

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД НЬЮМАРКА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С УЧЁТОМ ДЕМПФИРОВАНИЯ С ПАМЯТЬЮ*

Сидоров В.Н.^{1,2}, Детина Е.П.¹, Бадьина Е.С.^{1,2,3}

¹*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*

²*Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия*

³*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе рассматривается задача численного динамического расчёта (в перемещениях) изгибаемых элементов конструкций из структурно сложных материалов (композиты, нано-материалы) с моделированием их демпфирующих свойств, вызываемых внутренним трением в материале. Внутреннее трение в материале предполагается нелокальным по времени, то есть зависящим не только от скорости деформаций в текущий момент времени, но и от скоростей деформаций на всей истории колебательного процесса. Степень нелокальности материала определяется масштабным параметром, который может быть определён по экспериментальным данным. Нелокальная во времени модель демпфирования интегрирована в алгоритм метода конечных элементов – наиболее широко применяемого в практических приложениях численного метода анализа механических систем. Уравнение равновесия конструкции в движении решается численно по неявной схеме. При этом матрица демпфирования расчетной модели получена из условия стационарности полной энергии деформирования движущейся механической системы. Предыдущие исследования показывают, что результаты расчетов с использованием такой модели с достаточной достоверностью аппроксимируют диссипативные свойства конструктивных элементов из композитных материалов, полученные опытным путем. В статье рассматриваются результаты исследования одномерной нелокальной во времени расчетной модели, реализованной в среде MATLAB. Оценивается возможность корректировки модели с уже подобранным по эксперименту масштабным параметром с целью повышения точности аппроксимации экспериментальных данных. Для корректировки используется модификация метода Ньюмарка. Показано, что, применяя модифицированный метод Ньюмарка, можно скорректировать как амплитуду, так и фазу колебательного процесса.

Ключевые слова: нелокальное демпфирование; колебания балок; композитные материалы; нелокальная механика; метод конечных элементов; метод Ньюмарка

MODIFIED NEWMARK METHOD FOR THE DYNAMIC ANALYSIS OF COMPOSITE STRUCTURAL ELEMENTS CONSIDERING DAMPING WITH MEMORY

Sidorov V.N.^{1,2}, Detina E.P.¹, Badina E.S.^{1,2,3}

* Первый и второй разделы настоящей работы выполнены при поддержке Российского научного фонда (Проект №21-19-00634), третий раздел – при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Проект № FSWG-2020-0007).

¹*Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*

²*Russian University of Transport (RUT (MIIT), Moscow, Russia*

³*Institute of Applied Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

In this paper, we consider the problem of numerical dynamic simulation of bending structural elements made of structurally complex materials (composites, nanomaterials) with the consideration of their internal damping properties. The internal damping is considered nonlocal in time. It depends not only on the strain rate value in current moment, but also on the strain rate values on the whole history of element vibration. The nonlocality level depends on the scale factor that can be determined by the experimental data. The nonlocal in time damping model is integrated into the algorithm of the finite element method - the most widely used numerical method for mechanical systems analysis. The equilibrium equation for a structure in motion is solved numerically using an implicit scheme. In this case, the damping matrix of the calculation model is obtained from the condition of stationarity of the total deformation energy of the moving mechanical system. The previous research shows that the results obtained using such a model approximate the empirically determined dissipative properties of composite elements with sufficient reliability. The article discusses the results of a study of a one-dimensional non-local in time computational model implemented in MATLAB software. The possibility of calibrated model adjustment due to better experimental data approximation is estimated. For this purpose, the modified Newmark method is used. It is shown that it is possible to adjust the attitude and phase of the vibration process using the modified Newmark method.

Keywords: nonlocal damping; beam vibrations; composite materials; nonlocal mechanics; finite element analysis; Newmark method

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость описания работы инженерных конструкций, выполненных из материалов с развитой внутренней структурой, таких как композитные и наноматериалы, становится всё более актуальной, на фоне активного применения этих материалов в самых различных областях. Задача о моделировании работы композитных конструкций и их элементов под действием динамической нагрузки представляет особую сложность. Для получения результатов, близких к экспериментальным данным, требуются специальные гипотезы и подходы, которые позволяли бы адекватно описывать существенно неизотропные свойства композитных материалов без построения чрезмерно усложнённых и громоздких моделей. К примеру, для решения таких задач могут быть использованы модели, построенные с использованием аппарата дробного дифференцирования [1] или – на основании гипотез нелокальной механики [2,3]. Ко второй категории относится модель демпфирования нелокальная во времени, называемая в статье «демпфированием с памятью».

Эта модель эффективно показывает себя при численных расчетах конструкций, выполненных из структурно сложных материалов, испытывающих динамические нагрузки [4].

В статье такая модель встроена в алгоритм численного метода, доминирующего в настоящее время в прикладных инженерных расчетах – метода конечных элементов (МКЭ). В алгоритме МКЭ уравнение равновесия

конструкции, деформируемой в движении, представляется в матричном виде и, как правило, записывается в перемещениях [5]

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t) + D \cdot \dot{\bar{V}}(t) + K \cdot \bar{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (1)$$

Здесь: K – матрица жёсткости конечно-элементной расчётной модели, M – матрица масс расчётной модели, D – матрица демпфирующих параметров расчётной модели, $\bar{F}(t)$ – вектор внешних силовых воздействий, в рассматриваемый момент времени t , $\ddot{\bar{V}}(t)$ – узловые ускорения расчётной модели в рассматриваемый момент времени t , $\dot{\bar{V}}(t)$ – узловые скорости расчётной модели в рассматриваемый момент времени t (точкой обозначена производная по времени), $\bar{V}(t)$ – искомый вектор узловых перемещений расчётной модели в рассматриваемый момент времени t .

