



НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПЛОСКОЙ УПРУГОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ В РЕДУЦИРОВАННОЙ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ ПО ИЗГИБУ*

Русских С.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается нелинейная динамика плоской упругой стержневой системы, которая состоит из произвольного числа упругих нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими шарнирами, допускающими большие относительные углы поворота. Перемещения каждого стержня описываются его конечным поворотом как твердого тела относительно прямой, соединяющей два соседних шарнирных узла, и изгибом с малым поперечным перемещением. Активное управление системой осуществляется с помощью горизонтальных и вертикальных сил, приложенных в шарнирных узлах.

Уравнения движения составной системы с произвольным числом стержневых элементов в неподвижной системе координат составлены на основе принципа возможных перемещений и представлены в виде конечных формул, удобных для численного интегрирования с использованием стандартных программ и алгоритмов, реализуемых в языках компьютерной алгебры.

Редуцирование исходной системы уравнений выполняется по квазистатическому изгибу путем пренебрежения инерцией изгибных форм движения стержней и исключения обобщенных координат, представляющих эти формы, которые являются углами между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью. Таким образом, из уравнений движения системы исключаются «быстрые переменные». Представлен алгоритм преобразования исходных уравнений в уравнения редуцированной системы для произвольного числа стержневых элементов системы.

Рассмотрен пример численного решения задачи о реакции стержневой системы на произвольный возмущающий импульс в полной и редуцированной постановках. Приведены сравнения и даны оценки точности и трудоемкости численного интегрирования при рассмотрении полной системы нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений редуцированной системы.

Ключевые слова: нелинейная динамика; стержневая система; неподвижная система координат; принцип возможных перемещений; редуцирование; квазистатический изгиб; численное интегрирование

NONLINEAR DYNAMICS OF A PLANE ELASTIC ROD SYSTEM IN A REDUCED QUASI-STATIC BENDING FORMULATION

Russkikh S.V.

Institute of Applied Mechanics Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИПРИМ РАН.

ABSTRACT

The nonlinear dynamics of a flat elastic rod system is considered, which consists of an arbitrary number of elastic inextensible rods connected at the ends by elastic-viscous hinges allowing large relative angles of rotation. The displacements of each rod are described by its final rotation as a rigid body relative to a straight line connecting two adjacent hinge nodes, and a bend with a small transverse displacement. Active control of the system is carried out with the help of horizontal and vertical forces applied in the hinge nodes.

The equations of motion of a composite system with an arbitrary number of core elements in a fixed coordinate system are based on the principle of possible displacements and are presented in the form of finite formulas convenient for numerical integration using standard programs and algorithms implemented in computer algebra languages.

The reduction of the initial system of equations is carried out by quasi-static bending by neglecting the inertia of the bending forms of the movement of the rods and excluding generalized coordinates representing these forms, which are the angles between the tangent to the curved axis of the rod and its undeformed axis. Thus, "fast variables" are excluded from the equations of motion of the system. An algorithm for converting the initial equations into reduced system equations for an arbitrary number of core elements of the system is presented.

An example of a numerical solution of the problem of the reaction of a rod system to an arbitrary perturbing pulse in full and reduced formulations is considered. Comparisons are made and estimates of the accuracy and complexity of numerical integration are given when considering a complete system of nonlinear differential equations and equations of a reduced system.

Keywords: nonlinear dynamics; rod system; fixed coordinate system; principle of possible displacements; reduction; quasi-static bending; numerical integration

ВВЕДЕНИЕ

Динамике упругих стержневых систем при больших перемещениях и углах поворота посвящено множество работ [1,2]. Такие системы имеют многочисленные практические приложения в динамике составных космических систем [3-5]. После выведения на орбиту эти системы, предварительно компактно упакованные, трансформируются, приобретая конфигурацию, определяемую функциональным предназначением. К таким системам относятся панели солнечных батарей, разворачиваемые штанги гравитационной стабилизации, космические манипуляторы, ферменные конструкции, разворачиваемые антенны, тросовые системы и пр. Задачам моделирования и динамики разворачивания или трансформирования таких систем посвящены многочисленные работы [6-12].

В конечно-элементных моделях гибких стержневых систем, используемых в комплексах ANSYS, NASTRAN, FEMAP, ABAQUS и др., наряду с изгибом и кручением обычно учитывается и продольное растяжение стержней. Это приводит к сравнительно простым и разреженным системам дифференциальных уравнений для узловых перемещений и углов поворота [5]. Однако вследствие большой жесткости элементов на растяжение по сравнению с изгибом и кручением в таких конечно-элементных моделях присутствуют высокочастотные осцилляции, связанные с продольными перемещениями. Поэтому дифференциальные уравнения движения таких систем являются уравнениями «жесткого типа» и проявляют склонность к вычислительной неустойчивости на больших интервалах времени.

Динамика плоского движения упругой стержневой системы, описанной в неподвижной системе координат, была рассмотрена в работе [13]. В ней

отмечается, что при определенных внешних воздействиях процесс численного интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений может быть неустойчивым, особенно для систем с большим числом элементов. В работе [14] для системы, описываемой в подвижной системе координат, был предложен подход редуцирования порядка системы по квазистатическому изгибу, в котором из уравнений движения исключаются «быстрые переменные», представляющие собой изгиб каждого стержня.

Процесс редуцирования позволяет получать уравнения, которые пригодны по крайней мере для предварительных вычислений параметров движения системы и требуют гораздо меньше времени на численное интегрирование с использованием стандартных программ компьютерной алгебры с сохранением приемлемой точности на больших интервалах времени.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоскую стержневую систему произвольной размерности с началом неподвижной системы координат Oxy в узле $k=0$ с координатами $x_0 = y_0 = 0$ и состоящую из упругих произвольно ориентированных нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами, допускающими большие углы поворота (рис.1).

Погонные массы m_k и изгибные жесткости EI_k стержней считаются постоянными в пределах их длин l_k , $k = 1, 2, \dots, n$. В шарнирных узлах $k = 1, 2, \dots, n$ имеются сосредоточенные массы μ_k , а в узлах $k = 0, 1, \dots, n-1$ пружины с угловой жесткостью κ_k и вязким демпфированием ν_k .

Пассивное управление трансформируемой формой системы производится за счет освобождения связей предварительно напряженных узловых пружин и последующего торможения на ограничителях в упруговязких шарнирах. Активное управление системой осуществляется за счет приложенных в узлах $k = 1, 2, \dots, n$ сил $X_k(t)$ и $Y_k(t)$ (рис.1).

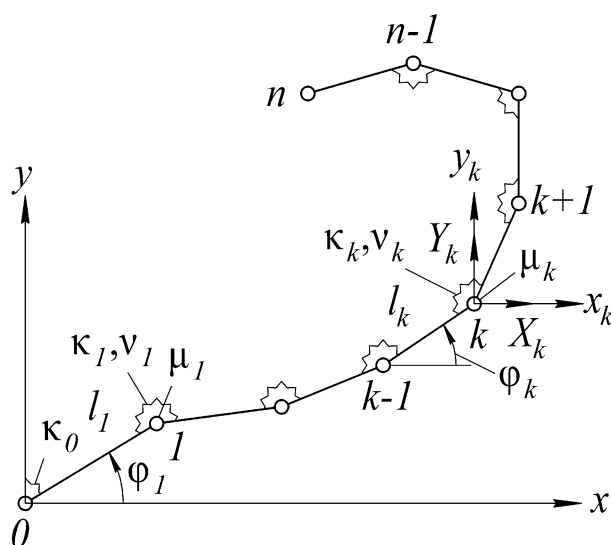


Рис.1. Плоская стержневая система в неподвижной системе координат.

Перемещения k -го стержня относительно неподвижной системы координат обусловлены его конечным поворотом как твердого тела на угол $\varphi_k(t)$, отсчитываемым от оси x (т.е. поворотом прямой, проходящей через узлы $k-1$ и k), и изгибом с малым поперечным перемещением относительно этой прямой (рис.2). Продольное перемещение стержня за счет его усадки при изгибе пренебрегается как величина второго порядка малости.

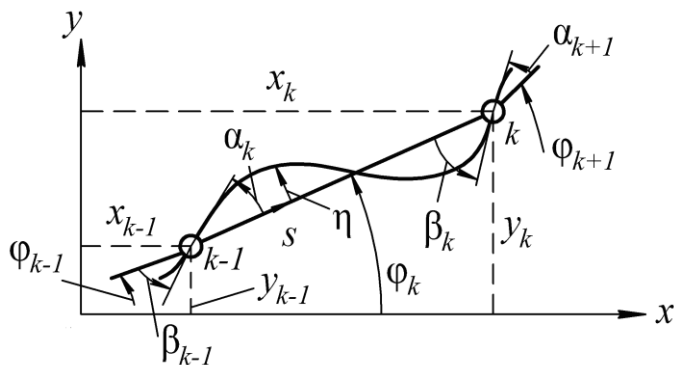


Рис.2. Стержневой элемент системы.

Малое изгибное (поперечное) перемещение $\eta_k(s, t)$ точки s k -го стержня считается упругим и представляется углами α_k и β_k между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в $(k-1)$ -ом и k -ом шарнирных узлах, имеет вид

$$\eta_k(s, t) = \alpha_k(t)\sigma_k(s) + \beta_k(t)\tau_k(s);$$

$$\sigma_k(s) = \frac{s}{l_k^2}(l_k - s)^2, \quad \tau_k(s) = -\frac{s^2}{l_k^2}(l_k - s). \tag{1}$$

Разность углов поворота левого $(k+1)$ -го стержня и правого края k -го стержня в шарнире k представляется как (рис.2)

$$\Delta\varphi_k = (\varphi_{k+1} + \alpha_{k+1}) - (\varphi_k + \beta_k). \tag{2}$$

Координаты k -го узла деформированной стержневой системы с учетом координат точки присоединения узла $k=0$

$$x_k = \sum_{j=1}^k l_j \cos \varphi_j, \quad y_k = \sum_{j=1}^k l_j \sin \varphi_j. \tag{3}$$

Координаты точки s k -го стержня с учетом его изгиба по форме (1)

$$x = x_k - (l_k - s)\cos \varphi_k - \eta_k \sin \varphi_k;$$

$$y = y_k - (l_k - s)\sin \varphi_k + \eta_k \cos \varphi_k. \tag{4}$$

Уравнения движения составной системы получаются на основе принципа возможных перемещений (принципа Даламбера-Лагранжа)

$$\delta\Pi - \delta A_d - \delta A_m - \delta A_p = 0. \tag{5}$$

Потенциальная энергия узловых пружин и изгиба стержней по форме (1) с учетом (2) и $\varphi_0 = 0$, и $\beta_0 = 0$ записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k (\Delta\varphi_k)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} (\alpha_k^2 + \beta_k^2 + \alpha_k\beta_k). \tag{6}$$

Вариация потенциальной энергии $\delta\Pi$, входящая в (5), представляется как

$$\delta\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_k \Delta\varphi_k \delta\Delta\varphi_k + \sum_{k=1}^n \frac{4EI_k}{l_k} \left(\left(\alpha_k + \frac{1}{2}\beta_k \right) \delta\alpha_k + \left(\frac{1}{2}\alpha_k + \beta_k \right) \delta\beta_k \right)$$

с учетом выражений: $\delta\Delta\varphi_k = (\delta\varphi_{k+1} + \delta\alpha_{k+1}) - (\delta\varphi_k + \delta\beta_k)$, $\delta\varphi_0 = 0$, $\delta\beta_0 = 0$.

Вариация работы демпфирующих моментов δA_d в упруговязких шарнирах с учетом $\Delta\dot{\varphi}_k = (\dot{\varphi}_{k+1} + \dot{\alpha}_{k+1}) - (\dot{\varphi}_k + \dot{\beta}_k)$; $\dot{\varphi}_0 = 0$; $\dot{\beta}_0 = 0$ записывается как

$$\delta A_d = - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \Delta\dot{\varphi}_k \delta\Delta\varphi_k.$$

Вариация работы инерционных сил распределенных масс стержней и сосредоточенных масс в узлах, взятая с обратным знаком

$$-\delta A_m = \sum_{k=1}^n \mu_k (\ddot{x}_k \delta x_k + \ddot{y}_k \delta y_k) + \sum_{k=1}^n m_k \int_0^{l_k} (\ddot{x} \delta x + \ddot{y} \delta y) ds, \quad (7)$$

где производные \ddot{x}_k и \ddot{y}_k , \ddot{x} и \ddot{y} , а также вариации δx_k и δy_k , δx и δy вычисляются на основе выражений (3) и (4).

