

УДК 534.1  
EDN PQPUAJ (<https://elibrary.ru/pqpuaj>)



## О МОДЕЛИРОВАНИИ СУБКОЛЕБАНИЙ ДВУХ ПРОВОДОВ, СВЯЗАННЫХ РАСПОРКАМИ\*

Шавня Р.А.<sup>1</sup>, Курдюмов Н.Н.<sup>2</sup>, Данилин А.Н.<sup>1</sup>, Фельдштейн В.А.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

<sup>3</sup>АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения», г. Королёв, Россия

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается система из двух проводов, связанных дистанционными распорками в виде жестких стержней. На провода действует ветровой поток так, что один провод находится в аэродинамическом (спутном) следе другого, что приводит к возникновению автоколебательного процесса. Следовая связь между проводами моделируется с помощью модифицированной теории Симпсона с использованием эмпирических данных Блевинса и Прайса.

Дифференциальные уравнения колебаний выводятся на основе принципа возможных перемещений в обобщенных координатах с учётом нелинейностей упругих и инерционных сил, а также аэродинамических сил в спутном следе. Для дискретизации по пространственным координатам используется метод конечных элементов с выбором линейных и тригонометрических функций формы в качестве базисных.

Сила натяжения и продольная деформация провода считается в пределах элемента постоянными величинами. Зависимость деформации от поперечных перемещений определяется квадратичным приближением. Для получения конечных выражений для аэродинамических сил используются полиномиальные аппроксимации экспериментальных данных, а также линейризация выражений для этих сил, записанных в локальных (элементных) координатах.

**Ключевые слова:** провода; субколебания; аэродинамический след; метод Ритца; метод конечных элементов

## ON MODELING THE SUB-VIBRATIONS OF TWO CONDUCTORS CONNECTED BY SPACERS

Shavnya R.A.<sup>1</sup>, Kurdyumov N.N.<sup>2</sup>, Danilin A.N.<sup>1</sup>, Feldstein V.A.<sup>3</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

<sup>3</sup>*JSC "Central Research Institute for Machine Building", Korolev, Russia*

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Соглашение 22-19-00678).

## ABSTRACT

A system of two conductors connected by spacers in the form of rigid rods is considered. The conductors are affected by the wind flow so that one conductor is in the aerodynamic (satellite) wake of the other, which leads to the emergence of a self-oscillating process. The wake interaction between conductors is modeled with a modified Simpson theory using Blevins and Princes empirical data.

Differential equations are derived based on the principle of possible displacements in generalized coordinates, taking into account the nonlinearities of elastic and inertial forces, as well as aerodynamic forces in the wake. For discretization by spatial coordinates, the finite element method is used with the choice of linear and trigonometric shape functions as the basis. The tension force and the longitudinal deformation of the conductor are considered constant values within the element. The dependence of deformation on transverse displacements is determined by a quadratic approximation. To obtain final expressions for aerodynamic forces, polynomial approximations of known experimental data are used, as well as linearization of expressions for these forces written in local (elemental) coordinates.

**Keywords:** conductors; sub-vibrations; aerodynamic wake; Ritz method; finite element method

## ВВЕДЕНИЕ

Научный и практический интерес представляют задачи о взаимодействии тросовых систем с воздушным или жидкостным потоком. К таким системам относятся воздушные линии электропередачи (ЛЭП), провода которых испытывают аэроупругих колебания в широком диапазоне частот. Эти колебания условно разделяют на три группы в зависимости от природы их возникновения и, как следствие, частотного диапазона. Различают эолову вибрацию, пляску (галопирование) и субколебания.

В наименьшей степени изучен феномен субколебаний. Эти колебания свойственны исключительно проводам расщепленных фаз воздушных ЛЭП, которые стали вводить в эксплуатацию в 30-40 годы прошлого столетия. При устойчивом ветре, дующем поперек трассы воздушной ЛЭП, один провод располагается в аэродинамическом (спутном) следе другого, как показано на рис.1.

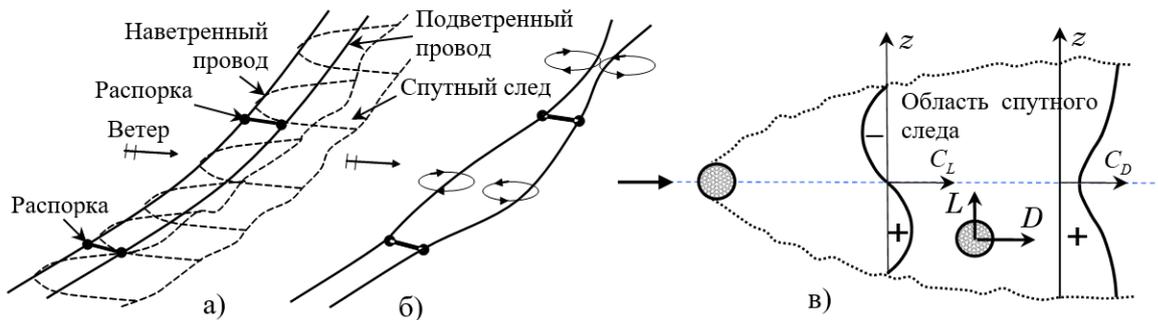


Рис.1. Субколебания проводов двухфазной линии: а) подветренный провод в спутном следе от наветренного; б) пример индуцированных спутным следом колебаний; в) характер распределений аэродинамических коэффициентов по сечениям спутного следа.

Изменения аэродинамической подъемной силы и силы лобового сопротивления, воздействующие на подветренный провод, приводят

к зарождению и развитию автоколебательного процесса. В процесс колебаний втягивается и наветренный провод из-за наличия дистанционных внутрифазных распорок.

В 70-80 гг. прошлого столетия появились первые научные работы, посвященные субколебаниям, где были отмечены многочисленные факты износа и разрушения проводов в местах крепления арматуры и других устройств. Основополагающие экспериментальные и теоретические результаты отражены в работах [1-10].

Эксперименты показывают, что подветренный провод под действием упругих и аэродинамических сил совершает колебания в спутном следе относительно его условной оси. На провод в следе действуют сила лобового сопротивления  $D$ , направленная в направлении спутного следа, и подъемная сила  $L$ , направленная по нормали к  $D$ , как показано на рис.1в. Их распределения по сечениям следа зависят от распределений соответствующих аэродинамических коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$ .

Природа возникновения силы лобового сопротивления понятна и хорошо изучена. Лобовое сопротивление складывается из сил касательного (тангенциального) трения, направленных вдоль поверхности тела, и сил давления, направленных по нормали к поверхности. Однако происхождение подъемной силы до сих пор остается предметом дискуссий.

Одно из объяснений основано на том, что след представляет собой область пониженного давления и, как следствие, на подветренный провод начинают действовать силы давления, направленные к осевой линии следа [11]. Другая гипотеза основана на том, что ослабление и диффузия спутного следа по его границам обуславливают приток внутрь следа воздушных масс с более высокой скоростью. Этот поток вызывает наклон вектора силы сопротивления к центру следа, что приводит к кажущемуся возникновению подъемной силы, направленной к оси следа [12,13].

Существует также гипотеза, авторы которой считают, что основной причиной появления подъемной силы, действующей на подветренный провод в спутном следе, является циркуляция скорости потока, причем сама эта циркуляция появляется под действием завихренности, то есть определенной системы минивихрей воздушного потока, проходящего через зону пограничного слоя [9,14].

Следует отметить, что существующие гипотезы трудно проверить из-за сильного искажения воздушного потока в следе, вызванного присутствием движущегося в нём провода. До сих пор испытания в аэродинамической трубе являются единственным надежным источником информации о нагрузках, вызванных спутным следом.

Экспериментальные результаты по измерениям аэродинамических сил в спутном следе получены многими авторами. Прежде всего, следует отметить работы Симпсона (Simpson A.) [15], Прайса (Price S.J.) [8], Уордлоу (Wardlaw R.L.) и др. [16], Диана (Diana G.) [17,18] и др., которые внесли основной вклад в измерение и изучение нагрузок, передаваемых на гладкие цилиндры, гладкие и многожильные провода в аэродинамическом следе.

При моделировании колебаний проводов в спутном следе важно полагаться на достоверные и максимально полные аэродинамические данные. Среди известных в литературе наибольший интерес представляют результаты исследований Диана и Прайса, которые представили не только результаты

обширных экспериментальных исследований обтекания гладких цилиндров, но и аналитические аппроксимации для аэродинамических коэффициентов для достаточно больших областей следа и при различных скоростях обтекания. Необходимо также отметить результаты исследований EPRI (The Electric Power Research Institute, Inc.) [4], посвященные измерению нагрузок в следе от проводов серии Chukar.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель формулируется на основе метода конечных элементов. Для описания локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Ритца с выбором линейных и тригонометрических функций в качестве базисных.

Рассматривается аэроупругая система, состоящая из двух проводов, соединенных внутрифазными дистанционными распорками. Распорки моделируются как абсолютно жесткие невесомые стержни и рассматриваются как голономные связи, наложенные на упругую систему. Сила натяжения провода (тяжение), так же, как и его деформация растяжения, считаются в пределах элемента постоянными величинами.

Следовая связь между проводами моделируется с помощью модифицированной теории Симпсона [15,19] с использованием эмпирических данных Блевинса [1] и Прайса [8].

В качестве обобщенных координат принимаются абсолютные перемещения и углы закручивания узловых сечений, а также коэффициенты тригонометрических разложений по синусам для локальных перемещений и углов закручивания в пределах каждого элемента [20-22].

Уравнения движения проводов записываются в обобщенных координатах с нелинейными упругими, инерционными и аэродинамическими силами. Начальная конфигурация определяется из решения статических уравнений равновесия.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа возможных перемещений

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_m = 0, \quad (1)$$

где  $\delta U$  – вариация потенциальной энергии системы;  $\delta A_p$ ,  $\delta A_m$  – вариации работы внешних и инерционных сил.

### 1.1. Аппроксимация перемещений и деформационные соотношения.

Считается, что провод обладает упругостью только на растяжение и кручение с постоянными по длине жёсткостями  $EF$  и  $GJ_t$  соответственно. Начальное удлинение провода в пролёте ЛЭП записывается в виде

$$\Delta^\circ = L(1 + \alpha T) - L, \quad (2)$$

где  $L$  – расстояние между точками подвеса,  $L^\circ$  – начальная (монтажная) длина провода без учёта упругой деформации,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $T$  – приращение температуры по отношению к нормальной.

Вследствие значительного натяжения проводов в пролёте между опорами углы поворота поперечных сечений из плоскости начального положения считаются

малыми. Это позволяет связать каждый конечный элемент с локальной (элементной) системой координат  $\tilde{O}xyz$  так, чтобы локальные оси при движении оставались параллельными соответствующим осям глобальной (инерциальной) координатной системы  $OXYZ$ .

Локальные перемещения и угол поворота сечений провода в пределах конечного элемента длины  $l$  представляются по методу Ритца в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (u_1 - u_0)x/l, \quad \tilde{\varphi} = (\varphi_1 - \varphi_0)x/l + \sum_{i=1}^n p_i \sin(i\pi x/l), \\ \tilde{v} &= (v_1 - v_0)x/l + \sum_{i=1}^n q_i \sin(i\pi x/l), \quad \tilde{w} = (w_1 - w_0)x/l + \sum_{i=1}^n r_i \sin(i\pi x/l). \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u_k(t), v_k(t), w_k(t)$  ( $k=0,1$ ) – граничные значения глобальных координат (вдоль  $OX, OY, OZ$  соответственно) и угла поворота при  $x=0$  ( $k=0$ ) и  $x=l$  ( $k=1$ ), которые принимаются в качестве обобщённых координат. Обобщёнными координатами являются также коэффициенты  $q_i(t), r_i(t), p_i(t)$ , определяющие внутренние степени свободы конечного элемента по синусоидальным формам.

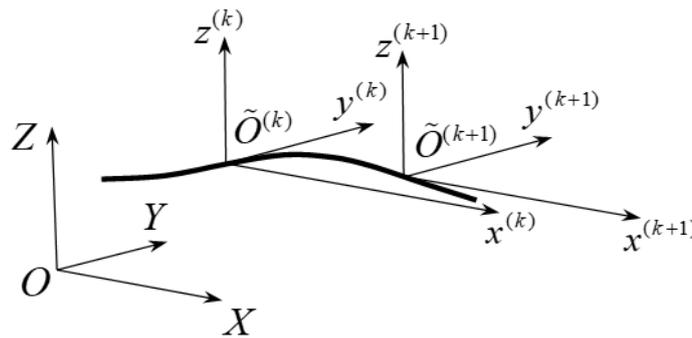


Рис.2. Глобальная и локальные координатные системы для двух соседних элементов с номерами  $k$  и  $k+1$ .

Глобальные координаты и угол поворота произвольного сечения провода записываются в виде

$$u = u_0 + \tilde{u}, \quad v = v_0 + \tilde{v}, \quad w = w_0 + \tilde{w}, \quad \varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}, \quad (4)$$

где  $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}, \tilde{\varphi}$  считаются величинами малыми.

Пусть  $N$  и  $\varepsilon$  – сила тяжения (натяжения) провода и его продольная деформация. В квадратичном приближении  $\varepsilon = u' + 1/2(v'^2 + w'^2)$ . Величина  $N$  в пределах элемента считается постоянной и равной  $N = EF(\varepsilon - \Delta^\circ/L)$ . Откуда следует, что в пределах элемента деформация  $\varepsilon$  также будет величиной постоянной и равной

$$\varepsilon = \frac{1}{l} \left\{ u_1 - u_0 + \frac{1}{2l} \left[ (v_1 - v_0)^2 + (w_1 - w_0)^2 + \frac{\pi^2}{2} \sum_{i=1}^n i^2 (q_i^2 + r_i^2) \right] \right\}. \quad (5)$$

## 1.2. Вариации потенциальной энергии, инерционных и гравитационных сил.

Потенциальная энергия определяется с учётом (2), (5) в виде

$$U = \frac{IEF}{2} \left( \varepsilon - \frac{\Delta^\circ}{l} \right)^2 + \frac{GJ}{2l} \left[ (\varphi_1 - \varphi_0)^2 + \frac{\pi^2}{2} \sum_k k^2 p_k^2 \right]. \quad (6)$$

Тогда вариация

$$\begin{aligned} \delta U = & \sum_{k=0}^1 \left( \frac{\partial U}{\partial u_k} \delta u_k + \frac{\partial U}{\partial v_k} \delta v_k + \frac{\partial U}{\partial w_k} \delta w_k + \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} \delta \varphi_k \right) + \\ & + \sum_i \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial U}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial U}{\partial p_i} \delta p_i \right). \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_k} = & -(-1)^k N, \quad \frac{\partial U}{\partial v_k} = -(-1)^k N \frac{v_1 - v_0}{l}, \quad \frac{\partial U}{\partial w_k} = -(-1)^k N \frac{w_1 - w_0}{l}, \\ \frac{\partial U}{\partial \varphi_k} = & -(-1)^k \frac{GJ}{l} (\varphi_1 - \varphi_0); \\ \frac{\partial U}{\partial q_i} = & Nq_i \mu_i, \quad \frac{\partial U}{\partial r_i} = Nr_i \mu_i, \quad \frac{\partial U}{\partial p_i} = \frac{GJ}{l} \mu_i p_i; \quad k = 0, 1; \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Пусть  $m$  – погонная масса,  $y_*$ ,  $z_*$  – координаты центра масс сечения в системе  $\tilde{O}xyz$ ,  $r_*^2$  – квадрат радиуса инерции. Тогда вариация работы инерционных сил

$$\begin{aligned} \delta A_m = & - \int_0^l m \left[ \ddot{u} \delta u + (\ddot{v} - y_* \ddot{\varphi} - z_* \ddot{\varphi}^2) \delta v + (\ddot{w} + z_* \ddot{\varphi} - y_* \ddot{\varphi}^2) \delta w + \right. \\ & \left. + (-y_* \ddot{v} + z_* \ddot{w} + r_*^2 \ddot{\varphi}) \delta \varphi \right] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражение (8) интегрируется с использованием функций формы (3). В итоге

$$\begin{aligned} \delta A_m = & F_0^u \delta u_0 + F_1^u \delta u_1 + F_0^v \delta v_0 + F_1^v \delta v_1 + F_0^w \delta w_0 + F_1^w \delta w_1 + \\ & + F_0^\varphi \delta \varphi_0 + F_1^\varphi \delta \varphi_1 + \sum_{i=1}^n (F_i^q \delta q_i + F_i^r \delta r_i + F_i^p \delta p_i). \end{aligned} \quad (9)$$

где обобщённые силы

$$\begin{aligned} F_0^u = & \frac{ml}{3} \left( \ddot{u}_0 + \frac{\ddot{u}_1}{2} \right), \quad F_1^u = \frac{ml}{3} \left( \frac{\ddot{u}_0}{2} + \ddot{u}_1 \right); \\ F_0^v = & ml \left\{ \left[ \frac{1}{3} (\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\varphi}_0) + \frac{1}{6} (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\varphi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\ & \left. + \dot{\varphi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\varphi}_1 + \frac{\dot{\varphi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1^v &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6}(\ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3}(\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\
F_0^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{3}(\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6}(\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( \dot{\phi}_1 + \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\
F_1^w &= ml \left\{ \left[ \frac{1}{6}(\ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3}(\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \left[ \frac{1}{3} \left( 2\dot{\phi}_1 - \frac{\dot{\phi}_0}{2} \right) - \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n (-1)^i \frac{\dot{p}_i}{i} \right] \right\}, \\
F_0^\varphi &= ml \left[ \frac{1}{3}(-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{6}(-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right], \\
F_1^\varphi &= ml \left[ \frac{1}{6}(-y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0) + \frac{1}{3}(-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right]; \\
F_i^q &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} \left[ \ddot{v}_0 - y_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{v}_1 - y_* \ddot{\phi}_1) \right] + \frac{1}{2} (\ddot{q}_i - y_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^r &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} \left[ \ddot{w}_0 + z_* \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (\ddot{w}_1 + z_* \ddot{\phi}_1) \right] + \frac{1}{2} (\ddot{r}_i + z_* \ddot{p}_i) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{\phi}_0 \sum_{i=1}^n \left[ -2\dot{\phi}_1 \frac{(-1)^i}{i\pi} + \frac{\dot{\phi}_0}{i\pi} (1 + (-1)^i) + \dot{p}_i \right] \right\}, \\
F_i^p &= ml \left\{ \frac{1}{i\pi} \left[ -y_* \ddot{v}_0 + z_* \ddot{w}_0 + r_*^2 \ddot{\phi}_0 - (-1)^i (-y_* \ddot{v}_1 + z_* \ddot{w}_1 + r_*^2 \ddot{\phi}_1) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (-y_* \ddot{q}_i + z_* \ddot{r}_i + r_*^2 \ddot{p}_i) \right\}.
\end{aligned}$$

Если  $g$  – ускорение свободного падения, то вариация работы гравитационной силы, направленной вдоль оси  $OZ$ , равна

$$\delta A_g = -mg \int_0^l \delta w dx = G_0^w \delta w_0 + G_1^w \delta w_1 + \sum_{i=1}^n G_i^r \delta r_i, \quad (10)$$

где  $G_0^w = G_1^w = -mgl/2$ ,  $G_i^r = -mgl[1 - (-1)^i]/i\pi$ .

### 1.3. Аэродинамические силы и их вариации.

Остановимся более подробно на вычислении вариации работы аэродинамических сил. Рассмотрим два провода – наветренный, на который воздействует невозмущённый воздушный поток со скоростью  $V_0$ , и подветренный, находящийся в спутном следе от наветренного провода. Наветренный провод будем обозначать цифрой 1, подветренный – цифрой 2. Кинематические и силовые величины, относящиеся к проводам, будем снабжать соответственно верхними индексами (1) или (2), как это показано на рис.3.

В начальном (статическом) состоянии пересечём провода плоскостью  $\Pi$  параллельно плоскости  $OYZ$  на некотором расстоянии  $x$  от начала координат. Будем считать, что поперечные сечения проводов, принадлежащие  $\Pi$  в начальном состоянии, при движении остаются в этой плоскости.

В плоскости  $\Pi$  введём поточную систему координат  $\check{O}\check{y}\check{z}$ , совмещая начало координат  $\check{O}$  с центром наветренного провода и направляя ось  $\check{O}\check{y}$  по направлению вектора скорости набегающего потока  $\mathbf{V}^{(1)}$ , как показано на рис.3. В дальнейшем будем пользоваться безразмерными координатами  $\eta = \check{y}/d$ ,  $\xi = \check{z}/d$ , где  $d$  – диаметр провода.

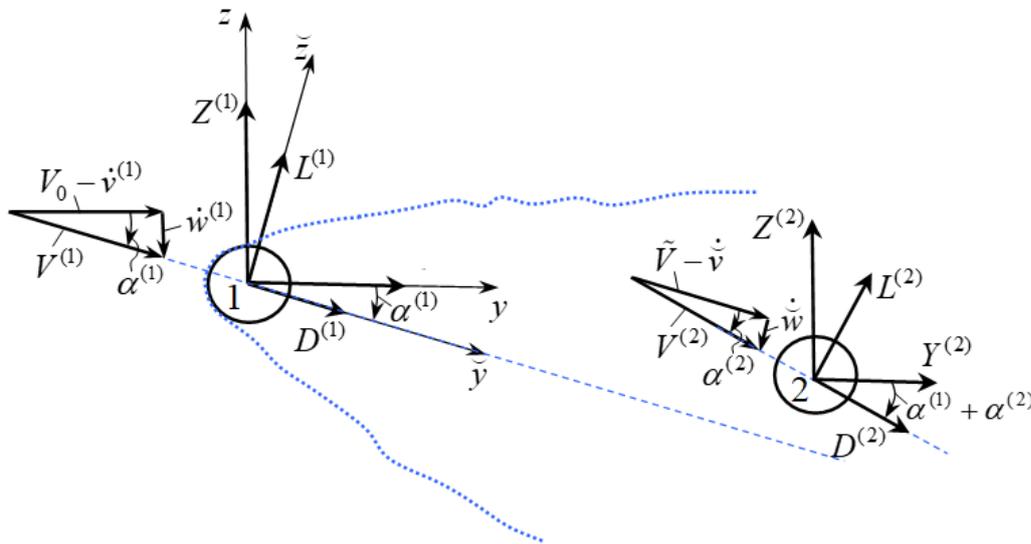


Рис.3. Компоненты скоростей набегающих потоков и аэродинамических сил.

В спутном следе средняя скорость воздушного потока меньше скорости свободно набегающего (ветрового) потока. Следуя Р. Блевинсу, это уменьшение в следе может быть приближённо описано эмпирической функцией.

В результате экспериментальных исследований Блевинсом установлено, что в расчётах субколебаний допустимо использовать следующее допущение: подветренный провод обтекается воздушным потоком, вектор скорости которого

$\tilde{V}$  коллинеарен вектору скорости свободного потока  $V^{(1)}$  и определяется выражением

$$\tilde{V} = V^{(1)} \cdot \Psi(\eta, \xi), \tag{11}$$

где скалярная функция распределения

$$\Psi(\eta, \xi) = 1 - \psi(\eta, \xi) \sqrt{\frac{\psi(\eta, \xi)}{\eta + 6}}, \quad \psi(\eta, \xi) = C_{Dmax} \exp\left(-\frac{\xi^2}{0,23C_{Dmax}(\eta + 6)}\right), \tag{12}$$

$C_{Dmax}$  – коэффициент лобового сопротивления для наветренного провода; дальнейших вычислениях будем считать его равным 1.2, как для гладкого цилиндра.

Эксперименты показывают, что подветренный провод под действием упругих и аэродинамических сил совершает колебания в спутном следе относительно его условной оси. На провод в следе действуют сила лобового сопротивления  $D$ , направленная в направлении спутного следа, и подъемная сила  $L$ , направленная к условной оси следа по нормали к  $D$ . Их распределения по сечениям следа зависят от распределений соответствующих аэродинамических коэффициентов  $C_D$  и  $C_L$ .

В работе далее используются данные Прайса, частично отражённые на рис.4, где показаны распределения  $C_D(\eta, \xi)$  и  $C_L(\eta, \xi)$  для потока с  $Re = 3.58 \cdot 10^4$  и интенсивностью турбулентности 1.5%.

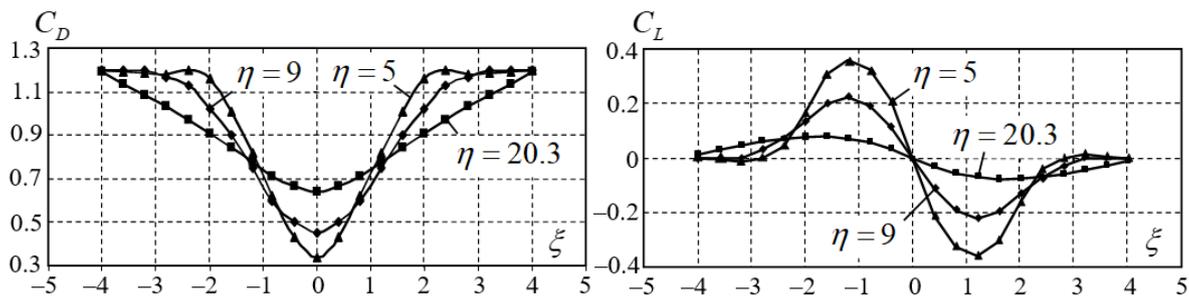


Рис.4. Распределения аэродинамических коэффициентов в области спутного следа гладкого кругового цилиндра для трёх сечений следа.

Таблица 1.

Коэффициенты  $b_{ij}, q_{ij}$ .

