

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2022.28.01.019\_035.02

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВИБРОПОГЛОЩАЮЩИХ СВОЙСТВ ТРЕХСЛОЙНОЙ И ОДНОРОДНОЙ ПРЕГРАД ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКИ

Локтева Н.А., Нгуен Зыонг Фунг

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия  
НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В работе продемонстрирован общий подход, позволяющий решать связанные задачи о взаимодействии упругой среды, в которой возбуждаются нестационарные волны различного типа, и вибропоглощающей преграды. Для этого рассмотрены отдельно движение упругой среды и пластин различного вида. Все поставленные задачи решаются в безразмерном виде. Для построения решений все функции были разложены в тригонометрические ряды Фурье и к ним применено прямое преобразование Лапласа по времени.

Решена задача об определении кинематических и динамических параметров среды, в которой были индуцированы волны различного вида: затухающие плоская и цилиндрическая волны. Получено решение вспомогательной задачи об определении поверхностных функций влияния упругого полупространства при возникновении поля перемещения на границе этого полупространства. Решены краевые задачи о нестационарном взаимодействии упругих сред и преграды. При этом использованы различные подходы: поиск решения для однородной пластины Кирхгофа-Лява строится на результатах решения вспомогательной задачи, а для пластины Паймушина В.Н. – условия контакта среды и преграды.

Таким образом, в пространстве отображений в коэффициентах рядов были найдены перемещения в грунте после прохождения волной преграды, а также напряжения и деформации. При выполнении обратного преобразования Лапласа оказалось невозможным выполнить обращение аналитическим образом. Тогда был применен численно-аналитический модифицированный метод Ф. Дурбина.

В результате были рассмотрены конкретные примеры взаимодействия преград и волн в упругой среде, для чего найдена эквивалентная трехслойной преграде однородная пластина. Исходя из найденных коэффициентов редукции сделан вывод о более эффективных поглощающих свойствах трехслойной пластины.

**Ключевые слова:** однородная изотропная пластина Кирхгофа-Лява; трехслойная пластина Паймушина В.Н.; нестационарная волна; плоская волна; цилиндрическая волна; функция влияния; преобразование Лапласа; ряд Фурье; нормальное перемещение

## COMPARATIVE ANALYSIS OF VIBRATION ABSORBING PROPERTIES OF THREE-LAYER AND HOMOGENEOUS BARRIERS UNDER THE IMPACT OF A TRANSIENT LOAD

Lokteva N.A., Nguyen Duong Phung

*Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia  
Research Institute of Mechanics MSU by M.V. Lomonosov, Moscow, Russia*

## ABSTRACT

The paper demonstrates a general approach that allows one to solve coupled problems of the interaction of an elastic medium in which non-stationary waves of various types are excited and a vibration-absorbing barrier. For this, the motion of an elastic medium and plates of various types are considered separately. All problems are solved in dimensionless form. To construct solutions, all functions were expanded into trigonometric Fourier series, and the direct Laplace transform in time was applied to them.

The problem of determining the kinematic and dynamic parameters of a medium in which waves of various types were induced was solved, the damped plane wave and the cylindrical wave. The solution for the auxiliary problem of determining the surface transient functions for an elastic half-space when a displacement field appears on the boundary of this half-space is obtained. The initial-boundary value problems for transient interaction of elastic media and obstacles are solved. In this case, various approaches were used: for a homogeneous Kirchhoff-Love plate, the results announced in paragraph 3 are used, and for the plate model of Paimushin V.N. the conditions of contact between the medium and the barrier are introduced.

Thus, in the image space and in the coefficients of the series, displacements in the soil after the wave passed through the barrier, as well as the stresses and strains, were found. When performing the inverse Laplace transform, it turned out to be impossible to perform the inversion in an analytical way, then the numerical-analytical modified method of F. Durbin was applied.

As a result, specific examples of the interaction of barriers and waves in an elastic medium were considered, for which a homogeneous plate equivalent to a three-layer barrier was found. Based on the reduction coefficients found, a conclusion was made about the more effective absorbing properties of a three-layer plate.

**Keywords:** homogeneous isotropic Kirchhoff-Love plate; three-layer plate Paimushin V.N.; non-stationary wave; plane wave; cylindrical wave; transient function; Laplace transform; Fourier series; normal movement

## ВВЕДЕНИЕ

Негативное влияние вибраций, как непосредственно на человека, так и на здания и сооружения, давно доказано и сомнению не подлежит. Однако расширение в первую очередь транспортной инфраструктуры, а в рамках рассматриваемой проблемы в первую очередь метрополитена, в рамках уже существующей застройки в современных городах не позволяет расположить тоннели и железнодорожные полотна на таком расстоянии от жилых домов и офисных зданий, чтобы отрицательное влияние вибраций от движущегося транспорта было минимальным. Решением данной проблемы от различной степени интенсивности вибраций, возникающих как по естественным, так и техногенным причинам, ищется уже достаточно давно.

Существует достаточно большое количество причин возникновения колебаний и вибраций в грунте [1]. Источником неблагоприятного воздействия могут выступать:

- производственное оборудование, чаще всего высокочастотные колебания, которые приводят к значительному шуму и вибрациям, нарушающим комфорт и производственные условия в соседних зданиях;
- строительные работы, например, во время работы туннельных машин, забивки свай, динамическое уплотнение грунта;
- землетрясение, которое является одним из самых опасных источников движения грунта для зданий и сооружений.

В соответствии с характером, вибрации могут быть разделены на следующие группы [2]: продолжительные, импульсные и прерывистые вибрации. На данный момент существует большое количество работ, посвященных защите от землетрясений [3].

На данный момент существуют способы понижения уровня вибраций в грунте разной степени эффективности.

Современные методы и системы вибро- и сейсмозащиты можно разделить на две основные группы [4]:

– методы, направленные на создание сейсмически устойчивых конструктивных схем, элементов и узлов, в том числе включающие установку специальных демпфирующих или виброгасящих устройств в несущие конструкции, для диссипации вибрационной энергии;

– методы, направленные на создание барьера в грунте, препятствующего распространению или снижающего энергию сейсмических волн, переносящих вибрационную энергию (такие волны могут генерироваться как землетрясениями, так и искусственными источниками вибрации, например, поездами).

Существуют два подхода в организации виброзащиты фундаментов зданий и сооружений: защита от вибраций, закладываемая в конструкцию на уровне проектирования и включающая в себя гасящие вибрации устройства; и подход, основанный на создании вибропоглощающих преград [5,6]. В последнем случае в качестве преграды могут рассматриваться как вертикальные виброзащитные экраны, так и траншеи.

