружении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №2. – С.283-304.
31. Карпинос Д.М. *Композиционные материалы: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
32. Тарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник*. – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
33. Янковский А.П. *Моделирование процессов теплопроводности в пространственно-армированных композитах с произвольной ориентацией волокон* // Прикладная физика. – 2011. – №3. – С.32-38.
34. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
35. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М., Нечаев С.Г., Иванов И.Е., Матюхин Л.М., Морозов К.А. *Теплотехника: Учеб. для вузов / 4-е изд., испр.* – М.: Высш. шк., 2003. – 671 с.
36. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
37. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. I* / Под ред. Дж. Любина. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

REFERENCES

1. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.

2. Ambarcumian S.A. *Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebania [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]*. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
3. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]*. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 p.
4. Mouritz A.P., Gellert E., Burchill P., Challis K. *Review of advanced composite structures for naval ships and submarines*. Compos. Struct., 2001, Vol.53, No.1, Pp.21-42.
5. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective*. Composites, 2001, Part A32, Pp.901-910.
6. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed.* Boca Raton, CRC Press, 2004, 831 p.
7. Soutis C. *Fibre reinforced composites in aircraft construction*. Progress in Aerospace Sciences. 2005, Vol.41, No.2, Pp.143-151.
8. Qatu M.S, Sullivan R.W., Wang W. *Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000-2009*. Composite Structures, 2010, Vol.93, Pp.14-31.
9. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites*. Frontiers of Mechanical Eng., 2013, Vol.8, No.2, Pp.187-200.
10. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced mechanics of composite materials and structural elements*. Amsterdam, Elsevier, 2013, 412 p.
11. Kulikov G.M. *Termouprugost' gibkikh mnogoslojnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-elasticity flexible multilayered anisotropic shells]*. Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.2, Pp.33-42.
12. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrücken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
13. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izdatel'stvo NNGU, 2002, 400 p.
14. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
15. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review*. Int. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
16. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
17. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics / 4th ed.* Taylor & Francis Group, LLC, 2015, 815 p.
18. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites*. SAMPE J., 2001, Vol.37, No.3, Pp.3-17.

19. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites*. Mechanics of Composite Materials, 2009, Vol.45, No.2, Pp.241-254.
20. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksij pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of composite structures at high temperatures]*. Moskva, Fizmatlit, 2019, 448 p.
21. Leu S.-Y., Hsu H.-C. *Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders*. International Journal of Mechanical Sciences, 2010, Vol.52, Pp.1579-1587.
22. Vena P., Gastaldi D., Contro R. *Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.483-508.
23. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. *Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.36, Pp.86-112.
24. Akhundov V.M. *Incremental carcass theory of fibrous media under larger elastic and plastic deformations*. Mechanics of composite materials, 2015, Vol.51, No.3, Pp.539-558.
25. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. I. Structural model of the reinforced medium*. Mathematical methods and physicomechanical fields, 2021, Vol.64, No.1, Pp.137-148.
26. Yankovskii A.P. *Modeling of thermoelastoplastic deformation of reinforced plates. II. Statement of the problem and method for solution*. Mathematical methods and physicomechanical fields, 2021, Vol.64, No.2. Pp.52-68.
27. Reissner E. *The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics, 1945, Vol.12, No.2, Pp.69-77.
28. Pobedrya B.E. *Chislennye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1981, 344 p.
29. Greshnov V.M. *Fiziko-matematicheskaya teoriya bol'shikh neobratimyykh deformatsij metallov [Physical and mathematical theory of large irreversible deformations of metals]*. Moskva, Fizmatlit, 2018, 232 p.
30. Yankovskii A.P. *Postroenie utochnennoj modeli uprugoplasticheskogo povedeniya gibkikh armirovannykh plastin pri dinamicheskom nagruzhении [Construction of refined model of elastic-plastic behavior of flexible reinforced plates under dynamic loading]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.2, Pp.283-304.
31. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
32. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
33. Yankovskii A.P. *Modelirovanie protsessov teploprovodnosti v prostranstvenno-armirovannykh kompozitakh s proizvol'noj orientatsiej volokon [Modelling of processes of thermal conductivity in spatially reinforced composites with any orientation of fibres]*. Prikladnaya fizika, 2011, No.3, Pp.32-38.
34. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.

35. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M., Nechaev S.G., Ivanov I.E., Matyukhin L.M., Morozov K.A. *Teplotekhnika: Uchebnik dlya vuzov [Heat engineering: Textbook for universities], 4th ed., rev.* Moskva, Vysshaya shkola, 2003, 671 p.
36. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur [Calculations on strength, stability and fluctuations in conditions of high temperatures].* Moskva, Mashinostroenie, 1965, 567 p.
37. Lubin G. *Handbook of composites.* New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.

Поступила в редакцию 14 июня 2022 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru