

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.04.523_542.07

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТОЙКИ ШЕНЛИ НА СТЕРЖНЯХ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ОБРАТНОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В РАМКАХ ОБЪЕДИНЕННОЙ МОДЕЛИ ФАЗОВО-СТРУКТУРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ*

Думанский С.А.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Сплавы с памятью формы (СПФ) во многих приложениях используются как исполнительные механизмы или неподвижные части составных конструкций. В обоих случаях они часто функционируют под действием переменных температур и нагрузок, часто являющихся сжимающими. Это приводит к необходимости проводить анализ устойчивости данных элементов. Из-за сложного термомеханического поведения СПФ и отсутствия единого подхода к описанию их напряженно-деформированного состояния расчет устойчивости существенно осложняется даже для объектов с простейшей геометрией. Ввиду оговоренных трудностей и малого числа работ, посвященных данной теме, была предпринята попытка решить задачу устойчивости одномерного нагружения, используя при этом наиболее полную модель поведения СПФ.

Данная работа посвящена аналитическому исследованию устойчивости стойки Шенли на стержнях из СПФ при обратном фазовом превращении под действием постоянной нагрузки. Впервые для подобной задачи применяется объединенная модель неупругого деформирования СПФ. Рассматриваются два способа подготовки стержней перед началом обратного превращения, а именно деформирование в режиме мартенситной неупругости и прямое фазовое превращение под действием постоянной нагрузки. В качестве критерия потери устойчивости используется квазистатический метод Эйлера, который позволяет линеаризовать кинематические ограничения и статические уравнения равновесия, по отношению к малым углам отклонения стойки от вертикального положения. Сравниваются концепции фиксированной и варьируемой внешней нагрузки при переходе к смежной форме равновесия. Для корректности постановки в концепции варьируемой внешней нагрузки вводится ряд гипотез относительно порядка малости величин, которые могут получать приращения во время потери устойчивости. В зависимости от учета связей между различными параметрами состояния при переходе к смежной форме равновесия задача рассматривается в трех постановках: несвязанной, связанной относительно приращений напряжений, связанной как относительно приращений напряжений, так и термомеханически.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; устойчивость; фазовые переходы; структурные превращения; объединенное фазово-структурное деформирование; термомеханически связанная постановка

*Работа выполнена в рамках госбюджетной темы, государственная регистрация номер 121112200124-1 при частичной финансовой поддержке РФФИ проект №20-01-00240.

ANALYSIS OF A STABILITY OF THE SHANLEY COLUMN ON SHAPE MEMORY ALLOYS RODS DURING THE REVERSE PHASE TRANSITION WITHIN THE FRAMEWORK OF THE COMBINED MODEL OF PHASE-STRUCTURAL DEFORMATION

Dumanskiy S.A.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

ABSTRACT

Shape memory alloys (SMAs) are used in many applications as actuators or fixed parts of complex structures. In both cases, they often function under the influence of variable temperatures and loads, which are often compressive. This leads to the need to analyze the stability of these elements. Due to the complex thermomechanical behavior of SMAs and the lack of a unified approach to describing their stress-strain state, stability calculation is significantly complicated even for objects with the simplest geometry. Due to the specified difficulties and the small number of papers devoted to this topic, an attempt was made to solve the problem of stability of one-dimensional loading, using the most complete model of the behavior of the SMAs.

This work is devoted to the analytical study of the stability of the Shanley column on SMAs rods during reverse phase transformation under the action of a constant load. For the first time, a combined model of inelastic deformation of SMAs is used for such a task. Two methods of preparing rods before starting the reverse transformation are considered, namely, deformation in the mode of martensitic inelasticity and direct phase transformation under the action of a constant load. As a criterion for the loss of stability, the quasi-static Euler method is used, which allows linearizing kinematic constraints and static equilibrium equations, with respect to small angles of deviation of the Shanley column from the vertical position. The concepts of a fixed and variable external load are compared during the transition to an adjacent form of equilibrium. For the correctness of the formulation in the concept of a variable external load, a number of hypotheses are introduced regarding the order of smallness of the quantities that can receive increments during the loss of stability. Depending on taking into account the coupling between different state parameters during the transition to an adjacent form of equilibrium, the problem is considered in three statements: non-coupled, coupled with respect to stress increments, coupled both with respect to stress increments and thermomechanically.