В случае использования виброзащитных преград, волны, воздействующие на препятствие, отражаются либо рассеиваются. В рамках данной работы исследуется импульсный вид воздействия и защита от ее негативного воздействия в виде вибропоглощающих преград, как однородных, так и имеющих сложную структуру.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается пластина, окруженная с двух сторон грунтом, моделировать который предполагается с помощью уравнений теории упругости, описывающих движение среды. Среды, окружающие пластину, обозначаются соответственно «1» и «2» (рис.1). Изотропная упругая среда «1» имеет плотность  $\rho_1$ , со скоростью распространения в ней продольных волн растяжения-сжатия  $c_1$  и скоростью распространения сдвиговых волн  $c_2$ . Предполагается, что скорости распространения волн в средах «1» и «2» будут одинаковыми, однако, предложенный подход подразумевает возможность рассмотрения различных сред по разные стороны от вибропоглощающего препятствия.

В качестве вибропоглощающей преграды предполагается рассматривать два вида препятствий:

– однородные пластины, движение которых описывается уравнениями Кирхгофа-Лява [7];

– преграды сложной конструкции в виде трехслойных пластин, описываемые системой уравнений Паймушина В.Н. [8].

Задача рассматривается в декартовой системе координат  $Oxyz$ . Пластина расположена таким образом, что плоскость  $Oxy$  для пластины является срединной, а ось  $Oz$  направлена в глубину среды «2».

Внешнее воздействие будет представлять собой затухающие волны, распространяющиеся из среды «1» и имеющие различный вид. Будут рассматриваться плоские и цилиндрические волны.

Обозначенные задачи будут решаться в плоском безразмерном виде независимо от координаты  $y$ .

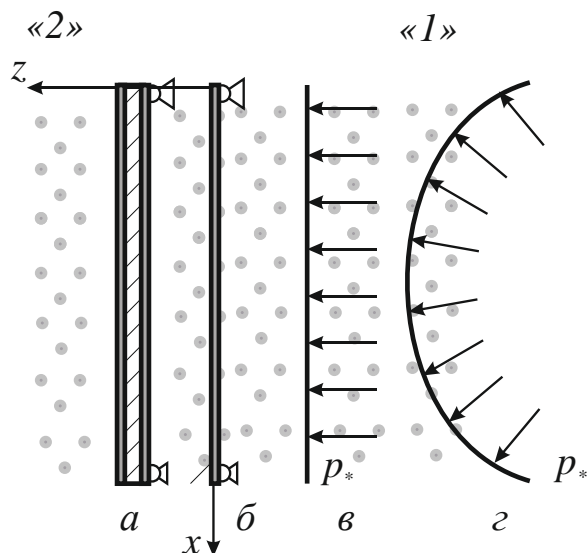


Рис.1. Модель взаимодействия упругих сред с пластиной, где в качестве преград могут выступать:  $a$  – трехслойная пластина,  $b$  – однородная пластина; в качестве внешнего воздействия могут выступать:  $в$  – плоская затухающая волна,  $г$  – цилиндрическая затухающая волна.

На рис.1 приведен один из рассматриваемых вариантов, где в качестве модели трехслойной преграды используется модель пластины Паймушина В.Н. под воздействием плоской волны.

На пластину набегают нестационарная волна с амплитудой давления на фронте  $p_*$ . Начальные условия нулевые. В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах «1» и «2» возбуждаются давления с амплитудами  $p_1$  и  $p_2$  соответственно. На границе сред и пластины значения амплитуд давлений будут совпадать с напряжением в грунте, где  $p_2$  – амплитуда давления прошедшей волны, а  $p_1$  определяется как

$$p_1 = p_* + p_{1w}. \quad (1)$$

В формуле (1)  $p_{1w}$  – амплитуда давления отраженной волны.

Математическая постановка задачи включает в себя задание амплитуды давления набегающей волны  $p_*$ , краевую задачу для пластины, а также условия контакта на границе пластины и среды.

Оценка вибропоглощающих свойств преград будет выполняться с помощью коэффициента редукции

$$k_r = \left| \frac{w_{\max}^{(2)}}{w_*} \right|, \quad (2)$$

где  $w_*$  – максимальные значения нормальных перемещений в набегающей волне;  $w_{\max}^{(2)}|_{z=0}$  – максимальные значения перемещений в волне, прошедшей преграду, на границе со средой «2».

Для решения задач о виброизоляционной защите от воздействия нестационарных волн необходимо иметь метод, позволяющий определять наиболее эффективные параметры геометрии пластины и материалы, используемые для ее изготовления.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТА В БЕЗРАЗМЕРНОМ ВИДЕ

В качестве модели грунта выступает изотропная среда, движение которой задается уравнениями теории упругости. Замкнутая система уравнений, описывающая ее движение, включает в себя уравнения движения, соотношения Коши, физический закон, эквивалентны уравнения движения грунта в перемещениях. Другой вариант эквивалентной системы относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  векторного потенциала перемещений [7,9].

Введём следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{u_1}{h}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{x} = \frac{x}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{c \cdot t}{h}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{h^2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{h^2}, \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{11}}{t_1 E_{II}}, \quad \bar{\sigma}_{13} = \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{13}}{t_1 E_{II}}, \quad \bar{\sigma}_{33} = \frac{h(1-\nu^2)\sigma_{33}}{t_1 E_{II}}. \end{aligned} \quad (3)$$

В дальнейшем верхнее подчеркивание, обозначающие безразмерные величины будем опускать. Все функции, входящие в уравнения движения грунта раскладываются в тригонометрические ряды

$$\begin{aligned} L &= \sum_{n=1}^{\infty} L_n \sin \lambda_n x, \\ L &= \left( \varphi^{(i)}, \varepsilon_{11}^{(i)}, \sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{33}^{(i)} \right)^T, \quad L_n = \left( \varphi_n^{(i)}, \varepsilon_{11n}^{(i)}, \sigma_{11n}^{(i)}, \sigma_{33n}^{(i)} \right)^T, \\ K &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n \cos \lambda_n x, \\ K &= \left( \psi^{(i)}, \varepsilon_{13}^{(i)}, \varepsilon_{33}^{(i)}, \theta^{(i)}, \sigma_{13}^{(i)} \right)^T, \quad K_n = \left( \psi_n^{(i)}, \varepsilon_{13n}^{(i)}, \varepsilon_{33n}^{(i)}, \theta_n^{(i)}, \sigma_{13n}^{(i)} \right)^T. \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом разложений в тригонометрические ряды, удовлетворяющих граничным условиям и выполнения преобразования Лапласа, уравнения движения грунта, соотношения Коши и физический закон в коэффициентах рядов запишутся следующим образом:

– уравнения движения

$$s^2 u_{1n}^{(j)L} = \lambda_n \sigma_{11n}^{(j)L} + \frac{\partial \sigma_{13n}^{(j)L}}{\partial z}, \quad s^2 w_n^{(j)L} = \lambda_n \sigma_{13n}^{(j)L} + \frac{\partial \sigma_{33n}^{(j)L}}{\partial z}. \quad (5)$$