$i \backslash j$	0	1	2
0	$2.3233 \cdot 10^{-1}$	$2.8447 \cdot 10^{-2}$	$-3.8314 \cdot 10^{-4}$
1	$-9.3661 \cdot 10^{-1}$	$9.4536 \cdot 10^{-2}$	$-2.5711 \cdot 10^{-3}$
2	$7.2643 \cdot 10^{-1}$	$-7.1300 \cdot 10^{-2}$	$2.0024 \cdot 10^{-3}$
3	$3.6221 \cdot 10^{-1}$	$-4.0494 \cdot 10^{-2}$	$1.1478 \cdot 10^{-3}$
4	$-1.6282 \cdot 10^{-1}$	$1.9501 \cdot 10^{-2}$	$-5.9524 \cdot 10^{-4}$
5	$-4.9046 \cdot 10^{-2}$	$5.7814 \cdot 10^{-3}$	$-1.6845 \cdot 10^{-4}$
6	$1.5361 \cdot 10^{-2}$	$-1.9301 \cdot 10^{-3}$	$5.9790 \cdot 10^{-5}$
7	$2.8155 \cdot 10^{-3}$	$-3.4118 \cdot 10^{-4}$	$1.0093 \cdot 10^{-5}$
8	$-6.4284 \cdot 10^{-4}$	$7.9299 \cdot 10^{-5}$	$-2.4034 \cdot 10^{-6}$
9	$-5.8531 \cdot 10^{-5}$	$7.1871 \cdot 10^{-6}$	$-2.1407 \cdot 10^{-7}$
10	$9.7618 \cdot 10^{-6}$	$-1.1161 \cdot 10^{-6}$	$3.1730 \cdot 10^{-8}$

Для аппроксимации аэродинамических коэффициентов в области  $|\xi| \leq 4$ ,  $5 \leq \eta \leq 20.3$  предлагаются полиномы в виде

$$\begin{aligned} C_D(\eta, \xi) &= \sum_{i=0,2,\dots}^{10} (b_{i,0} + b_{i,1}\eta + b_{i,2}\eta^2) \xi^i, \\ C_L(\eta, \xi) &= \sum_{i=1,3,\dots}^9 (q_{i,0} + q_{i,1}\eta + q_{i,2}\eta^2) \xi^i \end{aligned} \quad (13)$$

вне этой области принимается, что  $C_D = 1.2$  и  $C_L = 0$ .

Коэффициенты  $b_{i,0}$ ,  $b_{i,1}$ ,  $b_{i,2}$  и  $q_{i,0}$ ,  $q_{i,1}$ ,  $q_{i,2}$  вычисляются по экспериментальным данным методом наименьших квадратов. Их значения приведены в Таблице 1, где четным номерам  $i$  соответствуют значения  $b_{ij}$ , нечётным – значения  $q_{ij}$ ;  $j = 0, 1, 2$ .

Обозначим координаты некоторой точки плоскости  $\Pi$  в системе  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$  через  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  и введём обозначения

$$v^- = v^{(2)} - v^{(1)}, \quad w^- = w^{(2)} - w^{(1)}. \quad (14)$$

Тогда очевидны соотношения

$$\tilde{v} = v^- \cos \alpha^{(1)} - w^- \sin \alpha^{(1)}, \quad \tilde{w} = v^- \sin \alpha^{(1)} + w^- \cos \alpha^{(1)}; \quad (15)$$

$$\sin \alpha^{(1)} = \frac{\dot{w}^{(1)}}{V^{(1)}}, \quad \cos \alpha^{(1)} = \frac{V_0 - \dot{v}^{(1)}}{V^{(1)}}; \quad \sin \alpha^{(2)} = \frac{\dot{\tilde{w}}}{V^{(2)}}, \quad \cos \alpha^{(2)} = \frac{\tilde{V} - \dot{\tilde{v}}}{V^{(2)}}; \quad (16)$$

$$V^{(1)} = \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)2}}, \quad V^{(2)} = \sqrt{(\tilde{V} - \dot{\tilde{v}})^2 + \dot{\tilde{w}}^2}. \quad (17)$$

Обозначим через  $L^{(1)}$ ,  $L^{(2)}$  и  $D^{(1)}$ ,  $D^{(2)}$  подъемные силы и силы аэродинамического сопротивления, действующие на провода 1 и 2 в направлении соответствующих осей поточной системы  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ . Тогда

$$L^{(1)} = 0, \quad D^{(1)} = \frac{1}{2} \rho V^{(1)2} d C_D^{(1)}; \quad L^{(2)} = \frac{1}{2} \rho V^{(2)2} d \tilde{C}_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{1}{2} \rho V^{(2)2} d \tilde{C}_D^{(2)},$$

где  $d$  – диаметр провода,  $C_D^{(1)} = 1.2$ ;  $\tilde{C}_L^{(2)}$ ,  $\tilde{C}_D^{(2)}$  – коэффициенты подъемной силы и силы аэродинамического сопротивления по отношению к локальной скорости  $\tilde{V}$  потока с массовой плотностью  $\rho$ .

Используя данные Прайса, необходимо отметить, что в этих исследованиях значения аэродинамических коэффициентов относились к скорости  $V_0$  потока, свободно набегающего на наветренный провод. Поэтому аэродинамические силы в следе определялись Прайсом по формулам

$$L_{Pr} = \frac{1}{2} \rho V_0^2 d C_L^{(2)}, \quad D_{Pr} = \frac{1}{2} \rho V_0^2 d C_D^{(2)}. \quad (18)$$

В случае обтекания подветренного провода потоком со скоростью  $\tilde{V}$  мы имеем

$$L_{Pr} = \frac{1}{2} \rho \tilde{V}^2 d \tilde{C}_L^{(2)}, \quad D_{Pr} = \frac{1}{2} \rho \tilde{V}^2 d \tilde{C}_D^{(2)}. \quad (19)$$

Из сравнения (18) и (19) следуют формулы пересчёта аэродинамических коэффициентов (А. Simpson) [15,19]

$$\tilde{C}_L^{(2)} = C_L^{(2)} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2, \quad \tilde{C}_D^{(2)} = C_D^{(2)} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2. \quad (20)$$

С учётом (20) теперь имеем

$$L^{(2)} = \frac{1}{2} \rho V^{(2)2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2 dC_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{1}{2} \rho V^{(2)2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}} \right)^2 dC_D^{(2)}. \quad (21)$$

Для каждого провода введём также проекции аэродинамических сил на оси  $\tilde{O}y$ ,  $\tilde{O}z$ , обозначая их соответственно через  $Z^{(1)}$ ,  $Z^{(2)}$  и  $Y^{(1)}$ ,  $Y^{(2)}$ . Считается, что аэродинамические моменты равны нулю.

Из рис.3 видно, что

$$\begin{aligned} Y^{(1)} &= L^{(1)} \sin \alpha^{(1)} + D^{(1)} \cos \alpha^{(1)}, \quad Z^{(1)} = L^{(1)} \cos \alpha^{(1)} - D^{(1)} \sin \alpha^{(1)}; \\ Y^{(2)} &= L^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) + D^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}), \\ Z^{(2)} &= L^{(2)} \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) - D^{(2)} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (22)$$

С учётом (16) для наветренного провода имеем

$$Y^{(1)} = \frac{1}{2} \rho V^{(1)} dC_D^{(1)} (V_0 - \dot{v}^{(1)}), \quad Z^{(1)} = -\frac{1}{2} \rho V^{(1)} dC_D^{(1)} \dot{w}^{(1)},$$

где  $V^{(1)}$  даётся (17). Используя обозначение  $\tilde{V}_0^{(1)} = V_0 - \dot{v}_0^{(1)}$ , приближённо имеем

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= \sqrt{(V_0 - \dot{v}^{(1)})^2 + \dot{w}^{(1)2}} \approx \tilde{V}_0^{(1)} - \Delta \dot{v}^{(1)}; \\ Y^{(1)} &= \frac{1}{2} \rho \tilde{V}_0^{(1)} dC_D^{(1)} (\tilde{V}_0^{(1)} - 2\Delta \dot{v}^{(1)}), \quad Z^{(1)} = -\frac{1}{2} \rho \tilde{V}_0^{(1)} dC_D^{(1)} (\dot{w}_0^{(1)} + \Delta \dot{w}^{(1)}). \end{aligned} \quad (23)$$

Вычисление аэродинамических сил для подветренного провода существенно сложнее. Преобразуем сначала тригонометрические функции, входящие в выражения (22). С учётом (11), (16), (17) имеем

$$\begin{aligned} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ \Psi \dot{w}^{(1)} + \frac{1}{V^{(1)}} \left[ -\dot{w}^{(1)} \dot{v} + (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \dot{w} \right] \right\}, \\ \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ \Psi (V_0 - \dot{v}^{(1)}) - \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \dot{v} + \dot{w}^{(1)} \dot{w} \right] \right\}; \\ \dot{v} &= \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (\dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}) (V_0 - \dot{v}^{(1)}) - (\dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)}) \dot{w}^{(1)} \right], \\ \dot{w} &= \frac{1}{V^{(1)}} \left[ (\dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}) \dot{w}^{(1)} + (\dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)}) (V_0 - \dot{v}^{(1)}) \right]. \end{aligned}$$

