

УДК 534.26:539.3

EDN UQGDJW (<https://elibrary.ru/uqgdjw>)

О ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА УПРУГОМ НЕОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ ШАРЕ С АБСОЛЮТНО ТВЁРДЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ*

Бирюков Д.Р.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Представлена математическая постановка задачи дифракции сферической звуковой волны на линейно упругом радиально-неоднородном трансверсально-изотропном шаре с абсолютно твёрдым включением. Шар характеризуется плотностью, упругими константами – компонентами тензора упругости – и внешним и внутренним радиусами. Описанный выше шар помещён в трёхмерное неограниченное пространство, заполненное идеальной жидкостью с определёнными значениями плотности и скорости звука. В постановке описаны входные данные и некоторые их ограничения. Представлен алгоритм решения поставленной задачи дифракции. Алгоритм является частично аналитическим, частично численным. Падающая сферическая волна, рассеянная шаром звуковая волна и упругие волны, распространяющиеся внутри упругого шара, представляются в виде бесконечных сумм. Определение рассеянной шаром волны сводится к определению коэффициентов разложения рассеянного волнового поля в бесконечную сумму. Для определения данных коэффициентов решается краевая задача. Дифференциальные уравнения в данной краевой задаче являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, описывающими волны в упругом шаре и полученными из общих уравнений движения сплошной среды. Данные дифференциальные уравнения дополняются граничными условиями на поверхностях упругого шара. На внешней поверхности граничные условия – это непрерывность скорости, нормального и касательного напряжений. На внутренней поверхности – непрерывность смещений. Решение краевой задачи с данными условиями позволяет вычислить смещения внутри шара при распространении волны и, через них, коэффициенты рассеянной телом звуковой волны. Для демонстрации решения задачи с помощью программной реализации приводятся результаты численных исследований для некоторых частных входных данных.

Ключевые слова: дифракция звука; упругий шар; радиальная неоднородность; трансверсальная изотропность; тензор упругости

ON THE PROBLEM OF A SPHERICAL SOUND WAVE DIFFRACTION BY AN ELASTIC INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC BALL WITH AN ABSOLUTELY SOLID INCLUSION

Birykov D.R.

Tula state university, Tula, Russia

* Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда №18-11-00199, <https://rscf.ru/project/18-11-00199/>.

ABSTRACT

A mathematical formulation of the problem of diffraction of a spherical sound wave by a linearly elastic radially inhomogeneous transversely isotropic ball with an absolutely solid inclusion is presented. The ball is characterized by density, elastic constants - components of the elasticity tensor – and external and internal radii. The sphere described above is placed in a three-dimensional unlimited space filled with an ideal fluid with certain values of density and speed of sound. The statement describes the input data and some of their limitations. An algorithm for solving the posed diffraction problem is presented. The algorithm is partly analytical, partly numerical. An incident spherical wave, a sound wave scattered by a ball, and elastic waves propagating inside an elastic ball are represented as infinite sums. The definition of the wave scattered by the ball is reduced to the determination of the coefficients of the expansion of the scattered wave field into an infinite sum. To determine these coefficients, a boundary value problem is solved. The differential equations in this boundary value problem are ordinary differential equations describing waves in an elastic ball and obtained from the general equations of motion of a continuous medium. These differential equations are supplemented by boundary conditions on the surfaces of an elastic ball. On the outer surface, the boundary conditions are the continuity of the velocity, normal and shear stresses. On the inner surface – continuity of displacements. The solution of the boundary value problem with the given conditions makes it possible to calculate the displacements inside the ball during the propagation of the wave u . through them, the coefficients of the sound wave scattered by the body. To demonstrate the solution of the problem with the help of software implementation, the results of numerical studies for some particular input data are given.

Keywords: sound diffraction; elastic ball; radial inhomogeneity; transversal isotropy; elasticity tensor

ВВЕДЕНИЕ

Задачи дифракции звуковых волн – важный класс задач математической физики. Возможность отыскать закономерность во влиянии параметров тел, рассеивающих акустические волны, на отражённое звуковое поле, имеет непосредственное значение для приложений прикладной математики.

Такие особенности тел, как упругость, неоднородность и анизотропность, играют существенную роль в явлении дифракции, что продемонстрировано во многих работах на эту тему. Внимание в исследованиях на тему неоднородности упругих рассеивающих звук тел часто уделяется покрытию сферических и цилиндрических тел неоднородным слоем. Например, работы [1-3] посвящены дифракции на неоднородных покрытиях шаров. В работе [4] же, к примеру, рассматривается вопрос о прохождении звука через упругую оболочку, наделённую неоднородным покрытием.

Дифракции звука на анизотропных телах тоже посвящён ряд работ. В работе [5] исследуются звуковые волны, проходящие через трансверсально-изотропный неоднородный упругий слой. Работы [6-7] посвящены изучению влияния анизотропии покрытия тела на рассеяние звука.

Текущая работа посвящена дифракции сферической звуковой волны на упругом неоднородном трансверсально-изотропном шаре с абсолютно твёрдым включением.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В текущей работе рассматривается трёхмерное неограниченное пространство с введённой сферической системой координат (r, θ, φ) . В пространство помещён линейно упругий (что означает, что связь его деформаций и напряжений описывается обобщённым законом Гука) радиально-неоднородный трансверсально-изотропный шар. Радиус шара r_1 , центр шара совпадает с центром координат. То есть, координата r точки внутри шара выражает расстояние от данной точки до центра шара (является радиальной координатой). Плотность шара $\rho = \rho(r)$ является непрерывной функцией радиальной координаты. Тензор $L = L(r)$ модулей упругости покрытия – непрерывно дифференцируемая тензорная функция радиальной координаты. Поверхностями изотропии шара являются сферы вида $r = r'$, где $r_0 \leq r' \leq r_1$, где r_0 – радиус внутреннего абсолютно твёрдого включения, находящегося в центре шара.

Независимыми компонентами тензора L являются $\lambda_{11} = \lambda_{11}(r)$, $\lambda_{22} = \lambda_{22}(r)$, $\lambda_{12} = \lambda_{12}(r)$, $\lambda_{23} = \lambda_{23}(r)$, $\lambda_4 = \lambda_4(r)$. Опишем, какие значения компонент тензора L могут быть допустимыми во входных данных задачи. Данный тензор может быть записан в матричной форме

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{23} & \lambda_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_{22} - \lambda_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

Энергия упругой деформации должна оставаться положительной всюду при $r_0 < r < r_1$. Для этого, согласно [8], должны быть положительны все главные миноры матрицы (1). Этот факт эквивалентен системе неравенств

$$\begin{cases} \lambda_{11} > 0 \\ \lambda_4 > 0 \\ \lambda_{22} > \lambda_{23} \\ \lambda_{11}\lambda_{22} > \lambda_{12}^2 \\ \lambda_{11}(\lambda_{22} + \lambda_{23})/2 > \lambda_{12}^2 \end{cases} \quad (2)$$

Для удобства решения задачи вводится также декартова система координат (x, y, z) , связанная со сферической системой координат с помощью следующих соотношений

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$$

Упругий шар с твёрдым включением окружён идеальной жидкостью, заполняющей всё пространство. Жидкость характеризуется плотностью ρ_0 и скоростью звука c_0 . На полуоси $z = r \cos(\varphi) < 0$ вне шара (в координатах $r = r^*$, $\theta = \pi$) расположен точечный источник сферических звуковых волн. Требуется определить волну, рассеянную шаром. Падающая волна характеризуется потенциалом смещения

$$\psi_0 = \frac{A \exp(ikR)}{R}, \quad (3)$$

где A – амплитуда смещения; $k = \frac{\omega}{c_0}$ – волновое число звука в жидкости; ω – круговая частота колебаний в жидкости; t – время; специально введённая координата $R = \sqrt{r^2 + (r^*)^2 - 2rr^* \cos(\theta)}$.

Падающая волна ψ_0 рассеивается на упругом шаре. В результате этого возникает отражённое звуковое поле ψ_s , которое требуется определить. Иллюстрация к постановке задачи приведена ниже на рис.1.