– соотношения Коши

$$\varepsilon_{11n}^{(j)L} = -\lambda_n u_{1n}^{(j)L}, \quad \varepsilon_{33n}^{(j)L} = \frac{\partial w_n^{(j)L}}{\partial z}, \quad \varepsilon_{13n}^{(j)L} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{1n}^{(j)L}}{\partial z} + \lambda_n w_n^{(j)L} \right), \quad (6)$$

$$\theta_n^{(j)L} = -\lambda_n u_{1n}^{(j)L} + \frac{\partial w_n^{(j)L}}{\partial z}.$$

– физический закон

$$\begin{aligned} \sigma_{11n}^{(j)L} &= -\lambda_n \gamma u_{1n}^{(j)L} + \alpha \frac{\partial w_n^{(j)L}}{\partial z}, \\ \sigma_{13n}^{(j)L} &= \frac{\gamma - \alpha}{2} \left( \frac{\partial u_{1n}^{(j)L}}{\partial z} + \lambda_n w_n^{(j)L} \right), \\ \sigma_{33n}^{(j)L} &= -\alpha \lambda_n u_{1n}^{(j)L} + \gamma \frac{\partial w_n^{(j)L}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{(1 - \nu_{ep})(1 - \nu^2) h E_{ep}}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep}) t_1 E_{II}}, \quad \alpha = \frac{\nu_{ep}(1 - \nu^2) h E_{ep}}{(1 + \nu_{ep})(1 - 2\nu_{ep}) t_1 E_{II}}.$$

Условие ограниченности для грунта на бесконечности можно записать в следующем виде:

– для среды «1» при  $z \rightarrow -\infty$

$$\varphi_n^{(1)L}(z, s) = O(1), \quad \psi_n^{(1)L}(z, s) = O(1). \quad (8)$$

– для среды «2» при  $z \rightarrow +\infty$

$$\varphi_n^{(2)L}(z, s) = O(1), \quad \psi_n^{(2)L}(z, s) = O(1). \quad (9)$$

Уравнения движения среды относительно скалярного потенциала  $\varphi$  и компонент  $\psi$  [7] векторного потенциала перемещений после соответствующего разложения в ряды и применения преобразования Лапласа примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{1n}^2 \varphi_n^L &= 0, \\ \frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial z^2} - \beta_{2n}^2 \psi_n^L &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Удовлетворяющие условию (8), (9) решения уравнений (10) имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)L}(z, s) &= C^{(1)} e^{\beta_{1n} z}; \quad \varphi_n^{(2)L}(z, s) = C^{(2)} e^{-\beta_{1n} z}; \\ \psi_n^{(1)L}(z, s) &= D^{(1)} e^{\beta_{2n} z}; \quad \psi_n^{(2)L}(z, s) = D^{(2)} e^{-\beta_{2n} z}. \end{aligned} \quad (11)$$

где  $C^{(1)}, C^{(2)}, D^{(1)}, D^{(2)}$  – константы интегрирования.

Для решения поставленной задачи необходимо задать набегающую волну. Рассматривается два типа – цилиндрическая и плоская волны. На основании тех же уравнений движения среды и условий ограниченности на бесконечности получаем следующие значения напряжений и перемещений в пространстве отображений после разложения в тригонометрические ряды:

– плоская затухающая волна [7]

$$u_{*n}^L = 0, \quad w_{*n}^L = \frac{2}{\gamma} \frac{P_*}{s+1} \frac{1 - \cos\left(\frac{\lambda_n L_1}{h}\right)}{\lambda_n};$$

$$\sigma_{13*n}^L = 0, \quad \sigma_{33*n}^L = \frac{2P_*}{s+1} \frac{1 - \cos\left(\frac{\lambda_n L_1}{h}\right)}{\lambda_n}.$$
(12)

– цилиндрическая затухающая волна

$$u_{*n}^L = 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{NL_1} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{x-x_1}{r_{10}} H_1^{(1)}(k_1 r_{10}) \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx,$$

$$w_{*n}^L = 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{NL_1} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{d}{r_{10}} H_1^{(1)}(k_1 r_{10}) \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx,$$

$$\sigma_{13*n}^L = 2 \frac{-k_1 r_{100}^2 P_* d}{NL_1 (1+\nu_{ep})} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{(x-x_1)}{r_{10}^2} H_2^{(1)}(k_1 r_{10}) \cos\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx,$$

$$\sigma_{33*n}^L = 2 \frac{r_{100}^2 P_*}{L_1 N} \frac{1}{s+1} \int_0^{L_1} \frac{1}{r_{10}^2} \left[ (\alpha + \gamma) r_{10} H_1^{(1)}(k_1 r_{10}) - \right.$$

$$\left. - k_1 r_{330}^2 H_2^{(1)}(k_1 r_{10}) \right] \sin\left(\frac{\lambda_n x}{L_1}\right) dx.$$
(13)

Полученные значения коэффициентов рядов вычисляются численно при решении поставленных задач в среде Maple.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЗАТУХАЮЩИХ ВОЛН С ПЛАСТИНОЙ В ГРУНТЕ

#### Пластина Кирхгофа-Лява

Уравнение движения в перемещениях для однородной пластины Кирхгофа-Лява [7] в плоской постановке

$$\rho_{II} h \frac{\partial^2 w_0(x,t)}{\partial t^2} = -D \frac{\partial^4 w_0(x,t)}{\partial x^4} + P,$$
(14)

где  $P = p_1 + p_2$ ,  $\rho_{II}$ ,  $E_{II}$ ,  $\nu$  – плотность, модуль упругости первого рода, коэффициент Пуассона материала пластины;  $L$ ,  $h$  – длина, толщина пластины,  $w_0(x,t)$  – прогиб средней линии пластины. Цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{E_{II} h^3}{12(1-\nu^2)}.$$
(15)

Для решения поставленной задачи необходимо выполнить обезразмеривание величин, входящих в выражение (24), после чего применить к нему преобразования Лапласа по времени и разложить функции в тригонометрические ряды по координате.

Запишем входящие в выражение (14) функции в безразмерном виде

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x}{L}; \quad \bar{z} = \frac{z}{L}; \quad \tau = \frac{c \cdot t}{L}; \quad \bar{w} = \frac{w}{L}; \quad \bar{u}_1 = \frac{u_1}{L}; \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E_{zp}}; \quad \bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}}{E_{zp}}; \quad \bar{\sigma}_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E_{zp}}; \\ \bar{\psi} &= \frac{\psi}{L^2}; \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{L^2}.\end{aligned}\tag{16}$$

В дальнейшем будем опускать знак верхнего подчеркивания « $\bar{\phantom{x}}$ » в обозначении функций.