С учётом последних формул получаем

$$\begin{aligned} \sin(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left[ -(1 - \Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right], \\ \cos(\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)}) &= \frac{1}{V^{(2)}} \left[ \Psi V_0 + (1 - \Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right]. \end{aligned}$$

Теперь перепишем (21) в виде

$$L^{(2)} = \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 C_L^{(2)}, \quad D^{(2)} = \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 C_D^{(2)}.$$

Тогда вместо (22) имеем

$$\begin{aligned}
Y^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} \left[ -(1-\Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right] + \right. \\
&\quad \left. + C_D^{(2)} \left[ \Psi V_0 + (1-\Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right] \right\}, \\
Z^{(2)} &= \frac{1}{\Psi^2} \frac{\rho V_0^2}{2} d \left( \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{V^{(2)}} \left\{ C_L^{(2)} \left[ \Psi V_0 + (1-\Psi) \dot{v}^{(1)} - \dot{v}^{(2)} \right] - \right. \\
&\quad \left. - C_D^{(2)} \left[ -(1-\Psi) \dot{w}^{(1)} + \dot{w}^{(2)} \right] \right\}. \tag{24}
\end{aligned}$$

В выражения (24) входят аэродинамические коэффициенты, которые согласно (13) зависят от относительных координат  $\eta$ ,  $\xi$  поточной системы  $\tilde{O}\tilde{y}\tilde{z}$ . От этих же координат зависит функция распределения  $\Psi$  (12). Поэтому для получения аналитического выражения вариации работы аэродинамических сил для подвешенного провода линеаризуем выражения (15).

Выражения (14) перепишем в виде

$$v^- = v^{(2)} - v^{(1)} = v_0^- + \Delta v^-, \quad w^- = w^{(2)} - w^{(1)} = w_0^- + \Delta w^-,$$

где малые величины

$$\begin{aligned}
\Delta v^- &= (v_1^- - v_0^-) \frac{x}{l} + \sum_{i=1}^n q_i^- \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad \Delta w^- = (w_1^- - w_0^-) \frac{x}{l} + \sum_{i=1}^n r_i^- \sin \frac{i\pi x}{l}; \\
v_0^- &= v_0^{(2)} - v_0^{(1)}, \quad w_0^- = w_0^{(2)} - w_0^{(1)}; \quad q_i^- = q_i^{(2)} - q_i^{(1)}, \quad r_i^- = r_i^{(2)} - r_i^{(1)}.
\end{aligned}$$

Тогда, используя (16), вместо (15) получаем линейные аналоги

$$\begin{aligned}
\tilde{v} &= v^- \cos \alpha^{(1)} - w^- \sin \alpha^{(1)} = \tilde{v}_0 + \Delta \tilde{v}, \\
\tilde{w} &= v^- \sin \alpha^{(1)} + w^- \cos \alpha^{(1)} = \tilde{w}_0 + \Delta \tilde{w}, \tag{25}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_0 &= v_0^- - w_0^- \frac{\dot{w}_0^{(1)}}{\tilde{V}_0^{(1)}}, \quad \tilde{w}_0 = w_0^- + v_0^- \frac{\dot{w}_0^{(1)}}{\tilde{V}_0^{(1)}}; \\
\Delta \tilde{v} &= \Delta v^- - \frac{1}{\tilde{V}_0^{(1)}} \left( \dot{w}_0^{(1)} \Delta w^- + v_0^- \Delta \dot{v}^{(1)} + w_0^- \Delta \dot{w}^{(1)} \right), \\
\Delta \tilde{w} &= \Delta w^- + \frac{1}{\tilde{V}_0^{(1)}} \left( \dot{w}_0^{(1)} \Delta v^- + v_0^- \Delta \dot{w}^{(1)} - w_0^- \Delta \dot{v}^{(1)} \right).
\end{aligned}$$

Используя безразмерные координаты  $\eta = \tilde{v}/d$ ,  $\xi = \tilde{w}/d$ , формулы (25) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_0 + \Delta \eta, \quad \xi = \xi_0 + \Delta \xi; \\
\eta_0 &= \tilde{v}_0/d, \quad \Delta \eta = \Delta \tilde{v}/d; \quad \xi_0 = \tilde{w}_0/d, \quad \Delta \xi = \Delta \tilde{w}/d.
\end{aligned}$$

Теперь линеаризуем выражения для аэродинамических коэффициентов. Предварительно преобразуем степени локальных координат к виду

$$\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \Delta \tilde{v}, \quad \tilde{v}^2 \approx \tilde{v}_0 (\tilde{v}_0 + 2\Delta \tilde{v}); \quad \tilde{w}^k = \tilde{w}_0^{k-1} (\tilde{w}_0 + k\Delta \tilde{w}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

пренебрегая квадратами и более высокими степенями малых величин  $\Delta \tilde{v}$  и  $\Delta \tilde{w}$ .

Использование последних выражений приводит к формулам

$$C_L^{(2)} = C_{L0}^{(2)} + C_{L\xi}^{(2)} \Delta \xi + C_{L\eta}^{(2)} \Delta \eta, \quad C_D^{(2)} = C_{D0}^{(2)} + C_{D\xi}^{(2)} \Delta \xi + C_{D\eta}^{(2)} \Delta \eta,$$

где

$$C_{L0}^{(2)} = \sum_{i=0}^4 p_{2i+1,0} \xi_0^{2i+1}, \quad C_{L\xi}^{(2)} = \sum_{i=0}^4 (2i+1) p_{2i+1,0} \xi_0^{2i}, \quad C_{L\eta}^{(2)} = \sum_{i=0}^4 p_{2i+1,1} \xi_0^{2i+1};$$

$$C_{D0}^{(2)} = \sum_{i=0}^5 a_{2i,0} \xi_0^{2i}, \quad C_{D\xi}^{(2)} = \sum_{i=0}^5 2i a_{2i,0} \xi_0^{2i-1}, \quad C_{D\eta}^{(2)} = \sum_{i=0}^5 a_{2i,1} \xi_0^{2i}. \quad (26)$$

В формулах (26) введены обозначения

$$p_{i,0} = q_{i0} + q_{i1}\eta_0 + q_{i2}\eta_0^2, \quad p_{i,1} = q_{i1} + 2q_{i2}\eta_0;$$

$$a_{i,0} = b_{i0} + b_{i1}\eta_0 + b_{i2}\eta_0^2, \quad a_{i,1} = b_{i1} + 2b_{i2}\eta_0.$$

Линеаризуем теперь функцию распределения  $\Psi(\eta, \xi)$ , используя малость величин  $\Delta\eta$  и  $\Delta\xi$ . В итоге получаем линейную форму

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_\eta \Delta\eta + \Psi_\xi \Delta\xi,$$

где

$$\Psi_0 = 1 - \psi_0 \sqrt{\frac{\psi_0}{\eta_0 + 6}}, \quad \psi_0 = C_D \exp\left(-\frac{\xi_0^2}{0.23C_D(\eta_0 + 6)}\right);$$

$$\Psi_\xi = \frac{3(1 - \Psi_0)\xi_0}{0.23C_D(\eta_0 + 6)}, \quad \Psi_\eta = \frac{1}{2(\eta_0 + 6)}(1 - \Psi_0 - \xi_0\Psi_\xi). \quad (27)$$

Линеаризуя (17), получаем выражения для скоростей набегающих потоков в следующей форме

$$V^{(1)} \approx V_0^{(1)} = \sqrt{\tilde{V}_0^{(1)^2 + \dot{w}_0^{(1)^2}}, \quad V^{(2)} \approx V_0^{(2)}(1 + \chi_0 \Delta\Psi)$$

Здесь

$$V_0^{(2)} = \sqrt{\dot{v}_0^{*2} + \dot{w}_0^{*2}}, \quad \chi_0 = \frac{1}{V_0^{(2)^2} \left[ \tilde{V}_0^{(1)} (\Psi_0 \tilde{V}_0^{(1)} - \dot{v}_0^-) + \dot{w}_0^{(1)} (\Psi_0 \dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^-) \right]};$$

$$\dot{v}_0^* = \Psi_0 \tilde{V}_0^{(1)} - \dot{v}_0^-, \quad \dot{w}_0^* = \Psi_0 \dot{w}_0^{(1)} + \dot{w}_0^-; \quad \dot{v}^- = \dot{v}^{(2)} - \dot{v}^{(1)}, \quad \dot{w}^- = \dot{w}^{(2)} - \dot{w}^{(1)};$$

величина  $\tilde{V}_0^{(1)} = V_0 - \dot{v}_0^{(1)}$ , а  $\Psi_0$  даётся в (27).