Решение уравнения (1) в рамках алгоритма МКЭ здесь выполняется по неявной разностной схеме методом Ньюмарка [5] – вполне устойчивым методом прямого интегрирования. Одна из особенностей этого метода заключается в том, что динамическое равновесие расчётной модели рассматривается в момент времени $t + \Delta t = t_{i+1}$ (где i – номер текущего шага во времени), в зависимости от значений вектора перемещений $\bar{V}(t)$, а также векторов $\dot{\bar{V}}(t)$ и $\ddot{\bar{V}}(t)$, вычисленных на предшествующих $(i-1)$ и (i) временных шагах.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА РАСЧЁТНОЙ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ДЕМПФИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Матрица демпфирования расчётной модели D строится из условий стационарности выражения изменения полной энергии деформируемой системы, включающего функцию рассеяния энергии за счёт внутреннего трения в материале $\frac{1}{2} d \cdot \dot{\varepsilon}^2$, где d – параметр демпфирования конструкции, ε – деформации материала. Представим скорость $\dot{\bar{V}}(t)$ в (1) на временном интервале (t_{i-1}, t_{i+1}) в виде

$$\dot{\bar{V}}(t_{i+1}) = \frac{(\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)) + (\bar{V}(t_i) - \bar{V}(t_{i-1}))}{2\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\bar{V}}(t_{i+1}) + \frac{1}{2} \cdot \dot{\bar{V}}(t_i). \quad (2)$$

Тогда уравнение (1) для временного шага $(i+1)$ примет вид

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \dot{\bar{V}}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \dot{\bar{V}}(t_i) + K \cdot \bar{V}(t_{i+1}) = \bar{F}(t_{i+1}). \quad (3)$$

Допустим, что диссипативные силы в материале в моменты времени, предшествующие моменту времени t_i , оказывают убывающее влияние на $\bar{V}(t)$ по сравнению с последующим моментом времени t_{i+1} . Пусть имеется некоторая функция $G(t-\tau)$, не локализованная во времени, характеризующая убывание влияния изменения скорости демпфирования, с соблюдением условия

$\int_{-\infty}^t G(t-\tau)d\tau = 1$. Функцию $G(t-\tau)$ принято называть ядром оператора демпфирования [3]. Тогда уравнение (3) может быть записано следующим образом

$$M \cdot \ddot{V}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \dot{V}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \dot{V}(t_i) \cdot \int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau + K \cdot \bar{V}(t_{i+1}) = \bar{F}(t_{i+1}). \quad (4)$$

В этой записи модель демпфирования Кельвина-Фойгта, по сути, не меняется и демпфирование остается локальным.

Для построения ядра оператора демпфирования, используем интеграл Лапласа (функцию ошибок) [4]. Тогда $G(t-\tau)$ примет вид

$$G(t-\tau) = \frac{2\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2(t-\tau)^2}, \quad (5)$$

где μ – параметр, характеризующий масштаб нелокальности демпфирования материала во времени. В работе [6] исследовано влияние принимаемых значений μ на решение уравнения движения с памятью. На рис.1 представлены графики ядра демпфирования, построенные для различных значений μ .

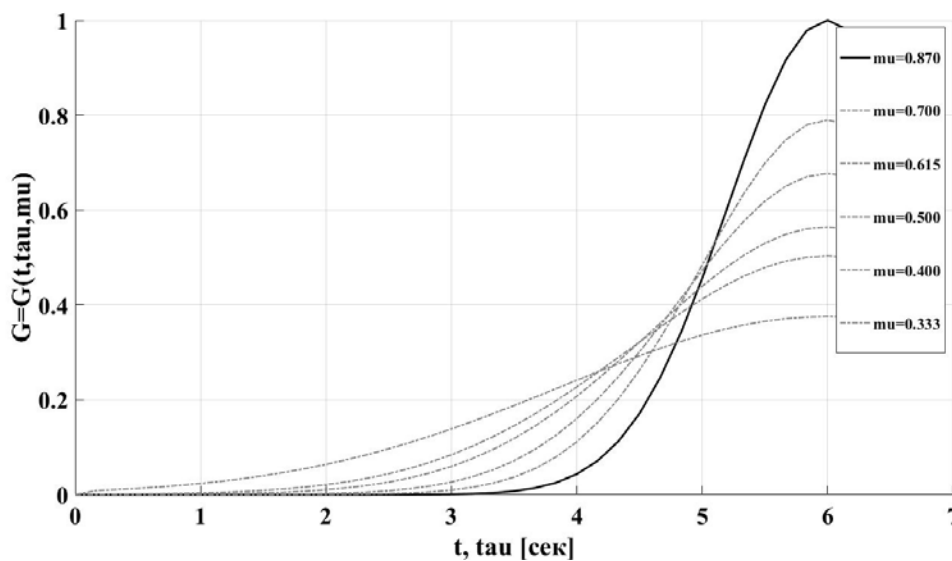


Рис.1. Графическая интерпретация ядра оператора демпфирования $G(t \pm \tau)$ при различных значениях параметра μ , характеризующего масштаб нелокальности демпфирования материала во времени.