Далее необходимо разложить функции в тригонометрические ряды

$$\begin{aligned}M &= \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \lambda_n x, \quad M = (w_0, P, p_1, p_2)^T, \\ M_n &= (w_{0n}, P_n, p_{1n}, p_{2n})^T, \quad \lambda_n = \pi n (n = 1, 2, \dots).\end{aligned}\tag{17}$$

Поскольку, исходя из общей постановки задачи, краевая задача о взаимодействии волны с преградой в грунте будет решаться в пространстве отображений, то необходимо применить к формуле (14) преобразование Лапласа

$$s^2 w_{0n}^L = \frac{-h^2}{12(1-\nu_{II})L^2} \lambda_n^4 w_{0n}^L + (p_{1n}^L + p_{2n}^L).\tag{18}$$

Для решения поставленной задачи необходимо установить связь между давлением на границе сред и пластины и кинематическими параметрами. Для этого на границе упругого пространства [8] задано нормальное единичное поле перемещений  $w|_{z=0} = w(x, y)e^{-t}$ , требуется найти давление на границе  $p|_{z=0} = p(x, y)e^{-t}$ .

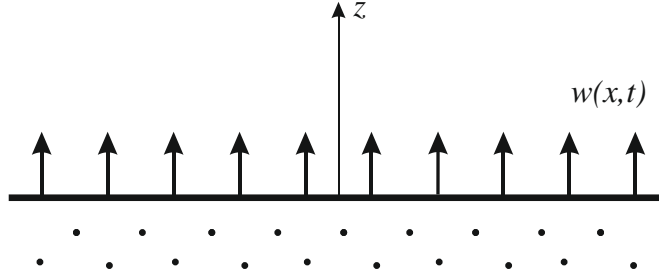


Рис.2. Единичное поле нормальных перемещений на границе упругого полупространства.

Для среды «1» имеется:  $\bar{u}_1^{(1)L} = 0$ ,  $\bar{w}_n^{(1)L} = -1$ ; отсюда с учетом граничного условия и (10) следует

$$C^{(1)} = \frac{\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}, \quad D^{(1)} = \frac{\lambda_n}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}.\tag{19}$$

$$G_{wn}^{(1)L}(z) = \frac{\beta_{1n}\beta_{2n}e^{\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{\beta_{2n}z}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2};\tag{20}$$

$$G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(z) = -\frac{\left( (\alpha \lambda_n^2 - \gamma \beta_{1n}^2) e^{-\beta_{1n}z} - (\alpha - \gamma 1) \lambda_n^2 \beta_{2n} e^{-\beta_{2n}z} \right) \beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}.$$



Для среды «2» имеется:  $\bar{u}_{1n}^{(2)L} = 0$ ,  $\bar{w}_n^{(2)L} = 1$ ; отсюда с учетом граничного условия и (10) следует

$$C^{(2)} = \frac{-\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}, \quad D^{(2)} = \frac{\lambda_n}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}. \quad (21)$$

$$G_{wn}^{(2)L}(z) = \frac{\beta_{1n}\beta_{2n}e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{-\beta_{2n}z}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}; \quad (22)$$

$$G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(z) = \frac{\left( (\alpha\lambda_n^2 - \gamma\beta_{1n}^2)e^{-\beta_{1n}z} - (\alpha - \gamma)\lambda_n^2\beta_{2n}e^{-\beta_{2n}z} \right)\beta_{2n}}{\beta_{1n}\beta_{2n} - \lambda_n^2}.$$

Из выражений (20) и (22) следует что, изображения искомых давлений на границе полупространства

$$p_{1n}^L = w_{0n}^L(s) * G_{\sigma_{33n}}^{(1)L}(s); \quad (23)$$

$$p_{2n}^L = w_{0n}^L(s) * G_{\sigma_{33n}}^{(2)L}(s).$$

Поставляем значения амплитуды давлений (23) в уравнение (18), получаем значение искомых нормальных перемещений средней линии пластины

$$w_{nz}^{(2)L} = \frac{\sigma_{33n*} (\beta_{1n}\beta_{2n}e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 e^{-\beta_{2n}z}) K_2}{K_1\beta_{1n}\beta_{2n}\lambda_n^4 - K_1\lambda_n^6 + 2K_2\gamma\beta_{1n}^2\beta_{2n} - 2K_2\gamma\beta_{2n}\lambda_n^2 + s^2\beta_{1n}\beta_{2n} - s^2\lambda_n^2}; \quad (24)$$

$$\sigma_{33nz}^{(2)L} = \frac{\sigma_{33n*} K_2\beta_{2n} \left[ (\alpha\lambda_n^2 - \gamma\beta_{1n}^2)e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n^2 (\alpha - \gamma)e^{-\beta_{2n}z} \right]}{K_1\beta_{1n}\beta_{2n}\lambda_n^4 - K_1\lambda_n^6 + 2K_2\gamma\beta_{1n}^2\beta_{2n} - 2K_2\gamma\beta_{2n}\lambda_n^2 + s^2\beta_{1n}\beta_{2n} - s^2\lambda_n^2};$$

Таким образом в пространстве отображений получены решения для нормальных и касательных перемещений на границе преграды и сред «1» и «2» в коэффициентах рядов – формулы (13) и (14). Как известно, обращение преобразования Лапласа легко выполняется в случае ограниченной области и отсутствия точки ветвления, однако, в нашем случае область является неограниченной и функции содержат точки ветвления, таким образом становится очевидным, что аналитическое обращение невозможно. Для обращения функции применяется модифицированный метод Дурбина [11,12].

### Трехслойная пластина Паймушина В.Н.

Объектом исследования является трехслойная пластина симметричной структуры, состоящая из двух несущих слоев и заполнителя между ними. Несущие слои пластины являются упругими и изотропными, с модулем упругости первого рода  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ , имеют толщину  $2t_1$ . Заполнитель ортотропный, сотовой конфигурации, с модулем упругости  $E_z$  и коэффициентом Пуассона  $\nu_z$ , имеет толщину  $2h$ . Заполнитель имеет модуль обжатия  $E_3$  и модули поперечного сдвига  $G_1$  и  $G_2$  в направлениях осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Через  $u_1^{(k)}$  и  $u_2^{(k)}$  обозначим амплитуды тангенциальных перемещений вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно, а через  $w^{(k)}$  нормальное перемещение  $k$ -го несущего слоя.  $q^1$  и  $q^2$  – амплитуды постоянных по толщине поперечных касательных напряжений в заполнителе, направленным по осям  $Ox$  и  $Oy$ .