Вариация работы внешних сил, приложенных в узлах

$$\delta A_p = \sum_{k=1}^n (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k). \quad (8)$$

Система $3n$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка для обобщенных координат φ_k , α_k , β_k ($k=1, 2, \dots, n$) на основе (5) с учетом выражений (6)-(8) представляется в следующем матрично-алгебраическом виде

$$\begin{aligned} L_\varphi + [v_{kj}^{\varphi\varphi}] \dot{\boldsymbol{\varphi}} + [v_{kj}^{\varphi\alpha}] \dot{\boldsymbol{\alpha}} + [v_{kj}^{\varphi\beta}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + [\kappa_{kj}^{\varphi\varphi}] \boldsymbol{\varphi} + [\kappa_{kj}^{\varphi\alpha}] \boldsymbol{\alpha} + [\kappa_{kj}^{\varphi\beta}] \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{Q}; \\ L_\alpha + [v_{kj}^{\alpha\varphi}] \dot{\boldsymbol{\varphi}} + [v_{kj}^{\alpha\alpha}] \dot{\boldsymbol{\alpha}} + [v_{kj}^{\alpha\beta}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + [\kappa_{kj}^{\alpha\varphi}] \boldsymbol{\varphi} + [\kappa_{kj}^{\alpha\alpha}] \boldsymbol{\alpha} + [\kappa_{kj}^{\alpha\beta}] \boldsymbol{\beta} + \tilde{\mathbf{K}} \left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \right) &= 0; \\ L_\beta + [v_{kj}^{\beta\varphi}] \dot{\boldsymbol{\varphi}} + [v_{kj}^{\beta\alpha}] \dot{\boldsymbol{\alpha}} + [v_{kj}^{\beta\beta}] \dot{\boldsymbol{\beta}} + [\kappa_{kj}^{\beta\varphi}] \boldsymbol{\varphi} + [\kappa_{kj}^{\beta\alpha}] \boldsymbol{\alpha} + [\kappa_{kj}^{\beta\beta}] \boldsymbol{\beta} + \tilde{\mathbf{K}} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n]^T$ – вектор углов поворота стержней как твердых тел; $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n]^T$ и $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n]^T$ – векторы углов между касательной к изогнутой оси стержня и его недеформированной осью в левом и правом шарнирном узле, соответственно; $[v_{kj}^{**}]$ и $[\kappa_{kj}^{**}]$ – матрицы коэффициентов демпфирования и жесткости, соответственно; \mathbf{Q} – вектор обобщенных сил; $\tilde{\mathbf{K}} = \text{diag} \left[\frac{4EI_k}{l_k} \right]$, $k=1, 2, \dots, n$.

Вид и свойства матриц коэффициентов жесткости $[\kappa_{kj}^{**}]$, входящих в (9), с учетом $\kappa_n = 0$

$$\begin{aligned} [\kappa_{kj}^{\varphi\varphi}] : \quad \kappa_{k,k}^{\varphi\varphi} &= \kappa_{k-1} + \kappa_k; \quad \kappa_{k,j+1}^{\varphi\varphi} = \kappa_{k+1,j}^{\varphi\varphi} = -\kappa_k; \\ [\kappa_{kj}^{\varphi\alpha}] : \quad \kappa_{k,k}^{\varphi\alpha} &= \kappa_{k-1}; \quad \kappa_{k,j+1}^{\varphi\alpha} = -\kappa_k; \\ [\kappa_{kj}^{\varphi\beta}] : \quad \kappa_{k,k}^{\varphi\beta} &= \kappa_k; \quad \kappa_{k+1,j}^{\varphi\beta} = -\kappa_k; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [K_{kj}^{\alpha\varphi}] &: K_{k,k}^{\alpha\varphi} = K_{k-1}; \quad K_{k+1,j}^{\alpha\varphi} = -K_k; \quad [K_{kj}^{\alpha\varphi}] = [K_{kj}^{\varphi\alpha}]^T; \\
 [K_{kj}^{\alpha\alpha}] &: K_{k,k}^{\alpha\alpha} = K_{k-1}; \\
 [K_{kj}^{\alpha\beta}] &: K_{k+1,j}^{\alpha\beta} = -K_k; \\
 [K_{kj}^{\beta\varphi}] &: K_{k,k}^{\beta\varphi} = K_k; \quad K_{k,j+1}^{\beta\varphi} = -K_k; \quad [K_{kj}^{\beta\varphi}] = [K_{kj}^{\varphi\beta}]^T; \\
 [K_{kj}^{\beta\alpha}] &: K_{k,j+1}^{\beta\alpha} = -K_k; \quad [K_{kj}^{\beta\alpha}] = [K_{kj}^{\alpha\beta}]^T; \\
 [K_{kj}^{\beta\beta}] &: K_{k,k}^{\beta\beta} = K_k.
 \end{aligned}$$