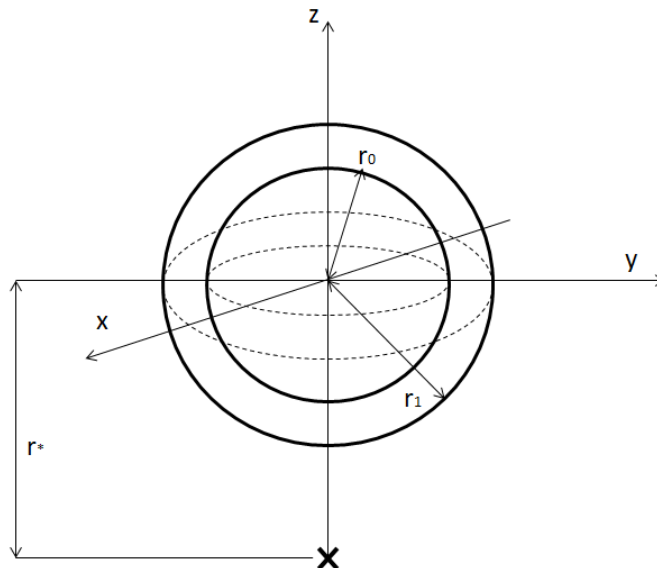


Рис.1. Геометрия задачи. Крестиком обозначена позиция источника падающей волны.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

2.1. Волновое поле в окружающем шар пространстве.

Волна ψ_0 , определяемая формулой (3), представляет собой решение однородного уравнения Гельмгольца [9]

$$\Delta \psi_0 + k^2 \psi_0 = 0.$$

Раскладывая потенциал ψ_0 в ряд по сферическим функциям Бесселя, можно представить его в виде разложения

$$\psi_0 = ikA \cdot \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(kr) h_n(kr^*), & r < r^* \\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta) j_n(kr^*) h_n(kr), & r > r^* \end{cases}, \quad (4)$$

где j_n – сферическая функция Бесселя порядка n ; h_n – сферическая функция Ханкеля первого рода порядка n ; функция P_n – полином Лежандра степени n .

В результате рассеяния падающей волны (4) на упругом шаре с абсолютно твёрдым включением возникает волновое поле ψ . Оно также является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0.$$

Разностью волновых полей ψ и ψ_0 является рассеянное волновое поле ψ_s . Вследствие того факта, что однородное уравнение Гельмгольца является линейным уравнением, рассеянная волна ψ_s также является решением уравнения Гельмгольца

$$\Delta\psi_s + k^2\psi_s = 0. \quad (5)$$

Одним из способов решения однородного уравнения Гельмгольца (5) является метод разделения переменных [10]. В результате его использования можно получить формулу волны ψ_s

$$\psi_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(kr) P_n(\cos(\theta)), \quad (6)$$

где A_n – неизвестные числовые коэффициенты, к определению которых сводится решение задачи.

2.2. Волновое поле в упругом шаре.

Для упругой трансверсально-изотропной сплошной среды (с матрицей упругих констант (1)) верны следующие формулы, связывающие компоненты тензора напряжений с компонентами тензора деформаций

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\sigma_{r\theta} \cos(\theta)}{\sin(\theta)}}{r} = -\omega^2 \rho u_r \\ \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} + 3\sigma_{r\theta} = -\omega^2 \rho u_\theta \end{cases}, \quad (7)$$

Выражения для компонент тензора деформаций

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(u_r + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right) , \\ \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0 \\ \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial r \partial \theta} \right) \end{array} \right. , \quad (8)$$

где u^* определяется выражением $u_\theta = \frac{\partial u^*}{\partial \theta}$. Выражения для компонент тензора напряжений

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \lambda_{11} \varepsilon_{rr} + \lambda_{12} \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \lambda_4 \varepsilon_{r\varphi} = 0 \\ \sigma_{\theta\theta} = \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{22} \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{23} \varepsilon_{\varphi\varphi} , \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda_{12} \varepsilon_{rr} + \lambda_{23} \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda_{22} \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{\theta\varphi} = (\lambda_{22} - \lambda_{23}) \varepsilon_{\theta\varphi} / 2 = 0 \end{array} \right. , \quad (9)$$