Запишем теперь аэродинамические силы (23), (24) в проекциях на оси  $Oyz$  с использованием полученных линеаризованных представлений. Последовательно имеем

$$\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Z^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(1)}}{2} d C_D^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{V}_0^{(1)} - \Delta\dot{v}^{(1)} \\ \dot{w}_0^{(1)} + \Delta\dot{w}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} Y^{(2)} \\ Z^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(2)}}{2} d \left(\frac{V_0}{\tilde{V}_0}\right)^2 \left[ \dot{w}_0^* \begin{pmatrix} C_{L0}^{(2)} + \Delta C_L^{(2)} \\ -C_{D0}^{(2)} - \Delta C_D^{(2)} \end{pmatrix} + \dot{v}_0^* \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} + \Delta C_D^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} + \Delta C_L^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} \Delta\Psi \right];$$

где

$$\begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} = \left[ \dot{w}_0^{(1)} + \left(\chi_0 - \frac{2}{\Psi_0}\right) \dot{w}_0^* \right] \begin{pmatrix} C_{L0}^{(2)} \\ -C_{D0}^{(2)} \end{pmatrix} + \left[ \tilde{V}_0^{(1)} + \left(\chi_0 - \frac{2}{\Psi_0}\right) \dot{v}_0^* \right] \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} \end{pmatrix}$$

с учётом  $C_{L0}^{(2)}, C_{D0}^{(2)}$  из (26).

Полученные выражения позволяют вычислить вариации работ аэродинамических сил, проинтегрировав выражение

$$\delta A_a = \sum_{k=1}^2 \delta A_a^{(k)} = \sum_{k=1}^2 \int_0^l \left( Y^{(k)} \delta v^{(k)} + Z^{(k)} \delta w^{(k)} \right) dx.$$

В итоге для наветренного провода имеем

$$\delta A_a^{(1)} = \gamma_0^{(1)} \delta v_0^{(1)} + z_0^{(1)} \delta w_0^{(1)} + \gamma_1^{(1)} \delta v_1^{(1)} + z_1^{(1)} \delta w_1^{(1)} + \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\gamma}_i^{(1)} \delta q_i^{(1)} + \tilde{z}_i^{(1)} \delta r_i^{(1)} \right).$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} \gamma_k^{(1)} \\ z_k^{(1)} \end{pmatrix} = l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\Delta \dot{v}_k^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_k^{(1)} \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_i^{(1)} \\ \tilde{z}_i^{(1)} \end{pmatrix} = l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} V_0^{(1)} C_D^{(1)} \begin{pmatrix} -\dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} \right\},$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_0^{(1)} \\ Z_0^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(1)}}{2} d C_D^{(1)} \begin{pmatrix} \tilde{V}_0^{(1)} \\ \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix},$$

а величины  $\Delta \dot{v}_k^{(1)}$ ,  $\Delta \dot{w}_k^{(1)}$  ( $k = 0, 1$ ),  $\dot{q}_i^{(1)}$ ,  $\dot{\kappa}_i^{(1)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) вычисляются по формулам

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_0^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{v}_1^{(1)} \\ \Delta \dot{w}_1^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{\kappa}_i^{(1)} \end{pmatrix} = -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} \dot{v}_1^{(1)} - \dot{v}_0^{(1)} \\ \dot{w}_1^{(1)} - \dot{w}_0^{(1)} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{q}_i^{(1)} \\ \dot{r}_i^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Для подветренного провода запись для вариации работы аналогична –

$$\delta A_a^{(2)} = \gamma_0^{(2)} \delta v_0^{(2)} + z_0^{(2)} \delta w_0^{(2)} + \gamma_1^{(2)} \delta v_1^{(2)} + z_1^{(2)} \delta w_1^{(2)} + \sum_{i=1}^n \left( \tilde{\gamma}_i^{(2)} \delta q_i^{(2)} + \tilde{z}_i^{(2)} \delta r_i^{(2)} \right).$$

но с более сложными по структуре коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \gamma_k^{(2)} \\ z_k^{(2)} \end{pmatrix} = l \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} \right],$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_i^{(2)} \\ \tilde{z}_i^{(2)} \end{pmatrix} = l \left\{ \frac{1}{i\pi} [1 - (-1)^i] \begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} + \frac{\rho d}{2} \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 V_0^{(2)} \mathbf{V}^M \begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^- \\ \kappa_i^- \end{pmatrix} \right\};$$

$$\begin{pmatrix} Y_0^{(2)} \\ Z_0^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{\rho V_0^{(2)}}{2} d \left( \frac{V_0}{\tilde{V}_0} \right)^2 \begin{pmatrix} C_{D0}^{(2)} & C_{L0}^{(2)} \\ C_{L0}^{(2)} & -C_{D0}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{v}_0^* \\ \dot{w}_0^* \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{G}_i^- \\ \kappa_i^- \end{pmatrix} &= -\frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} v_1^- - v_0^- \\ w_1^- - w_0^- \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q_i^- \\ r_i^- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_k^- \\ w_k^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_k^{(2)} - v_k^{(1)} \\ w_k^{(2)} - w_k^{(1)} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1; \\ \mathbf{V}^M &= \begin{pmatrix} \dot{w}_0^* & \dot{v}_0^* \\ \dot{v}_0^* & -\dot{w}_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{Lv}^{(2)} & C_{Lw}^{(2)} \\ C_{Dv}^{(2)} & C_{Dw}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_Y^\Psi \\ V_Z^\Psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_v \\ \Psi_w \end{pmatrix}^T; \\ \begin{pmatrix} \Delta v_k^- \\ \Delta w_k^- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta v_k^{(2)} - \Delta v_k^{(1)} \\ \Delta w_k^{(2)} - \Delta w_k^{(1)} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1; \\ \begin{pmatrix} \Delta v_0^{(1)} \\ \Delta w_0^{(1)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta v_1^{(2)} \\ \Delta w_1^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} - v_0^{(1)} \\ w_1^{(1)} - w_0^{(1)} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i\pi} \begin{pmatrix} q_i^{(1)} \\ r_i^{(1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

#### 1.4. Уравнения колебаний.

Уравнения колебаний для каждого конечного элемента следуют из принципа возможных перемещений (1). Необходимыми и достаточными условиями равенства нулю первой вариации от полной энергии элемента являются равенство нулю коэффициентов при одинаковых вариация обобщенных координат.

Принимая во внимание выражения для  $\delta U$ ,  $\delta A_m$ ,  $\delta A_g$ ,  $\delta A_a^{(1)}$ ,  $\delta A_a^{(2)}$  имеем систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} F_0^u + \frac{\partial U}{\partial u_0} = 0, \quad F_1^u + \frac{\partial U}{\partial u_1} = 0; \quad F_0^v + \frac{\partial U}{\partial v_0} - \gamma_0 = 0, \quad F_1^v + \frac{\partial U}{\partial v_1} - \gamma_1 = 0; \\ F_0^\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} = 0, \quad F_1^\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = 0; \\ F_i^q + \frac{\partial U}{\partial q_i} - \gamma_i = 0, \quad F_i^r + \frac{\partial U}{\partial r_i} - G_i^w - z_i = 0, \quad F_i^\rho + \frac{\partial U}{\partial p_i} = 0; \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения (28) записываются как для наветренного провода, так и подветренного, снабжая входящие величины верхними индексами (1) или (2). Для простоты записи эти индексы в (28) опущены.

В итоге уравнения колебаний конечного элемента провода записываются в матричной форме вида

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial U(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_g(\mathbf{q}), \tag{29}$$

где  $\mathbf{q} = (u_0, v_0, w_0, \varphi_0, \dots, q_i, r_i, p_i, \dots, u_1, v_1, w_1, \varphi_1)^T$  – вектор-столбец обобщенных координат,  $\mathbf{M}$  – матрица масс,  $\mathbf{F}_{in}(\dot{\mathbf{q}})$  – вектор-столбец нелинейных компонент инерционных сил,  $\partial U / \partial \mathbf{q}$  – условное обозначение вектор-столбца из производных  $U$  по обобщенным координатам,  $\mathbf{F}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  и  $\mathbf{F}_g(\mathbf{q})$  – обобщенные аэродинамические и гравитационные силы.

Используя (29), осуществляется ассемблирование элементных матриц и вектор-столбцов для получения общей системы дифференциальных уравнений колебаний проводов.