Аналогично записываются выражения для матриц коэффициентов демпфирования $[v_{kj}^{**}]$ с учетом $v_n = 0$

$$\begin{aligned}
 [v_{kj}^{\varphi\varphi}] &: v_{k,k}^{\varphi\varphi} = v_{k-1} + v_k; \quad v_{k,j+1}^{\varphi\varphi} = v_{k+1,j}^{\varphi\varphi} = -v_k; \\
 [v_{kj}^{\varphi\alpha}] &: v_{k,k}^{\varphi\alpha} = v_{k-1}; \quad v_{k,j+1}^{\varphi\alpha} = -v_k; \\
 [v_{kj}^{\varphi\beta}] &: v_{k,k}^{\varphi\beta} = v_k; \quad v_{k+1,j}^{\varphi\beta} = -v_k; \\
 [v_{kj}^{\alpha\varphi}] &: v_{k,k}^{\alpha\varphi} = v_{k-1}; \quad v_{k+1,j}^{\alpha\varphi} = -v_k; \quad [v_{kj}^{\alpha\varphi}] = [v_{kj}^{\varphi\alpha}]^T; \\
 [v_{kj}^{\alpha\alpha}] &: v_{k,k}^{\alpha\alpha} = v_{k-1}; \\
 [v_{kj}^{\alpha\beta}] &: v_{k+1,j}^{\alpha\beta} = -v_k; \\
 [v_{kj}^{\beta\varphi}] &: v_{k,k}^{\beta\varphi} = v_k; \quad v_{k,j+1}^{\beta\varphi} = -v_k; \quad [v_{kj}^{\beta\varphi}] = [v_{kj}^{\varphi\beta}]^T; \\
 [v_{kj}^{\beta\alpha}] &: v_{k,j+1}^{\beta\alpha} = -v_k; \quad [v_{kj}^{\beta\alpha}] = [v_{kj}^{\alpha\beta}]^T; \\
 [v_{kj}^{\beta\beta}] &: v_{k,k}^{\beta\beta} = v_k.
 \end{aligned}$$

Коэффициенты вектора обобщенных сил Q имеют вид

$$Q_k = l_k c_k \sum_{j=k}^n Y_j - l_k s_k \sum_{j=k}^n X_j.$$

Здесь и далее: $c_k = \cos \varphi_k$, $s_k = \sin \varphi_k$.

Дифференциальные операторы L_φ , L_α и L_β , входящие в (9), записываются как

$$\begin{aligned}
 L_\varphi &= \{L_{\varphi_k}\}_n = [m_{kj}^{\varphi\varphi}] \ddot{\phi} + [m_{kj}^{\varphi\alpha}] \ddot{\alpha} + [m_{kj}^{\varphi\beta}] \ddot{\beta} + [g_{kj}^{\varphi\varphi}] \Lambda \dot{\phi} + \\
 &\quad + 2[g_{kj}^{\varphi\alpha}] \Lambda \dot{\alpha} + 2[g_{kj}^{\varphi\beta}] \Lambda \dot{\beta}; \\
 L_\alpha &= \{L_{\alpha_k}\}_n = [m_{kj}^{\alpha\varphi}] \ddot{\phi} + [m_{kj}^{\alpha\alpha}] \ddot{\alpha} + [m_{kj}^{\alpha\beta}] \ddot{\beta} + [g_{kj}^{\alpha\varphi}] \Lambda \dot{\phi}; \\
 L_\beta &= \{L_{\beta_k}\}_n = [m_{kj}^{\beta\varphi}] \ddot{\phi} + [m_{kj}^{\beta\alpha}] \ddot{\alpha} + [m_{kj}^{\beta\beta}] \ddot{\beta} + [g_{kj}^{\beta\varphi}] \Lambda \dot{\phi},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где $[m_{kj}^{**}]$ и $[g_{kj}^{**}]$ – матрицы инерционных коэффициентов и нелинейных частей, соответственно; $\Lambda = \text{diag}(\dot{\phi}_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Вид и свойства матриц инерционных коэффициентов и нелинейных частей, входящих в (10), для произвольной размерности системы

$$[m_{kj}^{\varphi\varphi}]: m_{k,j}^{\varphi\varphi} = l_k l_j c_{kj} M_k \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\varphi\varphi} = l_k l_j c_{kj} M_j \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\varphi\varphi} = l_k^2 \left(M_k - \frac{m_k l_k}{2} \right) + \frac{m_k l_k^3}{3};$$

$$[m_{kj}^{\varphi\alpha}]: m_{k,j}^{\varphi\alpha} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\varphi\alpha} = \frac{m_j l_j^2}{12} l_k c_{kj} \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\varphi\alpha} = \frac{m_k l_k^3}{30};$$

$$[m_{kj}^{\varphi\beta}]: m_{k,j}^{\varphi\beta} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\varphi\beta} = -\frac{m_j l_j^2}{12} l_k c_{kj} \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\varphi\beta} = -\frac{m_k l_k^3}{20};$$

$$[m_{kj}^{\alpha\varphi}]: m_{k,j}^{\alpha\varphi} = \frac{m_k l_k^2}{12} l_j c_{kj} \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\alpha\varphi} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\alpha\varphi} = \frac{m_k l_k^3}{30}; \quad [m_{kj}^{\alpha\varphi}] = [m_{kj}^{\varphi\alpha}]^T;$$

$$[m_{kj}^{\alpha\alpha}]: m_{k,j}^{\alpha\alpha} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\alpha\alpha} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\alpha\alpha} = \frac{m_k l_k^3}{105};$$

$$[m_{kj}^{\alpha\beta}]: m_{k,j}^{\alpha\beta} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\alpha\beta} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\alpha\beta} = -\frac{m_k l_k^3}{140};$$

$$[m_{kj}^{\beta\varphi}]: m_{k,j}^{\beta\varphi} = -\frac{m_k l_k^2}{12} l_j c_{kj} \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\beta\varphi} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\beta\varphi} = -\frac{m_k l_k^3}{20}; \quad [m_{kj}^{\beta\varphi}] = [m_{kj}^{\varphi\beta}]^T;$$

$$[m_{kj}^{\beta\alpha}]: m_{k,j}^{\beta\alpha} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\beta\alpha} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\beta\alpha} = -\frac{m_k l_k^3}{140}; \quad [m_{kj}^{\beta\alpha}] = [m_{kj}^{\alpha\beta}]^T;$$

$$[m_{kj}^{\beta\beta}]: m_{k,j}^{\beta\beta} = 0 \text{ если } j < k; \quad m_{k,j}^{\beta\beta} = 0 \text{ если } j > k;$$

$$m_{k,k}^{\beta\beta} = \frac{m_k l_k^3}{105};$$

$$[g_{kj}^{\varphi\varphi}]: g_{k,j}^{\varphi\varphi} = l_k l_j s_{kj} M_k \text{ если } j < k; \quad g_{k,j}^{\varphi\varphi} = l_k l_j s_{kj} M_j \text{ если } j > k;$$