Подставив (8)-(9) в (7), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2 \left(1 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \right) \sigma_{rr} + C(\sigma^*)}{r} + \frac{\left(\frac{2\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}} - \lambda_{22} - \lambda_{23} \right) (2u_r + C(u^*))}{r^2} + \\ \quad + \omega^2 \rho u_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma^*}{\partial r} + \frac{\frac{\lambda_{12} \sigma_{rr}}{\lambda_{11}} + 3\sigma^*}{r} + \frac{\left(\lambda_{22} - \frac{2\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}} \right) (2u_r + C(u^*)) - 2\lambda_4 (u_r - u^*)}{r^2} + \\ \quad + \omega^2 \rho u^* = 0 \end{array} \right. , \quad (10)$$

где σ^* и C определяются выражениями

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \sigma_{r\theta} = \frac{\partial \sigma^*}{\partial \theta} \end{array} \right. .$$

Функции u_r , u^* , σ_{rr} , σ^* , в упругом сферическом слое могут быть записаны в виде разложений

$$\left\{ \begin{array}{l} u_r = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(r)}(r) P_n(\cos(\theta)) \\ u^* = \sum_{n=0}^{\infty} u_n^{(\theta)}(r) P_n(\cos(\theta)) \\ \sigma_{rr} = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(r)}(r) P_n(\cos(\theta)) \\ \sigma^* = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^{(\theta)}(r) P_n(\cos(\theta)) \end{array} \right. , \quad (11)$$

Подставив (11) в (10), получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n^{(r)} \\ u_n^{(\theta)} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} \frac{-2\lambda_{12}}{\lambda_{11}r} & \frac{n(n+1)\lambda_{12}}{\lambda_{11}r} \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^{(r)} \\ u_n^{(\theta)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} \\ \sigma_n^{(\theta)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} \\ \sigma_n^{(\theta)} \end{pmatrix}' &= \begin{pmatrix} -\frac{2l}{r^2} - \rho\omega^2 & \frac{n(n+1)l}{r^2} \\ \frac{2(\lambda_4 - s)}{r^2} & \frac{n(n+1)s - 2\lambda_4 - \rho\omega^2}{r^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n^{(r)} \\ u_n^{(\theta)} \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} - 1\right) & n(n+1) \\ -\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} \\ \sigma_n^{(\theta)} \end{pmatrix} \end{aligned} \right. , \quad (12)$$

где $l = \frac{2(\lambda_{12})^2}{\lambda_{11}} - \lambda_{22} - \lambda_{23}$, $s = -2 \cdot \frac{(\lambda_{12})^2}{\lambda_{11}} + \lambda_{22}$.

2.3. Граничные условия для краевой задачи.

Полученные уравнения дополняются граничными условиями. Рассмотрим теперь краевые условия на внешней и внутренней границах упругого сферического слоя. На внешней границе слоя $r = r_1$ должно выполняться условие равенства смещений частиц жидкости и частиц упругого сферического слоя, которое можно свести к формуле

$$A_n = \left(u_n^{(r)}(r_1) - \gamma_n k j_n'(kr_1) \right) / \left(kh_n'(kr_1) \right), \quad (13)$$

где коэффициент γ_n получен из формулы (4)

$$\gamma_n = ikA(-1)^n (2n+1) P_n(\cos\theta) h_n(kr^*).$$

Следующие условия на внешней границе сферического покрытия $r = r_1$ есть условия равенства нормального напряжения и акустического давления и отсутствия касательного напряжения, которые могут быть записаны в матричной форме в виде (для каждого n)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \sigma_n^{(r)} \\ \sigma_n^{(\theta)} \end{pmatrix} \Big|_{r=r_1} + \begin{pmatrix} \frac{\rho_0 \omega^2 h_n(kr)}{kh_n'(kr)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big|_{r=r_1} \cdot \begin{pmatrix} u_n^{(r)} \\ u_n^{(\theta)} \end{pmatrix} \Big|_{r=r_1} = \\ = \begin{pmatrix} -\frac{\rho_0 \omega^2 \gamma_n j_n'(kr) h_n(kr)}{h_n'(kr)} \\ 0 \end{pmatrix} \Big|_{r=r_1} \end{aligned} \quad (14)$$