Чтобы учесть влияние демпирующих факторов на узловые скорости $\dot{V}(t)$ на предшествующих временных шагах, слагаемое $\dot{V}(t_i) \cdot \int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau$ представим в (4), его интегрированием по частям

$$\dot{V}(t_i) \cdot \int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau = \int_0^{t_i} G(t_i - \tau) \cdot \dot{V}(t_i) d\tau + \int_0^{t_i} \left[\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau \right] \cdot \ddot{V}(t_i) d\tau. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (4), получаем уравнение равновесия деформируемой во времени конструкции с учетом нелокальности демпфирования по временной координате t

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \dot{\bar{V}}(t_{i+1}) + \frac{D}{2} \cdot \left[\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) \cdot \dot{\bar{V}}(t_i) d\tau + \int_0^{t_i} \left[\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau \right] \cdot \ddot{\bar{V}}(t_i) d\tau \right] + (7) + K \cdot \bar{V}(t_{i+1}) = \bar{F}(t_{i+1}).$$

Очевидно (см. рис.1), что чем выше μ , тем ближе модель к классической локальной. В настоящей работе принято значение $\mu = \sqrt{\pi}/2$.

Для преобразования уравнения (7) в вычислительную схему численного метода Ньюмарка, придадим ему вид

$$M \cdot \ddot{\bar{V}}_{i+1} + \frac{D}{2} \cdot \dot{\bar{V}}_{i+1} + \frac{D}{2} \cdot \left[\sum_{j=1}^i G(j) \cdot \dot{\bar{V}}_j \cdot d\tau + \sum_{j=1}^i \left[\sum_{j=1}^i G(j) d\tau \right] \cdot \ddot{\bar{V}}_i \cdot d\tau \right] + (8) + K \cdot \bar{V}_{i+1} = \bar{F}_{i+1}.$$

Графическая интерпретация численного интегрирования слагаемых $\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau$, $\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) \cdot \dot{\bar{V}}(t_i) d\tau$ и $\int_0^{t_i} \left[\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau \right] \cdot \ddot{\bar{V}}(t_i) d\tau$ методом трапеций представлена на (рис.2,3).

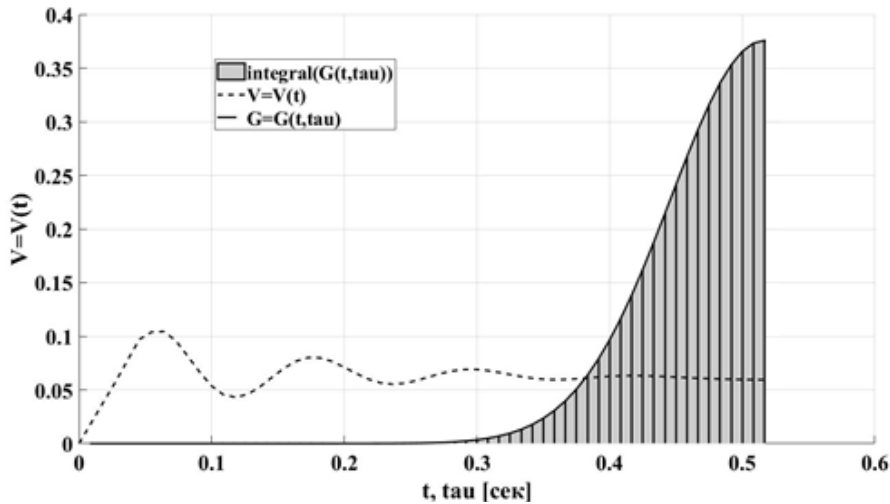


Рис.2. Графическое представление численного интегрирования: $\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau$, методом трапеций.