Keywords: shape memory alloys; stability; phase transitions; structural transformations; combined phase-structural

1. ВВЕДЕНИЕ

Сплавы с памятью формы (СПФ) могут быть классифицированы как функциональные материалы. Благодаря своим уникальным свойствам они широко используются в медицинских [1], железнодорожных [2], автомобильных [3] и аэрокосмических приложениях [4]. Сложное макромеханическое поведение СПФ, такое как эффект памяти формы, сверхупругость, мартенситная неупругость, ориентированное превращение, изменение термомеханических свойств при различных механических (уровень напряжений) и немеханических (температура, магнитное поле) воздействиях, обусловлено обратимыми мартенситными фазовыми переходами между высокотемпературной аустенитной и низкотемпературной мартенситной фазами, а также мезо- и микроструктурными превращениями в объеме занимаемом мартенситной фазой.

Феноменологическому моделированию поведения данных материалов посвящено множество работ [5-11]. При этом только в последних моделях учитывается влияние фазового и структурного процессов деформирования друг на друга.

Одной из важных проблем при использовании СПФ в качестве элементов конструкций, работающих в диапазонах температур, допускающих фазовые переходы, является существенное снижение абсолютных значений критических длин или нагрузок, приводящих к потере устойчивости, по сравнению с аналогичными величинами, вычисленными для мартенситного фазового состояния при использовании упругой модели (формулы Эйлера) [12]. Чтобы корректно описать процесс потери устойчивости, наблюдаемый в экспериментах, помимо упругого необходимо учитывать также и фазово-структурное деформирование СПФ. Решение задачи устойчивости для обратного фазового превращения с учетом нелинейного деформирования СПФ предпринимались в работах [13,14]. Однако в приведенных работах не учитывалось взаимное влияние между фазовым и структурным механизмами деформирования. Данная работа посвящена решению задачи устойчивости при обратном фазовом превращении в рамках объединенной модели фазово-структурного деформирования СПФ, использующей аналог комбинированного упрочнения для описания структурного деформирования, основанной на определяющих соотношениях, предложенных в работе [11].

1.1. Стойка Шенли.

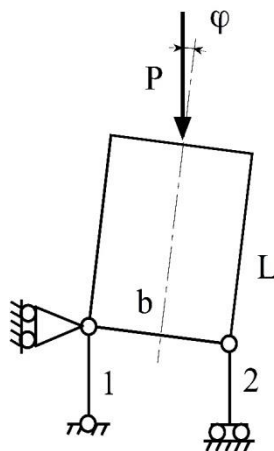


Рис.1.

В данной работе стойка Шенли [15] (рис.1) определяется, как жесткое твердое тело (рамка), прямоугольной формы ($b \times L$), шарнирно опертое на два одинаковых стержня из СПФ длины $a \ll b$ и площадью поперечного сечения F . К верхней стороне стойки прикладывается постоянная по величине и направлению нагрузка P .

Сжимающие усилия и, соответственно, напряжения, вопреки традиционному соглашению, часто используемому при исследовании устойчивости, считаются отрицательными.

Предполагается, что начальная деформация стержней отсчитывается от аустенитного фазового состояния. Перед началом обратного фазового перехода в равномерно нагруженных стержнях реализуются одинаковые сжимающие деформации, согласующиеся с действующим в каждом из стержней напряжением

$\sigma = \frac{P}{2F}$. Далее, для удобства, присвоим каждому из стержней и всем связанным с ним параметрам индексы 1 и 2, соответственно.