$$g_{k,k}^{\varphi\varphi} = 0;$$

$$[g_{kj}^{\varphi\alpha}]: g_{k,j}^{\varphi\alpha} = 0 \text{ если } j < k; \quad g_{k,j}^{\varphi\alpha} = \frac{m_j l_j^2}{12} l_k s_{kj} \text{ если } j > k;$$

$$g_{k,k}^{\varphi\alpha} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 [g_{kj}^{\varphi\beta}]: \quad & g_{k,j}^{\varphi\beta} = 0 \text{ если } j < k; \quad g_{k,j}^{\varphi\beta} = -\frac{m_j l_j^2}{12} l_k s_{kj} \text{ если } j > k; \\
 & g_{k,k}^{\varphi\beta} = 0; \\
 [g_{kj}^{\alpha\varphi}]: \quad & g_{k,j}^{\alpha\varphi} = \frac{m_k l_k^2}{12} l_j s_{kj} \text{ если } j < k; \quad g_{k,j}^{\alpha\varphi} = 0 \text{ если } j > k; \\
 & g_{k,k}^{\alpha\varphi} = 0; \quad [g_{kj}^{\alpha\varphi}] = -[g_{kj}^{\varphi\alpha}]^T; \\
 [g_{kj}^{\beta\varphi}]: \quad & g_{k,j}^{\beta\varphi} = -\frac{m_k l_k^2}{12} l_j s_{kj} \text{ если } j < k; \quad g_{k,j}^{\beta\varphi} = 0 \text{ если } j > k; \\
 & g_{k,k}^{\beta\varphi} = 0; \quad [g_{kj}^{\beta\varphi}] = -[g_{kj}^{\varphi\beta}]^T.
 \end{aligned}$$

В этих выражениях введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 M_k &= \sum_{i=k}^n [\mu_i + m_i l_i] - \frac{m_k l_k}{2}, \quad M_j = \sum_{i=j}^n [\mu_i + m_i l_i] - \frac{m_j l_j}{2}; \\
 c_{kj} &= \cos(\varphi_k - \varphi_j), \quad s_{kj} = \sin(\varphi_k - \varphi_j).
 \end{aligned}$$

Система уравнений (9) с учетом (10) решалась в программном комплексе компьютерной алгебры РТС MathCAD 15.0 M045 с помощью стандартной программы для систем дифференциальных уравнений AdamsBDF, реализующая метод Адамса («нежесткие системы») и метод обратного дифференцирования («жесткие системы») с автоматическим выбором между ними исходя из входных данных. При этом с помощью предварительных расчетов подтверждается устойчивость и сходимость численных результатов на различных интервалах времени и при различном числе шагов интегрирования на фиксированном интервале.

2. РЕДУЦИРОВАНИЕ ПО КВАЗИСТАТИЧЕСКОМУ ИЗГИБУ

Структура уравнений (9) с учетом (10) позволяет записать процедуру редуцирования по квазистатическому изгибу в общем виде и для любого количества стержней n . Для этого во втором и третьем уравнении (9) с учетом (10) пренебрегаем членами, содержащими $\ddot{\alpha}$ и $\ddot{\beta}$, а также $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$

$$\begin{aligned}
 [m_{kj}^{\alpha\varphi}] \ddot{\phi} + [g_{kj}^{\alpha\varphi}] \Lambda \dot{\phi} + [v_{kj}^{\alpha\varphi}] \dot{\phi} + [\kappa_{kj}^{\alpha\varphi}] \phi + [\kappa_{kj}^{\alpha\alpha}] \alpha + [\kappa_{kj}^{\alpha\beta}] \beta + \tilde{K} \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta \right) &= 0; \\
 [m_{kj}^{\beta\varphi}] \ddot{\phi} + [g_{kj}^{\beta\varphi}] \Lambda \dot{\phi} + [v_{kj}^{\beta\varphi}] \dot{\phi} + [\kappa_{kj}^{\beta\varphi}] \phi + [\kappa_{kj}^{\beta\alpha}] \alpha + [\kappa_{kj}^{\beta\beta}] \beta + \tilde{K} \left(\frac{1}{2} \alpha + \beta \right) &= 0.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Два уравнения (11) можно объединить в одно, введя вектор $\gamma = [\alpha \ \beta]^T$

$$[m_{kj}^{\gamma\varphi}] \ddot{\phi} + ([g_{kj}^{\gamma\varphi}] \Lambda + [v_{kj}^{\gamma\varphi}]) \dot{\phi} + [\kappa_{kj}^{\gamma\varphi}] \phi + [b_{kj}^{\gamma\gamma}] \gamma = 0, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_{kj}^{\alpha\varphi} \\ m_{kj}^{\beta\varphi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} g_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{kj}^{\alpha\varphi} \\ g_{kj}^{\beta\varphi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{kj}^{\alpha\varphi} \\ v_{kj}^{\beta\varphi} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\alpha\varphi} \\ \kappa_{kj}^{\beta\varphi} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\alpha\alpha} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} & \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\alpha\beta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{K}} \\ \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\beta\alpha} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{K}} & \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\beta\beta} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В первом уравнении (9) с учетом (10) также пренебрегаем членами с $\ddot{\mathbf{a}}$ и $\ddot{\mathbf{\beta}}$, $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{\beta}}$

$$\begin{bmatrix} m_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} g_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} v_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\varphi\alpha} \\ \kappa_{kj}^{\varphi\beta} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Q}. \quad (13)$$

С учетом симметрии матриц жесткости, преобразуем последний член уравнения (13)

$$\begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\varphi\alpha} \\ \kappa_{kj}^{\varphi\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\alpha\varphi} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\beta\varphi} \end{bmatrix}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T.$$

В результате этих преобразований получаем редуцированную систему из двух уравнений (12) и (13), не содержащих $\ddot{\mathbf{a}}$ и $\ddot{\mathbf{\beta}}$, а также $\dot{\mathbf{a}}$ и $\dot{\mathbf{\beta}}$, в которые вектора \mathbf{a} и $\mathbf{\beta}$ входят линейно в виде вектора $\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{a} \ \mathbf{\beta}]^T$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \left(\begin{bmatrix} g_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} + \begin{bmatrix} v_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \right) \dot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \boldsymbol{\gamma} &= 0; \\ \begin{bmatrix} m_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} g_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} v_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi} + \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T \boldsymbol{\gamma} &= \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обращая матрицу $\begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}$ с постоянными по времени коэффициентами, из первого уравнения (14) находим вектор $\boldsymbol{\gamma}$ и подставляем его во второе уравнение (14). В результате получаем дифференциальное уравнение для вектора $\boldsymbol{\phi}$, записанное в матричном виде