Введём следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{w}{h}; \quad \bar{u} = \frac{u}{h}; \quad \tau = \frac{c \cdot t}{h}; \quad \bar{x} = \frac{x}{h}; \\ \bar{q}_1 &= \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} q_1; \quad \bar{p}_1 = \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} p_1; \quad \bar{p}_2 = \frac{h(1-\nu^2)}{Et_1} p_2.\end{aligned}\quad (25)$$

Верхнее подчеркивание, обозначающие безразмерные величины, в дальнейшем будем опускать. Так как рассматривается плоская постановка задачи система уравнений Паймушина В.Н. [9] приобретает следующий вид

$$\begin{aligned}-2 \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^2} + 2(1-\nu^2) \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial \tau^2} + q_1 &= 0, \\ -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_c}{\partial x^4} - \left(2 + \frac{\rho}{\rho_b} \frac{h}{t_1}\right) (1-\nu^2) \frac{\partial^2 w_c}{\partial \tau^2} + 2 \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial q_1}{\partial x} + p_1 - p_2 &= 0, \\ -\frac{2t_1^2}{3h^2} \frac{\partial^4 w_a}{\partial x^4} - (1-\nu^2) \left(2 + \frac{\rho h}{3\rho_b t_1}\right) \frac{\partial^2 w_a}{\partial \tau^2} - \\ &- (1-\nu^2) \frac{4dhE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)t_1 E} w_a + p_1 + p_2 = 0, \\ -2u_1^{(2)} - \frac{(t_1+h)}{h} \frac{\partial w_c}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{1-\nu_z^2}{1-\nu^2} \frac{a \sin(\varphi)t_1}{dh} \frac{E}{E_z} \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1+\nu_z}{1-\nu^2} \frac{6at_1 \sin(\varphi)}{dh(1+\cos^2(\varphi))} \frac{E}{E_z} q_1 = 0.\end{aligned}\quad (26)$$

где

$$\begin{aligned}B &= \frac{2Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Bt^2}{3}; \quad E_3 = \frac{4dE_z}{3(1-\nu_z^2)a \sin(\varphi)}; \\ u_i^c &= u_i^{(1)} + u_i^{(2)}, \quad u_i^a = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \quad (i=1,2), \quad w_c = w_0^{(1)} + w_0^{(2)}, \quad w_a = w_0^{(1)} - w_0^{(2)}; \\ k_1 &= t+h, \quad k_2 = \frac{h^2}{3c_3}, \quad k_{3i} = \frac{2h}{G_i}, \quad (i=1,2), \quad c_3 = \frac{E_3}{2h}.\end{aligned}\quad (27)$$

Рассматривается случай трансверсально-мягкого заполнителя, где модули поперечного сдвига заполнителя равны между собой. Модуль поперечного сдвига заполнителя  $G$  и модуль сдвига материала заполнителя  $G_z$  определяется как

$$G = G_z \frac{2d(1+\cos^2(\varphi))}{3a \sin(\varphi)}, \quad G_z = \frac{E_z}{2(1+\nu_z)}.$$

Как показано в [12], после разложения в тригонометрические ряды, выполнения преобразования Лапласа и введения следующих коэффициентов, включающих в себя физические и геометрические параметры пластины в выражениях

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{2t_1^2}{3l^2}, \quad m_2 = \frac{\rho h}{\rho_b t_1}, \quad m_3 = \frac{t_1+h}{h}, \\ m_4 &= \frac{1}{2}, \quad m_7 = \frac{6}{(1-\nu_z)(1+\cos^2(\varphi))},\end{aligned}\quad (28)$$

$$m_5 = \frac{E}{E_z} \frac{(1 - \nu_z^2)}{(1 - \nu^2)} \frac{at_1 \sin(\varphi)}{dh}, \quad m_6 = (1 - \nu^2).$$

из системы уравнений (25) определяются сумма  $\bar{w}_{cn}^L$  и разность  $\bar{w}_{an}^L$  нормальных перемещений на границах пластины и слоев «1» и «2»

$$\begin{aligned} w_{0n}^{(1)L} &= \frac{1}{2} \frac{-(p_{2n}^L - p_{1n}^L) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^2) I_3(s^2, \lambda_n^6) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} + \frac{1}{2} \frac{3m_5(p_{1n}^L + p_{2n}^L)}{I_5(s^2, \lambda_n^4)}; \\ w_{0n}^{(2)L} &= \frac{1}{2} \frac{-(p_{2n}^L - p_{1n}^L) I_1(s^2, \lambda_n^4)}{I_2(s^2, \lambda_n^4) I_3(s^2, \lambda_n^4) + I_4(s^2, \lambda_n^4)} - \frac{1}{2} \frac{3m_5(p_{1n}^L + p_{2n}^L)}{I_5(s^2, \lambda_n^4)}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(s^2, \lambda_n^4) &= (m_5(m_6 s^2 + \lambda_n^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) + 1); \quad I_2(s^2, \lambda_n^2) = (m_6 s^2 + \lambda_n^2); \\ I_3(s^2, \lambda_n^6) &= (m_1 \lambda_n^4 + (2 + m_2) m_6 s^2)(\lambda_n^2 m_4 + m_7) m_5; \\ I_4(s^2, \lambda_n^4) &= (2m_3^2 + m_1) \lambda_n^4 + 2m_3^2 m_6 \lambda_n^2 s^2 + (2 + m_2) m_6 s^2; \\ I_5(s^2, \lambda_n^4) &= (6 + m_2) m_5 m_6 s^2 + 3m_5 m_1 \lambda_n^4 + 4. \end{aligned}$$

Для определения констант интегрирования в (16), необходимо записать условия контакта пластины и грунта, аналогично [7]

– давления и напряжения на границах со средами «1» и «2»

$$\begin{aligned} p_{1n}^L(p_{1n}^L, s) &= (\sigma_{33n}^{(1)L}(z, s) - p_{*n}(z, s)) \Big|_{z=0}, \quad \sigma_{33*} \Big|_{z=0} = p_{*n}, \\ p_{2n}^L(z, s) &= -\sigma_{33n}^{(2)L}(z, s) \Big|_{z=0}, \quad \sigma_{13n}^{(1)}(z, s) \Big|_{z=0} = \sigma_{13*n}(z, s) \Big|_{z=0}, \end{aligned} \quad (30)$$

– нормальные перемещения

$$\begin{aligned} w_{0n}^{(1)L}(z, s) &= (-w_n^{(1)L}(z, s) + w_{n*}^L(z, s)) \Big|_{z=0}, \quad w_{0n}^{(2)L}(z, s) = w_n^{(2)L}(z, s) \Big|_{z=0}. \\ u_{0n}^{(1)L}(z, s) &= (-u_n^{(1)L}(z, s) + u_*(z, s)) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (31)$$

С учетом полученных в (11) констант интегрирования значения нормальный и касательных перемещений, а также напряжений в средах «1» и «2» примут вид