Необходимо отметить, что возникновение кручения проводов связано с наличием внутрифазных дистанционных распорок, которые жестко прикрепляются к проводам и в процессе колебаний совершают повороты. Принимается, что вращение распорки совершается в плоскости  $\Pi$ . Распорки считаются абсолютно жесткими и безынерционными.

Конечно-элементную сетку можно строить так, чтобы точки крепления распорок совпадали с узлами тех конечных элементов, которые жестко соединены с распорками. Пусть  $k$  – номер распорки с длиной  $a_k$ . Номера узлов соседних элементов по концам распорки будем обозначать через  $k^{(1)}$  и  $k^{(2)}$ . Обозначим через  $\varphi_k$  угол поворота распорки, с которым поворачиваются (закручиваются) провода

в точках их крепления. Пусть  $v_k^{(1)}, w_k^{(1)}$  и  $v_k^{(2)}, w_k^{(2)}$  – координаты концов распорки (узловых точек), как показано на рис.5.

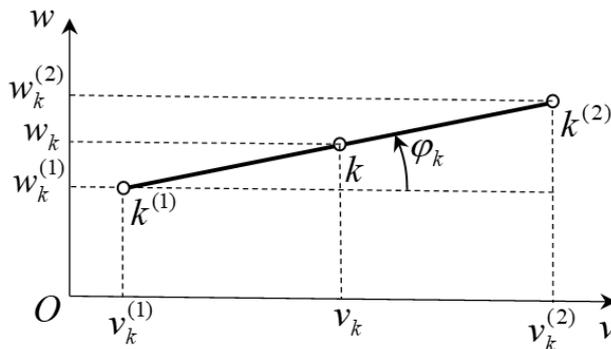


Рис.5. Связь координат узловых точек распорки с координатами центра распорки и углом её поворота.

Координаты центра распорки будем обозначать через  $v_k$  и  $w_k$ . Тогда имеют место выражения узловых координат распорки через координаты её центра и угол поворота

$$v_k^{(1)} = v_k - \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k, \quad w_k^{(1)} = w_k - \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k;$$

$$v_k^{(2)} = v_k + \frac{a_k}{2} \cos \varphi_k, \quad w_k^{(2)} = w_k + \frac{a_k}{2} \sin \varphi_k.$$

Из этого следует, что вариации обобщенных координат  $v_k^{(1)}, w_k^{(1)}, v_k^{(2)}$  и  $w_k^{(2)}$  зависимы и выражаются через вариации  $v_k, w_k$  и  $\varphi_k$ , которые необходимо учитывать при ассемблировании с учётом нумерации узловых точек.

Для численного интегрирования системы уравнений колебаний, относящихся к жесткому типу, использовался алгоритм, основанный на параметризации уравнений с выбором в качестве аргумента длины интегральной кривой решения. Для параметризованной задачи использовалась неявная схема, основанная на методе линейного ускорения с использованием простых итераций.

## 2. РАСЧЁТ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГИБКИХ ЦИЛИНДРОВ

Рассматриваются два провода длиной  $l = 45$  м с характеристиками АС 500/26 в отсутствии гравитации. Провода диаметром  $d = 30$  мм шарнирно закреплены на анкерных опорах по краям. Дистанционных распорок нет. Расстояние между проводами в начальном состоянии равно  $10d = 300$  мм. Подветренный провод расположен ниже наветренного на 2.5 диаметра провода. Провода натянуты с силой  $N = 16000$  Н. Скорость ветра –  $V_0 = 15$  м/с.

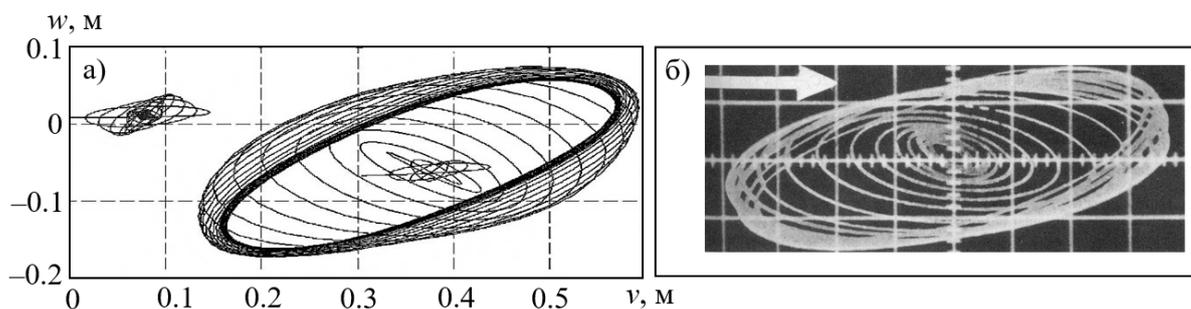


Рис.6. а) орбиты средних точек наветренного провода (слева) и подветренного провода (справа); б) экспериментальный результат.

Результаты расчетов траекторий движения показаны на рис.6а, откуда видно, что средняя точка подветренного провода движется в установившемся режиме колебаний по эллиптической орбите, достигая приблизительно 15 диаметров провода по большой оси и 4.7 диаметра провода по малой оси. Анализ численных результатов также показал, что частоты колебаний проводов примерно равны 1.4 Гц и 1.25 Гц в плоскостях  $Oxy$  и  $Oxz$  соответственно, при существенном различии в амплитудах и незначительном рассогласовании по фазе.

В работе [23] приведены результаты экспериментальных исследований колебаний двух цилиндров при их продувке в аэродинамической трубе. Геометрические параметры пучка цилиндров подобны параметрам пучка проводов задачи. На рис.6б приведена орбита движения центральной точки подветренного цилиндра, которая подобна орбите, приведенной на рис.6а. Пропорциональность осей орбитального эллипса сохраняется, что говорит об адекватности рассмотренной выше математической модели реальному физическому процессу – колебаниям проводов, индуцированным спутным следом.

Более сложные вычислительные примеры представлены в работах [24,25].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе конечно-элементной дискретизации разработана математическая модель индуцированных спутным следом нелинейных колебаний проводов расщеплённой фазы воздушной ЛЭП со связями в виде дистанционных распорок. Для аппроксимации локальных перемещений в пределах конечного элемента используется метод Ритца с выбором тригонометрических функций в качестве базисных, позволяющий с различной степенью «детализации» описывать колебания в заданных частотных диапазонах. Уравнения колебаний составляются в обобщенных координатах с нелинейными упругими, инерционными

и аэродинамическими нагрузками.

Описанный подход дает возможность определить критические характеристики возникающего флаттера: частоту, скорость. Допускаются различные упрощения в виде линеаризации уравнений колебаний, использования квадратичных приближений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Blevins R. D. *Flow-Induced Vibration*. – N-Y.: Van Nostrand Reinhold, 1990.
2. Diana G., Gasparetto M., DiGiacomo G., Nicolini P. *Analytical method for computing subspan oscillation* // IEEE Conference Paper. – 1974. – C74 493 3.
3. Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. *A new theory for frequencies computation of overhead lines with bundle conductors* // Revue AIM Liege. – 1991. – No.1. – Pp.46-62.
4. *EPRI Transmission line reference book: wind-induced conductor motion*. – Palo Alto (California): Electrical Power Research Institute, 1979. – 255 p.
5. *EPRI Transmission line reference book. Wind-induced Conductor motion*. – Electric Power Research Institute: Final Report. – 2006.
6. Lilien J.L., Snegovski D. *Hurricane Simulation on Power Transmission Line* / Proc. 5<sup>th</sup> Cable Dynamics Symp. – 2003. – Pp.313-318.
7. Lilien J.L., Snegovski D. *Wake-Induced Vibration of Power Transmission Line: Parametric Study* / Proc. 8<sup>th</sup> Conf. on Flow-Induced Vibration. – 2004. – Pp.421-425.
8. Price S.J. *Wake induced flutter of power transmission conductors* // J. of Sound and Vibration. – 1975. – Vol.38(1). – Pp.125-147.
9. Rawlins C.B. *Fundamental concepts in the analysis of wake-induced oscillation of bundled conductor* // IEEE Trans. PAS. – 1976. – Vol.95. – No.4. – Pp.1377-1393.
10. Rawlins C.B. *Extended analysis of wake-induced oscillations of bundled conductors* // IEEE Trans. PAS. – 1977. – Vol.96. – No.5. – Pp.1681-1689.
11. Mawkada T. *Study on wind pressure against ACSR double conductor* // Electrical Engineering in Japan. – 1964. – Vol.84(2). – Pp.21-28.
12. Best M.S., Cook N.J. *The forces on a circular cylinder in shear flow*. – University of Bristol, Department of Aeronautical Engineering. – June 1967. – Report No.103.
13. Simpson A., Price S.J. *On the use of ‘Damped’ and ‘Undamped’ quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter* / IEEE Conference Paper. – 1974. – C74-378-6.
14. Rawlins C.B. *Discussion of the paper “On the use of ‘Damped’ and ‘Undamped’ quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter” by Simpson A., Price S.J.* / IEEE Conference Paper. – 1974. – C74-378-6.
15. Simpson A. *Wake induced flutter of circular cylinders: mechanical aspects* // Aeronautical Quarterly XXII. – 1971/2. – Pp.101-118.
16. Wardlaw R.L., Cooper K.R., Ko R.G., Watts J.A. *Wind tunnel and analytical investigations into the aero-elastic behaviour of bundled conductors* // IEEE Trans. on PAS. – 1975. – Vol.94. – No.2. – Pp.642-651.
17. Diana G., Bocciolone M., Cheli F., Resta F., Manenti A. *The aero-elastic behaviour of the OHTL expanded bundles* / Proc. of the 3rd International Symposium on cable dynamics, Trondheim. – 1999. – Pp.97-102.
18. Diana G., Giordana F. *Sulle vibrazioni di un cilindro in scia di un altro* // Analisi del fenomeno con modello analitico, L’Energia Elettrica. – 1972. – No.7.