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} m_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \right) \ddot{\boldsymbol{\phi}} + \left(\begin{bmatrix} g_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\phi}} + \\ + \left(\begin{bmatrix} v_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \right) \dot{\boldsymbol{\phi}} + \left(\begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\varphi\varphi} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{kj}^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \kappa_{kj}^{\gamma\varphi} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{\phi} &= \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (15)$$

Размерность уравнения (15) равна n , в отличие от размерности $3n$ системы (9). После решения уравнения (15), по найденным векторам $\boldsymbol{\phi}$, $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ и $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ из первого уравнения (14) находится вектор $\boldsymbol{\gamma}$.

Главное – таким образом исключаются «быстрые» движения системы, представляющие собой изгибные колебания отдельных стержней; стержни в редуцированной составной системе изгибаются только за счет реакций в узлах. В частных случаях некоторые шарнирные узлы могут быть свободными (отсутствует жесткость и демпфирование, $\kappa_k = 0$, $v_k = 0$) или фиксированными (κ_k – достаточно большое число, определяемое путем проб).

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассматривается следующая модельная стержневая система, состоящая из $n = 8$ стержневых элементов с исходными параметрами: $l_k = 2$ м, $m_k = 3$ кг/м,

$\mu_k = 3$ кг, $EI_k = 10^5$ Па·м⁴, $k = 1,2...8$; $\kappa_k = 100$ Н/рад, $\nu_k = 0,01$ Н/рад·с, $k = 0,1...7$.

Выполнены расчеты реакций этой стержневой системы на внешнюю нагрузку в виде заданного импульса

$$X_k(t) = Y_k(t) = 0, \quad k = 1, 2...7;$$

$$X_8(t) = \bar{X}_8 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right] \text{ при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad X_8(t) = 0 \text{ при } t > \frac{T}{2};$$

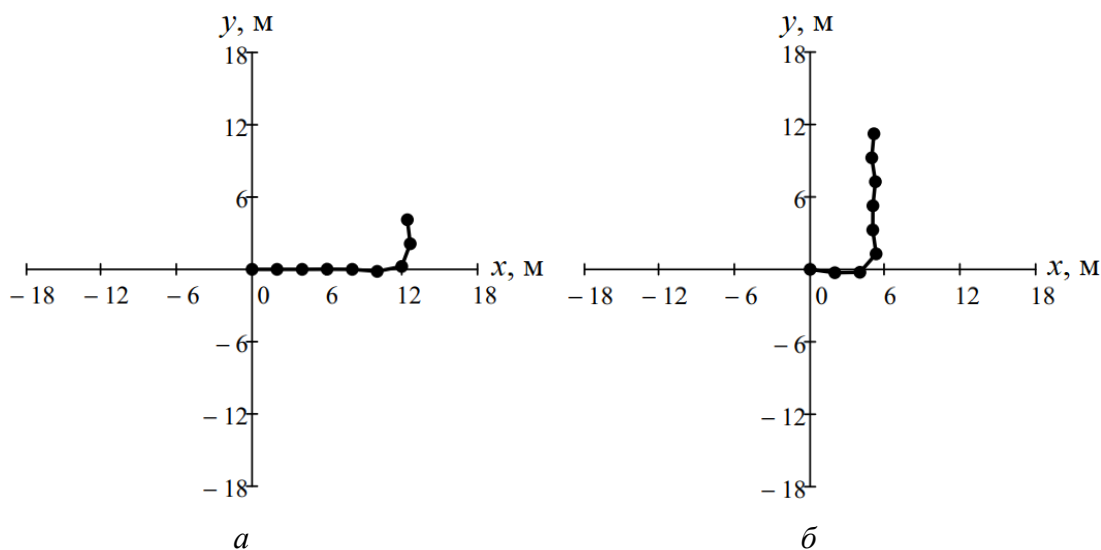
$$Y_8(t) = \bar{Y}_8 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right] \text{ при } 0 \leq t \leq T, \quad X_8(t) = 0 \text{ при } t > T;$$

$$\bar{X}_8 = -150 \text{ Н}, \quad \bar{Y}_8 = 1200 \text{ Н}, \quad T = 1 \text{ с}.$$

Интегрирование при начальных условиях $\varphi_k = 0, \dot{\varphi}_k = 0, \alpha_k = 0, \dot{\alpha}_k = 0, \beta_k = 0, \dot{\beta}_k = 0$ ($k = 1,2...8$) проводилось на интервале $0 \leq t \leq 2T$ при заранее заданном шаге интегрирования по времени 10^{-4} с.

Расчеты выполнены в двух постановках – для полной системы, состоящей из $3n = 24$ нелинейных дифференциальных уравнений (9), (10) для $\varphi_k, \alpha_k, \beta_k$ ($k = 1,2...8$), и для редуцированной системы из $n = 8$ нелинейных дифференциальных уравнений (15) для φ_k ($k = 1,2...8$). Главная цель расчетов – сравнение трудоемкости вычислений при определении параметров движения стержневой системы и непосредственное сравнение φ_k и $\dot{\varphi}_k$ ($k = 1,2...8$) для одинаковых моментов времени.

На рис.3а-г, показаны последовательные положения системы в моменты времени $t = \frac{T}{2} = 0,5$ с, $t = T = 1,0$ с, $t = \frac{3T}{2} = 1,5$ с, $t = 2T = 2,0$ с, соответственно, построенные при решении полной системы уравнений (9), (10).