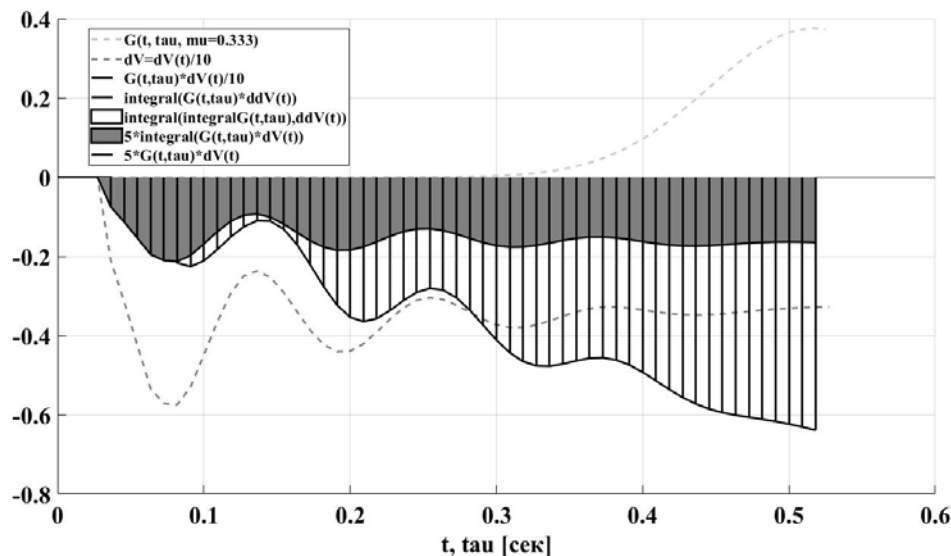


Рис.3. Графическое представление численного интегрирования: $\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) \cdot \dot{\ddot{V}}(t_i) d\tau$ и $\int_0^{t_i} \left[\int_0^{t_i} G(t_i - \tau) d\tau \right] \cdot \ddot{\ddot{V}}(t_i) d\tau$ методом трапеций, в масштабах 1/10 и 5/1 соответственно.

2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПО НЕЯВНОЙ СХЕМЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛОКАЛЬНОЙ ВО ВРЕМЕНИ МОДЕЛИ ДЕМПФИРОВАНИЯ

Положим, что элементы вектора ускорений $\ddot{\ddot{V}}(t)$, в пределах рассматриваемых временных шагов $i-1$ и $i+1$ изменяются по линейному закону (рис.4).

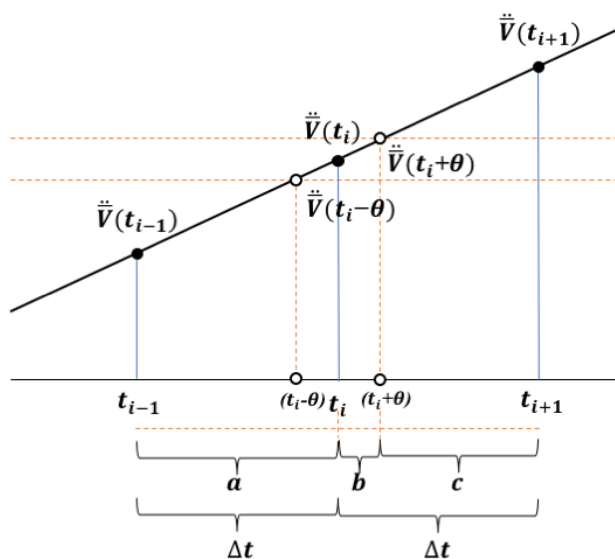


Рис.4. Представление значений ускорений $\ddot{\ddot{V}}(t)$, в пределах рассматриваемых временных узловых точек t_{i-1} и t_{i+1} .

Представим вычисление значения вектора перемещений $\bar{V}(t_{i+1})$ решением системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим временную точку $(t_i \pm \theta)$, которая лежит на участке времени между точками t_{i-1} и t_{i+1} и принадлежит интервалу времени (t_{i-1}, t_{i+1}) . Если интервал (t_{i-1}, t_{i+1}) мал, ускорения $\ddot{V}(t_i \pm \theta)$ на участке между точками $t_i - \theta$ и $t_i + \theta$ временной оси с учетом принятого выше допущения могут считаться постоянными

$$\ddot{V}(t_i \pm \theta) = \frac{\dot{V}(t_{i+1}) - \dot{V}(t_{i-1})}{2 \cdot \Delta t}, \quad (9)$$

где Δt – величина шага по времени. Расположение точки $(t_i \pm \theta)$ при численном интегрировании методом Ньюмарка на рассматриваемом интервале может быть выражено параметрами a, b, c (рис.4). При этом должно выполняться условие $a + b + c = 2 \cdot \Delta t$, обеспечивающее расположение точки $(t_i \pm \theta)$ строго внутри интервала (t_{i-1}, t_{i+1}) и удовлетворяющее условию $2 \cdot \Delta t = Const$.

Мы принимаем во внимание два очевидных варианта расположения точки $(t_i \pm \theta)$:

а) случай, когда a – расстояние от t_{i-1} до $(t_i - \theta)$; b – расстояние от $(t_i - \theta)$ до t_i ; c – расстояние от t_i до t_{i+1} .

б) случай, когда a – расстояние от t_{i-1} до t_i ; b – расстояние от t_i до $(t_i + \theta)$; c – расстояние от $(t_i + \theta)$ до t_{i+1} .

Если точка $(t_i - \theta)$ располагается на интервале (t_{i-1}, t_i) , тогда, в предположении, что ускорения $\ddot{V}(t_i)$ на интервале (t_{i-1}, t_{i+1}) изменяются по линейному закону, справедливо следующее равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\ddot{V}(t_{i-1}) + \ddot{V}(t_{i+1})] \cdot \Delta t &= \frac{1}{2} [\ddot{V}(t_{i-1}) + \ddot{V}(t_i - \theta)] \cdot a + \\ &+ \frac{1}{2} [\ddot{V}(t_i - \theta) + \ddot{V}(t_i)] \cdot b + \frac{1}{2} [\ddot{V}(t_i) + \ddot{V}(t_{i+1})] \cdot c, \end{aligned} \quad (10)$$

где a – расстояние от t_{i-1} до $(t_i - \theta)$; b – расстояние от $(t_i - \theta)$ до t_i ; c – расстояние от t_i до t_{i+1} .