– напряжения в средах «1» и «2»

$$\begin{aligned} \sigma_{33n}^{(1)L} &= (-\alpha \lambda_n^2 + \gamma \beta_{1n}^2) C_{11} \cdot e^{\beta_{1n} z} + (\alpha - \gamma) \lambda_n \beta_{2n} C_{21} \cdot e^{\beta_{2n} z}; \\ \sigma_{33n}^{(2)L} &= (-\alpha \lambda_n^2 + \gamma \beta_{1n}^2) C_{12} \cdot e^{-\beta_{1n} z} + (\gamma - \alpha) \lambda_n \beta_{2n} C_{22} \cdot e^{-\beta_{2n} z}; \\ \sigma_{13n}^{(1)} &= \frac{1}{(1 + \nu_{gr})} \{ 2\lambda_n \beta_{1n} C_{11} e^{\beta_{1n} z} - C_{21} (\beta_{2n}^2 + \lambda_n^2) e^{\beta_{2n} z} \}; \\ \sigma_{13n}^{(2)} &= -\frac{1}{(1 + \nu_{gr})} \{ 2\lambda_n \beta_{1n} C_{12} e^{-\beta_{1n} z} + C_{22} (\beta_{2n}^2 + \lambda_n^2) e^{-\beta_{2n} z} \}. \end{aligned} \quad (32)$$

– перемещения в средах «1» и «2»

$$\begin{aligned} w_n^{(1)L} &= \beta_{1n} C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n} z} - \lambda_n D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n} z}; \quad w_n^{(2)L} = -\beta_{1n} C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n} z} - \lambda_n D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n} z}; \\ u_{1n}^{(1)L} &= \lambda_n C^{(1)} \cdot e^{\beta_{1n} z} - \beta_{2n} D^{(1)} \cdot e^{\beta_{2n} z}; \quad u_{1n}^{(2)L} = \lambda_n C^{(2)} \cdot e^{-\beta_{1n} z} + \beta_{2n} D^{(2)} \cdot e^{-\beta_{2n} z}. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя в условия контакта (30) и (31) значения перемещений несущих слоев пластины (29) и перемещений и напряжений в средах «1» и «2», получаем значения констант

$$\begin{aligned} C^{(1)} &= \frac{R_1(s^8)}{R_2(s^{11})}, \quad D^{(1)} = \frac{R_3(s^7)}{R_4(s^{11})}; \\ C^{(2)} &= \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})}, \quad D^{(2)} = \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляем (34) в (21), получаем значения нормальных и касательных перемещений в среде «2»

$$\begin{aligned} w_n^{(2)L} &= -\beta_{1n}(s) \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n}z} - \lambda_n \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n}z}; \\ u_{1n}^{(1)L} &= \lambda_n \frac{R_1(s^8)}{R_2(s^{11})} \cdot e^{\beta_{1n}z} - \beta_{2n}(s) \frac{R_3(s^7)}{R_4(s^{11})} \cdot e^{\beta_{2n}z}; \\ u_{1n}^{(2)L} &= \lambda_n \frac{R_5(s^{24})}{R_6(s^{25})} \cdot e^{-\beta_{1n}z} + \beta_{2n}(s) \frac{R_7(s^{13})}{R_8(s^{14})} \cdot e^{-\beta_{2n}z}. \end{aligned} \quad (35)$$

#### 4. НАХОЖДЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ, ЭКВИВАЛЕНТНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ, И АНАЛИЗ ВИБРОЗАЩИТНЫХ СВОЙСТВ ОДНОРОДНОЙ И ТРЕХСЛОЙНЫХ ПРЕГРАД

Исходя из параметров пластины Паймушина В.Н., определим осредненную жесткость [14]. Для расчета осредненной жесткости пластины определим приведенный модуль Юнга

$$E_{np} = E * K + E_3 * K_1, \quad (36)$$

где  $E$  – модуль Юнга несущих слоев.

Коэффициенты  $K$  и  $K_1$  определяются из соотношения толщины несущего слоя и толщины заполнителя пластины [14]. Тогда толщина однородной пластины Кирхгофа-Лява, эквивалентная по жесткости пластине Паймушина В.Н., определяется соотношением

$$h_{np} = \sqrt[3]{\frac{(2t_1 + 2h)^3 * E_{np}}{E}}. \quad (37)$$

Тогда толщина эквивалентной однородной пластины будет равна  $t = 3,4$  мм. Для оценки вибропоглощающих свойств преграды будет использоваться коэффициент редукации

$$k_r = \left| \frac{W_{\max}^{(2)}|_{z=0}}{W_*} \right|, \quad (38)$$

где  $w_*$  – максимальные значения нормальных перемещений в набегающей волне;  
 $w_{\max}^{(2)} \Big|_{z=0}$  – максимальные значения перемещений в волне, прошедшей преграду на границе со средой «2».

Рассмотрим в качестве примера нормальные перемещения в однородной и трехслойных пластинах, а также определим их коэффициент редуции по (37) и оценим их вибропоглощающие свойства. Параметры грунта и преград приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Параметры грунта	Плотность – $\rho_{cp} = 1600 \text{ кг/м}^3$ , модуль упругости $E_{cp} = 10^9 \text{ кг/м}^2$
Параметры пластины Кирхгофа-Лява	Длина $L = 1 \text{ м}$ , толщина $t = 3,4 \text{ мм}$ , Материал – сталь 12Х18Н10Т: $E = 1.8 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$ , $\rho_b = 7900 \text{ кг/м}^3$ , $\nu = 0.29$ .
Параметры пластины Паймушина В.Н.	Длина $L = 1 \text{ м}$ , толщина несущего слоя $t = 0,15 \text{ мм}$ , толщина заполнителя $h = 1,4 \text{ мм}$ . Материал несущих слоев – сталь 12Х18Н10Т: $E = 1.8 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2$ , $\rho_b = 7900 \text{ кг/м}^3$ , $\nu = 0.29$ . Материал заполнителя – Амг2-Н: $E_z = 7.1 \cdot 10^9 \text{ кг/м}^2$ , $\rho_z = 2690 \text{ кг/м}^3$ ; $\nu_z = 0.32$ , $a_z = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ; $\varphi = 120$ ; $dz = 0.05 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ – толщина стенки заполнителя

Для сравнения полученных результатов и оценки вибропоглощающих свойств преград вернемся к размерному виду записи перемещений на основании (16) и (25). В силу особенностей модели однородной преграды Кирхгофа-Лява будем рассматривать только нормальные перемещения, возникающее в среде «2» после прохождения волн различного вида преград.