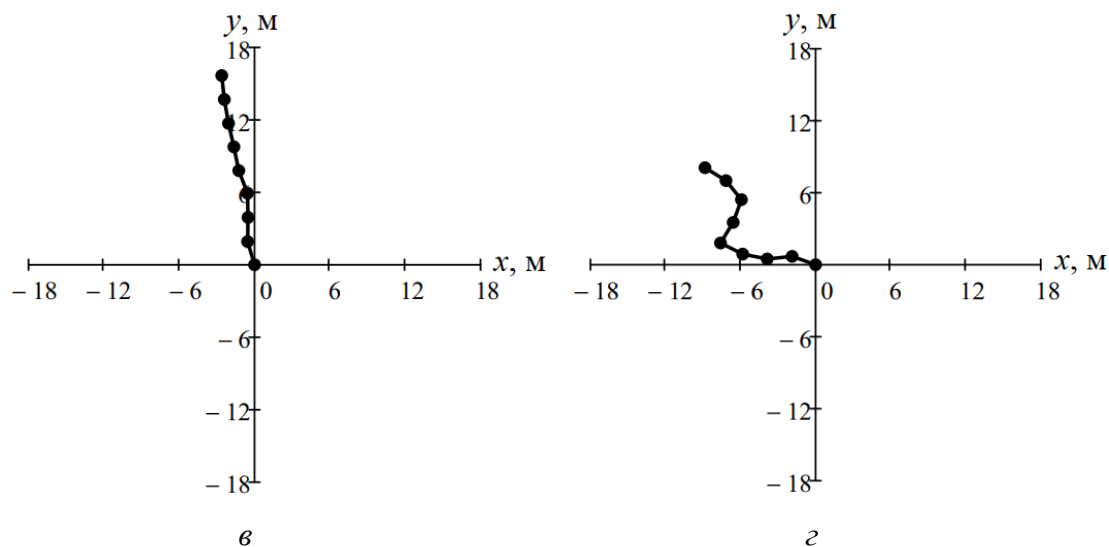


Рис.3. Последовательные положения стержневой системы.

В Таблице 1 приведено сравнение одноименных величин при решении задачи в двух постановках (П – полной, Р – редуцированной) в различные моменты времени. Как видно, φ_k и $\dot{\varphi}_k$, определяющие движения стержней как твердых тел, являются достаточно близкими друг к другу при различных моментах времени. Значения углов α_k и β_k являются весьма малыми; в случаях П и Р близки между собой во время действия управляющего импульса и могут иметь существенные относительные отличия после его окончания при свободных колебаниях. Редуцированная постановка обладает важным преимуществом – требует меньше времени на интегрирование (в среднем в 3-4 раза) при сохранении допустимой точности. Этот алгоритм может быть полезен при проведении предварительных проектировочных расчетов реакций таких стержневых систем при их развертывании.

Таблица 1.

Сравнение результатов расчета.

Параметр системы	Постановка задачи	$t = 0,5$ с	$t = 1,0$ с	$t = 1,5$ с	$t = 2,0$ с
$\dot{\varphi}_2$	П	-0.00950	3.50311	3.12768	0.92900
	Р	-0.00945	3.50803	3.16662	0.98172
$\dot{\varphi}_4$	П	-0.39923	2.54956	1.69934	6.27426
	Р	-0.40050	2.54610	1.64601	6.27792
$\dot{\varphi}_6$	П	5.73717	1.69062	-0.21457	-4.93915
	Р	5.73867	1.69230	-0.22518	-4.95233
$\dot{\varphi}_8$	П	-2.53956	-0.31132	-0.05238	1.34521
	Р	-2.53880	-0.31110	-0.03762	1.35888
φ_2	П	-0.00089	0.01607	1.55280	3.25023
	Р	-0.00089	0.01627	1.55337	3.24869
φ_4	П	-0.00047	1.70235	1.92237	2.65990
	Р	-0.00050	1.70252	1.92242	2.65925
φ_6	П	0.20474	1.47268	1.78593	1.24211
	Р	0.20479	1.47266	1.78564	1.23788
φ_8	П	1.68550	1.48557	1.67493	2.57061

	P	1.68552	1.48558	1.67492	2.56772
α_2	П	$-1.998 \cdot 10^{-7}$	-0.00057	0.00341	0.00059
	P	$-5.591 \cdot 10^{-8}$	-0.00057	0.00344	-0.00025
α_4	П	$5.872 \cdot 10^{-5}$	-0.00097	-0.00285	-0.00519
	P	$5.897 \cdot 10^{-5}$	-0.00097	-0.00266	0.00083
α_6	П	-0.00107	$-2.033 \cdot 10^{-6}$	-0.00019	0.00589
	P	-0.00107	$-6.780 \cdot 10^{-6}$	-0.00030	-0.00071
α_8	П	-0.00076	0.00025	$7.172 \cdot 10^{-5}$	0.00257
	P	-0.00076	0.00024	0.00016	-0.00019
β_2	П	$2.120 \cdot 10^{-6}$	0.00082	-0.00312	-0.00082
	P	$2.268 \cdot 10^{-6}$	0.00082	-0.00316	$-1.743 \cdot 10^{-5}$
β_4	П	$-9.298 \cdot 10^{-5}$	0.00062	0.00250	0.00484
	P	$-9.321 \cdot 10^{-5}$	0.00062	0.00231	-0.00129
β_6	П	0.00136	0.00012	0.00014	-0.00569
	P	0.00136	0.00013	0.00025	0.00098
β_8	П	0.00057	-0.00016	$-4.238 \cdot 10^{-5}$	-0.00274
	P	0.00057	-0.00016	-0.00013	$8.178 \cdot 10^{-5}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Получены уравнения в обобщенных координатах нелинейной динамики плоской стержневой системы, состоящей из произвольного числа упругих на изгиб нерастяжимых стержней, связанных между собой на концах упруговязкими узловыми шарнирами.

2. Рассмотрена задача, которая получается путём редуцирования исходной системы уравнений путём исключения «быстрых переменных», которые представляют собой квазистатический изгиб каждого стержня.

3. Уравнения полной и редуцированной системы при любом числе входящих в них стержневых элементов записаны в матричном виде с аналитическими выражениями всех коэффициентов.

4. Приведён пример решения задачи о реакции стержневой системы на произвольный возмущающий импульс со сравнениями и оценками точности и трудоёмкости численного интегрирования при использовании редуцированной системы нелинейных дифференциальных уравнений.