Выразим из равенства (10) вектор ускорений $\ddot{V}(t_i - \theta)$

$$\ddot{V}(t_i - \theta) = \ddot{V}(t_{i+1}) + \frac{b+c}{a+b} \cdot \ddot{V}(t_{i-1}) - \frac{b+c}{a+b} \cdot \ddot{V}(t_i). \quad (11)$$

Приравняем между собой выражения (9) и (11), получим уравнение

$$\frac{\dot{V}(t_{i+1}) - \dot{V}(t_{i-1})}{2 \cdot \Delta t} = \ddot{V}(t_{i+1}) + \frac{b+c}{a+b} \cdot \ddot{V}(t_{i-1}) - \frac{b+c}{a+b} \cdot \ddot{V}(t_i). \quad (12)$$

Из уравнения (12) получим выражение скоростей во временной точке (t_{i+1})

$$\dot{V}(t_{i+1}) = \dot{V}(t_{i-1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \ddot{V}(t_{i+1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{V}(t_{i-1}) - \ddot{V}(t_i)]. \quad (13)$$

Формула (13) – система пересчета узловых скоростей по неявной схеме методом Ньюмарка (первая полезная формула). С другой стороны, скорости в (t_{i+1}) точке могут быть вычислены численно левой разностью

$$\dot{\bar{V}}(t_{i+1}) = \frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{\Delta t}. \quad (14)$$

Приравняв между собой уравнения (13) и (14) мы получаем

$$\frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{\Delta t} = \dot{\bar{V}}(t_{i-1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)]. \quad (15)$$

Из уравнения (15) получим выражение ускорений во временной точке t_{i+1}

$$\ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) = \frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{2(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\bar{V}}(t_{i-1})}{2\Delta t} - \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)]. \quad (16)$$

Формула (16) – система пересчета ускорений по неявной схеме методом Ньюмарка (вторая полезная формула).

Для расчета конструкции в перемещениях, подставляем (13) и (16) в уравнение равновесия (8), и получаем

$$\begin{aligned} M \cdot \left[\frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{2(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\bar{V}}(t_{i-1})}{2\Delta t} - \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)] \right] + \\ + \frac{D}{2} \cdot \left[\dot{\bar{V}}(t_{i-1}) + 2 \cdot \left(\frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{\Delta t} - \dot{\bar{V}}(t_i) \right) + 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)] \right] + \\ + \frac{D}{2} \cdot \left[\sum_{j=1}^i G(j) \cdot \dot{\bar{V}}_j \cdot \Delta t + \sum_{j=1}^i \left[\sum_{j=1}^i G(j) \Delta t \right] \cdot \ddot{\bar{V}}_i \cdot \Delta t \right] + K \cdot \bar{V}(t_{i+1}) = \bar{F}(t_{i+1}). \end{aligned} \quad (17)$$

Из уравнения (17) собираем все множители при искомом векторе $\bar{V}(t_{i+1})$. Назовем сумму множителей при $\bar{V}(t_{i+1})$ эффективной матрицей жесткости. Тогда эффективная матрица жесткости, K_{ef} , вычисляется по формуле

$$K_{ef} = \frac{1}{2 \cdot (\Delta t)^2} \cdot M + \frac{1}{\Delta t} \cdot D + K. \quad (18)$$

Скомпонуем все оставшиеся слагаемые в единый вектор и назовем его эффективным вектором нагрузок. Тогда эффективный вектор нагрузок, $R_{ef}(t_{i+1})$, вычисляется по схеме пересчета, представленной ниже

$$\begin{aligned} R_{ef}(t_{i+1}) = \bar{F}_{i+1} + M \cdot \left[\frac{\bar{V}(t_i)}{2(\Delta t)^2} + \frac{\dot{\bar{V}}(t_{i-1})}{2\Delta t} + \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)] \right] + \\ + \frac{D}{2} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{\bar{V}(t_i)}{\Delta t} + \dot{\bar{V}}(t_i) \right) - \dot{\bar{V}}(t_{i-1}) - 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{b+c}{a+b} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)] \right] - \\ - \frac{D}{2} \cdot \left[\sum_{j=1}^i G(j) \cdot \dot{\bar{V}}_j \cdot \Delta t + \sum_{j=1}^i \left[\sum_{j=1}^i G(j) \Delta t \right] \cdot \ddot{\bar{V}}_i \cdot \Delta t \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае, когда точка $(t_i + \theta)$ располагается на интервале (t_i, t_{i+1}) , узловые перемещения конструкции $\bar{V}(t)$ вычисляются аналогичным образом. Ниже приведены готовые формулировки эффективной матрицы жёсткости и эффективного вектора нагрузок, полученные в результате вычислений по общей неявной схеме метода Ньюмарка для случая $(t_i + \theta) \in (t_i, t_{i+1})$.

Скорости в (t_{i+1}) временной точке могут быть вычислены численно левой разностью

$$\dot{\bar{V}}(t_{i+1}) = \dot{\bar{V}}(t_{i-1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{a+b}{b+c} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)]. \quad (20)$$

Формула (20) – система пересчета скоростей по неявной схеме методом Ньюмарка (третья полезная формула) для временной точки $(t_i + \theta)$.