На внутренней границе $r = r_0$ отсутствует смещение частиц

$$\begin{pmatrix} u_n^{(r)} \\ u_n^{(\theta)} \end{pmatrix} \Big|_{r=r_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения (12) дополняются граничными условиями (14)-(15), формируя, таким образом, краевую задачу. Её решение каким-либо способом позволяет определить функции $u_n^{(r)}(r_1)$, характеризующие смещения в упругом неоднородном анизотропном шаре. После их определения можно вычислить коэффициенты A_n , воспользовавшись формулой (13). Таким образом, определена рассеянная волна (6).

2.4. Дальняя зона акустического поля.

При исследовании общей картины рассеяния удобнее рассматривать не поле рассеянной волны в целом, а только его дальнюю зону, характеризующую неравенством $kr \gg 1$. Используя асимптотическую формулу для функции Ханкеля $h_n(kr)$, применимую именно при $kr \gg 1$, можно (6) привести к виду

$$\psi_s = \exp\left(\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)i\right) \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-i)^{n+1/2} P_n(\cos(\theta)).$$

Множитель последней формулы, представляющий собой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (-i)^{n+1/2} P_n(\cos(\theta)),$$

называется амплитудой рассеяния и будет обозначаться

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (-i)^{n+1/2} P_n(\cos(\theta)). \quad (16)$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Входные данные.

Алгоритм решения задачи реализован программно в системе компьютерной алгебры Maple. С помощью написанной в Maple программы проведены численные исследования. Сперва приведём входные данные.

Плотность шара принимается равной $\rho_0 = 1450 \cdot \mu(r)$ кг/м³, где $\mu(r)$ – функция, характеризующая неоднородность шара и описываемая далее. Соотношение радиусов шара и включения описывается как $r_1 = 1,2 \cdot r_0$. Шар окружён водой с плотностью $\rho_0 = 1000$ кг/м³ и скорость звука $c_0 = 1485$ м/с. Источник падающей волны расположен в точке с координатами $r = r^* = 100$ м, $\theta = \pi$. Значения модулей упругости, удовлетворяющие условиям (2), выбраны следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda_{23} &= 3,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \quad \lambda_4 = 3,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \\ \lambda_{11} &= 4 \cdot 10^9 \cdot \mu(r) \text{ Н/м}^2, \quad \lambda_{22} = 4,8 \cdot 10^9 \cdot \mu(r) \text{ Н/м}^2, \quad \lambda_{12} = 3,8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2, \end{aligned}$$

Для демонстрации влияния неоднородности и анизотропии на рассеяние рассматриваются два варианта функции плотности $\mu(r)$

$$\mu(r) = \mu^{(1)}(r) = 1, \quad (17)$$

$$\mu(r) = \mu^{(2)}(r) = \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} + \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Краевая задача решается в данных численных исследованиях с помощью метода конечных разностей (метода сеток). Число учитываемых слагаемых в ряде для рассеянной волны (то есть, число решаемых краевых задач) – 10.

3.2. Графики амплитуд рассеяния.

Следующие далее рис.2-4 изображают графики абсолютной величины амплитуды рассеяния (16) для определённого волнового размера шара. Сплошной график на каждом из рис.2-4 соответствует функции плотности (17), точечный же – функции плотности (18). На графиках не указано направление падения первичной волны, так как положение источника фиксировано и соответствует рис.1.