5. Основным достоинством решения задачи в редуцированной постановке по квазистатическому изгибу является уменьшение в 3-4 раза времени интегрирования системы нелинейных дифференциальных уравнений движения при сохранении приемлемой точности и увеличение интервала времени устойчивого интегрирования для больших систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Светлицкий В.А. *Механика стержней. Часть 2. Динамика*. – М.: Высшая школа, 1987. – 304 с.
2. Светлицкий В.А. *Механика абсолютно гибких стержней*. – М.: Изд-во МАИ, 2001. – 432 с.
3. Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами*. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.

4. Шклярчук Ф.Н. *Нелинейные и линеаризованные уравнения движения упругих космических конструкций* // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – № 1. – С.161-175.
5. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика упругих управляемых конструкций*. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.
6. Паничкин В.И. *Математическое моделирование динамики раскрытия многостворчатой солнечной батареи* // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – №1. – С.177-180.
7. Паничкин В.И. *Математическое моделирование динамики деформирования многостворчатой солнечной батареи в процессе раскрытия* // Изв. РАН. МТТ. – 1992. – №4. – С.183-190.
8. Крылов А.В., Чурилин С.А. *Моделирование раскрытия солнечных батарей различных конфигураций* // Вест. МГТУ. Серия Машиностроение. – 2011. – №1. – С.106-112.
9. Бакулин В.Н., Борзых С.В., Ильясова И.Р. *Математическое моделирование процесса раскрытия многозвенных солнечных батарей* // Вест. МАИ. – 2011. – Т.18. – №3. – С.295-302.
10. Алпатов А.П., Белецкий В.В. и др. *Динамика космических систем с тросовыми и шарнирными соединениями*. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 560 с.
11. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Особенности динамики управляемого функционирования космических тросовых систем на круговых и эллиптических орбитах*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
12. Иванов В.А., Купреев С.А., Ручинский В.С. *Космические тросовые системы*. – М.: Альфа-М, 2014. – 208 с.
13. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. *Динамика плоского движения тела с системой последовательно соединенных упруговязкими шарнирами гибких нерастяжимых стержней при больших углах поворота* // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.109-117.
14. Русских С.В. *Задача нелинейной динамики присоединенной к космическому аппарату упругой стержневой системы в редуцированной квазистатической постановке по изгибу* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.171-185.

REFERENCES

1. Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnej. Chast' 2. Dinamika [Mechanics of rods. Part 2. Dynamics]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1987, 304 p.
2. Svetlitskii V.A. *Mekhanika absolutno gibkikh sterzhnej [The mechanics of absolutely flexible rods]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2001, 432 p.
3. Dokuchaev L.V. *Nelinejnaya dinamika letatel'nykh apparatov s deformiruemymi ehlementami [Nonlinear dynamics of aircraft with deformable elements]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 232 p.
4. Shkliarchuk F.N. *Nelinejnye i linearizovannye uravneniya dvizheniya uprugikh kosmicheskikh konstruksij [Nonlinear and linearized equations of motion of elastic cosmic structures]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela. 1996, No.1, Pp.161-175.

5. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika uprugikh upravlyaemykh konstruksij [Dynamics of elastic controlled structures]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2007, 328 p.
6. Panichkin V.I. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki raskrytiya mnogostvorchatoj solnechnoj batarei [Mathematical modeling of the dynamics of the expansion of a multi-leaf solar battery]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 1992, No.1, Pp.177-180.
7. Panichkin V.I. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki deformirovaniya mnogostvorchatoj solnechnoj batarei v protsesse raskrytiya [Mathematical modeling of the deformation dynamics of a multi-leaf solar battery in the process of unfolding]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 1992, No.4, Pp.183-190.
8. Krylov A.V., Churilin S.A. *Matematicheskoe modelirovanie dinamiki deformirovaniya mnogostvorchatoj solnechnoj batarei v protsesse raskrytiya [Modeling of the disclosure of solar cells of various configurations]*. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Mashinostroenie, 2001, No.1, Pp.106-112.
9. Bakulin V.N., Borzykh S.V., Il'iasova I.R. *Matematicheskoe modelirovanie protsessa raskrytiya mnogozvennykh solnechnykh batarej [Mathematical modeling of the process of opening multi-tier solar cells]*. Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2011, Vol.18, No.3, Pp.295-302.
10. Alpatov A.P., Beletskii V.V. et al. *Dinamika kosmicheskikh sistem s trosovymi i sharnirnymi soedineniyami [Dynamics of space systems with cable and hinged joints]*. Moskva-Izhevsk, NITs "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika", 2007, 560 p.
11. Ivanov V.A., Kupreev S.A., Ruchinskii V.S. *Osobennosti dinamiki upravlyaemogo funkcionirovaniya kosmicheskikh trosovykh sistem na krugovykh i ehllipticheskikh orbitakh [Features of the dynamics of the controlled functioning of space rope systems on circular and elliptical orbits]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo aviatsionnogo instituta, 2016, 160 p.
12. Ivanov V.A., Kupreev S.A., Ruchinskii V.S. *Kosmicheskie trosovye sistemy [Space rope systems]*. Moskva, Al'fa-M, 2014, 208 p.
13. Grishanina T.V., Shkliarchuk F.N. *Dinamika ploskogo dvizheniya tela s sistemoy posledovatel'no soedinennykh uprugovyazkimi sharnirami gibkikh nerastyazhimykh sterzhnej pri bol'shikh uglakh povorota [Dynamics of a plane motion of a body with a system of flexible inextensible rods connected in series by elastic-hinged hinges at large angles of rotation]*. Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2011, No.2, Pp.109-117.
14. Russkikh S.V. *Zadacha nelinejnoj dinamiki prisoedinennoj k kosmicheskomu apparatu uprugoj sterzhnevoj sistemy v redutsirovannoj kvazistaticheskoy postanovke po izgibu [The problem of nonlinear dynamics of an elastic rod system attached to a spacecraft in a reduced quasi-static bending formulation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.171-185.

Поступила в редакцию 19 апреля 2022 года.

Сведения об авторе:

Русских Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., доц., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: sergey.russkih@rambler.ru