Для пересчета ускорения в (t_{i+1}) момент времени выражаем из уравнения (20) $\ddot{\bar{V}}(t_{i+1})$. В результате получаем уравнение, представленное ниже (четвертая полезная формула)

$$\ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) = \frac{\bar{V}(t_{i+1}) - \bar{V}(t_i)}{2(\Delta t)^2} - \frac{\dot{\bar{V}}(t_{i-1})}{2\Delta t} - \frac{a+b}{b+c} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)]. \quad (21)$$

Для решения уравнения равновесия подставляем (20) и (21) в уравнение (8), получаем формулы для построения эффективной матрицы жесткости, K_{ef} , и эффективного вектора нагрузок, $R_{ef}(t_{i+1})$

$$K_{ef} = \frac{b+c}{4 \cdot (\Delta t)^2 \cdot (a+b)} \cdot M + \frac{a+b}{\Delta t \cdot (b+c)} \cdot D + K. \quad (22)$$

$$\begin{aligned} R_{ef}(t_{i+1}) = & \bar{F}_{i+1} + M \cdot \left[\frac{\bar{V}(t_i)}{2(\Delta t)^2} + \frac{\dot{\bar{V}}(t_{i-1})}{2\Delta t} + \frac{a+b}{b+c} \cdot [\ddot{\bar{V}}(t_{i+1}) - \ddot{\bar{V}}(t_i)] \right] - \\ & - \frac{D}{2} \cdot \left[\dot{\bar{V}}(t_{i-1}) + 2 \cdot \Delta t \cdot \ddot{\bar{V}}(t_{i-1}) - 2 \cdot \Delta t \cdot \frac{a+b}{b+c} \cdot \left[\frac{\bar{V}(t_i)}{\Delta t^2} + \frac{\dot{\bar{V}}(t_i)}{\Delta t} + \ddot{\bar{V}}(t_i) \right] \right] - \\ & - \frac{D}{2} \cdot \left[\sum_{j=1}^i G(j) \cdot \dot{\bar{V}}_j \cdot \Delta t + \sum_{j=1}^i \left[\sum_{j=1}^i G(j) \Delta t \right] \cdot \ddot{\bar{V}}_i \cdot \Delta t \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

В результате численных преобразований по неявной схеме уравнение равновесия может быть представлено в матричной форме

$$K_{ef} \cdot \bar{V}(t) = R_{ef}(t), \quad (24)$$

где K_{ef} – эффективная матрица жесткости; $R_{ef}(t_{i+1})$ – эффективный вектор нагрузок; $\bar{V}(t)$ – вектор узловых перемещений. Решая систему уравнений (24), получаем значения вектора перемещений $\bar{V}(t)$ конструкции на $i+1$ -ом временном шаге, с учетом её демпфирующих свойств, нелокальных во времени.

3. ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ УТОЧНЕНИЯ МОДЕЛИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА НЬЮМАРКА

В качестве примера рассмотрим колебания балки из композитного материала. Балка опёрта шарнирно по краям и загружена мгновенно приложенной в начальный момент времени в середине пролёта сосредоточенной силой. Общие параметры балочной конструкции, материала, участвующие в расчетах, и значения мгновенно приложенной нагрузки представлены в Таблице 1 [7,8,9].

Таблица 1.

Общие параметры балки из винилэфирного стеклопластика
Модуль Юнга для материала [Pa]: $E = 1720000$;
Длина балки [м]: $L = 12$;
Плотность материала [т/м ³]: $\rho = 1.9$;
Площадь поперечного сечения балки (по всей длине постоянная) [м ²]: $A = 0.006$;
Момент инерции сечения балки [м ⁴]: $I = 1840e - 8$;
Мгновенно приложенная нагрузка [Н]: $F = -0.1$.

Так как рассматриваемая в статье модель является одномерной, учитываются характеристики композитного материала только в продольном направлении. В работе [6] показано, что за счёт гибкости нелокальной во времени модели демпфирования можно скомпенсировать влияние на результаты неучтённых ортотропных свойств материала.

Рассмотрим колебания балки на временном интервале длиной l_i . Разобьем интервал l_i на конечное число отрезков, при этом количество узловых точек равно n_i . Пусть длина шага Δt – не меняется на интервале l_i . Тогда отрезок длиной l_i между текущей i -ой и последующей $(i + 1)$ -ой точками будем называть шагом по времени, его длина $\Delta t = l_i / (n_i - 1)$.

В работе [5] показана калибровка модели демпфирования с памятью путем определения параметра μ , позволяющая наилучшим образом аппроксимировать результаты численного эксперимента. В настоящей работе оценивается возможность уточнения модели путём выбора положения точки $t_i \pm \theta$. Итак, рассмотрим, как изменение положения точки $t_i \pm \theta$ влияет на результаты, получаемые методом Ньюмарка. В Таблице 2 приведены значения перемещений срединного сечения балки, полученные в результате решения уравнения (8) при изменении положения точки $t_i + \theta \in (t_i, t_{i+1})$. Параметр a принят постоянным и равным Δt . Первый столбец – начальное приближение метода Ньюмарка.

Таблица 2.