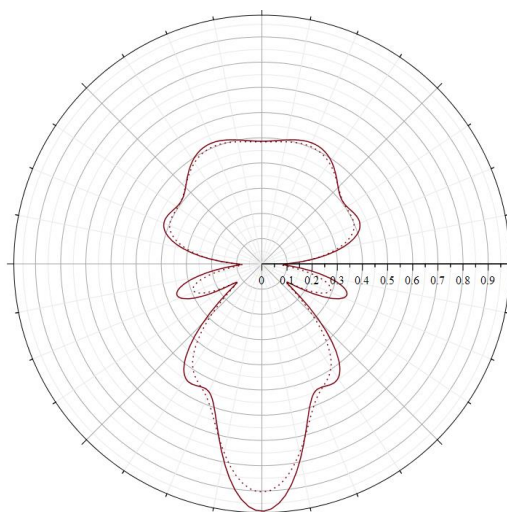


Рис.2. Графики амплитуды рассеяния для $kr_1 = 4$.

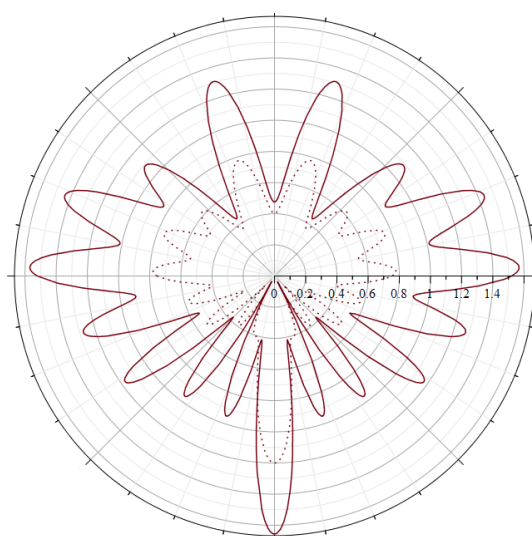


Рис.3. Графики амплитуды рассеяния для $kr_1 = 9$.

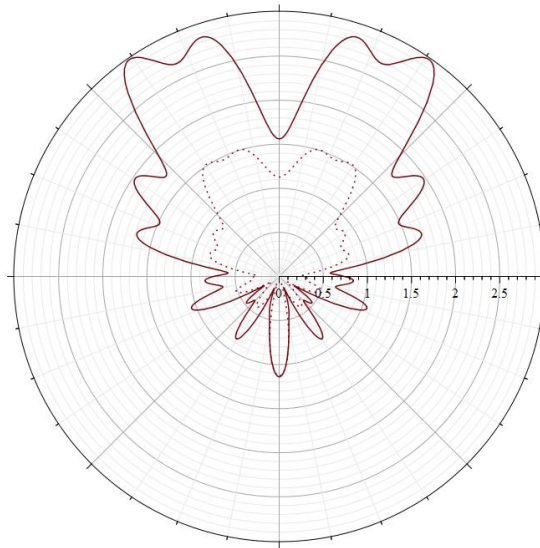


Рис.4. Графики амплитуды рассеяния для $kr_1 = 15$.

Как можно видеть из анализа диаграмм на рис.2-4, анизотропия упругого тела (в данном случае шара) и неоднородность характеристик, отвечающих за данную анизотропию, существенно влияет на то, как тело рассеивает акустические волны. Влияние анизотропии и неоднородности на дифракцию заметно при различных волновых размерах тела. В данном численном исследовании были рассмотрены волновые размеры $kr_1 = 4$, $kr_1 = 9$, $kr_1 = 15$.

Графики амплитуды рассеяния волны на рис.2-4 демонстрируют существенную зависимость рассеяния от характера неоднородности и анизотропии сферического покрытия. При изменении различных параметров шара, покрытия и падающей волны характер дифракции может меняться от неоднородности и анизотропии более или менее существенным образом, и данная зависимость является нетривиальной. Тем не менее, звукоотражающие свойства сферического тела можно изменять путём изменения характера неоднородности и анизотропии сферического покрытия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Толоконников Л.А. *Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием* // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т.78. – Вып.4. – С.519-526.
2. Толоконников Л.А. *Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием* // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т.79. – Вып.5. – С.663-673.
3. Толоконников Л.А., Родионова Г.А. *Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием* // Известия ТулГУ. Сер. Естественные науки. – 2014. – Вып.3. – С.131-137.
4. Иванов В.И., Скобельцын С.А. *Влияние неоднородного покрытия на прохождение звука через упругую оболочку* // Известия ТулГУ. Сер. Естественные науки. – 2013. – Вып.3. – С.179-192.

5. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. *Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой* // Акустический журнал. – 1990. – Т.36. – №4. – С.740-744.
6. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. *Рассеяние звуковых волн трансверсально-изотропным неоднородным цилиндрическим слоем* // Акустический журнал. – 1995. – Т.41. – №1. – С.134-138.
7. Толоконников Л.А. *Дифракция звуковых волн на неоднородном анизотропном полом цилиндра* // Оборонная техника. – 1998. – №4-5. – С.11-14.
8. Федоров Ф.И. *Теория упругих волн в кристаллах*. – М.: Наука, 1965. – 388 с.
9. Шендеров Е.Л. *Волновые задачи гидроакустики*. – Л.: Судостроение, 1972. – 352 с.
10. Кошляков Н.С. *Уравнения в частных производных математической физики*. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

REFERENCES

1. Tolokonnikov L.A. *Rasseyanie ploskoj zvukovoj volny uprugim sharom s neodnorodnym pokrytiem [Scattering of a Plane Sound Wave by an Elastic Ball with an Inhomogeneous Coating]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2014, Vol.78, No.4, Pp.519-526.
2. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya tsilindricheskikh zvukovykh voln na uprugoj sfere s neodnorodnym pokrytiem [Diffraction of Cylindrical Sound Waves by an Elastic Sphere with an Inhomogeneous Coating]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 2015, Vol.79, No.5, Pp.663-673.
3. Tolokonnikov L.A., Rodionova G.A. *Difraktsiya sfericheskoy zvukovoj volny na uprugom share s neodnorodnym pokrytiem [Diffraction of a spherical sound wave on an elastic ball with an inhomogeneous coating]*. Izvestiya TulGU. Seriya Estestvennye nauki, 2014, No.3, Pp.131-137.
4. Ivanov V.I., Skobeltsyn S.A. *Vliyaniye neodnorodnogo pokrytiya na prokhozhdenie zvuka cherez upruguyu obolochku [Influence of an inhomogeneous coating on sound transmission through an elastic shell]*. Izvestiya TulGU. Seriya Estestvennye nauki, 2013, No.3, Pp.179-192.
5. Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A. *Prokhozhdenie zvukovykh voln cherez transversal'no-izotropnyj neodnorodnyj ploskij sloj [Transmission of sound waves through a transversally isotropic inhomogeneous flat layer]*. Akusticheskij zhurnal, 1990, Vol.36., No.4., Pp.740-744.
6. Skobeltsyn S.A., Tolokonnikov L.A. *Rasseyaniye zvukovykh voln transversal'no-izotropnym neodnorodnym tsilindricheskim sloem [Scattering of sound waves by a transversally isotropic inhomogeneous cylindrical layer]*. Akusticheskij zhurnal, 1995., Vol.41, No.1., Pp.134-138.
7. Tolokonnikov L.A. *Difraktsiya zvukovykh voln na neodnorodnom anizotropnom polom tsilindre [Diffraction of sound waves by an inhomogeneous anisotropic hollow cylinder]*. Oboronnaya tekhnika, 1998, No.4-5, Pp.11-14.
8. Fedorov F.I. *Teoriya uprugikh voln v kristallakh [Theory of elastic waves in crystals]*. Moskva, Nauka, 1965, 388 p.
9. Shenderov E.L. *Volnovye zadachi gidroakustiki [Wave Problems of Hydroacoustics]*. Leningrad, Sudostroenie, 1972, 352 p.

10. Koshlyakov N.S. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki [Equations in partial derivatives of mathematical physics]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1970, 712 p.

Поступила в редакцию 16 марта 2022 года.

Сведения об авторе:

Бирюков Данила Русланович – асп., Тульский государственный университет, г. Тула, Россия;
e-mail: danilabirukov@rambler.ru