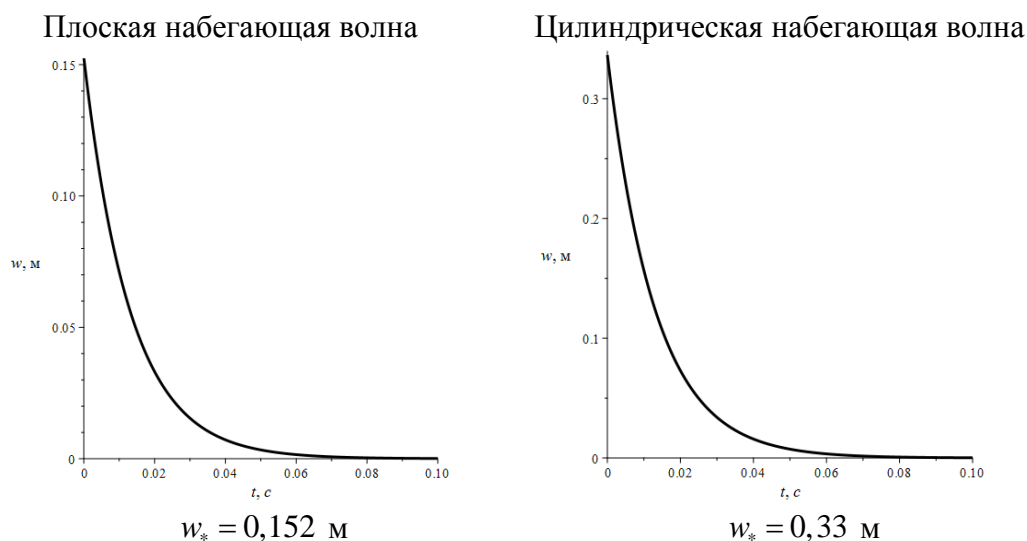


Рис.3. Нормальные перемещения в набегающих волнах в среде «1».

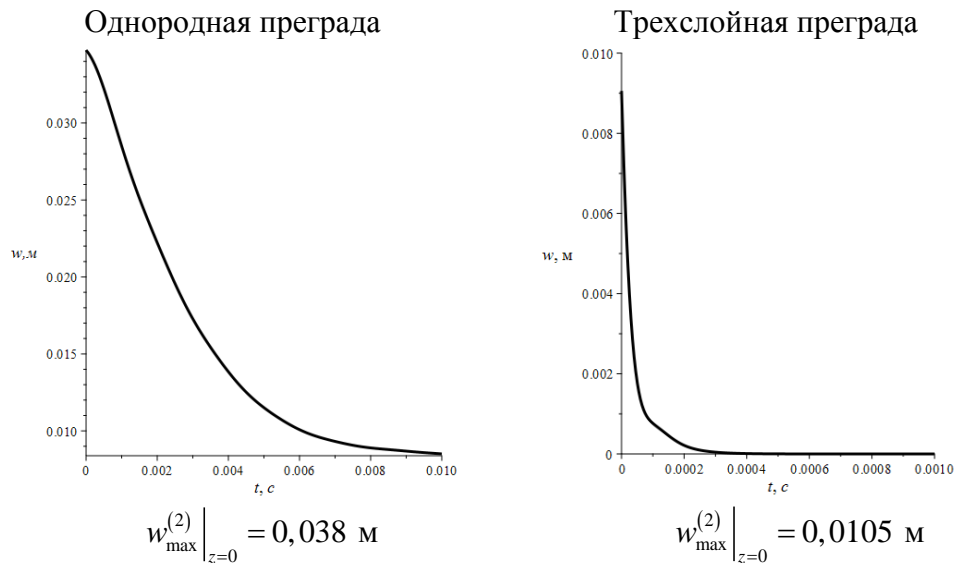


Рис.4. Нормальные перемещения в преградах под воздействием плоской затухающей волны.

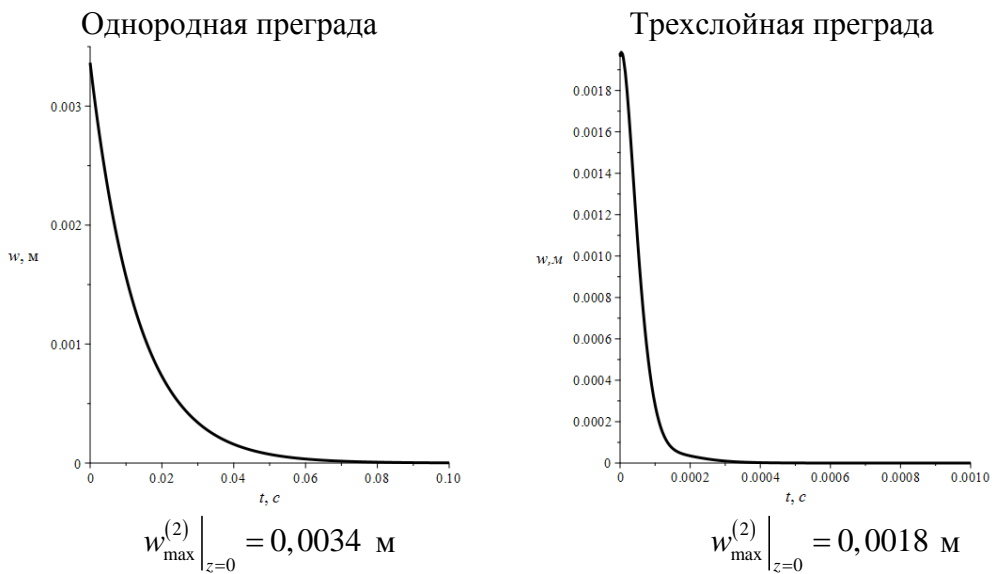


Рис.5. Нормальные перемещения в преградах под воздействием цилиндрической затухающей волны.

Тогда коэффициенты редукиции (33) примут следующий вид:

– однородная пластина Кирхгофа-Лява

Плоская волна	Цилиндрическая волна
$k_r = 0,25$	$k_r = 0,01$

– трехслойная пластина Паймушина В.Н.