	Время t_i , с								
	0	0.000	0.017	0.026	0.036	0.044	0.052	0.061	0.070
Значение параметров b, c	Прогибы, м								
b=0.0000, c=1.0000	0	0.000	0.031	0.043	0.060	0.079	0.086	0.085	0.073

b=0.0003, c=0.0084	0	0.000	0.031	0.043	0.060	0.079	0.087	0.087	0.076
b=0.0004, c=0.0083	0	0.000	0.031	0.043	0.060	0.080	0.087	0.087	0.077
b=0.0005, c=0.0082	0	0.000	0.031	0.043	0.060	0.080	0.087	0.087	0.077
b=0.0006, c=0.0081	0	0.000	0.031	0.043	0.060	0.080	0.087	0.088	0.078
b=0.0008, c=0.0079	0	0.000	0.031	0.044	0.061	0.080	0.088	0.089	0.080
b=0.0017, c=0.0070	0	0.000	0.031	0.044	0.061	0.080	0.088	0.090	0.084
b=0.0026, c=0.0061	0	0.000	0.031	0.045	0.062	0.080	0.088	0.091	0.086
b=0.0035, c=0.0052	0	0.000	0.030	0.045	0.062	0.079	0.087	0.091	0.087
b=0.0044, c=0.0044	0	0.000	0.030	0.045	0.062	0.078	0.086	0.090	0.087
b=0.0052, c=0.0035	0	0.000	0.029	0.045	0.061	0.078	0.085	0.089	0.086
b=0.0061, c=0.0026	0	0.000	0.029	0.045	0.061	0.077	0.084	0.087	0.085
b=0.0070, c=0.0017	0	0.000	0.028	0.044	0.060	0.075	0.082	0.085	0.083
b=0.0079, c=0.0008	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

В Таблице 2 взято девять первых узловых точек рассматриваемого временного интервала (узловые точки временной оси) длиной $l_t = 3.60$ сек.

На рис.5 представлена графическая интерпретация информации, представленной в Таблице 2. По горизонтальной оси отложено время в начальном интервале колебаний 0.0091 сек; по вертикальной оси значения перемещений в срединном узле.

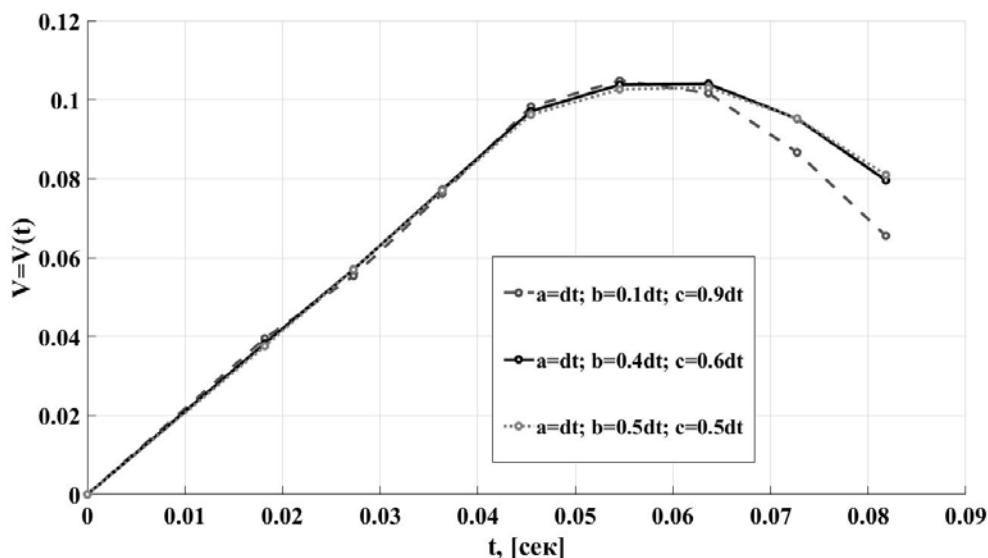


Рис.5. Оценка влияния положения точки $t \pm \theta$ в общей схеме метода Ньюмарка на решение уравнения равновесия конструкции из композитного материала. Решение для первых девяти узловых точек, $n_t = 9$.

Из Таблицы 2 видно, что путем изменения положения точки $t \pm \theta$ можно добиться изменения значений прогибов в пределах 10%.

На рис.6 представлено изменение перемещений срединного сечения колеблющейся балки для первых шестидесяти узловых точек, $n_t = 60$, рассматриваемого временного интервала, t_i .