19. Simpson A. *On the Flutter of a Smooth Circular Cylinder in a wake* // Aeronautical Quarterly XXII. – 1971/1. – Pp.25-41.
20. Choi Y.S., Her H.O., McKenna P.J. *Galloping: nonlinear oscillation in a periodically forced loaded hanging cable* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – No.52. – Pp.23-34.
21. Danilin A.N., Zhavoronok S.I. *Nonlinear vibrations and galloping of transmission lines' conductors* // Asia Life Sciences Supplement. The Asian Intern. J. of Life Sciences. – 2019. – Vol.21. – No.1. – Pp.629-643.
22. Shklyarchuk F.N., Danilin A.N., Lilien J.-L., Snegovskiy D.V., Vinogradov A.A., Djamanbayev M.A. *Nonlinear Aeroelastic Vibrations and Galloping of Iced Conductor Lines under Wind* / Proc. of 7<sup>th</sup> Intern. Symp. on Cable Dynamics. Vienna (Austria). – 2007. – Pp.129-134.
23. Simiu E., Scanlan R. H. *Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design*. – N.-Y.: J. Wiley & Sons, 1996.
24. Danilin A., Kurdyumov N., Shavnaya R. *Wake-Induced Oscillations of Two Bundle Conductors Connected at Intervals by Spacers* / AIP Conf. Proc. – 2021. – 2343. – 120005.
25. Шавня Р.А., Курдюмов Н.Н., Данилин А.Н. *О моделировании субколебаний проводов воздушных ЛЭП* / Сборник трудов 11-й Всерос. научн. конф. с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2021. – С.158-168.

## REFERENCES

1. Blevins R. D. *Flow-Induced Vibration*. N.-Y., Van Nostrand Reinhold, 1990.
2. Diana G., Gasparetto M., DiGiacomo G., Nicolini P. *Analytical method for computing subspan oscillation*. IEEE Conference Paper, 1974, C74 493 3.
3. Dubois H., Lilien J.L., Dal Maso F. *A new theory for frequencies computation of overhead lines with bundle conductors*. Revue AIM Liege, 1991, No.1, Pp.46-62.
4. *EPRI Transmission line reference book: wind-induced conductor motion*. Palo Alto (California), Electrical Power Research Institute, 1979, 255 p.
5. *EPRI Transmission line reference book. Wind-induced Conductor motion*. Electric Power Research Institute, Final Report, 2006.
6. Lilien J.L., Snegovski D. *Hurricane Simulation on Power Transmission Line*. Proc. 5<sup>th</sup> Cable Dynamics Symp., Santa Margherita, 2003, Pp.313-318.
7. Lilien J.L., Snegovski D. *Wake-Induced Vibration of Power Transmission Line: Parametric Study*. Proc. 8<sup>th</sup> Conf. on Flow-Induced Vibration, 2004, Pp.421-425.
8. Price S.J. *Wake induced flutter of power transmission conductors*. J. of Sound and Vibration, 1975, Vol.38(1), Pp.125-147.
9. Rawlins C.B. *Fundamental concepts in the analysis of wake-induced oscillation of bundled conductor*. IEEE Trans. PAS, 1976, Vol.95, No.4, Pp.1377-1393.
10. Rawlins C.B. *Extended analysis of wake-induced oscillations of bundled conductors*. IEEE Trans. PAS, 1977, Vol.96, No.5, Pp.1681-1689.
11. Mawkada T. *Study on wind pressure against ACSR double conductor*. Electrical Engineering in Japan, 1964, Vol.84(2), Pp.21-28.
12. Best M.S., Cook N.J. *The forces on a circular cylinder in shear flow*. University of Bristol, Department of Aeronautical Engineering, June 1967, Report No.103.

13. Simpson A., Price S.J. *On the use of ‘Damped’ and ‘Undamped’ quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter*. IEEE Conference Paper, 1974, C74-378-6.
14. Rawlins C.B. *Discussion of the paper “On the use of ‘Damped’ and ‘Undamped’ quasi-static aerodynamic models in the study of wake-induced flutter” by Simpson A., Price S.J.* IEEE Conference Paper, 1974, C74-378-6.
15. Simpson A. *Wake induced flutter of circular cylinders: mechanical aspects*. Aeronautical Quarterly XXII, 1971/2, Pp.101-118.
16. Wardlaw R.L., Cooper K.R., Ko R.G., Watts J.A. *Wind tunnel and analytical investigations into the aero-elastic behaviour of bundled conductors*. IEEE Trans. on PAS, 1975, Vol.94, No.2, Pp.642-651.
17. Diana G., Bocciolone M., Cheli F., Resta F., Manenti A. *The aero-elastic behaviour of the OHTL expanded bundles*. Proc. of the 3<sup>rd</sup> Intern. Symp. on cable dynamics, 1999, Pp.97-102.
18. Diana G., Giordana F. *Sulle vibrazioni di un cilindro in scia di un altro*. Analisi del fenomeno con modello analitico, L’Energia Elettrica, 1972, No.7.
19. Simpson A. *On the Flutter of a Smooth Circular Cylinder in a wake*. Aeronautical Quarterly XXII, 1971/1, Pp.25-41.
20. Choi Y.S., Her H.O., McKenna P.J. *Galloping: nonlinear oscillation in a periodically forced loaded hanging cable*. J. of Computational and Applied Mathematics, 1994, No.52, Pp.23-34.
21. Danilin A.N., Zhavoronok S.I. *Nonlinear vibrations and galloping of transmission lines’ conductors*. Asia Life Sciences Supplement. The Asian Intern. J. of Life Sciences, 2019, Vol.21, No.1, Pp.629-643.
22. Shklyarchuk F.N., Danilin A.N., Lilien J.-L., Snegovskiy D.V., Vinogradov A.A., Djamanbayev M.A. *Nonlinear Aeroelastic Vibrations and Galloping of Iced Conductor Lines under Wind*. Proceedings of 7<sup>th</sup> Intern. Symp. on Cable Dynamics, 2007, Pp.129-134.
23. Simiu E., Scanlan R. H. *Wind Effects on Structures: Fundamentals and Applications to Design*. N.-Y., J. Wiley & Sons, 1996.
24. Danilin A., Kurdyumov N., Shavnaya R. *Wake-Induced Oscillations of Two Bundle Conductors Connected at Intervals by Spacers*. AIP Conf. Proc., 2021, 2343, 120005.
25. Shavnaya R.A., Kurdyumov N.N., Danilin A.N. *O modelirovanii subkolebanij provodov vozdushnykh LEhP [On the modeling of sub-oscillations of overhead power lines conductors]*. Sbornik trudov 11-j Vserossijskoj nauchnoj konferentsii s mezhdunarodnym uchastiem “Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsij, slozhnykh i geterogennykh sred”. Moskva, OOO “Sam Poligrafist”, 2021, Pp.158-168.

*Поступила в редакцию 27 мая 2022 года.*

---

Сведения об авторах:

Шавня Руслан Анатольевич – асп., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; инж.-конструктор, АО «РСК МиГ», г. Москва, Россия; e-mail: [ru.sh@ro.ru](mailto:ru.sh@ro.ru)

Курдюмов Николай Николаевич – к.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nick.n.kurdyumov@gmail.com](mailto:nick.n.kurdyumov@gmail.com)

Данилин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [andanilin@yandex.ru](mailto:andanilin@yandex.ru)

Фельдштейн Валерий Адольфович – д.т.н., гл.н.с., АО «Центральный научно-исследовательский институт машиностроения», г. Королёв, Россия; e-mail: [dinpro@mail.ru](mailto:dinpro@mail.ru)