Плоская волна	Цилиндрическая волна
$k_r = 0,066$	$k_r = 0,005$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрирован общий подход, позволяющий решать связанные задачи о взаимодействии упругой среды, в которой возбуждаются нестационарные волны различного типа и вибропоглощающей преграды. Для этого рассмотрены отдельные задачи о движении упругой среды и пластин различного вида. Решена задача об определении кинематических и динамических параметров среды, в которой были индуцированы волны различного вида: затухающие плоская и цилиндрическая волны. Получено решение вспомогательной задачи об определении поверхностных функций влияния упругого полупространства при возникновении единичного поля перемещения на границе этого полупространства. Для решения нестационарных задач о взаимодействии упругих сред и преград использованы различные подходы: для однородной пластины Кирхгофа-Лява используются результаты вспомогательной задачи о поверхностных функциях влияния, а для пластины Паймушина В.Н. – условия контакта среды и преграды. Рассмотрены конкретные примеры взаимодействия преград и волн в упругой среде, для чего найдена эквивалентная трехслойной преграде однородная пластина. Эквивалентность пластин двух видов определялась на основании изгибной жесткости, что не является вполне корректным методом сравнения, но тем не менее позволяет сделать вывод о преимуществе трёхслойных пластин перед однородными. Оценка выполнялась на весьма коротких промежутках времени, вследствие чего не очевидны качественные отличия в характере волн, прошедших различные преграды. Стоит отметить, что на больших промежутках времени в безразмерных результатах очевидно, что в случае однородной пластины наблюдаются остаточные колебания, в то время как после прохождения трехслойной пластины волна экспоненциально затухает. Исходя из найденных коэффициентов редукации сделан вывод о более высокой эффективности трехслойных вибропоглощающих преград.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Umek A. *Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves*. – Phd Thesis Illinois Institute of Technology, Dec.1973. ANZECC 1990.
2. Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves* // Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering. Proceedings of the International Conference on PerformanceBased Design in Earthquake Geotechnical Engineering. IS- Tokyo 2009, Japan, 15-18 June 2009.
3. Kuznetsov S.V. *Seismic waves and seismic barriers* // Acoustical Physics. – 2011. – Vol.57. – No.3. – Pp.420-426.
4. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration*. Australian and New Zealand Environment Council, Canberra.
5. Костров Б.В. *Движение жесткой массивной полосы, впаиванной в упругую среду, под действием плоской волны* // ПММ. – 1964. – Т.28. – Вып.1. – С.99-110.
6. Рылько М.Я. *О движении в упругой среде жесткого прямоугольного включения под действием плоской волны* // МТТ. – 1977. – №1. – С.158-164.
7. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах: Учеб. пособие.: для вузов*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

8. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. *Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol.158. – No.1. – 012073. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012073.
9. Иванов В.А., Паймушин В.Н. *Уточненная постановка динамических задач трехслойных оболочек с трансверсально-мягким заполнителем численно-аналитический метод их решения* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №4. – С.147-151.
10. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. *Теория упругости и пластичности. Учеб. для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 416 с.
11. Durbin F. *Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method* // The Computer Journal. – 1974. – Vol.17. – No.4. – Pp.371-376.
12. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. *Численное обращение преобразования Лапласа: Учеб. пособие.: для вузов.* – Нижний Новгород: ННГУ, 2010. – 34 с.
13. Lokteva N.A., Tarlakovskii D.V. *Analysis of vibration insulation properties of a plate in an elastic medium under the influence of different types of waves* // Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. – 2019. – Pp.298-303. DOI: 10.1007/978-3-030-21894-2
14. Чемодуров В.Т., Канцеров П.М. *Расчет многослойной пластины с приведенной жесткостью* // Строительство и техногенная безопасность. – 2021. – №42. – С.18-25.
15. *Свод правил по проектированию и строительству СП 23-105-2004 «Оценка вибрации при проектировании и строительстве и эксплуатации объектов метрополитена».* – М.: ГОССТРОЙ РОССИИ, 2014.

## REFERENCES

1. Umek A. *Dynamic responses of building foundations to incident elastic waves.* Phd Thesis Illinois Institute of Technology, Dec.1973.ANZECC 1990.
2. Kuznetsov S.V. *A new principle for protection from seismic waves.* Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering. Proceedings of the International Conference on PerformanceBased Design in Earthquake Geotechnical Engineering. IS-Tokyo 2009, Japan, 15-18 June 2009.
3. Kuznetsov S.V. *Seismic waves and seismic barriers.* Acoustical Physics, 2011, Vol.57, No.3, Pp.420-426.
4. *Technical basis for guidelines to minimise annoyance due to blasting overpressure and ground vibration.* Australian and New Zealand Environment Council, Canberra.
5. Kostrov B.V. *Dvizhenie zhestkoj massivnoj polosy, vpayannoj v upruguyu sredu, pod dejstviem ploskoj volny [Motion of a Rigid Massive Strip Soldered into an Elastic Medium under the Action of a Plane Wave].* PMM, 1964, Vol.28, Iss.1, Pp.99-110.
6. Ryl'ko M.Ya. *O dvizhenii v uprugoj srede zhestkogo pryamougol'nogo vklucheniya pod dejstviem ploskoj volny [On the Motion of a Rigid Rectangular Inclusion in an Elastic Medium under the Action of a Plane Wave].* МТТ, 1977, No.I, Pp.158-164.



7. Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L.N., Tarlakovskij D.V. *Volny v sploshnyh sredah [Waves in continuous media]*. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
8. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. *Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, Vol.158, No1, 012073. DOI:10.1088/1757-899X/158/1/012073.
9. Ivanov V.A., Pajmushin V.N. *Utochnennaya postanovka dinamicheskikh zadach trekhslojnyh obolochek s transversal'no-myagkim zapolnitelem chislenno-analiticheskij metod ih resheniya [Refined Statement of Dynamic Problems of Three-Layer Shells with a Transversally Soft Filler Numerical-Analytical Method for Their Solution]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1995, Vol.36, No.4, Pp.147-151.
10. Gorshkov A.G., Starovojtov E.I., Tarlakovskij D.V. *Teoriya uprugosti i plastichnosti [Theory of elasticity and plasticity]*. Moskva, FIZMATLIT, 2002, 416 p.
11. Durbin F. *Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method*. The Computer Journal, 1974, Vol.17, No.4, Pp.371-376.
12. Igumnov L.A., Litvinchuk S.YU., Belov A.A. *Chislennoe obrashchenie preobrazovaniya Laplasy [Numerical inversion of the Laplace transform]*. Nizhnij Novgorod, NNGU, 2010, 34 p.
13. Lokteva N.A., Tarlakovskii D.V. *Analysis of vibration insulation properties of a plate in an elastic medium under the influence of different types of waves*. Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, 2019, Pp.298-303. DOI: 10.1007/978-3-030-21894-2.
14. Chemodurov V.T., Kancerov P.M. *Raschet mnogoslojnoj plastiny s privedennoj zhestkost'yu [Calculation of a multilayer plate with reduced stiffness]*. Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost', 2021, No.42, Pp.18-25.
15. *Svod pravil po proektirovaniyu i stroitel'stvu SP 23-105-2004 "Ocenka vibracii pri proektirovanii i stroitel'stve i ekspluatatsii ob"ektov metropolitena" [A set of rules for the design and construction of SP 23-105-2004 "Vibration assessment in the design and construction and operation of metro facilities"]*. Moskva, GOSSTROI ROSSII, 2014.

Поступила в редакцию 29 декабря 2021 года.

---

Сведения об авторах:

Локтева Наталья Александровна – к.т.н., доц., Кафедра «Соппротивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nlok@rambler.ru](mailto:nlok@rambler.ru)  
Нгуен Зьонг Фунг – асп., Кафедра «Соппротивление материалов, динамика и прочность машин», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nguyenduongphung1993@gmail.com](mailto:nguyenduongphung1993@gmail.com)