УДК 539.3
DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.036_086.03

ЗАДАЧИ О ДИСПЕРСИИ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ (ОБЗОР). ЧАСТЬ II[*]

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
НИУ Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Представлен краткий обзор современного состояния и путей развития методов исследования дисперсии волн в функционально-градиентных и слоистых упругих волноводах. В опубликованной ранее части первой данного обзора кратко изложены основные типы функционально-градиентных материалов и определяющих соотношений для них, рассмотрены методы решения задачи о дисперсии волн в неоднородном волноводе на базе передаточных, рассеивающих и глобальных матриц, приемы приближения функционально-градиентного волновода структурой слоев с постоянными или переменными по толщине константами, и метод рядов Пеано. Перечислены основные способы повышения устойчивости вычислительного процесса. В части второй обзора основное внимание уделено полуаналитическим методам решения дисперсионных задач, основанным на приближении волновода эквивалентной в некотором смысле системой с конечным числом степеней свободы: методу степенных рядов, рядов Фурье, полуаналитических конечных элементов, а также методам, основанным на теориях пластин и оболочек. Изложены основы метода степенных рядов, приведены основные рекуррентные соотношения для плоского слоя и полого цилиндрического волновода с секторной формой поперечного сечения. Альтернативный подход, основанный на разложении неизвестных в ряды Фурье по ортогональным полиномам нормальной координаты (т.н. метод ортогональных полиномов), в отличие от метода степенных рядов приводит к постановке обобщенной проблемы собственных значений и не требует решения трансцендентного характеристического уравнения, притом рекуррентные свойства полиномов допускают аналитическое вычисление коэффициентов уравнений. Рассмотрено приложение метода рядов Фурье к исследованию затухающих волн, а также формулировка метода в терминах пространства состояний механической системы. Кратко изложены основы полуаналитического метода конечных элементов. Описан вариант теории оболочек произвольного высокого порядка, основанный на лагранжевом формализме аналитической механики континуальных систем со связями и биортогональных разложениях неизвестных, и показано, что как метод ортогональных полиномов, так и полуаналитический метод конечных элементов вытекают из данного варианта теории оболочек как ее частные случаи, порождаемые выбором различных базисных функций нормальной координаты на базе единого вариационного формализма, а учет связей, вытекающих из краевых условий на лицевых поверхностях, обеспечивает точное удовлетворение условий отражения при любом порядке теории.

Ключевые слова: волноводы функционально-градиентные; волноводы слоистые; волн нормальных дисперсия; ряды степенные; Фурье ряды; элементы конечные полуаналитические; оболочек теории высших порядков

[*] *Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы 121112200124-1)*

WAVE DISPERSION IN HETEROGENEOUS WAVEGUIDES: METHODS OF SOLUTION (A REVIEW). PART II

Zhavoronok S.I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
National Research University MGSU, Moscow, Russia

ABSTRACT

A brief review of modern methods of solution of problems of dispersion of normal waves in functionally graded and laminated elastic waveguides as well as of some ways of their improvement is presented. The early published Part I of review presented some typical functionally graded materials and appropriate constitutive relations; the methods of transfer matrix, reverberation, global matrix and the Peano series method were briefly described as well as possible approximations of functionally graded waveguides by the laminated structures with properties being constant or variable across the thickness. The main ways to improve the numerical stability of matrix methods were also mentioned. In the presented below Part II, the main attention is paid to methods of semi-analytical solution of dispersion problems based on the approximation of a waveguide by an equivalent system with a finite number of degrees of freedom, i. e. to power series, generalized Fourier series, semi-analytical finite elements, as well as methods based on higher-order theories of plates and shells. The basics of power series method are stated, the appropriate recursive relations for a plane layer and a hollow cylindrical waveguide with sectorial cross-section are presented. The main alternative to power series could be based on the expansion of the unknowns into generalized Fourier series on orthogonal polynomials of the normal coordinate; contrarily to power series the so-called “orthogonal polynomial approach” does not require the solution of transcendental equation and results in the statement of the generalized eigenvalue problem, moreover the known recursive properties of orthogonal polynomials allow one to obtain the equations coefficients analytically. The formulation of the Fourier series method in terms of state-vector formalism is presented, and its application to the study of evanescent wave modes is considered. The semi-analytical finite element method is briefly described. Finally, one variant of higher-order shell theory based on the Lagrangian formalism of the analytical dynamics of continua with constraints and biorthogonal expansion of unknown functions is discussed. It is shown that both orthogonal polynomial approach and semi-analytical finite element method follows from this kind of shell theory as particular cases generated by choice of different base functions of the normal coordinate on the background of the unified variational formalism. Accounting for constraints following from boundary conditions on shells’ faces allows one to satisfy the reflection conditions for the waveguide model based on the shell model of arbitrary order.

Keywords: functionally graded waveguides; laminated waveguides; normal wave dispersion; power series; Fourier series; semi-analytical finite elements; higher-order shell theories

1. ВВЕДЕНИЕ

Обзор, первая часть которого опубликована в статье [1], посвящен анализу ключевых направлений развития в последние 20 лет методов решения задач о нормальных волнах в функционально-градиентных упругих волноводах. Основное внимание уделено некоторым аналитическим подходам к исследованию дисперсии нормальных волн, в первую очередь матричным методам (см. [1]), полуаналитическим методам на базе конечно-элементной дискретизации волновода в направлениях, ортогональных волновому вектору, а также методам, которые могут интерпретироваться как приложения современных вариантов теории оболочек высшего порядка к стационарным волновым задачам. В частности, рассмотрено построение решений для плоских и цилиндрических волноводов на базе разложений неизвестных в степенные ряды, либо в ряды Фурье по некоторой ортогональной базисной системе (т. н. «метод ортогональных полиномов»). Поскольку описываемые подходы применимы как для функционально-градиентных (ФГ) волноводов с гладким распределением объемных долей структурных составляющих (см. [1]), так и для слоистых, приведены некоторые специфические приемы, применяемые для исследования волн в композиционных материалах слоистой структуры. Кроме того, изложены основы теории оболочек N-го порядка, допускающей построение решений дисперсионных задач, соответствующих методу ортогональных полиномов и полуаналитическому МКЭ на базе единого формализма лагранжевой механики двумерных континуальных систем со связями в качестве частных случаев.

2. МЕТОД СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

2.1. Дисперсия нормальных волн в плоском ФГ слое.

Метод степенных рядов [2] обеспечивает приближенное решение задачи о дисперсии нормальных волн, основанное на построении рекуррентных соотношений, связывающих коэффициенты рядов. В работе [3] построено решение задачи о дисперсии волн Лява ($u_1 = u_3 = 0$, $u_2 \neq 0$), распространяющихся в пьезоупругом неоднородном в направлении $O\xi^3$ слое вдоль оси $O\xi^1$; в работе [4] – задачи о волнах Блувштейна-Гуляева в пьезоупругом ФГ слое. Задача о дисперсии волн Рэлея-Лэмба ($u_2 = 0$) в ФГ слое описана в статьях [5-7].

Для плоского слоя, т.е. тела, заданного в координатах $O\xi^1\xi^2\xi^3$ как

$$V : \xi^3 \in \left[-h/2, h/2\right] \subset \mathbb{R}, \quad \xi^\alpha \in \mathbb{R}^2 \left(\alpha = 1,2\right); \quad \partial V = S^\pm : \xi^3 = \pm h/2.$$

на базе определения (2.1) компонентов вектора перемещения в нормальной волне

$$u_{1,3}\left(\xi^1, \xi^3, t\right) = U_{1,3}\left(\xi^3\right) e^{i(\kappa x - \omega t)}, \tag{2.1}$$

где может быть введена мнимая амплитуда $\bar{U}_3 = iU_3$ – сдвиг фазы u_3 на $\pi/2$ [6], уравнения движения трехмерной задачи приводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (2.2) с переменными коэффициентами [5,7]

$$\begin{aligned} &C_{44}U_1'' + C_{44}'U_1' + \left(\rho\omega^2 - C_{11}\kappa^2\right)U_1 \pm \left(C_{13} \mp C_{44}\right)\kappa U_3' \pm \kappa C_{44}' U_3 = 0; \\ &C_{11}U_3'' + C_{11}'U_3' + \left(\rho\omega^2 - C_{44}\kappa^2\right)U_3 \mp \left(C_{13} \mp C_{44}\right)\kappa U_1' \pm \kappa C_{13}' U_1 = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

верхний знак соответствует действительной функции U_3 [5], нижний – мнимой iU_3 [6]. Обозначения упругих постоянных в уравнениях (2.2) [7] соответствуют формализму Фойхта; в частном случае изотропного ФГ материала [5,6]

$$\begin{aligned} &C_{11}\left(\xi^3\right) = \lambda\left(\xi^3\right) + 2\mu\left(\xi^3\right); \quad C_{13}\left(\xi^3\right) = \lambda\left(\xi^3\right); \quad C_{44}\left(\xi^3\right) = \mu\left(\xi^3\right); \\ &\lambda\left(\xi^3\right) = \nu\left(1 - 2\nu\right)^{-1}\left(1 + \nu\right)^{-1} E\left(\xi^3\right), \quad \mu\left(\xi^3\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \nu\right)^{-1} E\left(\xi^3\right); \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнения движения (2.2) для изотропного ФГ материала имеют вид (2.4)

$$\begin{aligned} &\mu U_1'' + \mu' U_1' + \left[\rho\omega^2 - \kappa^2\left(\lambda + 2\mu\right)\right]U_1 \pm \left(\lambda + \mu\right)\kappa U_3' \pm \kappa\mu' U_3 = 0; \\ &\left(\lambda + 2\mu\right)U_3'' + \left(\lambda + 2\mu\right)' U_3' + \left(\rho\omega^2 - \kappa^2\mu\right)U_3 \mp \left(\lambda + \mu\right)\kappa U_1' \mp \lambda'\kappa U_1 = 0; \end{aligned} \tag{2.4}$$

вязкоупругое поведение материала задается комплексными константами $\hat{C}_{ij}$ [7]

$$\hat{C}_{ij} = C_{ij} - i\omega\overline{C}_{ij} \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda} = \lambda - i\omega\overline{\lambda}, \quad \hat{\mu} = \mu - i\omega\overline{\mu}.$$

Уравнениям движения соответствуют однородные краевые условия на $S^{\pm}$

$$\sigma^{\alpha 3}\left(\xi^1, \pm h/2\right) = 0, \quad \sigma^{33}\left(\xi^1, \pm h/2\right) = 0. \tag{2.5}$$

Приближенное решение дифференциальных уравнений (2.4) с переменными коэффициентами λ, μ, ρ основано на разложении неизвестных амплитуд $U_{1,3}\left(\xi^3\right)$ и констант среды (2.3) в степенной ряд в окрестности базисной поверхности $\xi^3 = 0$

$$U_1\left(\xi^3\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} U_1^{(k)}\zeta^k, \quad U_3\left(\xi^3\right) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} U_3^{(k)}\zeta^k, \quad \xi^3/h = \zeta \in [-1,1]; \tag{2.6}$$

$$C_{ij} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} C_{ij}^{(k)}\zeta^k: \quad \lambda = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \lambda^{(k)}\zeta^k, \mu = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \mu^{(k)}\zeta^k; \quad \rho = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \rho^{(k)}\zeta^k.$$

Подстановка разложений (2.6) в уравнения движения (2.4) приводит к (2.7)

$$\begin{gathered}
\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{(k)}\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)U_1^{(k+2)}\zeta^k+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu^{(k+1)}\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U_1^{(k+1)}\zeta^k+\\
+(\kappa h)^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho^{(k)}c^2-\lambda^{(k)}-2\mu^{(k)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}U_1^{(k)}\zeta^k+\kappa h\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu^{(k+1)}\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}U_3^{(k)}\zeta^k+\\
+\kappa h\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U_3^{(k+1)}\zeta^k=0;\\
\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{(k)}+2\mu^{(k)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)U_3^{(k+2)}\zeta^k-\kappa h\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda^{(k+1)}\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}U_1^{(k)}\zeta^k-\\
-\kappa h\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lambda^{(k)}+\mu^{(k)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U_1^{(k+1)}\zeta^k+(kh)^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\rho^{(k)}c^2-\mu^{(k)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}U_3^{(k)}\zeta^k+\\
+\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left(\lambda^{(k+1)}+\mu^{(k+1)}\right)\zeta^k\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)U_3^{(k+1)}\zeta^k=0,
\end{gathered} \tag{2.7}$$

из условия равенства нулю коэффициентов при равных степенях координаты ζ в (2.7) следуют $2k+2$ рекуррентные соотношения для $2k+6$ амплитуд $U_1^{(k)}$, $U_3^{(k)}$

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{k}(m+1)(m+2)\mu^{(k-m)}U_1^{(m+2)}+\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)(m+1)\mu^{(k-m+1)}U_1^{(m+1)}+\\
+(\kappa h)^2\sum_{m=0}^{k}\left(\rho^{(k-m)}c^2-\lambda^{k-m}-2\mu^{k-m}\right)U_1^{(m)}+\kappa h\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)\mu^{(k-m+1)}U_3^{(m)}+\\
+\kappa h\sum_{m=0}^{k}(m+1)\left(\lambda^{(k-m)}+\mu^{(k-m)}\right)U_3^{(m+1)}=0;
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
\sum_{m=0}^{k}(m+1)(m+2)\left(\lambda^{(k-m)}+2\mu^{(k-m)}\right)U_3^{(m+2)}-\kappa h\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)\lambda^{(k-m+1)}U_1^{(m)}-\\
-\kappa h\sum_{m=0}^{k}(m+1)\left(\lambda^{(k+m)}+\mu^{(k+m)}\right)U_1^{(m+1)}\\
+(\kappa h)^2\sum_{m=0}^{k}\left(\rho^{(k-m)}c^2-\mu^{(k-m)}\right)U_3^{(m)}+\sum_{m=0}^{k}(k-m+1)\lambda^{(k-m+1)}U_1^{(m)}=0.
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Однородные уравнения (2.9) являются линейными отображениями [5]

$$U_1^{(k)} = L_1^{(k)}\left(U_1^{(0)}, U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, U_3^{(1)}\right); \quad U_3^{(k)} = L_3^{(k)}\left(U_1^{(0)}, U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, U_3^{(1)}\right), \quad k \geqslant 2.$$

Свободные переменные $U_1^{(0)}, U_1^{(1)}, U_3^{(0)}, U_3^{(1)}$ задаются авторами [5,7] в виде

$$\left(U_1^{(0,j)} \quad U_1^{(1,j)} \quad U_3^{(0,j)} \quad U_3^{(1,j)}\right) = \mathbf{I}_{(4\times4)},$$

откуда следует запись амплитудных функций $U_1\left(\xi^3\right)$, $U_3\left(\xi^3\right)$ через константы C_j

$$U_1(\zeta) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left(U_1^{(k,j)}C_j\right)\zeta^k; \quad U_3(\zeta) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left(U_3^{(k,j)}C_j\right)\zeta^k, \quad k = 1\ldots4,$$

определяемые из краевых условий (2.5) на $S^{\pm}$ [5,7] и имеющих вид $B^{ij}C_j = 0$,

$$B^{11} = -\kappa h\lambda^{-}; \; B^{23} = \kappa h; \quad B^{4j} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left[(k+1)U_1^{(k+1,j)} + \kappa h\left(\lambda^{+} + 2\mu^{+}\right)U_3^{(kj)}\right];$$

$$B^{14} = \mu^{-}; \; B^{22} = 1; \quad B^{3j} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\left[-\kappa h\lambda^{+}U_1^{(k,j)} + (k+1)\left(\lambda^{+} + 2\mu^{+}\right)U_3^{(k+1,j)}\right].$$

Условием существования нетривиального решения $C_j \neq 0$ является дисперсионное соотношение (2.10), сводящееся к трансцендентному уравнению

$$\det\left(B^{ij}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad D(c,\kappa) = 0, \quad c = \omega/\kappa. \tag{2.10}$$

Сходимость степенных рядов (2.6) определяется критерием (2.11) [5,6]

$$\lim_{k\to\infty}\frac{U_1^{(k+1)}}{U_1^{(k)}} = \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(0)}} < 1; \quad \lim_{k\to\infty}\frac{U_3^{(k+1)}}{U_3^{(k)}} = \frac{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} < 1. \tag{2.11}$$

Проведенный в [5] анализ решения задачи о дисперсии нормальных волн в однородном слое показал достаточность удержания 25 членов частичной суммы ряда для описания первой моды нормальных волн и 50 членов ряда для описания второй моды в диапазоне безразмерного волнового числа $\kappa h \in [0,10]$. Для ФГ слоя при $q(\zeta) = \alpha\zeta$ авторами [5] предложена следующая оценка погрешности решения

$$\Delta c = \left(\left|c\big|_{k=N} - c\big|_{k=2N}\right|\right)\Big/ c\big|_{k=2N} < 0.001\%$$

и показано, что при $q(\zeta) = \alpha\zeta$ число N членов частичных сумм степенных рядов, удержание которых необходимо для описания дисперсионных кривых $c(\kappa)$ первой и второй мод волн при $\kappa h \in [0,10]$ аналогично однородному слою. Проведенные сравнительные оценки решения на основе степенных разложений (2.6) с решениями на основе метода однородных слоев [8,9] и глобальных матриц [10], показали близкие погрешности решений при числе слоев, равном 10, и удержании 50 членов степенного ряда, при этом вычислительные ресурсы, необходимые для реализации метода глобальных матриц, превышают таковые для метода рядов [5]. На базе метода степенных рядов удалось, в частности, выявить существование аномальной дисперсии первой и второй мод волн Рэлея-Лэмба в ФГ слое [5], получить асимптотическое решение задачи для поверхностной поперечной волны в ФГ полупространстве, обладающей нормальной дисперсией [11]. В работе [12] приведено решение задачи о дисперсии волн Лэмба в вязкоупругой пластине, в статье [7] – решение задачи построения дисперсионных кривых трех низших фазовых частот для тонкой вязкоупругой ФГ пленки.

В [6] метод степенных разложений применен для разработки алгоритма решения обратной задачи определения зависимости $q(\zeta)$ физических постоянных плоского слоя функционально-градиентного материала с температурной релаксацией напряжений. В результате решения прямой задачи обнаружена фазовая частота ω_g^0: $c_g = \partial\omega/\partial\kappa = 0$ $(c_{Ph} \neq 0)$, проведено сравнение ω_g^0 для ФГ и однородного слоев, показана зависимость ω_g^0 для ФГМ от закона $q(\zeta)$ распределения физических постоянных материала по толщине плоского слоя; дисперсия волн с $c_g = 0$ в ФГ пластинах исследована также в работах [13,14].

2.2. Дисперсия нормальных волн в цилиндрических ФГ волноводах.

Применение метода степенных рядов в варианте [2] к более сложным задачам о дисперсии волн в неоднородных цилиндрических волноводах разработано в [15-24]. Рассмотрены экспоненциально-градиентные в радиальном направлении упругие, в общем случае ортотропные, волноводы, отнесенные к цилиндрической системе координат

$$\rho = \rho^0 \exp\left[-\frac{\eta}{2}\left(\frac{r+1}{h}\right)^q\right], \quad c_{ij} = c_{ij}^0 \exp\left[-\frac{\eta}{2}\left(\frac{r+1}{h}\right)^q\right], \quad \eta \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N} \cup \{0\};$$

$$r \in [R_-, R_+] R_*^{-1}, \quad R_\pm \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad R_+ > R_-, \quad R_- \neq 0; \quad 2h = (R_2 - R_1) R_*.$$

$$\theta \in [-\theta_*, \theta_*], \quad \theta_* \in [0, \pi].$$

Здесь $R_\pm$ соответствуют внешней и, в случае полого волновода, внутренней поверхностям, $R_* = (R_+ + R_-)/2$, η, q – параметры, $ij = 11, 12, 13, 33, 44, 66$. Физические компоненты вектора перемещения $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^{\mathrm{T}}$ имеют вид [16]

$$\mathbf{u} = \exp\left[-\tfrac{1}{2}\eta(r-1)^p h^{-p} - i(\omega t - \kappa z)\right] \mathbf{T}^{(n)}(\theta) \cdot \mathbf{U}^{(n)}(\zeta), \tag{2.12}$$

$$\mathbf{U}^{(n)}(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}^{(n,k)} \zeta^{k+\delta}, \ \mathbf{U}^{(n,k)} = \left(u_r^{(n,k)}, u_\theta^{(n,k)}, u_z^{(n,k)}\right)^{\mathrm{T}}, \ \zeta = \frac{r-1}{h} \in [-1, 1]; \tag{2.13}$$

в случае цилиндрического волновода незамкнутого (секторного) сечения [16]

$$\mathbf{T}^{(n)}{}_{3\times3} = \mathrm{diag}\left[\cos\left(\tau^{(n)} + \beta\right) \quad \sin\left(\tau^{(n)} + \beta\right) \quad i\cos\left(\tau^{(n)} + \beta\right)\right],$$

$$\tau^{(n)} = \pi\theta_*^{-1}(n - 1/2) \quad (\beta = 0); \quad \tau^{(n)} = n\pi\theta_*^{-1} \quad (\beta = \pi/2),$$

где $\tau^{(n)}$ – азимутальные волновые числа, соответствующие краевым условиям $\mathbf{u} = 0$ при $\theta = \theta_*$, $\beta = 0$ соответствует симметричным относительно $\theta = 0$ волнам: $u_r(\theta) = u_r(-\theta)$, $u_z(\theta) = u_z(-\theta)$, $u_\theta(\theta) = -u_\theta(-\theta)$, а $\beta = \pi/2$ – антисимметричным волнам: $u_r(\theta) = -u_r(-\theta)$, $u_z(\theta) = -u_z(-\theta)$, $u_\theta(\theta) = u_\theta(-\theta)$ (см. [16,18-20,23]). В случае цилиндрического волновода замкнутого поперечного сечения [17]

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{I}\exp(in\theta).$$

Компоненты тензора напряжения, соответствующие (2.13), имеют вид (2.14)

$$\mathbf{s} = \exp\left[\tfrac{1}{2}\eta(r-1)^p h^{-p} - i(\omega t - \kappa z)\right] \mathbf{T}^{(n)}(\theta) \cdot \mathbf{S}^{(n)}(\zeta), \quad \delta = \overline{0,1}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{S}^{(n,\delta)}(\zeta) = \left(\sigma_{rr}^{(n)}, \ \ \sigma_{\theta\theta}^{(n)}, \ \ \sigma_{zz}^{(n)}, \ \ i\sigma_{rz}^{(n)}, \ \ \sigma_{r\theta}^{(n)}, \ \ i\sigma_{\theta z}^{(n)}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Подстановка (2.12, 2.13) в уравнения движения трехмерной задачи теории упругости приводит к соотношениям, аналогичным (2.7); приравнивание к нулю коэффициентов при ζ^k позволяет получить рекуррентные уравнения в виде

$$\mathbf{Z}_{(k)}^{(n,\delta)}=\sum_{j=0}^{4}\mathbf{A}_{(k,j)}^{(n,\delta)}\cdot\mathbf{Z}_{(k-j)}^{(n,\delta)}+\sum_{j=0}^{3}\mathbf{A}_{(k,5+j)}^{(n,\delta)}\cdot\mathbf{Z}_{(k-q-j)}^{(n,\delta)}+\sum_{j=0}^{2}\mathbf{A}_{(k,q+j)}^{(n,\delta)}\cdot\mathbf{Z}_{(k-2q-j)}^{(n,\delta)}. \quad (2.15)$$

Базисные решения рекуррентной матричной системы (2.15) (см. [16,17]) записываются для компонентов перемещений и напряжений следующим образом

$$\mathbf{U}^{(n,\delta)}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Z}_{(k)}^{(n,\delta)}\zeta^{k+\delta}, \quad \delta=\overline{0,1}; \quad (2.16)$$

$$\mathbf{S}^{(n,\delta)}(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{Q}_{(k)}^{(n,\delta)}\cdot\mathbf{Z}_{(k)}^{(n,\delta)}\zeta^{k+\delta}, \quad \left(\mathbf{Q}_{(k)}^{(n,\delta)}\right)_{6\times3}. \quad (2.17)$$

$\mathbf{Q}$ – прямоугольные матрицы (см. напр. [16]). Матрицы-коэффициенты, являющиеся начальными величинами для рекурсии (2.15), имеют вид [16]

$$\mathbf{Z}_{(0)}^{(n,0)}=\mathbf{Z}_{(0)}^{(n,1)}=\mathbf{I}, \quad \mathbf{Z}_{(1)}^{(n,0)}=0, \quad \mathbf{Z}_{k}^{(n,\delta)}=0 \quad \left(k=\overline{-\max(2,2q),-2}\right)$$

$$\mathbf{Z}_{(1)}^{(n,1)}=\begin{pmatrix} -h/2 & -\tau^{(n)}h\left(c_{12}^{0}+c_{66}^{0}\right)/2c_{11}^{0} & \kappa h\left(c_{13}^{0}+c_{44}^{0}\right)/2c_{11}^{0} \\ \tau^{(n)}h\left(c_{12}^{0}+c_{66}^{0}\right)/2c_{11}^{0} & -h/2 & 0 \\ -\kappa h\left(c_{13}^{0}+c_{44}^{0}\right)/2c_{11}^{0} & 0 & -h/2 \end{pmatrix};$$

компоненты вектора перемещения и тензора напряжения определяются так

$$\mathbf{U}^{(n)}(\zeta)=\mathbf{U}^{(n,0)}(\zeta)\cdot\mathbf{C}_0+\mathbf{U}^{(n,1)}(\zeta)\cdot\mathbf{C}_1; \quad (2.18)$$

$$\mathbf{S}^{(n)}(\zeta)=\mathbf{S}^{(n,0)}(\zeta)\cdot\mathbf{C}_0+\mathbf{S}^{(n,1)}(\zeta)\cdot\mathbf{C}_1, \quad (2.19)$$

$\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ – векторы констант, удовлетворяющих кинематическим или силовым краевым условиям на поверхностях $r=R_-, r=R_+$ (см. напр. [17]). Условия существования $\mathbf{C}_{1,2}\neq 0$ приводят к дисперсионным уравнениям (2.20) [16], (2.21)

$$D_U(\omega,\kappa)=\begin{vmatrix} \mathbf{U}^{(n,0)}(\zeta_-) & \mathbf{U}^{(n,1)}(\zeta_-) \\ \mathbf{U}^{(n,0)}(\zeta_+) & \mathbf{U}^{(n,0)}(\zeta_+) \end{vmatrix}=0; \quad (2.20)$$

$$D_S(\omega,\kappa)=\begin{vmatrix} \mathbf{S}_{\pm}^{(n,0)}(-1) & \mathbf{S}_{\pm}^{(n,1)}(-1) \\ \mathbf{S}_{\pm}^{(n,0)}(1) & \mathbf{S}_{\pm}^{(n,1)}(1) \end{vmatrix}=0, \quad \mathbf{S}_{\pm}^{(n,\delta)}=\left(\sigma_{rr}^{(n,\delta)},\sigma_{rz}^{(n,\delta)},\sigma_{r\theta}^{(n,\delta)}\right)^{\mathrm{T}}. \quad (2.21)$$

Для матриц-коэффициентов соотношения (2.15) существуют оценки [16]

$$k\to\infty: \quad \left\|\mathbf{A}_{(k;1,2)}^{(n,\delta)}+2h\mathbf{I}\right\|\leqslant\alpha_{1,2}k^{-1}; \quad \left\|\mathbf{A}_{(k,3)}^{(n,\delta)}\right\|\leqslant\alpha_3k^{-1}; \quad \left\|\mathbf{A}_{(k,j)}^{(n,\delta)}\right\|\leqslant\alpha_jk^{-1},$$

позволяющие построить асимптотику (2.22) для соотношения (2.15)

$$\mathbf{Z}_{(k)}^{(n,\delta)}=-2h\mathbf{Z}_{(k-1)}^{(n,\delta)}-h^2\mathbf{Z}_{(k-2)}^{(n,\delta)} \quad (k\to\infty), \quad (2.22)$$

откуда следует равномерная сходимость степенных рядов (2.13) при условии $\zeta\in[-1,1]$, соответствующем постановке [16], а также сходимость по норме [25].

Метод степенных рядов допускает расширение на нелинейные задачи. В работе [26] описана генерация вторых гармоник осесимметричных волн кручения в изотропном цилиндре из материала Мурнагана при постановке однородных кинематических, силовых или смешанных условий на его боковой поверхности.

Метод степенных рядов в сочетании с асимптотическим анализом применен к решению задачи об окружных волнах сдвига в ФГ пластине [27], в цилиндрической ФГ оболочке и в ФГ цилиндре [28], а также о волнах Лэмба в вязкоупругой ФГ пленке [7] и слоистой ФГ плате [29]. Решение задачи о дисперсии волн сдвига в эллиптической пьезоупругой цилиндрической оболочке получено методом степенных рядов на основе постановки задачи в координатах эллиптического цилиндра в работе [30].

3. МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ И ЕГО ВАРИАНТЫ

Метод обобщенных рядов Фурье, называемый в иностранной литературе «метод ортогональных полиномов» в силу применения в качестве базиса главным образом полиномов Лагерра и Лежандра, является одной из основных альтернатив как методу степенных рядов [2-30], так и матричным методам [1] решения задач о дисперсии нормальных волн в неоднородных, в том числе и ФГ, волноводах.

3.1. Элементарный вариант метода ортогональных полиномов.

Волновод представляет собой тело $V \subset \mathbb{R}^3$: $\xi^\alpha \in D_\alpha \subseteq \mathbb{R}^2$, $\xi^3 \in D_3 \subset \mathbb{R}$, $\partial V = S_\pm$. Характерными частными случаями являются полупространство ($D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $D_3 = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$), плоский слой ($D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $D_3 = [0,h] \subset \mathbb{R}$) и цилиндрический слой ($D_1 = \mathbb{R}$, $D_2 = [\varphi_0, \varphi_1] \subseteq [0, 2\pi)$, $D_3 = [R_0, R_1] \subset \mathbb{R}_+$); при этом компоненты метрического тензора подчиняются ограничению $g_{\alpha 3} = 0$, $\alpha = 1,2$. В основу решения положена формулировка модели стационарной динамики упругой (вязкоупругой) среды [1] в форме краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных относительно вектора перемещения $\mathbf{u}(\xi^j, t)$

$$\rho \partial_t^2 u^i = \nabla_j \left(C^{ijpq} \nabla_q u_p \right), \quad C^{ijpq} = C^{qpji} \in \mathbb{C}, \quad i, j, p, q = \overline{1,3}; \tag{3.1}$$

$$\nu_j C^{3jpq} \nabla_q u_p \Big|_{\xi^3 = 0,h} = 0. \tag{3.2}$$

ν_j – компоненты вектора единичной нормали на лицевых поверхностях волновода $S_\pm$. Редукция трехмерной задачи (3.1-3.2) опирается на метод Галеркина. Так как пространственная редукция приводит к постановке новой задачи, аппроксимирующей (3.1-3.2), на некотором двумерном многообразии, соответствующем моделирующей поверхности волновода S, следовательно, возникает необходимость учета краевых условий (3.2), переносимых с $S_\pm$ на S, большинством авторов применяется прием [31-35]. Определяющие соотношения в пространстве обобщенных функций доопределяются следующим образом

$$\sigma^{ij} = \left(C^{ijpq} \nabla_q u_p \right) \pi_{h_0, h_N} \left(\xi^3 \right), \quad \pi_{h_0, h_N} \left(\xi^3 \right) = \Theta\left(\xi^3 - h_0 \right) - \Theta\left(\xi^3 - h_N \right). \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1) с учетом (3.3) и при $g_{\alpha 3} = 0$, $h_{0,N} = \mathrm{Const}$ принимают вид (3.4)

$$\rho \partial_t^2 u^i = \nabla_j \left(C^{ijkl} \nabla_k u_l \right) \pi_{h_0, h_N} \left(\xi^3 \right) + C^{i3kl} \nabla_k u_l \left[\delta\left(\xi^3 - h_0 \right) - \delta\left(\xi^3 - h_N \right) \right]; \tag{3.4}$$

$\Theta(\xi^3)$, $\delta(\xi^3)$ – соответственно, функции Хевисайда и Дирака. Для слоистого материала C^{ijpq}, ρ являются кусочно-постоянными функциями трансверсальной координаты ξ^3 и задаются также с помощью функций (3.3) [36]

$$C^{ijpq} = \sum\nolimits_{\eta=1}^{M} C_{[\eta]}^{ijpq} \pi_{h_{\eta-1}, h_\eta} \left(\xi^3 \right), \quad \rho = \sum\nolimits_{\eta=1}^{M} \rho_{[\eta]} \pi_{h_{\eta-1}, h_\eta} \left(\xi^3 \right); \tag{3.5}$$

$$\pi_{h_{\eta-1}, h_\eta} = \Theta\left(\xi^3 - h_{\eta-1} \right) - \Theta\left(\xi^3 - h_\eta \right), \quad \eta \in [1, M] \cap \mathbb{N}.$$

Как правило, вводится безразмерная система координат: $\varsigma^i = \kappa\xi^i$, κ – амплитуда волнового вектора. В случае ФГМ со степенной зависимостью объемных долей структурных составляющих от нормальной безразмерной координаты ς^3 физические константы материала записываются так [37]

$$C^{ijpq}\left(\varsigma^3\right) = C^{ijpq}_{[l]}\left[\left(\kappa h\right)^{-1}\varsigma^3\right]^l; \quad \rho\left(\varsigma^3\right) = \rho_{[l]}\left[\left(\kappa h\right)^{-1}\varsigma^3\right]^l, \; l \in \left[0, L\right] \cap \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Компоненты вектора перемещения u_i в нормальной волне задаются коэффициентами Фурье $u_i^{(k)}$ относительно базисной системы функций $\mathrm{p}_{(k)}\left(\varsigma^3\right)$ координаты, нормальной к S: так, в случае плоского слоя [36]

$$u_i\left(\varsigma^i, t\right) = U_i^{(k)}\mathrm{q}_{(k)}\left(\varsigma^3\right)\exp\left[i\left(\varsigma^1 - \omega t\right)\right], \quad k \in \left[0, N\right] \cap \mathbb{Z}; \quad (3.7)$$

для цилиндрического волновода компоненты перемещения имеют вид (3.8) [37]

$$u_i\left(\varsigma^i, t\right) = \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}} U_i^{(k)}\mathrm{q}_{(k)}\left(\varsigma^3\right)\exp\left(in\varsigma^2\right)\exp\left[i\left(\varsigma^2 - \omega t\right)\right]. \quad (3.8)$$

Базисные функции при $D_3 = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ соответствуют полиномам Лагерра [38-42], при $D_3 = [0, h] \subset \mathbb{R}$ или $D_3 = [R_0, R_1] \subset \mathbb{R}$ – смещенным полиномам Лежандра, ортогональным на отрезке $[0, h]$ (напр., [36,37] и др.)

$$\mathrm{q}_{(k)}\left(\varsigma^3\right) = \sqrt{\frac{2k+1}{\kappa h}}\mathrm{p}_{(k)}\left(\frac{2}{\kappa}\varsigma^3 - d\right), \quad \zeta \in \left[-1, 1\right]; \quad (3.9)$$

при $D_3 = \left[R_0, R_1\right] \subset \mathbb{R}$ $h = R_1 - R_0$, $d = \left(R_1 + R_0\right)/\left(R_1 - R_0\right)$, $\pi_{h_0, h_N} = \pi_{R_0, R_1}$; для плоского слоя $D_3 = \left[0, h\right]$ $d = 1$; $\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)$ – полиномы Лежандра, ортогональные на $\left[-1, 1\right]$.

Проекция уравнений, полученных подстановкой (3.8) в (3.3), в случае полого цилиндрического ФГ волновода (см. [37]) имеющих в физических компонентах вектора перемещения u_r, u_φ, u_z и тензора упругих констант вид

$$\begin{aligned}
&\left[\rho_{[l]}\kappa^{-2}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_t^2 u_1\right]\left(\kappa h\right)^{-l}\pi_{01} = \left\{C^{[l]}_{rrrr}\left[\left(\varsigma^3\right)^l\partial_r^2 u_r + \left(l+1\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_r u_r\right] + \right.\\
&+\left(lC^{[l]}_{rr\varphi\varphi} + C^{[l]}_{\varphi\varphi\varphi\varphi}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-2}u_r + C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\left(\varsigma^3\right)^{l-2}\partial_\varphi^2 u_r + C^{[l]}_{rzrz}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_z^2 u_r + \\
&+\left(C^{[l]}_{rr\varphi\varphi} + C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_{r\varphi}u_\varphi - \left(-lC^{[l]}_{rr\varphi\varphi} + C^{[l]}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-2}\partial_\varphi u_\varphi + \\
&+\left(C^{[l]}_{rrzz} + C^{[l]}_{rzrz}\right)\left(\varsigma^3\right)^l\partial_{rz}u_z + \left[\left(1+l\right)C^{[l]}_{rrzz} - C^{[l]}_{\varphi\varphi zz}\right]\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_r u_z\left.\right\}\left(\kappa h\right)^{-l}\pi_{01} + \\
&+\left[C^{[l]}_{rrrr}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_r u_r + C^{[l]}_{rr\varphi\varphi}\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\left(u_r + \partial_\varphi u_\varphi\right) + C^{[l]}_{rrzz}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_r u_z\right]\left(\kappa h\right)^{-l}\times \\
&\times\left[\delta\left(\varsigma^3 - \kappa R_0\right) - \delta\left(\varsigma^3 - \kappa R_1\right)\right], \quad \left(\pi_{01} \equiv \pi_{\kappa R_0, \kappa R_1}\right);
\end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
&\left[\rho_{[l]}\kappa^{-2}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_t^2 u_\varphi\right]\left(\kappa h\right)^{-l}\pi_{01} = \left\{\left(C^{[l]}_{rr\varphi\varphi} + C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_{r\varphi}u_r + \right.\\
&+\left[C^{[l]}_{\varphi\varphi\varphi\varphi} + \left(1+l\right)C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\right]\left(\varsigma^3\right)^{l-2}\partial_\varphi u_r + \left(C^{[l]}_{\varphi\varphi zz} + C^{[l]}_{\varphi z\varphi z}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_{\varphi z}u_z + \\
&+C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\left[\left(\varsigma^3\right)^l\partial_r^2 u_\varphi + \left(1+l\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_\rho u_\varphi - \left(\varsigma^3\right)^{l-2}u_\varphi\right] + C^{[l]}_{\varphi\varphi\varphi\varphi}\left(\varsigma^3\right)^{l-2}\partial_\varphi^2 u_\varphi + \\
&+C^{[l]}_{\varphi z\varphi z}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_z^2 u_\varphi\left.\right\}\left(\kappa h\right)^{-l}\pi_{01} + \left\{C^{[l]}_{r\varphi r\varphi}\left[\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\left(\partial_\varphi u_r - u_\varphi\right) + \left(\varsigma^3\right)^l\partial_r u_\varphi\right]\times\right.\\
&\times\left(kh\right)^{-l}\left[\delta\left(\varsigma^3 - \kappa R_0\right) - \delta\left(\varsigma^3 - \kappa R_1\right)\right];
\end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\left[\rho_{[l]}\kappa^{-2}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_t^2u_z\right](\kappa h)^{-1}\pi_{01}=\Big\{\left(C_{rzrz}^{[l]}+C_{rrzz}^{[l]}\right)\left(\varsigma^3\right)^l\partial_{rz}u_r+$$
$$+\left(C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}+C_{\varphi z\varphi z}^{[l]}\right)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_{\varphi z}u_\varphi+\left[C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}+(1+l)C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}\right]\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_z u_z+$$
$$+C_{rzrz}^{[l]}\left[\left(\varsigma^3\right)^l\partial_r^2u_z+(1+l)\left(\varsigma^3\right)^{l-1}\partial_r u_z+\left(\varsigma^3\right)^{l-2}\partial_\varphi^2u_z\right]+C_{zzzz}^{[l]}\left(\varsigma^3\right)^l\partial_z^2u_z\Big\}\times \tag{3.12}$$
$$\times(\kappa h)^{-l}\pi_{01}+C_{rzrz}^{[l]}\left(\varsigma^3\right)^l\left(\partial_z u_r+\partial_r u_z\right)(\kappa h)^{-l}\left[\delta\left(\varsigma^3-\kappa R_0\right)-\delta\left(\varsigma^3-\kappa R_1\right)\right],$$

на функции системы $q_{(m)}^{\star}\left(\varsigma^3\right)\exp\left(-in\varsigma^2\right)$ (в случае плоского слоя вычисляются проекции соответствующих уравнений на функции $q_{(m)}^{\star}\left(\varsigma^3\right)$), приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье амплитуд перемещений $U_i^{(k)}$. Для цилиндрического ФГ волновода [37] уравнения (3.10)-(3.12) сводятся таким образом к матричному уравнению (3.13)

$$A_{(km)}^{ij[l]}U_j^{(m)}=c_{\mathrm{Ph}}^2M_{(km)}^{ij[l]}U_j^{(m)},\quad c_{\mathrm{Ph}}=\omega/\kappa,\quad i,j=\overline{1,3},\ k,m\in[0,N]\cap\mathbb{Z}. \tag{3.13}$$

Условием существования нетривиального решения (3.13) является дисперсионное уравнение в форме $D\left(c_{\mathrm{Ph}}^2\right)=0$ (3.14) (см. напр. [37])

$$\left|\mathbf{A}(\kappa)-c_{\mathrm{Ph}}^2\mathbf{M}\right|=0,\quad \mathbf{A}(\kappa)=\left(A_{[l](m)}^{ij(k)}\right)_{k,m=\overline{0,N}}^{i,j=\overline{1,3}},\quad \mathbf{M}=\left(M_{[l](m)}^{ij(k)}\right)_{k,m=\overline{0,N}}^{i,j=\overline{1,3}}. \tag{3.14}$$

Коэффициенты уравнения (3.13) для цилиндрического волновода (и при соответствующих изменениях – плоского или др. волновода) имеют вид [37,43]

$$M_{(km)}^{ij[l]}=(\kappa h)^{-l}\bar{M}_{(km)}^{ij[l]};\quad A_{(km)}^{ij[l]}=(\kappa h)^{-l}\bar{A}_{(km)}^{ij[l]};\quad \bar{M}_{(km)}^{ij[l]}=\rho^{[l]}(\kappa h)^{-l}I_{(km)}^{0[l]};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{11[l]}=C_{rrrr}^{[l]}\left[I_{(km)}^{2[l+2]}+(l+1)I_{(km)}^{1[l+1]}\right]-C_{rzrz}^{[l]}I_{(km)}^{0[l+2]}+$$
$$+\left(lC_{rr\varphi\varphi}^{[l]}-C_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^{[l]}-n^2C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right)I_{(km)}^{0[l]}+C_{rrrr}^{[l]}K_{(km)}^{1[l+2]}+C_{rr\varphi\varphi}^{[l]}K_{(km)}^{0[l+1]};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{12[l]}=in\left\{\left(C_{rr\varphi\varphi}^{[l]}+C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right)I_{(km)}^{1[l+1]}+\left[(l-1)C_{rr\varphi\varphi}^{[l]}-C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right]I_{(km)}^{0[l]}+C_{rr\varphi\varphi}^{[l]}K_{(km)}^{0[l+1]}\right\};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{21[l]}=n\left\{\left(C_{rr\varphi\varphi}^{[l]}+C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right)I_{(km)}^{1[l+1]}+\left[C_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^{[l]}+(1+l)C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right]I_{(km)}^{0[l+1]}+C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}K_{(km)}^{[l+1]};\right.$$
$$\bar{A}_{(km)}^{22[l]}=C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\left[I_{(km)}^{2[l+2]}+(l+1)I_{(km)}^{1[l]}\right]-C_{\varphi z\varphi z}^{[l]}I_{(km)}^{0[l+2]}-\left[n^2C_{\varphi\varphi\varphi\varphi}^{[l]}+(1+l)C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\right]I_{(km)}^{0[l]}+$$
$$+C_{r\varphi r\varphi}^{[l]}\left(K_{(km)}^{1[l+2]}-K_{(km)}^{0[l+1]}\right);\quad \bar{A}_{(km)}^{23[l]}=n\left(C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}+C_{\varphi z\varphi z}^{[l]}\right)I_{(km)}^{0[l+1]}=\bar{A}_{(km)}^{32[l]};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{13[l]}=-i\left\{\left(C_{rrzz}^{[l]}-C_{rzrz}^{[l]}\right)I_{(km)}^{1[l+2]}+\left[(1+l)C_{rrzz}^{[l]}-C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}\right]I_{(km)}^{0[l+2]}+C_{rrzz}^{[l]}K_{(km)}^{0[l+2]}\right\};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{31[l]}=-i\left\{\left(C_{rrzz}^{[l]}+C_{rzrz}^{[l]}\right)I_{(km)}^{1[l+2]}+\left[C_{\varphi\varphi zz}^{[l]}+(1+l)C_{\varphi z\varphi z}^{[l]}\right]I_{(km)}^{0[l+1]}+C_{rrzz}^{[l]}K_{(km)}^{0[l+2]}\right\};$$
$$\bar{A}_{(km)}^{33[l]}=C_{rzrz}^{[l]}I_{(km)}^{2[l+2]}-n^2C_{\varphi z\varphi z}^{[l]}I_{(km)}^{0[l]}-\left(C_{zzzz}^{[l]}-(l+1)C_{rzrz}^{[l]}\right)I_{(km)}^{0[l+1]}+C_{rzrz}^{[l]}K_{(km)}^{1[l+2]}.$$

Приведенные выше матричные коэффициенты (3.13), в свою очередь, содержат матричные операторы, следующие из скалярных произведений вида

$$\left(q_{(k)},q_{(m)}\right)_{\kappa h}=\int_{\kappa R_0}^{\kappa R_1}q_{(k)}\left(\varsigma^3\right)q_{(m)}\left(\varsigma^3\right)d\varsigma^3, \tag{3.15}$$

порождаемыми интегрированием по множеству $[0,h]$ (в случае цилиндра, очевидно, осуществляется также интегрирование по $d\varphi$ на множестве $[0,2\pi)$

$$I_{(km)}^{[1,l]}=\left(\mathrm{q}_{(k)},\left(\varsigma^3\right)^l d\mathrm{q}_{(m)}\big/d\varsigma^3\right)_{\kappa h};\quad I_{(km)}^{[2,l]}=\left(\mathrm{q}_{(k)},\left(\varsigma^3\right)^l d^2\mathrm{q}_{(m)}\Big/d\left(\varsigma^3\right)^2\right)_{\kappa h};$$

$$I_{(km)}^{[0,l]}=\left(\mathrm{q}_{(k)},\left(\varsigma^3\right)^l \mathrm{q}_{(m)}\right)_{\kappa h};\quad K_{(km)}^{[0,l]}=\left(\mathrm{q}_{(k)},\left(\varsigma^3\right)^l\left[d\pi_{01}\big/d\varsigma^3\right]\mathrm{q}_{(m)}\right)_{\kappa h};\qquad (3.16)$$

$$K_{(km)}^{[1,l]}=\left(\mathrm{q}_{(k)},\left(\varsigma^3\right)^l\left[d\pi_{01}\big/d\varsigma^3\right]d\mathrm{q}_{(m)}\big/d\varsigma^3\right)_{\kappa h};$$

С другой стороны, уравнение движения (3.13) может быть представлено в виде, приводящем дисперсионное соотношение (3.14) к виду $D\left(\kappa,\kappa^2,\omega^2\right)=0$ [44]

$$\left|\mathbf{A}\left(\kappa,\kappa^2\right)-\omega^2\mathbf{M}\right|=0,\quad \mathbf{A}\left(\kappa,\kappa^2\right)=\kappa^2\mathbf{A}_2+\kappa\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_0;\qquad (3.17)$$

где $\mathbf{A}_{0,1,2}^{ij}$, $\mathbf{M}^{ij}$ имеют схожую структуру; для цилиндрического волновода [44]

$$\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{33}\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^{13}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^{23}\\ \mathbf{A}_1^{31} & \mathbf{A}_1^{32} & \mathbf{0}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_0^{11} & \mathbf{A}_0^{12} & \mathbf{0}\\ \mathbf{A}_0^{21} & \mathbf{A}_0^{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^{33}\end{pmatrix};\quad \mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}^{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{33}\end{pmatrix};$$

в случае плоского упругого ФГ волновода [45] операторы $\mathbf{A}_{0,1,2}^{ij}$, $\mathbf{M}^{ij}$ имеют вид

$$\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_2^{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{22}\end{pmatrix},\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{A}_1^{12}\\ \mathbf{A}_1^{21} & \mathbf{0}\end{pmatrix},\mathbf{A}_0=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_0^{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0^{22}\end{pmatrix};\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}^{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{22}\end{pmatrix}.$$

Дисперсионные уравнения (3.14) и (3.17) приводят к обобщенной спектральной задаче для пары линейных операторов $\mathbf{A}(\kappa)$ и $\mathbf{M}$; собственными значениями задачи (3.14) являются фазовые скорости c_{Ph} нормальных волн, задачи (3.17) – фазовые скорости распространяющихся мод нормальных волн.

Численное решение задачи представляет собой вектор-функцию, заданную в табличной форме

$$\mathbb{R}_+\cup\{0\}\ni c_{\mathrm{Ph}}^{I(k)}=c_{\mathrm{Ph}}^{(k)}\left(\kappa_I\right),\quad \kappa_I=I\Delta\kappa,\Delta\kappa\in\mathbb{R}_+,I\in\mathbb{N}\cup\{0\},k=\overline{0,N}.\quad (3.18)$$

$\Delta\kappa$ – некоторое малое приращение волнового числа. Собственные векторы $V_i^{(km)}$, следующие из (3.17), определяют формы распространяющихся нормальных волн

$$U_i\left(\varsigma^3\right)=V_i^{(km)}\mathrm{q}_{(k)}\left(\varsigma^3\right),\quad k,m=\overline{0,N}.$$

Таким образом, удержание $N+1$ члена частичной суммы ряда (3.7) или (3.8) приводит к $N+1$- модовой аппроксимации модели упругого волновода.

Алгоритмы численного решения обобщенных спектральных задач, как правило, устойчивы; следовательно, метод рядов Фурье, не требующий численного поиска корней трансцендентного характеристического уравнения, обладает преимуществом как перед матричными [1], так и перед основанными на степенных рядах [2-30] подходами. Достоинством метода также является возможность вычислить интегралы (3.16) аналитически (см. [37,43-45]) в силу существования для полиномов Лежандра рекуррентных соотношений (3.19)-(3.22)

$$\frac{d\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)}{d\zeta}=\sum_{n=0}^{[(k-1)/2]}(2k-4n-1)\mathrm{p}_{(k-2n-1)}(\zeta);\qquad (3.19)$$

$$\frac{d^2 \mathrm{p}_{(k)}(\zeta)}{d\zeta^2} = \sum_{n-0}^{[(k-2)/2]} (2k-4n-3)(n+1)(2k-2n-1)\mathrm{p}_{(k-2n-2)}(\zeta); \tag{3.20}$$

$$\zeta^2 \frac{d^2 \mathrm{p}_{(k)}(\zeta)}{d\zeta^2} = \sum_{n=0}^{[k/2]} (2k-4n+1)\left[k(2k-2n+1)-2\right]\mathrm{p}_{(k-2n)}(\zeta) + \\ + k(k-1)\mathrm{p}_{(k)}(\zeta); \tag{3.21}$$

$$\left(d\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)/d\zeta\right)\Big|_{\zeta=\pm1} = \tfrac{1}{2}(\pm1)^{k+1}\left(\Gamma(k)\right)^{-1}\Gamma(k+2); \tag{3.22}$$

при учете $d\Theta(\zeta)/d\zeta = \delta(\zeta)$, $\mathrm{p}_{(k)}(\pm1) = (\pm1)^k$, из (3.22) следуют формулы для $K_{(km)}^{[I,l]}$

$$\tilde{K}_{(km)}^{[0,l]} = \left(\mathrm{p}_{(k)}, (\zeta)^l\left[d\pi_{01}/d\zeta\right]\mathrm{p}_{(m)}\right)_1 = (-1)^{l+k+m} - 1;$$
$$\tilde{K}_{(km)}^{[1,l]} = \left(\mathrm{p}_{(k)}, (\zeta)^l\left[d\pi_{01}/d\zeta\right]d\mathrm{p}_{(m)}/d\zeta\right)_1 = \left[(-1)^{l+k+m+1} - 1\right]\frac{\Gamma(m+2)}{2\Gamma(m)}, \tag{3.23}$$

а из (3.19)-(3.21) вытекают выражения для коэффициентов $I_{(km)}^{[I,l]}$ (3.16), $I = 0,1,2$

$$\tilde{I}_{(km)}^{[I,l]} = (2k+1)^{-1}\left[(k+1)\tilde{I}_{(k+1,m)}^{[I,l-1]} + k\,\tilde{I}_{(k-1,m)}^{[I,l=1]}\right]; \tag{3.24}$$

$$\tilde{I}_{(km)}^{[0,0]} = 2(2k+1)^{-1}\delta_{(km)};\quad \tilde{I}_{(km)}^{[2,0]} = (m-k)(m+k+1)\delta_{(k,m-2n-2)};\triangleleft \\ \tilde{I}_{(km)}^{[1,0]} = 2\delta_{(k,m-2n-1)};\quad \tilde{I}_{(km)}^{[2,l]} = \left[(m-k)(m+k+1)-4\right]\delta_{(k,m-2n)}. \tag{3.25}$$

Машинное время, затрачиваемое на вычисление коэффициентов (3.16), составляет >0,99 всех затрат при численном интегрировании и 0,68-0,97 – при использовании (3.19)-(3.22). Анализ [44], показал, что время, затраченное на вычисление коэффициентов (3.16) на основе (3.19)-(3.22) в случае ФГМ со степенным законом распределения объемных долей структурных составляющих

$$q(\xi^3) = (\xi^3 - R_0)^n h^{-n},\quad n = 1,2\ldots L \tag{3.26}$$

и при численном интегрировании при различных значениях L (3.26) и N (3.7) различается на 2-2,5 порядка. В Таблице 1 приведены значения отношения машинного времени t_{A}, затраченного на решение спектральной задачи при применении (3.19)-(3.22), ко времени t_{N} при численном интегрировании (3.16).

Таблица 1.

Соотношение $t_{\mathrm{A}}/t_{\mathrm{N}}$ затрат машинного времени на интегрирование.

	$N = 5$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 20$
$L = 1$	$5{,}9 \cdot 10^{-3}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$2{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$
$L = 2$	$5{,}6 \cdot 10^{-3}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1{,}9 \cdot 10^{-3}$
$L = 3$	$8{,}3 \cdot 10^{-3}$	$4{,}8 \cdot 10^{-3}$	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$	$2{,}5 \cdot 10^{-3}$

3.2. Применение метода ортогональных полиномов к исследованию распространяющихся и затухающих мод нормальных волн.

Одним из достоинств метода ортогональных полиномов является возможность его применения для исследования как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн на базе решения одной спектральной задачи [46-51]. Введение в рассмотрение новой переменной $P_i^{(k)} = \kappa U_i^{(k)}$ приводит уравнение движения (3.13) к следующей матричной форме записи (3.27)

$$\left(\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I}\right)\cdot\mathbf{Y}=0,\quad \mathbf{Y}=\left(U_1^{(0)}\ldots\quad U_3^{(N)}\quad P_1^{(0)}\ldots\quad P_3^{(N)}\right)^T, \tag{3.27}$$

и, следовательно, дисперсионное уравнение (3.17) к виду, линейному по числу κ

$$\left|\mathbf{B}-\kappa\mathbf{I}_2\right|=0,\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{I}_1\\ \mathbf{A}_2^{-1}\cdot\left(-\omega^2\mathbf{M}-\mathbf{A}_0\right) & -\mathbf{A}_2^{-1}\cdot\mathbf{A}_1\end{pmatrix}, \tag{3.28}$$

$\mathbf{I}_{1,2}$ – единичные матрицы размерности $2(N+1)$ и $4(N+1)$ (в случае плоского слоя) или размерности $3(N+1)$ и $6(N+1)$, в случае цилиндра; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица размерности $2(N+1)$ (плоский слой) или $3(N+1)$ (цилиндр). Численное решение задачи (3.28) является вектор-функцией в табличной форме

$$\mathbb{C}\ni\kappa=\kappa\left(\omega_I\right),\quad \omega_I=I\Delta\omega,\quad \Delta\omega\in\mathbb{R}_+,\quad I\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{3.29}$$

$\Delta\omega$ – некоторое малое приращение фазовой частоты. В отличие от задачи (3.17), (3.18) решение задачи (3.28), (3.29) приводит при $\forall\omega\in\mathbb{R}_+\cup 0$ к $6(N+1)$ собственному значению в случае цилиндра и $2(N+1)$ значению в случае плоского слоя. Спектр $\kappa\left(\omega_I\right)$ задачи (3.27) включает как действительные, соответствующие дисперсионным кривым распространяющихся мод, так и мнимые значения, соответствующие затухающим модам, и комплексные собственные значения. Следует заметить, что алгоритм построения дисперсионных кривых для затухающих мод нормальных волн, вытекающих из решения задачи (3.28), (3.29), требует обеспечения непрерывности каждой ветви на I-м шаге процесса (3.29).

Решение задачи, аналогичной [18], для пьезоэлектрического цилиндрического волновода секторного сечения $\xi^1\in\mathbb{R}$, $\xi^2\in\left[\theta_0,\theta_1\right]$, $\theta_1-\theta_0=\beta$, $\xi^3\in\left[R_0,R_1\right]$, $h=R_1-R_0$, со степенным законом распределения объемных долей при $L=3$ получено в работе [46] на базе представления решения в виде (3.30)

$$\begin{gathered}u_i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(k,m)}\mathrm{q}_{(m)}\left(\xi^2\right)\mathrm{q}_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)\right];\\ \mathrm{q}_{(k)}\left(\xi^3\right)=\sqrt{\frac{2k+1}{h}}\mathrm{p}_{(k)}\left(2\frac{\xi^3}{h}-1\right);\quad \mathrm{q}_{(m)}\left(\xi^2\right)=\sqrt{\frac{2m+1}{\beta}}\mathrm{p}_{(m)}\left(2\frac{\xi^2}{\beta}-1\right),\\ k\in[0,N]\cap\mathbb{Z},\quad m\in[0,L]\cap\mathbb{Z}.\end{gathered} \tag{3.30}$$

В работах [47-49] получены решения задач о дисперсии волн в пологой сферической оболочке: $\xi^1=\varphi\in[0,2\pi)$, $\xi^2=\theta\in\left[\theta_0,\theta_1\right]$, $\xi^3=r\in\left[R_0,R_1\right]$ на основе представления решения в виде $u_i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(k)}\mathrm{q}_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(kR_1\varphi-\omega t\right)\right]$ для случаев пьезоэлектрического [47], ФГ волновода со степенным законом [48] и композиционного ортотропного волновода, армированного волокном [49]. В работе [50] получено решение задачи о дисперсии затухающих окружных волн в пьезоэлектрических ФГ оболочках, показана сходимость решения для изотропного однородного материала при безразмерной фазовой частоте $\left(\omega h/\pi\right)\sqrt{\rho/C_{rzrz}}\in[0,5]$ и безразмерном волновом числе $\mathrm{Re}\left(\kappa h/\pi\right)\in[0,3]$, $\mathrm{Im}\left(\kappa h/\pi\right)\in[0,3]$ к точному для первых $(N-1)/2$ мод нормальных волн. Кроме того, получено решение задачи при однородных краевых условиях $u_i\big|_{\xi^3=R_0,R_1}=0$ на лицевых поверхностях цилиндра, для чего авторами внесено изменение в представление решения в форме (3.7)

$$u_i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(k)}\left(\xi^3-R_0\right)\left(\xi^3-R_1\right)q_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)\right]. \qquad (3.31)$$

В статье [45] представлено решение задачи о распространяющихся и затухающих волнах в термоупругой ФГ пластине, в [44] – в термоупругом ФГ цилиндре на базе теории Лорда-Шульмана дробного порядка $\alpha\in\left(0,1\right]$ и представления решения в виде $u_i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(k)}q_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(\kappa\xi^1+n\xi^2-\omega t\right)\right]$. В работе [52] приведено решение задачи о дисперсии окружных волн в полом вязкоупругом ФГ цилиндре на базе модели дробного порядка. Наконец, в статье [53] рассмотрены волны в низкоразмерной ФГ пластине на основе моментной теории пьезоэлектроупругости.

3.3. Применение метода ортогональных полиномов к решению задач о дисперсии нормальных волн в слоистых ФГ волноводах с существенно различными свойствами слоев.

В цитируемых работах решение задачи о дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах строится методом ортогональных полиномов в предположении о гладкости функций нормальной координаты ξ^3, описывающих физические константы материала, или, в случае слоистой структуры волновода, по крайней мере, о близких свойствах смежных слоев. Представление решения в форме (3.7) или (3.8), с одной стороны, справедливо при $u_i\left(\zeta\right)\in\mathbb{L}^2\left[-1,1\right]$, с другой стороны, приводит к $U_i^{(k)}q_{(k)}\left(\zeta\right)\in C^{(\infty)}$, что неверно при существовании разрывов I рода $\left[C^{ijkl}\right]_{\xi^3=h_\eta}\neq 0$ (3.5) на границах раздела структурных составляющих, при этом возникают разрывы $\left[\sigma^{i3}\right]_{\xi^3=h_\eta}\neq 0$, не соответствующие условиям сопряжения слоев. Более того, как показано в [54-57], профили напряжения в волнах, определяемые собственными функциями задачи (3.14), сходятся к решению, полученному на основе метода передаточных матриц, медленно, притом в окрестностях $\xi^3\in\left[h_h-\varepsilon,h_h+\varepsilon\right]$ наблюдаются значительные эффекты Гиббса.

В работах [54-57] предложен усовершенствованный метод, основанный на представлении компонентов вектора перемещения в следующем виде

$$u_i\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=\sum\nolimits_{\eta=1}^{M}u_i^{(\eta)}\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right), \qquad (3.32)$$

$$u_i^{(\eta)}\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(k,\eta)}\left(\xi^3-h_\eta\right)q_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(\kappa\xi^1-\omega t\right)\right]; \qquad (3.33)$$

обеспечивающем непрерывность u_i на в точках $\xi^3=h_\eta$. В соответствии с (3.5) производные компонентов тензора напряжения по координате ξ^3 имеют вид [55]

$$\partial\sigma^{i3}/\partial\xi^3=\ldots+\left(\sigma^{i3}_{(\eta)}-\sigma^{i3}_{(\eta-1)}\right)\delta\left(\xi^3-h_\eta\right)+\ldots,$$

что обеспечивает удовлетворение условиям сопряжения слоев $[\sigma^{i3}]_{\xi^3=h_\eta}=0$.

В случае цилиндрического волновода вводится представление перемещения [56]

$$u_i^{(\eta)}\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3,t\right)=U_i^{(\eta)}\left(\xi^3-h_\eta\right)q_{(k)}\left(\xi^3\right)\exp\left[i\left(\kappa\xi^3+n\xi^2-\omega t\right)\right]. \qquad (3.34)$$

Применение разложений (3.32)-(3.34) позволяет получить сходящиеся решения для волноводов с существенно различающимися физическими константами слоев при сохранении преимуществ метода ортогональных разложений. В работе [57] приведены решения задачи о дисперсии волн в двухслойной и трехслойной пластинах, в [56] – в слоистом полом цилиндре, в [55] – в пьезоэлектрической пластине, а в [54] – в электромеханическом резонаторе.

3.4. Решение задачи в терминах пространства состояний системы.

В работах [58-62] описан метод решения задач о дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах, основанный на понятии о пространстве состояний Φ динамической системы (т. н. “state-space formalism”)

$$\Phi = \{\boldsymbol{\psi}\}, \quad \boldsymbol{\psi} = \left(\boldsymbol{\tau}_3 \;\; \mathbf{u}\right)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{u} = \left(u_1 \;\; u_2 \;\; u_3\right)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\tau}_i = \left(\sigma_{i1} \;\; \sigma_{i2} \;\; \sigma_{i3}\right)^{\mathrm{T}}. \qquad (3.35)$$

Уравнение движения (3.1) с учетом (3.35) принимает следующий вид [60]

$$\partial\boldsymbol{\tau}_3 / \partial\xi^3 = -\rho\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 - \partial\boldsymbol{\tau}_\beta / \partial\xi^\beta, \quad \beta = 1,2; \qquad (3.36)$$

определяющие уравнения относительно переменных (3.35) записываются так

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{D}_{33}\cdot\partial\mathbf{u}/\partial\xi^3 + \mathbf{D}_{3\beta}\cdot\partial\mathbf{u}/\partial\xi^\beta, \quad \boldsymbol{\tau}_\alpha = \mathbf{D}_{\alpha3}\cdot\partial\mathbf{u}/\partial\xi^3 + \mathbf{D}_{\alpha\beta}\cdot\partial\mathbf{u}/\partial\xi^\beta, \qquad (3.37)$$

где $\mathbf{D}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{D}_{\alpha3}$, $\mathbf{D}_{3\beta}$, $\mathbf{D}_{33}$ – матричные операторы, зависящие от упругих констант среды $C^{ijpq}\left(\xi^3\right)$. С учетом первого уравнения (3.37) исключаются переменные $\boldsymbol{\tau}_\alpha$

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = \left(\mathbf{D}_{\alpha3}\cdot\mathbf{D}_{33}^{-1} \quad \left(-\mathbf{D}_{\alpha3}\cdot\mathbf{D}_{33}^{-1}\cdot\mathbf{D}_{3\beta} + \mathbf{D}_{\alpha\beta}\right)\partial/\partial\xi^\beta\right)\cdot\boldsymbol{\psi}. \qquad (3.38)$$

При рассмотрении нормальной волны $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\Psi}\exp\left[-i\left(\kappa\xi^1 - \omega t\right)\right]$ [60], с учетом (3.38) уравнения движения (3.36) и состояния (3.37) приводятся к виду

$$\partial\boldsymbol{\Psi}/\partial\xi^3 = \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}\left(\xi^3, \omega, \kappa\right): \qquad (3.39)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i\left(\kappa\mathbf{D}_{3\beta}^{-1}\right) & -\rho\omega^2\mathbf{I} - \kappa^2\left(\mathbf{D}_{\alpha3}\cdot\mathbf{D}_{33}^{-1}\cdot\mathbf{D}_{3\beta} - \mathbf{D}_{\alpha\beta}\right) \\ \mathbf{D}_{33}^{-1} & i\kappa\mathbf{D}_{33}^{-1}\cdot\mathbf{D}_{3\beta} \end{pmatrix}.$$

Здесь (3.39) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка в нормальной форме. Принимая во внимание первое уравнение (3.37), систему (3.39) можно привести к уравнению относительно перемещения $\mathbf{u}$

$$\begin{gathered} \left(\kappa^2\mathbf{D}_{11} - \rho\omega^2\right)\cdot\mathbf{u} + i\kappa\left[\left(\partial\mathbf{D}_{31}/\partial\xi^3\right)\cdot\mathbf{u} + \left(\mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{31}\right)\cdot\partial\mathbf{u}/\partial\xi^3\right] - \\ -\left(\partial\mathbf{D}_{33}/\partial\xi^3\right)\cdot\left(\partial\mathbf{u}/\partial\xi^3\right) - \mathbf{D}_{33}\cdot\left[\partial^2\mathbf{u}/\partial\left(\xi^3\right)^2\right] = 0. \end{gathered} \qquad (3.40)$$

Подстановка в (3.40) разложение вектора перемещения (3.7) приводит к

$$\begin{gathered} \Big\{\left(\kappa^2\mathbf{D}_{11} - \rho\omega^2\right)\mathrm{q}_{(k)} + i\kappa\left[\left(\partial\mathbf{D}_{31}/\partial\xi^3\right)\mathrm{q}_{(k)} + \left(\mathbf{D}_{13} + \mathbf{D}_{31}\right)\partial\mathrm{q}_{(k)}/\partial\xi^3\right] - \\ -\left(\partial\mathbf{D}_{33}/\partial\xi^3\right)\left(\partial\mathrm{q}_{(k)}/\partial\xi^3\right) - \mathbf{D}_{33}\left[\partial^2\mathrm{q}_{(k)}/\partial\left(\xi^3\right)^2\right]\Big\}\cdot\mathbf{U}^{(k)} = 0. \end{gathered} \qquad (3.41)$$

В работе [60] для ФГМ со степенным законом (3.26) распределения объемных долей структурных составляющих использованы аппроксимации

$$\left(1/2 - \zeta/2\right)^l \approx S_{(n)}\zeta^n, \quad \left(1/2 - \zeta/2\right)^{l-1} \approx Q_{(n)}\zeta^n, \quad n \in [0,8]\cap\mathbb{Z}$$

позволяющие применить рекуррентные соотношения (3.19)-(3.22) для вычисления коэффициентов уравнения (3.41). При удержании N членов частичной суммы ряда (3.7) (т.е. при $k \in \left[0, N-1\right]\cap\mathbb{Z}$), с учетом рекуррентных соотношений для производных первого (3.19) и второго (3.20) порядка, проекция (3.41) на $\mathrm{q}_{(m)}$,

$m \in [0, N-3] \cap \mathbb{Z}$ приводит к $2N-4$ уравнениям в задаче для плоского слоя (или $3N-6$ уравнениям для цилиндрического волновода [62]) относительно $\mathbf{U}^{(k)}$, $k \in [0, N+1] \cap \mathbb{Z}$. Таким образом, число скалярных неизвестных равно $2N$ для плоского слоя и $3N$ для цилиндра. Однородные уравнения, следующие из (3.41),

$$\left(\kappa^2 \mathbf{D}_{(km)} + i\kappa \mathbf{B}_{(km)} + \mathbf{C}_{(km)} - \omega^2 \mathbf{R}_{(km)}\right) \cdot \mathbf{U}^{(k)} = 0, \tag{3.42}$$

$$\mathbf{D} = \left(\mathbf{D}_{11} \mathrm{q}_{(k)}, \mathrm{q}_{(m)}\right)_h; \quad \mathbf{B} = \left(\mathrm{q}_{(k)} \partial \mathbf{D}_{31} / \partial \xi^3 + \left(\mathbf{D}_{31} + \mathbf{D}_{13}\right) \partial \mathrm{q}_{(k)} / \partial \xi^3, \mathrm{q}_{(m)}\right)_h;$$

$$\mathbf{C}_{(km)} = -\left(\frac{\partial \mathbf{D}_{33}}{\partial \xi^3} \frac{\partial \mathrm{q}_{(k)}}{\partial \xi^3} + \mathbf{D}_{33} \frac{\partial^2 \mathrm{q}_{(k)}}{\partial \left(\xi^3\right)^2}, \mathrm{q}_{(m)}\right)_h; \quad \mathbf{R}_{(km)} = \left(\rho \mathrm{q}_{(k)}, \mathrm{q}_{(m)}\right)_h.$$

дополняют 4 краевые условия на поверхностях $\xi^3 = 0, h$, обеспечивающие точное выполнение условий отражения и в случае плоского слоя имеющие вид (3.43)

$$\begin{aligned} &\sum\nolimits_{k=0}^{N-1} \left[-i\kappa \mathbf{D}_{31}\big|_{\xi^3=h} + \tfrac{1}{2} k(k+1) \mathbf{D}_{33}\big|_{\xi^3=h} \right] \cdot \mathbf{U}^{(k)} = 0, \\ &\sum\nolimits_{k=0}^{N-1} \left[-(-1)^k i\kappa \mathbf{D}_{31}\big|_{\xi^3=0} + \tfrac{1}{2} (-1)^{k+1} k(k+1) \mathbf{D}_{33}\big|_{\xi^3=0} \right] \cdot \mathbf{U}^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Введение переменной $\mathbf{P}^{(k)} = \kappa \mathbf{U}^{(k)}$ приводит условие существования нетривиального решения (3.42) и (3.43) к дисперсионному уравнению $D(\omega, \kappa) = 0$ (3.28), линейному относительно κ. В работах [58,59] метод применен к исследованию дисперсии нормальных волн в анизотропных пластинах, в [61] – в слоистых пластинах, а в [62] – в слоистых полых цилиндрических волноводах.

3.5. Некоторые приложения метода ортогональных полиномов.

Метод ортогональных полиномов, общая формулировка которого описана в работах [63,64], эффективно применялся к решению задач о дисперсии волн в полуграниченных телах, в том числе неоднородных слоистой структуры [35], кромочных волнах в полуограниченных телах (на основе полиномов Лагерра) [38-42], о дисперсии нормальных волн в плоских слоистых волноводах [36] анизотропных [65] и ФГ волноводах [66,67], о дисперсии продольных волн в цилиндрических волноводах, в том числе ортотропных [68] и анизотропных [43], слоистых [56], функционально-градиентных [37], пьезоупругих [37,54,69, 70-73], о дисперсии окружных волн в пьезоупругих цилиндрических волноводах [55,74], в том числе дисперсии окружных волн [75], о волнах в сферических анизотропных [76], слоистых [77] и ФГ оболочках [78]. Метод допускает расширение на стационарные волновые задачи связной электромагнитоупругости неоднородных пластин [79,80] и цилиндрических полых волноводов [81], связной термоупругости слоистых пластин без диссипации энергии [82,83] и ФГ пластин [84] (в том числе на основе моделей дробного порядка [45]), термоупругости цилиндрических оболочек [44], вязкоупругих пластин [85] (в том числе слоистых [86,87], трехслойных [88], ортотропных [89] и анизотропных [86,90]) и тел с начальными напряжениями [91], а также задачи об окружных волнах в вязкоупругих цилиндрических оболочках [52]. В работе [92] описано распространение волн Лэмба в направлении, не совпадающем с главными осями симметрии композиционного материала с начальными напряжениями. На базе разложений по ортогональным полиномам, зависящим от двух координат ξ^2, ξ^3

решены задачи об объемных акустических волнах в композитных резонаторах [93,94], в [95,96] – о волнах в кольцах прямоугольного сечения – ФГ [95] и пьезоупругих [96], а также в стержнях с сечениями сложной формы [97]. В работе [98] метод применен к моделированию микроэлектромеханической системы с резонатором, а в [99] к расчету волновых полей в преобразователе Розена. Волны в моментно-упругой пьезоэлектрической пластине описаны в [53]. Обратная задача и ее решение методом нейронных сетей представлена в [100]. Обзор работ, посвященных методу ортогональных полиномов, приведен в статье [80].

4. ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов [101,102] является наиболее универсальным и широко применяемым в инженерной практике методом решения задач механики деформируемого твердого тела, однако его непосредственное приложение к задачам о дисперсии нормальных волн приводит к определенным затруднениям. В самом деле, “… conventional three-dimensional finite element analysis… is tedious at is requires that a number of different length models be solved and that the user identify the computed modes of propagation” («конвенционный трехмерный метод конечных элементов… требует решения нескольких задач для разных длин волн и определения пользователем вычисленных мод распространяющихся волн» [103], стр.298). Достаточно эффективной с вычислительной токи зрения альтернативой конечно-элементному подходу является полуаналитический метод конечных элементов (Semi-Analytical Finite Element Method – SAFE), так как “… the semi-analytical finite element method includes the wave propagation as a complex exponential in the element formulation and therefore only a two-dimensional mesh of the cross-section… is required” («полуаналитический метод включает в формулировку конечного элемента определение распространяющейся (в некотором направлении) волны в форме экспоненциальной функции с комплексным показателем, вследствие чего дискретизация волновода требуется только в его поперечном сечении» [103], стр.298). Идея полуаналитического метода конечных элементов (ПА МКЭ) была предложена в работах [104] и [105] и впоследствии интенсивно развивалась в течение последующих 20 лет, поскольку “… the method to be used for the computation of waves with very short wavelengths, since polynomial approximation of the displacement field along the waveguide is avoided” («в силу отсутствия полиномиальной аппроксимации волнового поля в направлении распространения волны метод может быть использован для исследования очень коротких волн» [106], стр.531). ПА МКЭ [107] основан на вариационном принципе Гамильтона

$$\delta \mathrm{H} = \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{C} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\mathrm{T}} \cdot \delta\mathbf{u} \right) dV dt = 0. \tag{4.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varepsilon} = \left(\varepsilon_{11}\, \varepsilon_{22}\, \varepsilon_{33}\, \varepsilon_{23}\, \varepsilon_{31}\, \varepsilon_{23}\right)^{\mathrm{T}}$ – псевдовектор деформации, $\mathbf{C} \in \mathbb{C}$ – матрица компонентов тензора упругих констант, соответствующая формализму Фойхта, $\mathbf{u} = \left(u_1\, u_2\, u_3\right)^{\mathrm{T}}$ – вектор перемещения, в рамках ПА МКЭ представляемый в виде

$$\mathbf{u}\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t\right) = \mathbf{U}^{(k)} \mathbf{P}_{(k)}\left(\xi^2, \xi^3\right) \exp\left(i\kappa\xi^1 - i\omega t\right), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{U}^{(k)} = \left(U_1^{(k)}\, U_2^{(k)}\, U_3^{(k)}\right)^{\mathrm{T}}$ – узловые неизвестные, $\mathbf{P}_{(k)}\left(\xi^2, \xi^3\right)$ – функции формы

$$\mathbf{P}_{(k)}\left(\xi^2,\xi^3\right)=\begin{pmatrix} \mathrm{p}_{(k)}\left(\xi^2,\xi^3\right) & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{p}_{(k)}\left(\xi^2,\xi^3\right) & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{p}_{(k)}\left(\xi^2,\xi^3\right) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Вектор деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$, соответствующий (4.2), имеет следующий вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(k)}=\left(\mathbf{B}^1_{(k)}+i\kappa\mathbf{B}^2_{(k)}\right)\cdot\mathbf{U}^{(k)}\exp\left(i\kappa\xi^1-i\omega t\right), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{B}^1_{(k)}=\mathbf{L}_\alpha\cdot\partial\mathbf{P}_{(k)}\big/\partial\xi^\alpha,\quad \alpha=1,2;\quad \mathbf{B}^2_{(k)}=\mathbf{L}_1\cdot\mathbf{P}_{(k)};$$

$\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_\alpha$ – матрицы, определяющие дифференциальные операторы [107]

$$\mathbf{L}_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{L}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}_3=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Следствием (4.1) является вариационное уравнение (4.4) относительно $\mathbf{U}$

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{A}_0+i\kappa\mathbf{A}_1+\kappa^2\mathbf{A}_2-\omega^2\mathbf{M}\right)\cdot\mathbf{U}\,dt=0, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{A}_{0,1,2}=\bigcup_{k=1}^{N}\mathbf{A}_{0,1,2(k)};\quad \mathbf{A}_{0(k)}=\int\limits_{\Sigma_k}\mathbf{B}^{1\mathrm{T}}_{(k)}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^1_{(k)}\,d\Sigma_k;\quad \mathbf{A}_{2(k)}=\int\limits_{\Sigma_k}\mathbf{B}^{2\mathrm{T}}_{(k)}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^2_{(k)}\,d\Sigma_k;$$

$$\mathbf{A}_{1(k)}=\int\limits_{\Sigma_k}\left(\mathbf{B}^{1\mathrm{T}}_{(k)}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^2_{(k)}-\mathbf{B}^{2\mathrm{T}}_{(k)}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}^1_{(k)}\right)d\Sigma_k;\quad \mathbf{M}=\int\limits_{\Sigma_k}\rho\mathbf{P}^{\mathrm{T}}_{(k)}\cdot\mathbf{P}_{(k)}\,d\Sigma_k,$$

$\mathbb{R}^2\supseteq D_{\xi^2,\xi^3}=\cup\Sigma_k$. Выполняются условия симметрии матричных операторов $\mathbf{A}_1=-\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_0=\mathbf{A}_0^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{M}=\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$. Из вариационного уравнения (4.4) вытекает однородное уравнение движения в форме (4.5)

$$\left(\mathbf{A}_0+i\kappa\mathbf{A}_1+\kappa^2\mathbf{A}_2-\omega^2\mathbf{M}\right)\cdot\mathbf{U}=0; \tag{4.5}$$

условием существования нетривиального решения уравнения (4.5) является дисперсионное соотношение $D\left(\kappa,\kappa^2,\omega^2\right)=0$ в форме (3.17), при $\kappa\in\mathbb{R}$ разрешимое относительно $\omega\left(\kappa\right)$; решения описывают ветви распространяющихся мод. Замена переменной $\mathbf{Y}=\left(\mathbf{U},\kappa\mathbf{U}\right)^{\mathrm{T}}$ приводит к уравнению движения в форме (3.27) и к соответствующему дисперсионному уравнению $D\left(\omega^2,\kappa\right)=0$ (3.28), решениями которого при $\omega\geq 0$ являются значения волнового числа $\kappa\in\mathbb{C}$, соответствующие ветвям как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн.

ПА МКЭ в случае стержня или пластины может быть основан на различных функциях формы (линейных, квадратичных [108,109])

$$x^\alpha_{(K)}:\Sigma_K\to D^K_x\subset\mathbb{R}^2,\ \alpha=1,2;\quad \mathrm{p}^1_{(K)}\left(x^\alpha_{(K)}\right)=1-x^1_{(K)}-x^2_{(K)},\ \mathrm{p}^{2,3}_{(K)}\left(x^\alpha_{(K)}\right)=x^{1,2}_{(K)};$$

$$\mathrm{p}^{1,3}_{(K)}\left(x^\alpha_{(K)}\right)=\tfrac{1}{4}\left(1\pm x^1_{(K)}\right)\left(1\pm x^2_{(K)}\right),\ \mathrm{p}^{2,4}_{(K)}\left(x^\alpha_{(K)}\right)=\tfrac{1}{4}\left(1\pm x^1_{(K)}\right)\left(1\mp x^2_{(K)}\right)$$

для одномерного волновода с произвольным поперечным сечением [106] и локальными координатами $x^{\alpha}_{(K)}$ K-го 3-х или 4-х узлового плоского элемента,

$$\mathrm{p}^1_{(k)}\left(\zeta_{(k)}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\zeta^2_{(k)}-\zeta\right),\quad \mathrm{p}^2_{(k)}\left(\zeta_{(k)}\right)=1-\zeta^2_{(k)},\quad \mathrm{p}^3_{(k)}\left(\zeta_{(k)}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\zeta^2_{(k)}+\zeta_{(k)}\right)$$

для одномерного разбиения по толщине плоского волновода (см., напр., [110]).

ПА МКЭ эффективно применяется к решению задач о дисперсии волн в ФГ [111], анизотропных [112] и слоистых волноводах [110,113-115], а также и к решению динамических обратных коэффициентных задач [116]. Сходимость ПА МКЭ по частотам запирания распространяющихся мод нормальных волн показана на примере полого слоистого цилиндрического волновода в работе [109]. Основной областью применения ПА МКЭ является изучение дисперсии волн в одномерных (стержневых) волноводах со сложной формой поперечного сечения [107,109] и др., где преимуществом является возможность применения стандартных КЭ и алгоритмов построения сеток на базе коммерческих комплексов программ [117]. В то же время возможность сочетания ПА МКЭ со стандартным МКЭ в окрестности боковой поверхности и ребра пластины обеспечивает возможность исследования отраженных волн [114,118]. В работах [103,117,119] получены решения задач о дисперсии волн в волноводах с предварительным напряженным состоянием, в [120] представлено решение задачи об упругом волноводе, погруженном в жидкую среду.

5. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК N-ГО ПОРЯДКА

С точки зрения механики деформируемого твердого тела волновод с одной или двумя конечными размерностями представляет собой оболочку или стержень. Соответственно, модели волноводов могут интерпретироваться и как частные случаи «трехмерных» теорий оболочек и стержней [121-126] и др. Необходимость построения произвольного количества дисперсионных ветвей требует применения моделей оболочек, учитывающих любое число степеней свободы и основанных на редукции трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела методами степенных рядов [127], рядов Фурье [121-123], интерполяционных полиномов Лагранжа [125,128] или методом конечных элементов (см. напр. [129]). Отдельно (в составе особого обзора) следует рассматривать асимптотический подход к описанию динамики оболочек ([124,130-137] и др.), предоставляющий возможность качественного анализа динамических процессов в тонких телах.

Ниже основное внимание уделяется иерархической теории оболочек, предложенной в [121,138] и развитой далее в работах [122,123,139-147] и ряде других. Применение обобщенных рядов Фурье по некоторой ортогональной системе, чаще всего по полиномам Лежандра, не требует, в отличие от асимптотического подхода, введения малого параметра и не приводит к весьма сложной структуре решений, соответствующих приближениям высшего порядка, кроме того, позволяет строить иерархии моделей нетонких оболочек как «… приближений решений трехмерных задач… в различных нормах» [141]. Приведение к двумерным задачам осуществляется на базе проекционного подхода [121,122,140,146,148] либо вариационным путем с использованием функционалов Лагранжа [123,149,150] или Райсснера [140]. Иерархические теории оболочек являются также эффективным инструментом решения обратных динамических задач [151-154]. Фактически изложенный выше метод ортогональных полиномов представляет собой приложение иерархической теории оболочек к определенному классу задач стационарной волновой динамики. Дальнейшее развитие теории оболочек как двумерных Лагранжевых систем со связями, в соответствии с концепцией аналитической динамики континуальных систем [155] и в сочетании с применением биортогональных базисных систем функций расширяет возможности аналитической механики оболочек при исследовании дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах, в том числе позволяет рассматривать и полуаналитический метод конечных элементов как частный случай приложения теории оболочек N-го порядка к решению рассматриваемого класса задач.

5.1. Основные соотношения теории оболочек N-го порядка.

Оболочка – тело $V \subset \mathbb{R}^3$, $\partial V = S_\pm \oplus S_B$, $S_\pm$, S_B – гладкие лицевые и боковая поверхности. Базисная поверхность S – двумерное многообразие [150,156]

$$S: \quad \forall M_0 \in S \quad \mathbf{r}\left(M_0\right)=\mathbf{r}\left(\xi^\alpha\right), \quad \alpha=1\ldots2; \quad \xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2;$$

$\partial S = \Gamma$, ξ^α – гауссовы параметры, $\mathbf{a}=a_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}^\beta$ – метрический тензор, $\mathbf{b}=b_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}^\beta$ – тензор кривизны, $\mathbf{r}_\alpha = \partial\mathbf{r}/\partial\xi^\alpha$, $\mathbf{r}^\beta = a^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha$ – векторы локального базиса. Пространственная система координат в V, связанная с S_0, вводится так, что

$$\forall M \in V \setminus S_0 \quad \mathbf{R}\left(M\right)=\mathbf{r}\left(M_0\right)+\xi^3\mathbf{n}\left(M_0\right). \tag{5.1}$$

Лицевые поверхности $S_\pm$ с учетом (5.1) задаются соотношениями (5.2)

$$\forall M_\pm \in S_\pm: \quad \mathbf{R}\left(M_\pm\right)=\mathbf{r}\left(M_0\right)+h_\pm\mathbf{n}\left(M_0\right), \quad h_\pm \equiv \xi^3\left(M_\pm\right), \tag{5.2}$$

т.е. $V = S\times\left[-1,1\right]$, $S_B = \Gamma\times\left[-1,1\right]$, $\Gamma = S_0 \cap S_B$. Кинематика оболочки задается вектором перемещения $\mathbf{u}\left(M\right)=u^\alpha\left(M_0,\zeta\right)\mathbf{r}_\alpha + u_3\left(M_0,\zeta\right)\mathbf{n}$; $\mathbf{R}_\alpha\left(M_0,\zeta\right),\mathbf{n}\left(M_0\right)$ – основной базис системы ξ^1,ξ^2,ξ^3, $\mathbf{r}_\alpha\left(M_0\right),\mathbf{n}\left(M_0\right)$ – сопутствующий базис [121]

$$\mathbf{R}_\alpha = \partial\mathbf{R}/\partial\xi^\alpha = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{R}^\alpha = A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\mathbf{r}^\beta; \quad A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = \delta_\alpha^\beta - \xi^3 b_\alpha^\beta, \quad A_{\gamma\cdot}^{\cdot\alpha}A_{\cdot\beta}^{\gamma\cdot} = \delta_\beta^\alpha;$$

$$g^{\alpha\beta} = \mathbf{R}^\alpha\cdot\mathbf{R}^\beta; \quad A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \mu^{-1}\left[\delta_\beta^\alpha - \xi^3\left(b_\lambda^\lambda\delta_\beta^\alpha - b_\beta^\alpha\right)\right]; \quad \mu = 1-\xi^3 b_\lambda^\lambda + (\xi^3)^2\left|b_\beta^\alpha\right|.$$

При построении двумерной модели оболочки перемещение $\mathbf{u}\left(M_0,\zeta,t\right)$, где $\zeta = \left(\xi^3 - \bar{h}\right)/h \in \left[-1,1\right]$ – безразмерная координата, $\bar{h} = \left(h_+ + h_-\right)/2$, $2h\left(M_0\right)$ – толщина, задается коэффициентами разложения $\mathbf{u}^{(k)}\left(M_0,t\right)$ по биортогональной системе $\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)$, $\mathrm{p}^{(m)}\left(\zeta\right)$, образующей базис в пространстве функций $\mathcal{H}\left[-1,1\right]$

$$\mathbf{u}\left(M_0,\zeta,t\right)=u_\alpha^{(k)}\mathrm{p}_{(k)}\mathbf{r}^\alpha + u_3^{(k)}\mathrm{p}_{(k)}\mathbf{n} = u_{(m)}^\alpha\mathrm{p}^{(m)}\mathbf{r}_\alpha + u_{(m)}^3\mathrm{p}^{(m)}\mathbf{n}, \; k,m=1\ldots N; \tag{5.3}$$

$$\mathbf{u}^{(k)}\left(M_0,t\right)=\left(\mathbf{u}\left(M_0,\zeta,t\right),\mathrm{p}_{(k)}\left(\zeta\right)\right)_1 = u_\alpha^{(k)}\left(M_0,t\right)\mathbf{r}^\alpha + u_3^{(k)}\left(M_0,t\right)\mathbf{n}. \tag{5.4}$$

В качестве базиса могут быть использованы как полиномы Лежандра, так и финитные функции [157], соответствующие конечно-элементной дискретизации оболочки по толщине (а в данном классе задач порождающие модель волновода, соответствующие полуаналитическому методу конечных элементов) [158]

$$\mathrm{p}_{(k,0)}=\begin{cases}\dfrac{\zeta_{k+1}-\zeta}{\zeta_k-\zeta_{k+1}}, & \zeta\in[\zeta_k,\zeta_{k+1}];\\ 0, & \zeta\notin[\zeta_k,\zeta_{k+1}];\end{cases}\quad \mathrm{p}_{(k,1)}=\begin{cases}\dfrac{\zeta-\zeta_k}{\zeta_k-\zeta_{k+1}}, & \zeta\in[\zeta_k,\zeta_{k+1}];\\ 0, & \zeta\notin[\zeta_k,\zeta_{k+1}];\end{cases} \quad (5.5)$$

$$\mathrm{p}_{(0)}=\mathrm{p}_{(0,0)}(\zeta),\ldots\quad \mathrm{p}_{(k)}=\mathrm{p}_{(k,1)}(\zeta)+\mathrm{p}_{(k+1,0)}(\zeta),\ldots\quad \mathrm{p}_{(N)}=\mathrm{p}_{(N,1)}(\zeta),$$

$\zeta_k=-1+kN^{-1}$. Силовые краевые условия на поверхностях $S_\pm\subseteq S_\sigma$ имеют вид (5.6)

$$\mp h^\pm_\beta\, s^{i\beta}\Big|_{S\pm}\pm s^{i3}\Big|_{S\pm}=\overline{q}^i_\pm,\quad i=\overline{1,3},\quad \beta=\overline{1,2};\quad h^\pm_\beta=\partial_\beta h_\pm; \qquad (5.6)$$

$\mathbf{q}^\pm=(\mu_\pm\nu_\pm)^{-1}\left(q^\alpha_\pm\mathbf{r}_\alpha+q^3_\pm\mathbf{n}\right)$ – главный вектор внешних сил на $S_\pm$, s^{ij} – компоненты симметричного тензора напряжения $\boldsymbol{\sigma}=\mu^{-1}\left(s^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{R}_\beta+s^{3\beta}\mathbf{n}\mathbf{R}_\beta+s^{\alpha3}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{n}+s^{33}\mathbf{nn}\right)$ [159],

$$s^{\alpha\beta}=\mu A^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\sigma^{\alpha\gamma},\quad s^{3\beta}=\mu A^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}\sigma^{3\gamma},\quad s^{i3}=\sigma^{i3},\quad \mu_\pm=\mu\,|_{\zeta=\pm1},\quad \nu^2_\pm=1-g^{\alpha\beta}h^\pm_\alpha h^\pm_\beta.$$

Динамика упругой оболочки описывается принципом Гамильтона: $\delta\mathrm{H}_3=0$,

$$\mathrm{H}_3=\int_V \mathrm{L}_V dV+\int_{\partial V}\mathrm{L}_{\partial V}\,dS;\quad \mathrm{L}_V=\rho\left(\tfrac12 u^i+F^i\right)u_i-\tfrac12 C^{ijpq}\nabla_j u_i\nabla_q u_p, \qquad (5.7)$$

$L_{\partial V}=q^i u_i\,|_{\partial S}$, F^i, q^i_B – компоненты главных векторов внешних сил в V и на S_B в базисе $\mathbf{r}_\alpha,\mathbf{n}$, ρ – массовая плотность. Подстановка (5.3) в (5.7) приводит к определению модели оболочки как континуальной системы [155] на многообразии S $\partial S=\Gamma$ конфигурационным пространством $\Omega_N=\left\{\mathbf{u}^{(k)}\right\}_{k=0..N}$ с переменными поля I рода $\mathbf{u}^{(k)}(M_0,t)$ [156], поверхностной $\mathrm{L}_S\left(u^{(k)}_i,\dot u^{(k)}_i,\nabla_\alpha u^{(k)}_i\right)$ и контурной $\mathrm{L}_\Gamma\left(u^{(k)}_i\right)$ плотностями функционала Лагранжа [160]

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_S\left(u^{(k)}_i,\dot u^{(k)}_i,\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_i\right)&=P^i_{(k)}u^{(k)}_i-\tfrac12\Big[s^{\alpha\beta}_{(k)}\left(\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_\alpha+H^{(\cdot k)}_{\beta(m\cdot)}u^{(m)}_\alpha-b_{\beta\alpha}u^{(k)}_3\right)+\\&+s^{3\beta}_{(k)}\left(\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_3+H^{(\cdot k)}_{\beta(m\cdot)}u^{(m)}_3+b^\alpha_\beta u^{(k)}_\alpha\right)+s^{i3}_{(k)}D^{(\cdot k)}_{(m\cdot)}u^{(m)}_i\Big]+\tfrac12\rho^{(m)}_{(k)}\dot u^{i}_{(m)}\dot u^{(k)}_i;\end{aligned} \qquad (5.8)$$

$$\mathrm{L}_\Gamma\left(u^{(k)}_i\right)=q^i_{B(k)}u^{(k)}_i;\quad \alpha,\beta=1,2;\quad i=\overline{1,3};\quad k,m=\overline{0,N}; \qquad (5.9)$$

$$P^i_{(k)}=(\overline{\mu}\rho F^i,\mathrm{p}_{(k)})_1;\quad q^i_{B(k)}=(\mu_B q^i,\mathrm{p}_{(k)})_1;\quad \rho^{(m)}_{(k)}=(\overline{\mu}\rho\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}^{(m)})_1.$$

$$\delta\mathrm{H}\equiv\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\int_{S_0}\mathrm{L}_S\left(u^{(k)}_i,\dot u^{(k)}_i,\nabla_\alpha u^{(k)}_i\right)dS_0+\int_\Gamma \mathrm{L}_\Gamma\left(u^{(k)}_i\right)d\Gamma\right\}=0.$$

При учете (5.3) краевые условия (5.6) определяют на S уравнения связей (5.10) для переменных поля $u^{(k)}_j$ (5.4) и ковариантных производных $\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_j$ [161]

$$C^{ij\delta}_{(k)\pm}\left(\overline{\nabla}_\delta u^{(k)}_j+H^{(\cdot k)}_{\delta(m\cdot)}u^{(m)}_j\right)+C^{ij3}_{(k)\pm}D^{(\cdot k)}_{(m\cdot)}u^{(m)}_j-C^{i\gamma\delta}_{(k)\pm}b_{\gamma\delta}u^{(k)}_3+C^{i3\delta}_{(k)\pm}b^\gamma_\delta u^{(k)}_\gamma=\mp\overline{q}^i_\pm, \quad (5.10)$$

$$C^{ij\delta}_{(k)\pm}=\left(\overline{C}^{i3j\delta}_{(km)}-h^\pm_\beta\overline{\overline{C}}^{i\beta j\delta}_{(km)}\right)\mathrm{p}^{(m)}_\pm;\ C^{ij3}_{(k)\pm}=\left(C^{i3j3}_{(km)}-h^\pm_\beta\overline{C}^{i\beta j3}_{(km)}\right)\mathrm{p}^{(m)}_\pm;\ \mathrm{p}^{(m)}_\pm=\mathrm{p}^{(m)}(\pm1); \quad (5.11)$$

II начально-краевая задача теории оболочек *N*-го порядка задается уравнениями движения – уравнениями Лагранжа II рода, следующими из $\delta\mathrm{H}=0$ и (5.12), естественными краевыми условиями (5.13), связями (5.10), определяющими соотношениями (5.14) и начальными условиями (5.15), $\boldsymbol{\lambda}^\pm=\lambda^\pm_\alpha\mathbf{r}^\alpha+\lambda^\pm_3\mathbf{n}$ – множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^\pm$, соответствующие связям (5.10) и краевым условиям (5.6), перенесенным на S [159]

$$\rho_{(k)}^{(m)}\ddot{u}_{(m)}^{\alpha}=\overline{\nabla}_{\beta}\tilde{s}_{(k)}^{\alpha\beta}-H_{\beta(k\bullet)}^{(\bullet m)}\tilde{s}_{(m)}^{\alpha\beta}-b_{\beta}^{\alpha}\tilde{s}_{(k)}^{3\beta}-D_{(k\bullet)}^{(\bullet m)}\tilde{s}_{(m)}^{\alpha 3}+P_{(k)}^{\alpha};$$
$$\rho_{(k)}^{(m)}\ddot{u}_{(m)}^{3}=\overline{\nabla}_{\beta}\tilde{s}_{(k)}^{3\beta}-H_{\beta(k\bullet)}^{(\bullet m)}\tilde{s}_{(m)}^{3\beta}+b_{\alpha\beta}\tilde{s}_{(k)}^{\alpha\beta}-D_{(k\bullet)}^{(\bullet m)}\tilde{s}_{(m)}^{33}+P_{(k)}^{3}; \tag{5.12}$$

$$\left(\tilde{s}_{(k)}^{i\beta}\nu_{\beta}-q_{B(k)}^{i}\right)\delta u_{i}^{(k)}\Big|_{M_0\in\Gamma}=0;\quad i=1,2,3;\quad \beta=1,2; \tag{5.13}$$

$$\tilde{s}_{(k)}^{i\beta}=\overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta j\delta}\overline{\nabla}_{\delta}u_{j}^{(m)}+\overline{C}_{(km)}^{i\beta j}u_{j}^{(m)}+\lambda_{j}^{+}C_{(k)+}^{ji\beta}+\lambda_{j}^{-}C_{(k)-}^{ji\beta};$$
$$\tilde{s}_{(k)}^{i3}=\overline{C}_{(km)}^{i3j\delta}\overline{\nabla}_{\delta}u_{j}^{(m)}+C_{(km)}^{i3j}u_{j}^{(m)}+\lambda_{j}^{+}C_{(k)+}^{ji3}+\lambda_{j}^{-}C_{(k)-}^{ji3}; \tag{5.14}$$
$$\overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta\gamma}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{\overline{C}}_{(nm)}^{i\beta\gamma\delta}+b_{\delta}^{\gamma}\overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta3\delta}+D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)}^{i\beta\gamma3};\quad \overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta3}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{\overline{C}}_{(nm)}^{\alpha\beta3\delta}-b_{\gamma\delta}\overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta\gamma\delta}+D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)}^{i\beta33};$$
$$\overline{C}_{(km)}^{i3\gamma}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)}^{i3\gamma\delta}+b_{\delta}^{\gamma}\overline{C}_{(km)}^{i33\delta}+D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)}^{i3\gamma3};\quad \overline{C}_{(km)}^{i33}=H_{\delta(k\bullet)}^{(\bullet n)}\overline{C}_{(nm)}^{i33\delta}-b_{\gamma\delta}\overline{C}_{(km)}^{i3\gamma\delta}+D_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}C_{(nm)}^{i333}.$$

$$u_{(k)}^{i}\Big|_{t=t_0}=U_{(k)}^{i};\quad \dot{u}_{(k)}^{i}\Big|_{t=t_0}=V_{(k)}^{i}. \tag{5.15}$$

Уравнения (5.10)-(5.14) имеют единую ковариантную форму при любом базисе $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$ – как полиномиальном [162], так и конечно-элементном [158], и др.

5.2. Решение задач о дисперсии нормальных волн на базе теории оболочек N-го порядка.

В частном случае плоского слоя при $F^i\equiv 0$, $q^i\equiv 0$ поверхностная плотность функционала Лагранжа (5.8) и уравнения связей (5.10) приводятся к виду [163]

$$\mathrm{L_S}\left(u_i^{(k)},\dot{u}_i^{(k)},\nabla_{\alpha}u_i^{(k)}\right)=\tfrac{1}{2}\rho_{(k)}^{(m)}\dot{u}_{(m)}^{i}\dot{u}_i^{(k)}-\tfrac{1}{2h}\left(C_{(km)}^{i3j\gamma}\nabla_{\gamma}u_j^{(m)}+C_{(km)}^{i3j}u_j^{(m)}\right)D_{(n\cdot)}^{(\cdot k)}u_i^{(n)}-$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{\alpha\beta j\gamma}\nabla_{\gamma}u_j^{(m)}+C_{(km)}^{\alpha\beta j}u_j^{(m)}\right)\nabla_{\beta}u_{\alpha}^{(k)}-\tfrac{1}{2}\left(C_{(km)}^{3\beta j\gamma}\nabla_{\gamma}u_j^{(m)}+C_{(km)}^{3\beta j}u_j^{(m)}\right)\nabla_{\beta}u_3^{(k)}; \tag{5.16}$$

$$\left(C_{(km)}^{i3j\delta}\nabla_{\delta}u_j^{(k)}+C_{(km)}^{i3j3}D_{(m\bullet)}^{(\bullet k)}u_j^{(m)}\right)\mathrm{p}_{\pm}^{(m)}=0. \tag{5.17}$$

В частном случае изотропного ФГМ, образованного двумя структурными составляющими с модулями E_1, E_2 и плотностями ρ_1, ρ_2 с распределением $q(\zeta)$, физические постоянные (5.14) определяются соотношениями [162,164,165]

$$C_{(km)}^{ijpq}=E_{(km)}\tfrac{1}{2}(1+\nu)^{-1}\left[(1-2\nu)^{-1}a^{ij}a^{pq}+a^{ip}a^{jq}+a^{iq}a^{jp}\right],\quad a^{i3}\equiv\delta^{i3};$$
$$E_{(km)}=E_1hV_{(km)},\quad V_{(km)}=\tilde{E}G_{(km)}+\Delta\tilde{E}Q_{(km)};\quad \tilde{E}=E_1^{-1}E_2,\quad \Delta\tilde{E}=1-\tilde{E};$$
$$\rho_{(km)}=\rho_1hR_{(km)},\quad R_{(km)}=\tilde{\rho}G_{(km)}+\Delta\tilde{\rho}Q_{(km)};\quad \tilde{\rho}=\rho_1^{-1}\rho_2,\quad \Delta\tilde{\rho}=1-\tilde{\rho},$$

$Q_{(mn)}=\left(q(\zeta)\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1$. Для плоского слоя вводятся безразмерные переменные: координаты $\xi=x_1h^{-1}$, время $\tau=tc_2h^{-1}$ и перемещения $\tilde{u}_{\alpha}^{(k)}=u_{\alpha}^{(k)}h^{-1}$; $c_2=\sqrt{\mu_1/\rho_1}$. Безразмерные уравнения движения, следующие из (5.12-5.14), имеют вид [166]

$$R_{(km)}\partial_{\tau}^{2}u_1^{(m)}=\beta^{-2}V_{(km)}\partial_{\xi}^{2}u_1^{(m)}-D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}u_1^{(m)}-$$
$$-\left[D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(kn)}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\partial_{\xi}u_2^{(m)}+V_{(km)}\mathrm{p}_{\pm}^{(m)}\left[\lambda_1^{\pm}+\left(\beta^{-2}-2\right)\partial_{\xi}\lambda_3^{\pm}\right];$$
$$R_{(km)}\partial_{\tau}^{2}u_2^{(m)}=V_{(km)}\partial_{\xi}^{2}u_2^{(m)}+\beta^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}u_2^{(m)}-$$
$$-\left[\left(\beta^{-2}-2\right)D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-V_{(kn)}\overline{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\partial_{\xi}u_1^{(m)}+V_{(km)}\mathrm{p}_{\pm}^{(m)}\left[\partial_{\xi}\lambda_1^{\pm}+\beta^{-2}\lambda_3^{\pm}\right], \tag{5.18}$$

Уравнения неголономных связей (5.10) записываются в виде [165,166]

$$\left[\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(km)}\partial_\xi u_1^{(m)}+\beta^{-2}V_{(kn)}\bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)}u_3^{(m)}\right]\mathrm{p}_\pm^{(k)}=0,\quad \mathrm{p}^{(k)}=G^{(km)}\mathrm{p}_{(m)};$$
$$V_{(kn)}\left[\bar{D}_{(m\bullet)}^{(\bullet n)}u_1^{(m)}+\delta_{(m)}^{(n)}u_3^{(m)}\right]\mathrm{p}_\pm^{(k)}=0,\quad G^{(kn)}G_{(mn)}=\delta_{(m)}^{(k)},\ G_{(km)}=\left(\mathrm{p}_{(k)},\mathrm{p}_{(m)}\right)_1, \tag{5.19}$$
$\beta^2=\left(c_2/c_1\right)^2$, $c_1=\sqrt{\left(\lambda_1+2\mu_1\right)/\rho_1}$. Для нормальной волны $\mathbf{u}^{(k)}=\mathbf{U}^{(k)}\exp\left[i\left(\kappa\xi-\omega\tau\right)\right]$ уравнения движения (5.18) и связи (5.19) приводятся к матричным (5.20) и (5.21)
$$\left(\left[\mathbf{A}(\kappa)\quad \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\kappa)\right]-\omega^2\mathbf{P}\right)\cdot\mathbf{V}=0;\quad \mathbf{V}=\left(\mathbf{U}\quad \mathbf{\Lambda}\right)^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{B}=\left(\mathbf{B}_+\quad \mathbf{B}_-\right); \tag{5.20}$$
$$\mathbf{U}=\left(U_1^{(0)}\dots\quad U_1^{(N)}\quad U_3^{(0)}\dots\quad U_3^{(N)}\right)^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{\Lambda}=\left(\lambda_1^+\quad\lambda_3^+\quad\lambda_1^-\quad\lambda_3^-\right)^{\mathrm{T}};$$
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\kappa^2\beta^{-2}V_{(km)}+D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)} & i\kappa\left[D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right]\\ i\kappa\left[\left(\beta^{-2}-2\right)D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(nm)}-V_{(kn)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot n)}\right] & \kappa^2V_{(km)}+\beta^{-2}D_{(k\cdot)}^{(\cdot n)}V_{(ns)}\bar{D}_{(m\cdot)}^{(\cdot s)}\end{pmatrix},$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{U}=0; \tag{5.21}$$
$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}R_{(km)} & 0\\ 0 & R_{(km)}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_\pm=\begin{pmatrix}i\kappa\left(\beta^{-2}-2\right)V_{(km)}\mathrm{p}_\pm^{(m)} & \beta^{-2}V_{(mn)}\bar{D}_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\mathrm{p}^{(m)}\mathrm{p}_\pm^{(m)}\\ V_{(mn)}\bar{D}_{(k\bullet)}^{(\bullet n)}\mathrm{p}_\pm^{(m)} & i\kappa V_{(km)}\mathrm{p}_\pm^{(m)}\end{pmatrix}.$$

При условии $\exists\left\{k_1',k_2',k_3',k_4'\right\}\in\left[0,2N+1\right]\cap\mathbb{Z}$, таких, что выполняется
$$\exists\widetilde{\mathbf{B}}_{4\times4}=\mathbf{B}_{4\times\{k'\}}:\forall\kappa\ge0\quad\left|\widetilde{\mathbf{B}}(\kappa)\right|\ne0\ \Rightarrow\ \mathbf{\Lambda}=-\left[\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(\kappa)\right]^{-1}\cdot\left[\tilde{\mathbf{A}}(\kappa)-\omega^2\tilde{\mathbf{P}}\right]\cdot\mathbf{U},$$
$$\widetilde{\mathbf{A}}_{4\times(2N+2)}=\mathbf{A}_{\{k'\}\times(2N+2)},\quad \widetilde{\mathbf{P}}_{4\times(2N+2)}=\mathbf{P}_{\{k'\}\times(2N+2)}.$$
система уравнений движения (5.20) и связей (5.21) приводится к виду (5.22)
$$\left[\overline{\mathbf{A}}(\kappa)-\omega^2\overline{\mathbf{P}}(\kappa)\right]\mathbf{U}=0, \tag{5.22}$$
$$\overline{\mathbf{A}}_{(2N-2)\times(2N+2)}=\mathbf{A}_{\{k''\}\times(2N+2)}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\left[\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(\kappa)\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{A}}(\kappa),$$
$$\overline{\mathbf{P}}_{(2N-2)\times(2N+2)}=\mathbf{P}_{\{k''\}\times(2N+2)}-\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\left[\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(\kappa)\right]^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{P}},\quad \left\{k''\right\}\oplus\left\{k'\right\}=\left[0,2N+2\right]\cap\mathbb{Z};$$
условие существования нетривиального решения $2N-2$ уравнения движения (5.22) с исключенными множителями Лагранжа $\lambda_1^\pm$, $\lambda_3^\pm$ и 4 уравнений связей (5.21) [165] порождает сингулярную обобщенную спектральную задачу [167]
$$\left|\overline{\overline{\mathbf{A}}}(\kappa)-\omega^2\overline{\overline{\mathbf{P}}}(\kappa)\right|=0,\quad \overline{\overline{\mathbf{A}}}=\left[\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\quad \mathbf{B}\right]^{\mathrm{T}},\quad \overline{\overline{\mathbf{P}}}=\left[\overline{\mathbf{P}}\quad \mathbf{0}\right]; \tag{5.23}$$
при пренебрежении (5.17) обобщенная спектральная задача имеет вид [168,169]
$$\left|\mathbf{A}(\kappa)-\omega^2\mathbf{P}\right|=0. \tag{5.24}$$

В случае (5.24) краевые условия на лицевых поверхностях удовлетворяются приближенно вследствие сходимости $\mathbf{u}^{(k)}\mathrm{p}_{(k)}\to\mathbf{u}$ в точках $\zeta=\pm1$ при $N\to\infty$. Однако, решение, удовлетворяющее условиям (5.17) при $\zeta=\pm1$, может быть получено без введения множителей $\lambda_1^\pm$, $\lambda_3^\pm$ на основе задачи о стационарных значениях для квадратичных форм $\mathbf{A}$ и $\mathbf{P}$ (5.24) с ограничениями (5.21) [164]
$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{U}/\mathbf{U}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{U}=0,\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{U}=0. \tag{5.25}$$

Вводится QZ-разложение матрицы связей (5.21) [170] в виде [164]
$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}\mathbf{S} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{(2N+2)\times4},$$

линейные операторы, учитывающие связи, определяются следующим образом

$$\mathbf{A}_C = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}_C = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{A}_C = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12} \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times(2N+2)}, \quad \mathbf{P}_C = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{P}}_{11} & \overline{\mathbf{P}}_{12} \\ \overline{\mathbf{P}}_{21} & \overline{\mathbf{P}}_{22} \end{pmatrix}_{(2N+2)\times(2N+2)};$$

фазовые частоты $\omega(\kappa)$ следуют из решения задачи о стационарных значениях для $\overline{\mathbf{A}}_{22}$ и $\overline{\mathbf{P}}_{22}$ без ограничений, сводящейся к обобщенной спектральной задаче (5.26)

$$\left(\overline{\mathbf{A}}_{22} - \omega^2 \overline{\mathbf{P}}_{22}\right) \cdot \overline{\mathbf{U}} = 0, \quad \overline{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{U}. \tag{5.26}$$

Другой вариант построения решения, точно удовлетворяющего краевым условиям (5.6), может быть основан на проекционном подходе к редукции трехмерной задачи динамики упругой среды [142,143,147,168,171,172] и методе корректирующего решения [139,140], т.е. на введении дополнительных неизвестных $\mathbf{u}^{(N+1)}$, $\mathbf{u}^{(N+2)}$, определяемых при проецировании уравнений движения на $N+1$ базисную функцию аналогично [60] из уравнений связей (5.10).

Сходимость приближенного решения на базе (5.24) при пренебрежении связями (5.21) по частотам запирания $\omega_n(\kappa=0)$ к точному решению ω_n^* задачи Рэлея-Лэмба [173] описана в [168], показано, что для однородного изотропного плоского слоя погрешность $\Delta_n = \left|\omega_n - \omega_n^*\right| / \omega_n^* \le 0.05$ достигается при $N_{\min} \ge 2n$, где $n \in \mathbb{N}$ – номер моды. В [169] изучена сходимость форм нормальных волн $u_i^n(\zeta)$ при $\kappa \in \mathbb{R}_+$ к точному решению $u_i^{n*}(\zeta)$ [173] по норме $\Delta_n = \left\|u_i^n - u_i^{n*}\right\| / \left\|u_i^{n*}\right\| \le 0.05$, $\left\|u_i^n\right\|^2 = \left(u_i^n(\zeta), u_i^n(\zeta)\right)_1$ в соответствии с (3.15). Получены оценки сходимости фазовых частот $\omega(\kappa')$, $\omega(\kappa'')$ для мод Гудьера-Бишопа, $\kappa' = \omega\beta$ $\left(c_{\mathrm{Ph}} = c_1\right)$ и мод Ламе, $\kappa'' = \omega\sqrt{2}$ $\left(\varepsilon_i^i = 0\right)$ [174]. Сходимость решения по формам мод Гудьера-Бишопа и Ламе показана в [175]. В работе [176] на базе теории пластин N-го порядка описана дисперсионная ветвь второй продольной моды нормальных волн при $2\kappa/\pi \in [0,1.5]$, т.е. в области т.н. «обратной волны», $\operatorname{sgn} c_{\mathrm{g}} = -\operatorname{sgn} c_{\mathrm{Ph}}$, и показано, что при $2\kappa/\pi \in [0,1]$ приемлемая точность решения достигается при $N_{\min} = 5$, при $2\kappa/\pi \in [1,1.5]$ – при $N_{\min} \le 6$. Сходимость решения по форме второй нормальной моды продольных волн в области $\operatorname{sgn} c_{\mathrm{g}} = -\operatorname{sgn} c_{\mathrm{Ph}}$ исследована в работах [177] на базе постановки (5.24) и в [178] – при учете связей (5.21), и показано, что $\Delta_n \le 0.05$ достигается при $N_{\min} = 5$ в области $2\kappa/\pi \in [0,1]$, при $N_{\min} = 6\ldots7$ – в области $2\kappa/\pi \in [1,1.5]$. В работе [166] проведен сравнительный анализ сходимости решения задачи для плоского слоя при использовании в качестве базисной системы полиномов Лежандра и кусочно-линейных финитных базисных функций (5.5), соответствующих ПА МКЭ, на базе единой формулировки задачи (5.18). Приведено решение задачи о дисперсии нормальных волн для ФГ слоя симметричной структуры $q(\zeta) = |\zeta|^p$ на базе полиномов Лежандра, а в работе [158] – на основе ПА МКЭ, следующего из (5.5), исследована сходимость приближенного решения по частотам запирания $\omega(\kappa = 0)$.

Учет связей (5.10), соответствующих краевым условиям (5.6), качественно изменяет свойства модели оболочки, в частности, при $N=1$ модель соответствует асимптотически непротиворечивой теории Кирхгоффа [179,180]. Решение задачи о дисперсии нормальных волн в плоском слое при учете связей, основанное на формулировке задачи (5.26) получено в работе [164], а в [165] – решение на базе формулировки задачи (5.23), (5.24). Изучена сходимость решения к точному по частотам запирания распространяющихся мод нормальных волн. Показано [165], что учет связей снижает эффекты запирания, выражающиеся в завышении фазовых частот ω_n, и приводит к снижению $N_{\min}\left(\Delta\omega_n< 0.05\right)$ в среднем на единицу. В работах [158,164-166] также проведен анализ сходимости решения задач о дисперсии волн в ФГ слое на базе теории оболочек N-го порядка [161].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы, основанные на замене исходной системы некоторой моделью с ограниченным числом степеней свободы, основанной на разложении неизвестных в ряды, обладают рядом преимуществ перед матричными методами решения задачи о дисперсии нормальных волн в неоднородных волноводах. Так, превосходством метода степенных рядов перед методом передаточных матриц является сохранение устойчивости вычислений, перед методом глобальных матриц – большая вычислительная экономичность. Метод не требует перехода от ФГ волновода к системе слоев с постоянными, кусочно-линейными и т.п. свойствами и, кроме того, естественным образом сочетается с асимптотическим подходом, что является важным преимуществом. Рекуррентные соотношения для коэффициентов рядов обеспечивают алгоритмизацию построения решения для любого числа фазовых частот. В то же время спектральная задача сводится к трансцендентному характеристическому уравнению с коэффициентами, заданными в виде частичных сумм рядов, для вязкоупругого материала – с комплексными коэффициентами, что приводит к необходимости применения сложных численных методов его решения с целью исключения возможной потери некоторых его корней.

В свою очередь, метод, основанный на обобщенных рядах Фурье (полиномах Лежандра для слоя, полиномах Лагерра для полупространства), приводит к постановке обобщенной задачи о собственных значениях некоторого матричного оператора. Решение данной задачи обеспечивается стандартными алгоритмами, встроенными во многие программные комплексы, притом, как правило, устойчиво и исключает риск потери ветвей дисперсионных кривых. Кроме того, метод рядов Фурье обеспечивает построение дисперсионных ветвей как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн в виде зависимости «волновое число – фазовая частота» при введении дополнительной переменной. Метод допускает обобщение на случай волноводов с усложненными свойствами – пьезоупругих, вязкоупругих, моментно-упругих и др. и является одним из наиболее интенсивно развивающихся, судя по количеству опубликованных в последние годы работ.

Альтернативой методу рядов Фурье является полуаналитический метод конечных элементов. Основной областью приложения ПА МКЭ является анализ дисперсии волн в одномерных волноводах (стержнях со сложной формой сечения), где применение степенных рядов или рядов Фурье по функциям координат в плоскости сечения не рационально. В то же время ПА МКЭ работоспособен и в задачах для тонкостенных волноводов. Применение полуаналитического метода конечных элементов для моделирования волн, распространяющихся в функционально-градиентных волноводах, как в частотной, так и во временной области обеспечивает достаточную точность и вычислительную эффективность решения, причем перспективным направлением его развития представляется объединение ПА МКЭ с матричными методами, в частности, с методом глобальных матриц [110]. Сходимость моделей ПА МКЭ с дискретизацией волновода в направлении, ортогональном направлению распространения нормальных волн, может быть улучшена при введении в рассмотрение элементов высокого порядка.

Альтернативой методу ПА МКЭ является интерполяция компонентов вектора перемещения полиномом Лагранжа с узлами, координаты которых определены корнями полиномов Чебышева [181,182] (т.н. «метод чебышевских спектральных элементов» [183], детальное описание перспектив развития которого требует специального обзора). Другим альтернативным решением является метод масштабируемых граничных элементов («Scaled Boundary Finite Element Method»), разработанный в [184] и впоследствии развитый в работах [185-187], в том числе с использованием неравномерных рациональных B-сплайнов [188], и примененный к решению задач о взаимодействии волн со стыками и дефектами слоистых волноводов [189].

С другой стороны, тонкостенный волновод может интерпретироваться как оболочка; задачи о дисперсии нормальных волн представляют собой частный случай задач стационарной динамики пластин и цилиндрических или призматических оболочек. Соответственно, изложенные выше методы – как метод степенных разложений, так и обобщенных разложений Фурье в задачах для волноводов – логически следуют из общих методов построения различных вариантов теорий оболочек высшего порядка [121,127,128,133,148] и т.д. Развитие общей теории оболочек [156,161], основанной на биортогональных базисных функций нормальной координаты, позволяет получать как модели, соответствующие методу ортогональных полиномов, так и ПА МКЭ в рамках единого формализма (в литературе данные методы интерпретируются как независимые направления) при точном удовлетворении краевых условий на лицевых поверхностях, порождающих уравнения связей вариационной задачи. Кроме того, лагранжев формализм аналитической динамики континуальных систем [155], на основе которого построены теории [156,161], допускает переход к другим типам уравнений, в том числе квазиканоническим уравнениям гамильтонова типа [190] относительно обобщенных перемещений и обобщенных усилий, разрешенным относительно первых производных и, таким образом, обеспечивающих естественный переход к дисперсионным уравнениям, линейным по волновому числу и применимым к построению дисперсионных ветвей как распространяющихся, так и затухающих мод нормальных волн. Следует заметить, что метод спектральных элементов [181,182] также может рассматриваться как приложение интенсивно развивающейся теории оболочек [125,128] к решению задач о дисперсии волн в тонкостенных неоднородных волноводах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жаворонок С.И. *Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2021. – Т.27. – №2. – С.227-260.
2. Шульга Н.А. *Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре* // Прикл. механика. –1974.–Т.10. – №9. – С.14-18.
3. Cao X., Jin F., Jeon J., Lu T.J. *Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FPGM) layered composite system* // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – Vol. 46. – Pp.4123-4132.
4. Cao X., Jin F., Wang Z.K., Lu T.J. *Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure* // Science in China. Series G: Physics, Mechanics, Astronomy. – 2009. – Vol.52. – No.4. – Pp.613-625.
5. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique* // NDT&E International. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.
6. Bouhdima M.S., Zagrouba M., Ben Ghozlen M.H. *The power series technique and detection of zero-group velocity Lamb waves in a functionally graded material plate* // Canadian Journal of Physics. – 2012. – Vol.90. – No.2. – Pp.159-164.
7. Cao X., Jiang X., Ru Y., Shi J. *Asymptotic solution and numerical simulation of Lamb waves in functionally graded viscoelastic film* // Materials. – 2019. – Vol.12. – Pp.268-284.
8. Han X., Liu G. R., Lam K. Y., Ohyoshi T. *A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization* // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol.236. – Pp.307-321.
9. Han X., Liu G. R. *Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder* // Smart Materials and Structures. – 2003. – Vol.12. – Pp.962-971.
10. Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media* // IEEE Trans. Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. – 1995. – Vol.42. – Pp.525-542.
11. Cao X., Jin F., Kishimoto K. *Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space* // Philosophical Magazine Letters. – 2012. – Vol.92. – No.5. – Pp.245-253.
12. Jiang H., Cao X. *Lamb waves in a functionally graded Kelvin viscoelastic plate* // Yuingyong Lixue Xuebao / Chinese Journal of Applied Mechanics. – 2018. – Vol.35. – No.4. – Pp.715-721.
13. Bouhdima M.S., Zagrouba M., Ben Ghozlen M.H. *The power series technique and detection of zero-group velocities Lamb waves in a functionally graded material plate* // Canadian Journal of Physics. – 2012. – Vol.90. – No.2. – Pp.107-118.
14. Zagrouba M., Bouhdima M.S. *Numerical study of S1 zero group velocity Lamb modes for nonlimear functionally graded materials* // Canadian Journal of Physics. – 2016. – Vol.94. – No.11. – Pp.1189-1194.
15. Моисеенко И.А., Сторожев В.И. *Спектры неосесимметричных нормальных упругих волн ортотропных цилиндрах с функционально-градиентной неоднородностью* // Механика твердого тела. – 2015. – №45. – С.112-124.
16. Моисеенко И.А., Волчков В.В. *Распространение нормальных волн в трансверсально-изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом* // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2016. – №4. – С.35-49.

17. Моисеенко И.А., Прийменко С.А., Шалдырван В.А. *Неосесимметричные нормальные упругие волны в функционально-градиентных ортотропных полых цилиндрах* // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2017. – Т.58. – №1. – С.27-41.
18. Моисеенко И.А. *Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения* // Вестн. ДонНУ. Естественные науки. – 2017. – №4. – С.41-53.
19. Моисеенко И.А. *Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров* // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2018. – №1. – С.37-54.
20. Моисеенко И.А., Кисель Е.С. *Распространение волн в анизотропных неоднородных цилиндрах секторного сечения со свободной или жестко закрепленной граничной поверхностью* // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2018. – №2. – С.36-53.
21. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. *Нормальные волны в функционально-градиентных сплошных цилиндрах* // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2018. – Т.62-63. – №1-2. – С.16-34.
22. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А., Бобакова Р.В. *Распространение нормальных волн в функционально-градиентных трансверсально-изотропных двухслойных цилиндрах* // Вестник ДонНУ. Серия А: Естественные науки. – 2019. – №3-4. – С.80-87.
23. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А. *Волны деформаций в функционально-градиентных цилиндрах кольцевого сечения* // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2019. – Т.66. – №1. – С.31-53.
24. Моисеенко И.А., Моисеенко В.А., Иванив А.О. *Осесимметричные нормальные упругие волны в кусочно-неоднородных и функционально-градиентных цилиндрических волноводах кольцевого поперечного сечения* // Журнал теоретической и прикладной механики. – 2021. – Т.75. – №2. – С.30-50.
25. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М: Наука, 1966. – 576 с.
26. Елагин А.В., Моисеенко И.А. *Генерирование нелинейных вторых гармоник нормальных волн кручения в протяженном цилиндре при разнотипных краевых условиях* // Известия Вузов. Северо-Кавказский регион. Серия А: Естественные науки. – 2013. – №2. – С.29-32.
27. Zagrouba M., Bouhdima M.S. *Investigation of SH wave propagation in piezoelectric plates* // Acta Mechanica. – 2021. – Vol.232. – Pp.3363-3379.
28. Deng L.Y., Cao X.S., Ru Y. *Asymptotic analytical solution of circumferential SH wave in functionally graded cylindrical shell and cylinder* // 15th Symposium on Piezoelectricity, Acoustic Waves and Device Applications (SPAWDA). – 2021. – Pp.16-19.
29. Hu Y., Cao X.S., Niu Y., Ru Y., Shi J. *Asymptotic analytical solution on Lamb waves in functionally graded nano Copper layered wafer* // Applied Sciences. – 2021. – Vol.11. – Pp.4442-4457.
30. Cao X., Jia J., Ru Y., Shi J. *Asymptotic analytical solution for horizontal shear waves in a piezoelectric elliptic cylindrical shell* // Acta Mechahica. – 2015. – Vol.226. – Pp.3387-3400.
31. Ludwig W., Lengeler B. *Surface waves and rotational invariance in lattice theory* // Solid State Communications. – 1964. – Vol.2. – No.3. – Pp.83-86.

32. Maradudin A. *Edge modes* // Japanese Journal of Applied Physics. Suppl. 2. – 1974. – Part 2. – Pp.871-878.
33. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions* // Journal of Applied Physics. – 1978. – Vol.49. – Pp.475-479.
34. Thompson C., Weiss B. L. *Characteristics of surface acoustic wave propagation in IIIV semiconductor quantum well structures* // AIP Journal of Physics. – 1995. – Vol.78. – Pp.5002-5007.
35. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Conceptual advantages and limitations of the Laguerre polynomial approach to analyze surface acoustic waves in semi-infinite substrates and multilayeres structures* // Journal of Applied Physics. – 1998. – Vol.83. – Pp.28-34.
36. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // Journal of Applied Physics. – 1999. – Vol.85. – 3419.
37. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach* // NDT&E International. – 2005. – Vol.38. – Pp.344-353.
38. Maradudin A.A., Wallis R.F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals* // Physic Rev. B. – 1972. – Vol.6. – Pp.1106-1111.
39. Sharon T.M., Maradudin A.A., Cunningham S.L. *Vibrational modes on a rectangular ridge* // Letters to Applied Engineering Sciences. – 1974. – Vol.2. – Pp.161-174.
40. Maradudin A., Subbaswamy K.R. *Edge localized vibration modes on a rectangular ridge* // Journal of Applied Physics. – 1977. – Vol.48. – Pp.3410-3414.
41. Gubernatis J. E., Maradudin A. A. *A Laguerre series approach to the calculation of wave properties for surfaces of inhomogeneous elastic materials* // Wave Motion. – 1987. – Vol.9. – No.2. – Pp.111-121.
42. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunnungham S.L. *Vibrational edge modes for wedges with arbitrary interior angles* // Physical Review B. – 1973. – Vol.16. – Pp.4224-4233.
43. Elmaimouni L., Lefebvre J. E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length* // Wave Motion. – 2005. – Vol.42. – Pp.177-189.
44. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.99. – Pp.57-80.
45. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach* // Composite Structures. – 2021. – Vol.256. – 112997.
46. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section* // Applied Mathematical Modelling. – 2018. – Vol.63. – Pp.288-302.
47. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate* // Advances in Mechanical Engineering. – 2018. – Vol.10. – No.12. – Pp.1-11.
48. Zhang X. M., Li Z. H., Yu J. G. *Evanescent waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment* // Meccanica. – 2018. – Vol.53. – Pp.2145-2160.
49. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites* // Acta Mechanica. – 2019. – Vol.230. – Pp.1219-1231.

50. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells* // Advances in Mechanical Engineering. – 2019. – Vol.11. – No.4. – Pp.1-15.
51. Yu J. G., Lefebvre J. E., Xu W. J., Benmeddour F., Zhang X. M. *Propagating and non- propagating waves in infinite plates and rectangular cross-section plates: orthogonal polynomial approach* // Acta Mechanica. – 2017. – Vol.228. – Pp.3755-3769.
52. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder* // Applied Mathematical Modelling. – 2021. – Vol.89. – Pp.299-313.
53. Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based on the modified couple stress theory* // Composite Structures. – 2021.– Vol.265. – 113733.
54. Rabotovao P.M., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Raherison A., Elmaimouni L., Gruba T., Yu J.G. *Modeling of high contrast partially electroded resonators by means of a polynomial approach* // Journal of Applied Physics. – 2013. – Vol.114. – 124502.
55. Yu J.G., Lefebvre J.E., Guo Y.Q. *Free-ultrasonic waves in multilayered piezoelectric plates: an improvement of the Legendre polynomial approach for multilayered structures with very dissimilar materials* // Composites: Part B. – 2013. – Vol.51. – Pp.260-269.
56. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method* // Composite Structures. – 2013. – Vol.95. – Pp.419-429.
57. Yu J., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach* // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2014. – Vol.27. – No.5. – Pp.542-550.
58. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method* // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol.104. – 02015.
59. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Vol.412. – Pp.372-388.
60. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in functionally graded plates by state-vector formalism and the Legendre polynomial method* // Ultrasonics. – 2019. – Vol.99. – 105953.
61. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials* // Composite Structures. – 2019. – Vol.228. – 111319.
62. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector formalism and Legendre polynomial hybrid formalism* // Composite Structures. – 2021. – Vol.255. – 112950.
63. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T. *Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices* // AIP Advances. – 2016. – No.6. – 065307.

64. Raherison A., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Gryba T. *Two-dimensional Legendre polynomial modeling of composite bulk acoustic wave resonators* // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol.108. – 104904.
65. Othmani C., Njeh A., Ben Ghozlen M. H. *Influences of anisotropic fiber-reinforced composite media properties on fundamental guided wave mode behavior: a Legendre polynomial approach* // Aerospace Science and Technology. – 2018. – Vol.78. – Pp.377-386.
66. Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E. *Guided waves in functionally graded viscoelastic plates* // Composite Structures. – 2011. – Vol.93. – Pp.2671-2677.
67. Lefebvre J. E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extension of the Legendre polynomial approach* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2001. – Vol.48. – Pp.1332-1340.
68. Naciri I., Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Gryba T. *Propagation of acoustic wave's motion in orthotropic cylinders of infinite length* // Maghrib Journal of Pure and Applied Science. – 2016. – Vol.2. – No.1. – Pp.32-38.
69. Yu J.G., Wu B., Chen G. *Wave propagation in functionally graded piezoelectric hollow cylinders* // Archives of Applied Mechanics. – 2009. – Vol.79. – Pp.807-824.
70. Othmani C., Takali F., Njeh A., Ben Ghozlen M. H. *Study of the influence of semiconductor material parameters on acoustic wave propagation modes in GaSb/AlSb bi-layered structures by Legendre polynomial method* // Physica B. – 2016. – Vol.496. – Pp.82-91.
71. Othmani C., Takali F., Njeh A., Ben Ghozlen M. H. *Numerical simulation of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach* // Optik. – 2017. – Vol.142. – Pp.401-411.
72. Othmani C., Zhang H. *Lamb wave propagation in anisotropic multi-layered piezoelectric laminates made of PVDF-O° with initial stresses* // Composite Structures. – 2020. – Vol.240. – 112085.
73. Othmani C., Zhang H., Lu C. *Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial approach* // Applied Mathematical Modelling. – 2020. – Vol.78. – Pp.148-168.
74. Yu J.G., Ma Q. *Circumferential wave in functionally graded piezoelectric cylindrical curved plates* // Acta Mechanica. – 2008. – Vol.198. – Pp.171-190.
75. Yu J., Lefebvre J.E., Guo Y., Elmaimouni L. *Wave propagation in the circumferential direction of general multilayered piezoelectric cylindrical plates* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2012. Vol.59. – No.11. – Pp.2498-2508.
76. Yu J.G., Wu B., Huo H., He C.F. *Characteristics of guided waves in anisotropic spherical curved plates* // Wave Motion. – 2007. – Vol.44. – Pp.271-281.
77. Yu J.G., Lefebvre J. E., Elmaimouni L. *Toroidal wave in multilayered spherical curved plates* // Journal of Sound and Vibration. – 2013. – Vol.332. – Pp.2816-2830.
78. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Characteristics of guided waves in graded spherical curved plates* // Int. J. of Solids and Structures. – 2007. – Vol.44. – Pp.3627-3637.
79. Wu B., Yu J.G., He C.F. *Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates* // J. of Sound and Vibration. – 2008. – Vol.317. – Pp.250-264.

80. Othmani Ch., Zhang H., Lü Ch., Wng Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review* // Composite Structures. – 2022. – Vol.286. – 115245.
81. Yu J.G., Ma Q., Su S. *Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinders* // Ultrasonics. – 2008. – Vol.48. – No.8. – Pp.664-677.
82. Yu J.G., Zhang X., Xue T. *Generalized thermoelastic waves in functionally graded plates without energy dissipation* // Composite Structures. – 2010. – Vol.93. – Pp.32-39.
83. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Guided thermoelastic wave propagation in layered plates without energy dissipation* // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2011. – Vol.24. – No.2. – Pp.135-143.
84. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Guided thermoelastic waves in functionally graded plates with two relaxation times* // International Journal of Engineering Sciences. – 2010. – Vol.48. – No.12. – Pp.1709-1720.
85. Yu J.G. *Viscoelastic shear horizontal wave in graded and layered plates* // Int. J. of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – Nos.16-17. – Pp.2361-2372.
86. Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method* // Composite Structures. – 2016. – Vol.153. – Pp.557-568.
87. Li Z., Yu J., Zhang X., Elmaimouni L. *Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method* // Mech. Advanced Materials and Structures. – 2016. – Vol.153. – Pp.557-568.
88. Dahmen S., Glorieux C. *Optimization of coupled Lamb wave parameters for defect detection in anisotropic composite three-layer with Kelvin-Voigt viscoelasticity using Legendre polynomial method* // Composite Structures. – 2021. – Vol.272. – 114158.
89. Othmani C., Dahmen S., Njeh A., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of guided waves propagation in orthotropic viscoelastic carbon-epoxy plate by Legendre polynomial method* // Mechanics Research Communications. – 2016. – Vol.74. – Pp.27-33.
90. Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method* // Composite Structures. – 2016. – Vol.153. – Pp.557-568.
91. Zhang X., Yu J., Zhang M., Zhang D. *Guided waves in functionally graded rods with rectangular cross-section under initial stress* // CMC. – 2015. – Vol.48. – No.3. – Pp.163-179.
92. Liu H., Liu S., Chen X., Lyu Y., Liu Z. *Coupled Lamb waves propagation along the direction of non-principal symmetry axes in pre-stressed anisotropic composite lamina* // Wave Motion. – 2020. – Vol.97. – 102591.
93. Raherison A., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Legendre polynomial modelling in of composite acoustic bulk wave resonators* // Journal of Applied Physics. – 2008. – Vol.104. – 014508.
94. Raherison A., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Gryba T. *Two-dimensional Legendre polynomial modeling of composite bulk acoustic wave resonators* // Journal of Applied Physics. – 2010. – Vol.108. – 104904.

95. Yu J.G., Yang X.D., Lefebvre J.E., Zhang X. *Wave propagation in graded rings with rectangular cross-sections* // Wave Motion. – 2015. – Vol.52. – Pp.160-170.
96. Yu J.G., Yang X.D., Lefebvre J.E. *Wave propagation in layered piezoelectric rings with rectangular cross-sections* // Journal of Mechanics of Materials and Structures. – 2016. – Vol.11. – No.3. – Pp.245-258.
97. Yu J.G., Lefebvre J.E., Zhang C., Ratolojanahary F.E. *Dispersion curves of 2D rods with complex cross-sections: double orthogonal polynomial approach* // Meccanica. – 2015. – Vol.50. – Pp.109-115.
98. Naciri J., Rguiti A., Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Yu J.G., Belkassmi Y., El Mousati A. *Numerical Modelling of vibration characteristics of a partially metallized micro-electromechanical system with resonator DISC* // Acta Acoustica unified with Acoustica. – 2019. – Vol.105. – No.6. – Pp.1164-1172.
99. Falimiaramanana D.J., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Elmaimouni L., Rguiti M. *2-D modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2020. – Vol.67. – No.8. – Pp.1701-1714.
100. Yu J., Wu B. *The inverse of material properties of functionally graded pipes using the dispersion of guided waves and an artificial neural network* // NDT&E International. – 2009. – Vol.42. – Pp.452-458.
101. Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L. *Finite element prediction of wave motion in structural waveguides* // Journal of Acoustical Society of America. – 2005. – Vol.117. – No.5. – Pp.2835-2843.
102. Sorohan S., Constantin N., Gavan M., Anghel V. *Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes* // Ultrasonics. – 2011. – Vol.51. – Pp.503-515.
103. Loveday D.W. *Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads* // Ultrasonics. – 2009. – Vol.49. – Pp.298-300.
104. Nelson R.B., Dong S.B., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders* // Journal of Sound and Vibrations. – 1971. – Vol.18. – No.3. – Pp.429-444.
105. Dong S.B., Nelson R.B. *On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates* // J. of Applied Mechanics. – 1972. – Vol.39. – No.3. – Pp. 429-444.
106. Gavric R. *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique* // Journal of Sound and Vibration. – 1995. – Vol.185. – No.3. – Pp.531-543.
107. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section* // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol.295. – Pp.685-707.
108. Marzani A. *Time-transient response for ultrasonic guided waves in damped cylinders* // Int. J. of Solids and Structures. – 2008. – Vol.45. – No.25-26. – Pp.6347-6368.
109. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lenza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides* // Journal of Sound and Vibration. – 2008. – Vol.318. – No.3. – Pp.488-505.
110. Joseph R., Li L., Haider M.F., Giurgiutiu V. *Hybrid SAFE-GMM approach for predictive modeling of guided wave propagation in layered media* // Engineering Structures. – 2019. – Vol.193. – Pp.194-206.

111. Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Characteristics of waves in a functionally graded cylinder* // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2002. – Vol.53. – Pp.653-676.
112. Duan W., Gan T.H. *Investigation of guided wave properties of anisotropic composite laminates using a semi-analytical finite element method* // Composites Part B. – 2019. – Vol.173. – 106898.
113. Datta S., Shah A., Bratton R., Chakraborthy C. *Wave propagation in laminated composite plates* // Journal of the Acoustical Society of America. – 1988. – Vol.83. – No.6. – Pp.2020-2026.
114. Karunasena W., Shah A., Datta S. *Wave propagation in a multilayered laminated cross-ply composite plate* // Trans. of the ASME. – 1991. – Vol.58. – Pp.1028-1032.
115. Karunasena W., Liew K.M., Kitipornchai S. *Reflection of plate modes at the fixed edge of a composite plate* // Journal of the Acoustical Society of America. – 1995. – Vol.98. – No.1. – Pp.644-651.
116. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli* // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2011. – Vol.25. – Pp.2241-2256.
117. Zuo P., Yu X., Fan Z. *Acoustoelastic guided waves in waveguides with arbitrary prestress* // Journal of Sound and Vibration. – 2020. – Vol.469. – 115113.
118. Ahmad Z.A.B., Gabbert U. *Simulation of Lamb wave reflections at plate edges using the semi-analytical finite element method* // Ultrasonics. – 2012. – Vol.52. – Pp.815-820.
119. Peddeti K., Santhanam S. *Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis* // Journal of the Acoustical Society of America. – 2018. – Vol.143. – No.2. – Pp.8292-840.
120. Astaneh A.V., Guddati M.N. *Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides* // Composites: Part B. – 2017. – Vol.130. – Pp.200-216.
121. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек.* – М: Наука, 1982. – 282 с.
122. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач.* – Львов: Вища школа, 1978. – 192 с.
123. Хома И.Ю. *Обобщенная теория анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1986. – 172 с.
124. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. *Асимптотический анализ и уточнение теорий пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1990. – №6. – С.124-138.
125. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces* // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol.53. – No.1. – Pp.31-44.
126. Carrera E., Brischetto S. *Importance of higher order modes and refined theories in free vibration analysis of composite plates* // Journal of Applied Mathematics. – 2010. – Vol.77. – 011013.
127. Кильчевский Н.А. *Основы аналитической механики оболочек*. – Киев: Изд. АН УССР, 1963. – 355 с.
128. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional analysis of metal-ceramics shells by the method of sampling surfaces* // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol.51. – No.4. – Pp.455-464.

129. Chapelle D. *3D shell mathematical models and finite elements: From mathematical and physical insight to application examples* / In: Shell Structures: Theory and Applications. Vol.3. – Leiden: Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013. – Pp.21-25.
130. Вильде М.В. *Кромочные волны высшего порядка в толстой пластине* // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2060-2062.
131. Вильде М.В. *Исследование явления краевого резонанса в пластинах на основе трехмерных уравнений теории упругости* // Механика деформируемых сред. – 2010. – №16. – С.7-14.
132. Wilde M.V., Golub M.B., Eremin A.A. *Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate* // Journal of Sound and Vibration. – 2019. – Vol.441. – Pp.26-49.
133. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д. *Динамический погранслой в задачах колебаний оболочек* // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1988. – №4. – С.152-162.
134. Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Антисимметричные кромочные волны высшего порядка в пластинах* // Известия Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т.13. – №1-1. – С.50-56.
135. Ардазишвили Р.В., Вильде М.В., Коссович Л.Ю. *Трехмерные фундаментальные кромочные волны в тонкой оболочке* // Вестник Чувашского государственного педагогического ун-та им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2015. – №4 (26). – С.109-124.
136. Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Коссович Л.Ю. *Краевые и резонансные явления в упругих телах.* – М: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 210 с.
137. Вильде М.В., Коссович Л.Ю., Шевцова Ю.В. *Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая многослойной тонкой оболочки* // Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т.12. – №2. – С.56-64.
138. Векуа И.Н. *Об одном методе расчета призматических оболочек* // Труды Тбилисского Математического института. – 1955. – Т.21. – С.191-259.
139. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек* // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №5. – С.37-42.
140. Амосов А.А. *Приближенная трехмерная теория нетонких упругих оболочек и плит* / Диссертация на соискание ученой степени доктора техн. наук. – Ташкент: Ташкентский политехнический ин-т им. Р.А. Беруни, 1989.
141. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models* // Journal of Elasticity. – 1995. – Vol.38. – Pp.1-40.
142. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *An approximate high-order theory of thick anisotropic shells* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2003. – Vol.1. – No.5. – Pp.28-38.
143. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
144. Аннин Б.Д., Волчков Ю.М. *Неклассические модели в теории пластин и оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – Т.57. – №.5. – С.5-14.

145. Zozulya V.V. *A high oirder theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories* // Journal of Engineering. – 2013. – 590480.
146. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2015. – Vol.103. – Pp.40-54.
147. Жаворонок С.И. *Модели высшего порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №4. – С.561-571.
148. Никабадзе М.У. *Вариант системы уравнений тонких тел* // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2006. – №1. – С.30-34.
149. Жаворонок С.И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156.
150. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
151. Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Куликова Н.А. *Идентификация вязкоупругих характеристик композитных материалов по результатам экспериментально-теоретического анализа динамического поведения полусферических оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т.47. – №3(276). – С.126-133.
152. Абросимов Н.А., Куликова Н.А. *Определение параметров моделей вязкоупругого деформирования композитных цилиндрических оболочек при ударном нагружении* // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Т.71. – С.61-70.
153. Абросимов Н.А., Куликова Н.А. *Определение параметров моделей нелинейного деформирования изотропных и композитных материалов по результатам расчетно-экспериментального анализа импульсного нагружения круглых пластин* // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т.52. – №1(306). – С.163-172.
154. Абросимов Н.А., Новосельцева Н.А. *Идентификация параметров моделей нелинейного деформирования изотропных и композитных материалов на основе расчетно-экспериментального анализа динамического поведения металлопластиковых цилиндрических оболочек* // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56. – №6. – С.5-13.
155. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. *Аналитическая механика континуальных систем.* – Киев: Наукова Думка, 1979.
156. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol.94. – No.1-2. – Pp.164-184.
157. Babuska I., Melenk J.M. *The Partition of Unity Method* // Numerical Methods in Engineering. – 1998. – Vol.40. – No.4. – Pp.727-758.
158. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N. Vekua type* // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2021. – Vol.28. – No.5. – Pp.506-515.
159. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* //

Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
160. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications* // In: Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference. – 2013. – Vol.3. – Pp.341-344.
161. Zhavoronok S.I. *On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type* // Procedia Engnieering. – 2015. – Vol.111. – Pp.888-895.
162. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides* // Archives of Mechanics. – 2020. – Vol.72. – No.1. – Pp.1-13.
163. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems* // International Journal of Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.
164. Жаворонок С.И. *Применение расширенной теории пластин N-го порядка к решению задачи о дисперсии волн в градиентно-неоднородном слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.240-258.
165. Жаворонок С.И. *О применении различных уравнений трехмерной теории пластин N-го порядка в задачах о дисперсии нормальных волн в упругом слое* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.595-613.
166. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories* // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal. – 2020. – Vol.11. – No.2. – Pp.159-185.
167. Zoltowski M.D. *Solving the generalized eigenvalue problem with singular forms* // Proceedings of the IEEE. – 1987. – Vol.75. – No.11. – Pp.1546-1548.
168. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Vol.16. – No.4-2. – Pp.693-701.
169. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
170. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints.* – Stanford University, Technical Report CS142, 1969.
171. Амосов А.А., Жаворонок С.И. *К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т.3. – №1. – С.69-80.
172. Амосов А.А., Князев А.А., Жаворонок С.И. *О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №1. – С.60-72.
173. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах.* – Киев: Наукова думка, 1981.
174. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений*

волновых чисел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.

175. Kuznetsova E.L., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *On the equations of the analytical dynamics of the quasi-3D plate theory of I.N. Vekua type and some their solutions* // Journal of Vibroengineering. – 2018. – Vol.20. – No.2. – Pp.1108-1117.
176. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.
177. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О приложении различных вариантов теории оболочек N-го порядка к некоторым задачам о прогрессивных волнах* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2014. – №11-1. – С.255-266.
178. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Курбатов А.С. *О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.
179. Zhavoronok S.I. *The extended shell theory of Vekua-Amosov type and the low-order plate models* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol.12. – No.4. – Pp.27-35.
180. Zhavoronok S.I. *A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems* // Shell Structures: Theory and Applications. – Proceedings of the 11th SSTA 2017 Conference. – 2018. – Vol.4. – Pp.189-192.
181. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zheng C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements* // J. of Computational Physics. – 2014. – Vol.258. – Pp.381-404.
182. Li C.L., Han Q., Liu Y.J., Xiao D.L. *Guided wave propagation in rotating functionally graded annular plates* // Acta Mechanica. – 2017. – Vol.228. – Pp.1083-1095.
183. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Chelmsford: Courier Corporation. – 2001.
184. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plane structures using the Scaled Boundary Finite Element Method* // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – Vol.331. – Pp.2543-2557.
185. Gravenkamp H., Bause F., Song C. *On the computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method* // Computers and Structures. – 2014. – Vol.131. – Pp.46-55.
186. Gravenkamp H., Birk C., Song C. *The computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguide using the Scaled Boundary Finite Element Method* // Computers and Structures. – 2014. – Vol.131. – Pp.1373-1385.
187. Gravenkamp H., Birk C., Song C. *Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the Scaled Boundary Finite Element Method* // J. of Computational Physics. – 2015. – Vol.295. – Pp.438-455.

188. Gravenkamp H., Natarajan S., Dornisch W. *On the use of NURBS-based discretizations in the Scaled Boundary Finite Element Method fro wave propagation problems* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2017. – Vol.315. – Pp.867-880.
189. Gravenkamp H. *Efficient simulation of elastic guided waves interacting with hotches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures* // Ultrasonics. – 2018. – Vol.82. – Pp.101-113.
190. Zhavoronok S.I. *On the Hamiltonian formulations of shell and plate theories of Vekua-Amosov type* // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Vol.13. – No.4. – Pp.82-95.

REFERENCES

1. Zhavoronok S.I. *Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: metody resheniya (obzor).* Chast' I *[Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (A review). Part I]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2021, Vol.27, No.2, Pp.227-260.
2. Shul'ga N.A. *Rasprostranenie osesimmetrichnyh uprugih voln v ortotropnom polom cilindre [Propagation of axisymmetric elastic waves in an orthotropic hollow cylinder]*. International Applied Mechanics, 1974, Vol.10, No.9, Pp.14-18.
3. Cao X., Jin F., Jeon J., Lu T.J. *Propagation of Love waves in a functionally graded piezoelectric material (FPGM) layered composite system*. Int. J. of Solids and Structures, 2009, Vol.46, Pp.4123-4132.
4. Cao X., Jin F., Wang Z.K., Lu T.J. *Bleustein-Gulyaev waves in a functionally graded piezoelectric material layered structure*. Science in China, Series G: Physics, Mechanics, Astronomy, 2009, Vol.52, No.4, Pp.613-625.
5. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique*. NDT&E International, 2011, Vol.44, Pp.84-92.
6. Bouhdima M.S., Zagrouba M., Ben Ghozlen M.H. *The power series technique and detection of zero-group velocity Lamb waves in a functionally graded material plate*. Canadian Journal of Physics, 2012, Vol.90, No.2, Pp.159-164.
7. Cao X., Jiang X., Ru Y., Shi J. *Asymptotic solution and numerical simulation of Lamb waves in functionally graded viscoelastic film.* Materials, 2019, Vol.12, Pp.268-284.
8. Han X., Liu G.R., Lam K.Y., Ohyoshi T. *A quadratic layer element for analyzing stress waves in FGMs and its application in material characterization*. J. Sound Vib., 2000, Vol.236, Pp.307-321.
9. Han X., Liu G.R. *Elastic waves in a functionally graded piezoelectric cylinder.* Smart Materials and Structures, 2003, Vol.12, Pp.962-971.
10. Lowe M.J.S. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Contr., 1995, Vol.42, Pp.525-542.
11. Cao X., Jin F., Kishimoto K. *Transverse shear wave in a functionally graded material infinite half-space*. Phil. Magazine Lett., 2012, Vol.92, No.5, Pp.245-253.
12. Jiang H., Cao X. *Lamb waves in a functionally graded Kelvin viscoelastic plate.* Yuingyong Lixue Xuebao (Chinese J.Appl.Mech.), 2018, Vol.35, No.4, Pp.715-721.
13. Bouhdima M.S., Zagrouba M., Ben Ghozlen M.H. *The power series techniique and detection of zero-group velocities Lamb waves in a functionally graded material*

plate. Canadian J. of Physics, 2012, Vol.90, No.2, Pp.107-118.
14. Zagrouba M., Bouhdima M.S. *Numerical study of S1 zero group velocity Lamb modes for nonlinear functionally graded materials.* Canadian J. of Physics, 2016, Vol.94, No.11, Pp.1189-1194.
15. Moiseyenko I.A., Storozhev V.I. *Spektry neosesimmetrichnyh normal’nyh uprugih voln ortotropnyh cilindrah s funkcional’no-gradientnoj neodnorodnost’yu [Spectra of non-axisymmetric normal elastic waves in orthotropic cylinders with functional gradient inhomogeneity]*. Mekhanika tverdogo tela, 2015, No.45, Pp112-124.
16. Moiseyenko I.A., Volchkov V.V. *Rasprostranenie normal’nykh voln v transversal’no-izotropnom radial’no-neodnorodnom polom tsilindre s sektornym vyrezom [Propagation of normal waves in transversely isotropic radially inhomogeneous hollow cylinder with a sector cut]*. Vestnik DonNU. Seriya A: Estestvennye nauki, 2016, No.4, Pp.35-49.
17. Moiseyenko I.A., Priymenko S.A., Shaldyrvan V.A. *Neosesimmetrichnye normal'nye uprugie volny v funktsional'no-gradientnykh ortotropnykh polykh tsilindrakh [Non-axisymmetric normal elastic waves in functionally graded orthotropic hollow cylinders]*. Zhurnal teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki, 2017, Vol.58, No.1, Pp.27-41.
18. Moiseyenko I.A. *Normal’nye volny vdol’ ortotropnykh funktsional’no-gradientnykh tsilindrov sektornogo poperechnogo secheniya [Normal waves along the orthotropic functionally gradient cylinders of the sectoral cross section]*. Vestnik DonNU. Seriya A: Estestvennye nauki, 2017, No.4, Pp.41-53.
19. Moiseyenko I.A. *Rasprostranenie normal’nykh voln vdol’ transversal’no-izotropnykh funktsional’no-gradientnykh tsilindrov [Propagation of normal waves along transversely isotropic functionally graded cylinders]*. Vestnik DonNU. Seriya A: Estestvennye nauki, 2018, No.1, Pp.37-54.
20. Moiseyenko I.A., Kisel E.S. *Rasprostranenie voln v anizotropnykh neodnorodnykh tsilindrakh sektornogo secheniya so svobodnoj ili zhestko zakreplennoj granichnoj poverkhnost’yu [Propagation of waves in anisotropic inhomogeneous cylinders of sector cross section with a free or rigidly fixed boundary surface]*. Vestnik DonNU. Seriya A: Estestvennye nauki, 2018, No.2, Pp.36-53.
21. Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A *Normal’nye volny v funktsional’no-gradientnykh sploshnykh tsilindrakh [Normal waves in functionally graded solid cylinders]*. Zhurnal teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki, 2018, Vol.62-63, Nos.1-2, Pp.16-34.
22. Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A., Bobakova R.V. *Rasprostranenie normal’nykh voln v funktsional’no-gradientnykh transversal’no-izotropnykh dvukhslojnykh tsilindrakh [Propagation of normal waves in functionally gradient transversally isotropic two-layer cylinders]*. Vestnik DonNU. Seriya A: Estestvennye nauki, 2019, Nos.3-4, Pp.80-87.
23. Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A. *Volny deformatsij v funktsional’no-gradientnykh tsilindrakh kol’tsevogo secheniya [Deformation waves in functionally gradient cylinders of annular section]*. Zhurnal teoreticheskoj i prikladnoj mekhaniki, 2019, Vol.66, No.1, Pp.31-53.
24. Moiseyenko I.A., Moiseyenko V.A., Ivaniv A.O. *Osesimmetrichnye normal’nye uprugie volny v kusochno-neodnorodnykh i funktsional’no-gradientnykh tsilindricheskikh volnovodakh kol’tsevogo poperechnogo secheniya [Axisymmetric normal elastic waves in piecewise inhomogeneous and functionally inhomogeneous cylindrical waveguides of annular cross section]*. Zhurnal teoreticheskoj

i prikladnoj mekhaniki, 2021, Vol.75, No.2, Pp.30-50.
25. Gantmaher F.R. *Teoriya matrits [Theory of Matrices]*. Moskva, Nauka, 1966, 576 p.
26. Elagin A.V., Moiseenko I.A. *Generirovanie nelinejnykh vtorykh garmonik normal’nykh voln krucheniya v protyazhennom tsilindre pri raznotipnykh kraevykh usloviyakh [Generation of nonlinear second harmonics of normal waves of torsion in the long cylinder with different types of boundary conditions]*. Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskij region. Seriya A: Estestvennye nauki, 2013, No.2, Pp.29-32.
27. Zagrouba M., Bouhdima M.S. *Investigation of SH wave propagation in piezoelectric plates*, Acta Mechanica, 2021, Vol.232, Pp.3363-3379.
28. Deng L.Y., Cao X.S., Ru Y. *Asymptotic analytical solution of circumferential SH wave in functionally graded cylindrical shell and cylinder*. 15th Symp. on Piezoelectr., Acoustic Waves and Device Appl. (SPAWDA), 2021, Pp.16-19.
29. Hu Y., Cao X.S., Niu Y., Ru Y., Shi J. *Asymptotic analytical solution on Lamb waves in functionally graded nano Copper layered wafer*. Applied Sciences, 2021, Vol.11, Pp.4442-4457.
30. Cao X., Jia J., Ru Y., Shi J. *Asymptotic analytical solution for horizontal shear waves in a piezoelectric elliptic cylindrical shell.* Acta Mechahica, 2015, Vol.226, Pp.3387-3400.
31. Ludwig W., Lengeler B. *Surface waves and rotational invariance in lattice theory*. Solid State Communications, 1964, Vol.2, No.3, Pp.83-86.
32. Maradudin A. *Edge modes*. Japanese Journal of Applied Physics. Suppl. 2, 1974, Part 2., Pp.871-878.
33. Datta S., Hunsinger B.J. *Analysis of surface waves using orthogonal functions.* J. Appl. Phys., 1978, Vol.49, Pp.475-479.
34. Thompson C., Weiss B.L. *Characteristics of surface acoustic wave propagation in IIIV semiconductor quantum well structures*. AIP J. of Physics, 1995, Vol.78, Pp.5002-5007.
35. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Conceptual advantages and limitations of the Laguerre polynomial approach to analyze surface acoustic waves in semi-infinite substrates and multilayeres structures*. J. of Appl. Physics, 1998, Vol.83, Pp.28-34.
36. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates*. J. of Appl. Physics, 1999, Vol.85, 3419.
37. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach*. NDT&E Int., 2005, Vol.38, Pp.344-353.
38. Maradudin A.A., Wallis R.F., Mills D.L., Ballard R.L. *Vibrational edge modes in finite crystals.* Phys. Rev. B, 1972, Vol.6, Pp.1106-1111.
39. Sharon T.M., Maradudin A.A., Cunningham S.L. *Vibrational modes on a rectangular ridge*. Lett. to Appl. Engineering Sciences, 1974, Vol.2, Pp.161-174.
40. Maradudin A., Subbaswamy K.R. *Edge localized vibration modes on a rectangular ridge*. J. of Applied Physics, 1977, Vol.48, Pp.3410-3414.
41. Gubernatis J.E., Maradudin A.A. *A Laguerre series approach to the calculation of wave properties for surfaces of inhomogeneous elastic materials*. Wave Motion, 1987, Vol.9, No.2, Pp.111-121.
42. Moss S.L., Maradudin A.A., Cunnungham S.L. *Vibrational edge modes for wedges with arbitrary interior angles*. Physical Review B, 1973, Vol.16, Pp.4224-4233.
43. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *A polynomial approach to the analysis of guided waves in anisotropic cylinders of infinite length*. Wave Motion,

2005, Vol.42, Pp.177-189.
44. Wang X., Li F., Zhang B., Yu J., Zhang X. *Wave propagation in thermoelastic inhomogeneous hollow cylinders by analytical integration orthogonal polynomial approach*. Appl. Mathematical Modelling, 2021, Vol.99, Pp.57-80.
45. Wang X., Li F., Zhang X., Yu J., Qiao H. *Thermoelastic guided wave in fractional order functionally graded plates: An analytical integration Legendre polynomial approach*. Composite Struct., 2021, Vol.256, 112997.
46. Zhang B., Yu J.G., Zhang X.M., Ming P.M. *Complex guided waves in functionally graded piezoelectric cylindrical structures with sectorial cross-section*. Appl. Mathematical Modelling, 2018, Vol.63, Pp.288-302.
47. Zhang X., Li Z., Yu J. *Complex dispersion solutions for guided waves and properties of non-propagating waves in a piezoelectric spherical plate.* Advances in Mechanical Engineering, 2018, Vol.10, No.12, Pp.1-11.
48. Zhang X.M., Li Z.H., Yu J.G. *Evanescent waves in FGM spherical curved plates: an analytical treatment*. Meccanica, 2018, Vol.53, Pp.2145-2160.
49. Zhang X., Li Z., Yu J., Ming P. *Guided evanescent waves in spherically curved plates composed of fiber reinforced composites*. Acta Mechanica, 2019, Vol.230, Pp.1219-1231.
50. Zhang X., Li Z., Yu J., Zhang B. *Properties of circumferential non-propagating waves in functionally graded piezoelectric cylindrical shells*. Advances in Mechanical Engineering, 2019, Vol.11, No.4, Pp.1-15.
51. Yu J.G., Lefebvre J.E., Xu W.J., Benmeddour F., Zhang X.M. *Propagating and non-propagating waves in infinite plates and rectangular cross-section plates: orthogonal polynomial approach*. Acta Mechanica, 2017, Vol.228, Pp.3755-3769.
52. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. *The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder*. Applied Mathematical Modelling, 2021, Vol.89, Pp.299-313.
53. Liu C., Yu J., Zhang B., Zhang X., Elmaimouni L. *Analysis of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric small-scale plate based on the modified couple stress theory*. Composite Structures, 2021, Vol.265, 113733.
54. Rabotovao P.M., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Raherison A., Elmaimouni L., Gruba T., Yu J.G. *Modeling of high contrast partially electroded resonators by means of a polynomial approach.* J. of Applied Physics, 2013, Vol.114, 124502.
55. Yu J.G., Lefebvre J.E., Guo Y.Q. *Free-ultrasonic waves in multilayered piezoelectric plates: an improvement of the Legendre polynomial approach for multilayered structures with very dissimilar materials*. Composites: Part B., 2013, Vol.51, Pp.260-269.
56. Yu J.G., Lefebvre J.E. *Guided waves in multilayered hollow cylinders: the improved orthogonal polynomial method*. Composite Struct., 2013, Vol.95, Pp.419-429.
57. Yu J., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Guided waves in multilayered plates: an improved orthogonal polynomial approach*. Acta Mechanica Solida Sinica, 2014, Vol.27, No.5, Pp.542-550.
58. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *Modelling guided waves in anisotropic plates using the Legendre polynomial method.* MATEC Web of Conferences, 2017, Vol.104, 02015.
59. Zheng M., He C., Lu Y., Wu B. *State-vector formalism and the Legendre polynomial solution for modelling guided waves in anisotropic plates*. J. Sound and Vibration, 2018, Vol.412, Pp.372-388.

60. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in functionally graded plates by state-vector formalism and the Legendre polynomial method*. Ultrasonics, 2019, Vol.99, 105953.
61. Gao J., Lyu Y., Zheng M., Liu M., Liu H., Wu B., He C. *Modeling guided wave propagation in multi-layered anisotropic composite laminates by state-vector formalism and the Legendre polynomials*. Composite Struct., 2019, Vol.228, 111319.
62. Zheng M., Ma H., Lyu Y., Lu C., He C. *Derivation of circumferential guided waves equations for a multilayered laminate composite hollow cylinder by state-vector formalism and Legendre polynomial hybrid formalism*. Composite Struct., 2021, Vol.255, 112950.
63. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T. *Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices*. AIP Advances, 2016, No.6, 065307.
64. Raherison A., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Gryba T. *Two-dimensional Legendre polynomial modeling of composite bulk acoustic wave resonators*. J. of Applied Physics, 2010, Vol.108, 104904.
65. Othmani C., Njeh A., Ben Ghozlen M.H. *Influences of anisotropic fiber-reinforced composite media properties on fundamental guided wave mode behavior: a Legendre polynomial approach*. Aerospace Sci. Techn., 2018, Vol.78, Pp.377-386.
66. Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E. *Guided waves in functionally graded viscoelastic plates*. Composite Struct., 2011, Vol.93, Pp.2671-2677.
67. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T., Sadaune V. *Acoustic wave propagation in continuous functionally graded plates: an extention of the Legendre polynomial approach*. IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectr. Freq. Control, 2001, Vol.48, Pp.1332-1340.
68. Naciri I., Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Gryba T. *Propagation of acoustic wave's motion in orthotropic cylinders of infinite length*. Maghrib Journal of Pure and Applied Science, 2016, Vol.2, No.1, Pp.32-38.
69. Yu J.G., Wu B., Chen G. *Wave propagation in functionally graded piezoelectric hollow cylinders*. Archives of Applied Mechanics, 2009, Vol.79, Pp.807-824.
70. Othmani C., Takali F., Njeh A., Ben Ghozlen M.H. *Study of the influence of semiconductor material parameters on acoustic wave propagation modes in GaSb/AlSb bi-layered structures by Legendre polynomial method*. Physica B, 2016, Vol.496, Pp.82-91.
71. Othmani C., Takali F., Njeh A., Ben Ghozlen M.H. *Numerical simulation of Lamb wave propagation in a functionally graded piezoelectric plate composed of GaAs-AlAs materials using Legendre polynomial approach*. Optik, 2017, Vol.142, Pp.401-411.
72. Othmani C., Zhang H. *Lamb wave propagation in anisotropic multi-layered piezoelectric laminates made of PVDF-O^{o} with initial stresses*. Composite Struct., 2020, Vol.240, 112085.
73. Othmani C., Zhang H., Lu C. *Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial approach*. Applied Mathematical Modelling, 2020, Vol.78, Pp.148-168.
74. Yu J.G., Ma Q. *Circumferential wave in functionally graded piezoelectric cylindrical curved plates*. Acta Mechanica, 2008, Vol.198, Pp.171-190.
75. Yu J., Lefebvre J.E., Guo Y., Elmaimouni L. *Wave propagation in the circumferential direction of general multilayered piezoelectric cylindrical plates*. IEEE Trans.

on Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 2012, Vol.59, No.11, Pp.2498-2508.
76. Yu J.G., Wu B., Huo H., He C.F. *Characteristics of guided waves in anisotropic spherical curved plates*. Wave Motion, 2007, Vol.44, Pp.271-281.
77. Yu J.G., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Toroidal wave in multilayered spherical curved plates*. J. of Sound and Vibration, 2013, Vol.332, Pp.2816-2830.
78. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Characteristics of guided waves in graded spherical curved plates*. Int. J. of Solids and Structures, 2007, Vol.44, Pp.3627-3637.
79. Wu B., Yu J.G., He C.F. *Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic plates*. J. Sound and Vibration, 2008, Vol.317, Pp.250-264.
80. Othmani Ch., Zhang H., Lü Ch., Wng Y.Q., Kamali A.R. *Orthogonal polynomial methods for modeling elastodynamic wave propagation in elastic, piezoelectric and magneto-electro-elastic composites – A review*. Composite Struct., 2022, Vol.286, 115245.
81. Yu J.G., Ma Q., Su S. *Wave propagation in non-homogeneous magneto-electro-elastic hollow cylinders*. Ultrasonics, 2008, Vol.48, No.8, Pp.664-677.
82. Yu J.G., Zhang X., Xue T. *Generalized thermoelastic waves in functionally graded plates without energy dissipation*. Composite Struct., 2010, Vol.93, Pp.32-39.
83. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Guided thermoelastic wave propagation in layered plates without energy dissipation*. Acta Mech. Solida Sinica, 2011, Vol.24, No.2, Pp.135-143.
84. Yu J.G., Wu B., He C.F. *Guided thermoelastic waves in functionally graded plates with two relaxation times*. Int. J. of Engineering Sciences, 2010, Vol.48, No.12, Pp.1709-1720.
85. Yu J.G. *Viscoelastic shear horizontal wave in graded and layered plates*. Int. J. of Solids and Structures, 2011, Vol.48, No.16-17, Pp.2361-2372.
86. Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method*. Composite Struct., 2016, Vol.153, Pp.557-568.
87. Li Z., Yu J., Zhang X., Elmaimouni L. *Guided wave propagation in functionally graded fractional viscoelastic plates: A quadrature-free Legendre polynomial method.* Mech. Advanced Materials and Structures, 2016, Vol.153, Pp.557-568.
88. Dahmen S., Glorieux C. *Optimization of coupled Lamb wave parameters for defect detection in anisotropic composite three-layer with Kelvin-Voigt viscoelasticity using Legendre polynomial method*. Composite Struct., 2021, Vol.272, 114158.
89. Othmani C., Dahmen S., Njeh A., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of guided waves propagation in orthotropic viscoelastic carbon-epoxy plate by Legendre polynomial method*. Mechanics Research Commun., 2016, Vol.74, Pp.27-33.
90. Dahmen S., Ben Amor M., Ben Ghozlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method*. Composite Struct., 2016, Vol.153, Pp.557-568.
91. Zhang X., Yu J., Zhang M., Zhang D. *Guided waves in functionally graded rods with rectangular cross-section under initial stress*. CMC, 2015, Vol.48, No.3, Pp.163-179.
92. Liu H., Liu S., Chen X., Lyu Y., Liu Z. *Coupled Lamb waves propagation along the direction of non-principal symmetry axes in pre-stressed anisotropic composite lamina*. Wave Motion, 2020, Vol.97, 102591.
93. Raherison A., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Elmaimouni L. *Legendre polynomial modelling in of composite acoustic bulk wave resonators*. J. of Appl. Physics, 2008, Vol.104, 014508.

94. Raherison A., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Gryba T. *Two-dimensional Legendre polynomial modeling of composite bulk acoustic wave resonators*. J. of Applied Physics, 2010, Vol.108, 104904.
95. Yu J.G., Yang X.D., Lefebvre J.E., Zhang X. *Wave propagation in graded rings with rectangular cross-sections*. Wave Motion, 2015, Vol.52, Pp.160-170.
96. Yu J.G., Yang X.D., Lefebvre J.E. *Wave propagation in layered piezoelectric rings with rectangular cross-sections*. J. of Mechanics of Materials and Structures, 2016, Vol.11, No.3, Pp.245-258.
97. Yu J.G., Lefebvre J.E., Zhang C., Ratolojanahary F.E. *Dispersion curves of 2D rods with complex cross-sections: double orthogonal polynomial approach*. Meccanica, 2015, Vol.50, Pp.109-115.
98. Naciri J., Rguiti A., Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Ratolojanahary F.E., Yu J.G., Belkassmi Y., El Mousati A. *Numerical Modelling of vibration characteristics of a partially metallized micro-electromechanical system with resonator DISC*. Acta Acoustica unified with Acoustica, 2019, Vol.105, No.6, Pp.1164-1172.
99. Falimiaramanana D.J., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E., Elmaimouni L., Rguiti M. *2-D modeling of Rosen-type piezoelectric transformer by means of a polynomial approach*. IEEE Trans. on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, 2020, Vol.67, No.8, Pp.1701-1714.
100. Yu J., Wu B. *The inverse of material properties of functionally graded pipes using the dispersion of guided waves and an artificial neural network*. NDT&E International, 2009, Vol.42, Pp.452-458.
101. Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L. *Finite element prediction of wave motion in structural waveguides*. J. of Acoustical Society of America, 2005, Vol.117, No.5, Pp.2835-2843.
102. Sorohan S., Constantin N., Gavan M., Anghel V. *Extraction of dispersion curves for waves propagating in free complex waveguides by standard finite element codes*. Ultrasonics, 2011, Vol.51, Pp.503-515.
103. Loveday D.W. *Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads*. Ultrasonics, 2009, Vol.49, Pp.298-300.
104. Nelson R.B., Dong S.B., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders*. J. of Sound and Vibrations, 1971, Vol.18, No.3, Pp.429-444.
105. Dong S.B., Nelson R.B. *On natural vibrations and waves in laminated orthotropic plates*. J. of Applied Mechanics, 1972, Vol.39, No.3, Pp.429-444.
106. Gavric R. *Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique*. J. of Sound and Vibration, 1995, Vol.185, No.3, Pp.531-543.
107. Bartoli I., Marzani A., Lanza di Scalea F., Viola E. *Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section*. J. of Sound and Vibration, 2006, Vol.295, Pp.685-707.
108. Marzani A. *Time-transient responce for ultrasonic guided waves in damped cylinders*. Int. J. of Solids and Structures, 2008, Vol.45, No.25-26, Pp.6347-6368.
109. Marzani A., Viola S., Bartoli I., Lenza di Scalea F., Rizzo P. *A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides*. J. Sound and Vibration, 2008, Vol.318, No.3, Pp.488-505.
110. Joseph R., Li L., Haider M.F., Giurgiutiu V. *Hybrid SAFE-GMM approach for predictive modeling of guided wave propagation in layered media*. Engineering Structures, 2019, Vol.193, Pp.194-206.
111. Han X., Liu G.R., Xi Z.C., Lam K.Y. *Characteristics of waves in a functionally graded cylinder*. International Journal for Numerical Methods in Engineering,

2002, Vol.53, Pp.653-676.
112. Duan W., Gan T.H. *Investigation of guided wave properties of anisotropic composite laminates using a semi-analytical finite element method*. Composites Part B, 2019, Vol.173, 106898.
113. Datta S., Shah A., Bratton R., Chakraborthy C. *Wave propagation in laminated composite plates*. J. Acoust. Soc. of America, 1988, Vol.83, No.6, Pp.2020-2026.
114. Karunasena W., Shah A., Datta S. *Wave propagation in a multilayered laminated cross-ply composite plate*. Trans. of the ASME, 1991, Vol.58, Pp.1028-1032.
115. Karunasena W., Liew K.M., Kitipornchai S. *Reflection of plate modes at the fixed edge of a composite plate*. J. of Acoust. Society of America, 1995, Vol.98, No.1, Pp.644-651.
116. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli*. Mechanical Systems and Signal Processing, 2011, Vol.25, Pp.2241-2256.
117. Zuo P., Yu X., Fan Z. *Acoustoelastic guided waves in waveguides with arbitrary prestress*. J. of Sound and Vibration, 2020, Vol.469, 115113.
118. Ahmad Z.A.B., Gabbert U. *Simulation of Lamb wave reflections at plate edges using the semi-analytical finite element method*. Ultrasonics, 2012, Vol.52, Pp.815-820.
119. Peddeti K., Santhanam S. *Dispersion curves for Lamb wave propagation in prestressed plates using a semi-analytical finite element analysis*. J. Acoust. Soc. of America, 2018, Vol.143, No.2, Pp.8292-840.
120. Astaneh A.V., Guddati M.N. *Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides*. Composites Part B, 2017, Vol.130, Pp.200-216.
121. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985.
122. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Non-classical theory of shells and its application to solving engineering problems]*. L'vov, Vishha shkola, 1978.
123. Homa I.Yu. *Obobshhennaya teoriya anizotropnykh obolochek [Generalized theory of anisotropic shells]*. Kiev, Naukova dumka, 1986.
124. Gol'denveizer A.L., Kaplunov Yu.D., Nol'de E.V. *Asymptotic analysis and refinement of theories of plates and shells of the Timoshenko-Reissner type*. Mechanics of Solids, 1990, No.6, Pp.124-138.
125. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional solution of the free vibration problem for metal-ceramic shells using the method of sampling surfaces*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.1, Pp.31-44.
126. Carrera E., Brischetto S. *Importance of higher order modes and refined theories in free vibration analysis of composite plates*. J. Appl. Math., 2010, Vol.77, 011013.
127. Kil'chevskij N.A. *Osnovy analiticheskoj mekhaniki obolochek [Fundamentals of analytical mechanics of shells]*. Kiev, Izdatel'stvo AN USSR, 1963.
128. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional analysis of metal-ceramics shells by the method of sampling surfaces*. Mechanics of Composite Materials, 2015, Vol.51, No.4, Pp.455-464.
129. Chapelle D. *3D shell mathematical models and finite elements: From mathematical and physical insight to application examples*. In: Shell Structures: Theory and Applications. Vol.3. Leiden, Balkema, Taylor & Francis Gr., 2013, Pp.21-25.
130. Vilde M. V. *Kromochnye volny vysshego poryadka v tolstoj plastine // [Higher order edge waves in thick plates]*. Vestnik NNGU im. N.I. Lobachevskogo, 2011,

No.4-5, Pp.2060-2062.

131. Vilde M.V. *Issledovanie yavleniya kraevogo rezonansa v plastinakh na osnove trekhmernykh uravnenij teorii uprugosti [Investigation of the phenomenon of edge resonance in plates based on three-dimensional equations of elasticity theory]*. Mekhanika deformiruemykh sred, 2010, No.16, Pp.7-14.
132. Wilde M.V., Golub M.B., Eremin A.A. *Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate*. J. of Sound and Vibration, 2019, Vol.441, Pp.26-49.
133. Goldenveizer A.L., Kaplunov Yu.D. *Dynamic boundary layer in problems of shell vibrations*. Mechanics of Solids, 1988, No.4, Pp.152-162.
134. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Yu. *Antisimmetrichnye kromochnye volny vysshego poryadka v plastinakh [Antisymmetric higher order edge waves in plates]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2013, Vol.13, No.1-1, Pp.50-56.
135. Ardazishvili R.V., Wilde M.V., Kossovich L.Yu. *Trekhmernye fundamental'nye kromochnye volny v tonkoj obolochke [Three-dimensional fundamental edge waves in thin shell]*. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya, 2015, No.4(26), Pp.109-124.
136. Vilde M.V., Kaplunov Yu.D., Kossovich L.Yu. *Kraevye i rezonansnye yavleniya v uprugikh telakh [Edge and resonance phenomena in elastic bodies]*. Moskva, FIZMATLIT, 2010, 210 p.
137. Wilde M.V., Kossovich L.Y., Shevzova Y.V. *Asimptoticheskoe integrirovanie dinamicheskikh uravnenij teorii uprugosti dlya sluchaya mnogoslojnoj tonkoj obolochki [Asymptotic integration of dynamic elasticity theory equations in the case of multilayered thin shell]*. Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika, 2012, Vol.12, No.2, Pp.56-64.
138. Vekua I.N. *Ob odnom metode rascheta prizmaticheskikh obolochek [On a method of computation of prismatic shells]*. Trudy Tbilisskogo Matematicheskogo instituta, 1955, Vol.21, Pp.191-259.
139. Amosov A.A. *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya tolstostennykh plastin i obolochek [Approximate three-dimensional theory of thick-walled plates and shells]*. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij, 1987, No.5, Pp.37-42.
140. Amosov A.A. *Priblizhennaya trekhmernaya teoriya netonkikh uprugikh obolochek i plit. Dissertatsiya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhnicheskikh nauk [Approximate 3D theory of non-thin elastic shells and plates: Diss. Dr. Sci.]*, Tashkent, Tashkentskij politekhnicheskij institut imeni R.A. Beruni, 1989.
141. Schwab C., Wright S. *Boundary layers in hierarchical beam and plate models*. J. of Elasticity, 1995, Vol.38, Pp.1-40.
142. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *An approximate high-order theory of thick anisotropic shells*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2003., Vol.1, No.5, Pp.28-38.
143. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leontiev K.A. *O reshenii nekotorykh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashheniya v trekhmernoj postanovke [About solving some problem on the stressed-strained state thick anisotropic shells of revolution in three-dimensional statement]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
144. Annin B.D., Volchkov Yu.M. *Nonclassical Models of the Theory of Plates and*

Shells. J. of Applied Mechanics and Technical Physics, 2016, Vol.57, No.5, Pp.5-14.
145. Zozulya V.V. *A high order theory for linear thermoelastic shells: Comparison with classical theories*. Journal of Engineering, 2013, 590480.
146. Zozulya V.V. *A higher order theory for shells, plates and rods*. Int. J. of Mechanical Sciences, 2015, Vol.103, Pp.40-54.
147. Zhavoronok S.I. *Modeli vysshego poryadka anizotropnykh obolochek [High-order anisotropic shells models]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2008, Vol.14, No.4, Pp.561-571.
148. Nikabadze M.U. *Variant sistemy uravnenij tonkikh tel [A variant of the system of equations of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo universiteta imeni M.V. Lomonosova. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 2006, No.1, Pp.30-34.
149. Zhavoronok S.I. *Variatsionnye uravneniya trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Variational equations of a three-dimensional anisotropic theory of shells]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2154-2156.
150. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell's theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.
151. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G., Kulikova N.A. *Identification of viscoelastic characteristics of composite materials based on the results of experimental and theoretical analysis of the dynamic behavior of hemispherical shells*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, Vol.47, No.3, Pp.126-133.
152. Abrosimov N.A., Kulikova N.A *Opredelenie parametrov modelej vyazkouprugogo deformirovaniya kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri udarnom nagruzhenii [Determining the parameters of the models of viscoelastic deformation of impact-loaded shells]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2009, Vol.71, Pp.61-70.
153. Abrosimov N.A. Kulikova N.A. *Determination of parameters of models of nonlinear deformation of isotropic and composite materials based on the results of computational and experimental analysis of pulsed loading of round plates*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2011, Vol.52, No.1, Pp.163-172.
154. Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A. *Identification of parameters of models of nonlinear deformation of isotropic and composite materials on the basis of calculations and experiments aimed at analyzing the dynamic behavior of cylindrical metal-plastic shells*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2015, Vol.56, No.6, Pp.5-13.
155. Kil'chevskij N.A., Kil'chinskaya G.A., Tkachenko N.E. *Analiticheskaya mekhanika kontinual'nykh sistem [Analytical Dynamics of Continuum Systems]*, Kiev, Naukova Dumka, 1979.
156. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells*. ZAMM – Zeitschr. für Angewandte Math. und Mech., 2014, Vol.94, No.1-2, Pp.164-184.
157. Babuska I., Melenk J.M. *The Partition of Unity Method*. Numerical Methods in Engineering, 1998, Vol.40, No.4, Pp.727-758.
158. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I.N. Vekua type*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2021, Vol.28, No.5, Pp.506-515.
159. Zhavoronok S.I. *Obobshhennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda rasshirennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka anizotropnykh obolochek [The generalized*

lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional n'th order theory of anisotropic shells]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.3, Ppp.370-381.
160. Zhavoronok S.I. *Variational formulations of Vekua-type shell theories and some of their applications*. In: Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference, 2014, Vol. 3, Pp.341-344.
161. Zhavoronok S.I. *On the variational formulation of the extended thick anisotropic shells theory of I.N. Vekua type*. Procedia Engnieering, 2015, Vol.111, Pp.888-895.
162. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I.N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides*. Archives of Mechanics, 2020, Vol.72, No.1, Pp.1-13.
163. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. International Journal of Computational Civil and Structural Engineering, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
164. Zhavoronok S.I. *Primenenie rasshirennoj teorii plastin N-go poryadka k resheniyu zadachi o dispersii voln v gradientno-neodnorodnom sloe [An application of the nth order extended plate theory in the wave dispersion problem for a functionally graded layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.240-258.
165. Zhavoronok S.I. *O primenenii razlichnykh uravnenij trekhmernoj teorii plastin N-go poryadka v zadachakh o dispersii normal'nykh voln v uprugom sloe [On the use of various equations of the n order plate theory in problems of normal wave dispersion in an elastic layer]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.595-613.
166. Zhavoronok S.I. *Modelling normal waves in functionally graded layers based on the unified hierarchical formulation of higher-order plate theories*. Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2020, Vol.11, No.2, Pp.159-185.
167. Zoltowski M.D. *Solving the generalized eigenvalue problem with singular forms*. Proc. of the IEEE, 1987, Vol.75, No.11, Pp.1546-1548.
168. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
169. Zhavoronok S.I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No,2, Pp.278-287.
170. Golub G.H., Underwood R. *Stationary value of the ratio of quadratic forms subject to linear constraints*. Stanford University, Technical Report CS 142, 1969.
171. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *K probleme reduktsii ploskoj zadachi teorii uprugosti k posledovatel'nosti odnomernykh kraevykh zadach [Reduction of the plane problem of elasticity theory to a sequence of one-dimensional boundary-value problems]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 1997, Vol.3, No.1, Pp.69-80.
172. Amosov A.A., Knyazev A.A., Zhavoronok S.I. *O reshenii nekotorykh kraevykh zadach o ploskom napryazhennom sostoyanii krivolinejnoj trapetsii [On solution of 2D-problem of stressed curvilinear trapezoid]*. Mekhanika kompozitsionnykh

materialov i konstruktsii, 1999, Vol.5, No.1, Pp.60-72.

173. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic Oscillations & Waves in Elastic Bodies]*. Kiev, Naukova dumka, 1981.

174. Zhavoronok S.I. *Issledovanie kinematiki normal'nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel* [*Kinematics of normal modes in elastic layer for some wavenumbers investigation based on n-th order three-dimensional shells' theory*]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.

175. Kuznetsova E.L., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *On the equations of the analytical dynamics of the quasi-3D plate theory of I.N. Vekua type and some their solutions*. J. Vibroengineering, 2018, Vol.20, No.2, Pp.1108-1117.

176. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal'no-kraevoj zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshhennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoj dinamiki [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of* N*-th order using generalized displacements and its application to steady dynamics]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2012, Vol.18, No,3, Pp.333-344.

177. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O prilozhenii razlichnykh variantov teorii obolochek N-go poryadka k nekotorym zadacham o progressivnykh volnakh [An application of various N-th order shell theories to normal waves propagation problems]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2014, No.11-1, Pp.255-266.

178. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *O variatsionnykh uravneniyakh rasshirennoj teorii N-go poryadka uprugikh obolochek i ikh prilozhenii k nekotorym zadacham dinamiki [An application of various N-th order shell theories to normal waves propagation problems]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2015, No.2, Pp.36-59.

179. Zhavoronok S.I. *The extended shell theory of Vekua-Amosov type and the low-order plate models*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2016, Vol.12, No.4, Pp.27-35.

180. Zhavoronok S.I. *A general higher-order shell theory based on the analytical dynamics of constrained continuum systems*. In: Shell Structures: Theory and Applications – Proceedings of the 11th SSTA 2017 Conference, 2018, Vol.4, Pp.189-192.

181. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zheng C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements*. J. Comput. Phys., 2014, Vol.258, Pp.381-404.

182. Li C.L., Han Q., Liu Y.J., Xiao D.L. *Guided wave propagation in rotating functionally graded annular plates*. Acta Mech., 2017, Vol.228, Pp.1083-1095.

183. Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. Chelmsford, Courier Corporation, 2001.

184. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plane structures using the Scaled Boundary Finite Element Method*. J. of Sound and Vibration, 2012, Vol.331, Pp.2543-2557.

185. Gravenkamp H., Bause F., Song C. *On the computation of dispersion curves for*

axisymmetric elastic waveguides using the Scaled Boundary Finite Element Method. Computers and Structures, 2014, Vol.131, Pp.46-55.
186. Gravenkamp H., Birk C., Song C. *The computation of dispersion curves for axisymmetric elastic waveguide using the Scaled Boundary Finite Element Method*. Computers and Structures, 2014, Vol.131, Pp.1373-1385.
187. Gravenkamp H., Birk C., Song C. *Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the Scaled Boundary Finite Element Method*. J. of Computational Physics, 2015, Vol.295, Pp.438-455.
188. Gravenkamp H., Natarajan S., Dornisch W. *On the use of NURBS-based discretizations in the Scaled Boundary Finite Element Method fro wave propagation problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2017, Vol.315, Pp.867-880.
189. Gravenkamp H. *Efficient simulation of elastic guided waves interacting with hotches, adhesive joints, delaminations and inclined edges in plate structures*. Ultrasonics, 2018, Vol.82, Pp.101-113.
190. Zhavoronok S.I. *On the Hamiltonian formulations of shell and plate theories of Vekua-Amosov type*. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2017, Vol.13, No.4, Pp.82-95.

Поступила в редакцию 17 декабря 2021 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: zhavoronok@iam.ras.ru