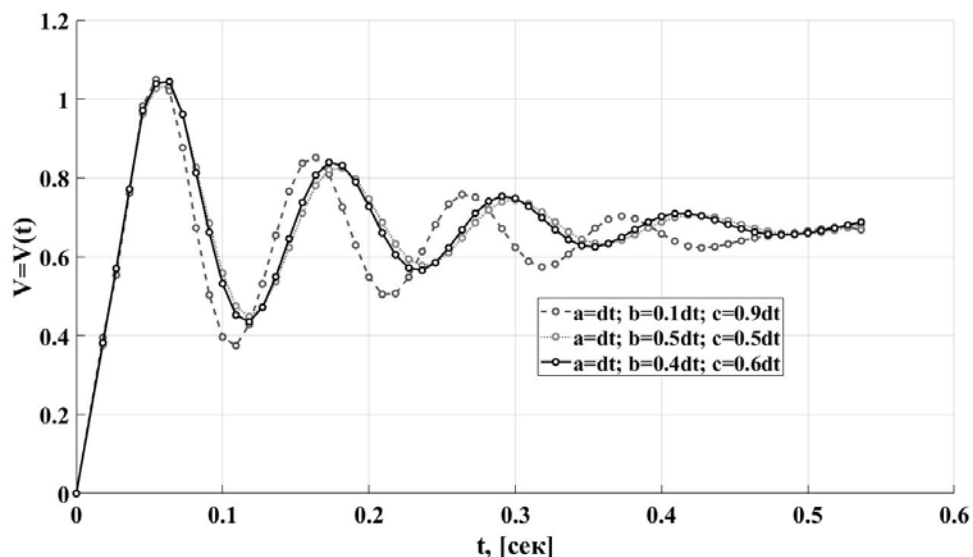


Рис.6. Оценка влияния положения точки $t \pm \theta$ в общей схеме метода Ньюмарка на решение уравнения равновесия конструкции из композитного материала. Количество узловых точек $n_t = 60$.

Для верификации модели установившееся значение прогиба (прогиба в момент времени 0,5 с.) также сравнивалось со значением прогиба в срединном сечении от статической нагрузки:

$$v = \frac{F \cdot l^3}{8E \cdot I_x} \approx 0.0682 \text{ [м]}, \text{ вычисленным}$$

по формуле сопротивления материалов.

Из рис.6 видно, что путём изменения положения точки $t \pm \theta$ можно корректировать фазу колебательного процесса.

ВЫВОДЫ

В результате численного динамического анализа изгибаемого конструктивного элемента из композитного материала с моделированием его демпфирующих свойств, получена гибкая модель решения уравнения равновесия конструкции методом Ньюмарка с нелокальным демпфированием на обобщённом интервале времени (t_{i-1}, t_{i+1}) . Показаны результаты управления параметрами общей неявной схемы, что позволяет назначать их в соответствии с данными физического эксперимента. Такой подход к динамическому анализу изгибаемых элементов является новым и представляется перспективным в приложениях к динамическому расчёту конструкций из структурно сложных материалов, к которым относятся композитные материалы. Показано, что повышения точности результатов численного расчёта можно добиваться за счет управления

параметрами предложенной модификации метода Ньюмарка, в том числе – варьирования положения точки $(t \pm \theta)$ на текущем временном интервале (t_{i-1}, t_{i+1}) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics* // Novel Trends and Recent Results Applied Mechanics Reviews. – 2010. – Vol.63. – 010801.
2. Потапов В.Д. *Устойчивость стержней при стохастическом нагружении с учетом нелокального демпфирования* // Проблемы машиностроения и теории надежности. – 2012. – №4. – С.25-31.
3. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping* // Int. Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.3381-3400.
4. Сидоров В.Н., Бадина Е.С. *Нелокальные модели демпфирования в динамических расчетах конструкций из композитных материалов* // Промышленное и гражданское строительство. – 2021. – №9. – С.66-70. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.09.66-70.
5. Бате К, Вилсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. Глава 3. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
6. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2021. – Vol.17. – No.4. – Pp.14-21.
7. Landherr J.C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam*. Master of Applied Science Thesis. – Kingston: Queen’s University, 2008.
8. Lim R.A. *Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage*. – Kingston: Queen’s University, 2016.
9. Xie A. *Development of an FRP Deployable Bridge*. Master of Applied Science Thesis. – Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.

REFERENCES

1. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. *Application of Fractional Calculus for Dynamic Problems of Solid Mechanics*. Novel Trends and Recent Results Applied Mechanics Reviews, 2010, Vol.63, 010801.
2. Potapov V.D. *Ustojchivost’ stержnej pri stokhasticheskom nagruzhenii s uchetom nelokal’nogo dempfirovaniya [Stability of rods under stochastic loading taking into account non-local damping]*. Problemy mashinostroeniya i teorii nadezhnosti, 2012, No.4, Pp.25-31.
3. Lei Y., Friswell M.I., Adhikari S. *A Galerkin Method for Distributed Systems with Non-local Damping*. Int. Journal of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.3381-3400.
4. Sidorov V.N., Bad’ina E.S. *Nelokal’nye modeli dempfirovaniya v dinamicheskikh raschetakh konstruksij iz kompozitnykh materialov [Nonlocal damping models in dynamic calculation of structures made of composite materials]*. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel’stvo, 2021, No.9, Pp.66-70.

5. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall, Inc., 1976, 528 p.
6. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. *Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2021, Vol.17, No.4, Pp.14-21.
7. Landherr J.C. *Dynamic analysis of a FRP deployable box beam*. Master of Applied Science Thesis. Kingston, Queen's University, 2008.
8. Lim R.A. *Structural monitoring of a 10m fibre reinforced polymer bridge subjected to severe damage*. Kingston, Queen's University, 2016.
9. Xie A. *Development of an FRP Deployable Bridge*. Master of Applied Science Thesis. Department of Civil Engineering, Royal Military College of Canada, 2007.

Поступила в редакцию 12 января 2022 года.

Сведения об авторах:

Сидоров Владимир Николаевич – д.т.н., проф., Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: sidorov.vladimir@gmail.com

Детина Елена Петровна – н.с., преподаватель, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: detinaep@mgsu.ru

Бадина Елена Сергеевна – к.т.н., Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)), г. Москва, Россия; e-mail: shepitko-es@mail.ru