Кинематические условия деформирования совместно с условиями равновесия стойки в искривленном состоянии записываются следующим образом

$$c \sin(\varphi) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad c = \frac{b}{a}, \quad (1.1)$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2)F = P, \quad (1.2)$$

$$PL \sin(\varphi) + (\sigma_2 - \sigma_1)F \frac{b}{2} \cos(\varphi) = 0. \quad (1.3)$$

Из уравнений равновесия сил (1.2) и моментов (1.3) можно получить выражения для напряжений, действующих в каждом из стержней стойки

$$\sigma_{1,2} = \sigma \mp 2L_b \sigma \tan(\varphi), \quad L_b = \frac{L}{b}. \quad (1.4)$$

1.2. Устойчивость.

Процесс потери устойчивости при обратном фазовом превращении, наблюдаемый в экспериментах, можно условно разделить на два этапа. Первый соответствует докритическому деформированию, когда стержни удлиняются на одинаковые расстояния, под действием монотонно увеличивающейся температуры. Угол, определяющий отклонение оси рамки (штрих-пунктирная линия) от линии параллельной оси каждого из стержней, $\varphi = 0$. Второй процесс происходит намного быстрее, чем нагрев, поддерживающий обратное фазовое превращение, и выражается в мгновенном отклонении оси стойки от вертикали $\varphi \neq 0$. Температура во время перехода к смежной форме равновесия занимает промежуточное положение между температурами начала и окончания обратного превращения.

Для математического описания потери устойчивости можно использовать *статический метод* Эйлера [16], заключающийся в изучении возможности существования форм квазистатического равновесия, смежных с исходной, при заданном значении нагрузки. Задача в такой постановке линеаризуется относительно малого приращения угла наклона рамки стойки $\delta\varphi$.

Приращения деформаций определяются из (1.1)

$$c\delta\varphi = \delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_2, \quad (1.5)$$

учтено, что $\sin(\delta\varphi) = \delta\varphi + O(\delta\varphi^3) \xrightarrow{\delta\varphi \rightarrow 0} \delta\varphi$.

Вариация внешней нагрузки, в общем случае, определяется из уравнения (1.2)

$$\frac{\delta P}{F} = 2\delta\sigma = \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2. \quad (1.6)$$

Если изменение нагрузки отлично от нуля, то будем говорить о концепции варьируемой нагрузки (ВН), а в противном случае о концепции фиксированной нагрузки (ФН).

Приращения напряжений в концепции ВН могут быть найдены при помощи уравнения (1.4)

$$\delta\sigma_{1,2} = \delta\sigma \mp 2L_b \sigma \delta\varphi. \quad (1.7)$$

Предполагается, что вариация внешней нагрузки не связана явно с вариацией угла отклонения стойки. При этом, для корректной постановки задачи, необходимо, чтобы величины $\delta\sigma$ и $\delta\varphi$ имели один порядок малости.

Во время получения соотношения (1.7) учтено, что стойка в начальный момент времени находится в прямолинейном положении $\varphi\delta\sigma = 0\delta\sigma = 0$, а смежная форма равновесия бесконечно близка к исходной $\tan(\delta\varphi) = \delta\varphi + \mathcal{O}(\delta\varphi^3) \xrightarrow{\delta\varphi \rightarrow 0} \delta\varphi$. Величина второго порядка малости, содержащая множитель $\delta\sigma\delta\varphi$, не учитывается.

2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{phst}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.2)$$

$$\nu(q) = \frac{E(q)}{2G(q)} - 1, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}, \quad \frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \quad 0 \leq q \leq 1,$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon^0 dq \delta_{ij} + d\varepsilon_{ij}^{ph'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^{\pm} dq, \quad (2.3)$$

$$\omega_{ij}^{\pm} = \begin{cases} \frac{3}{2} \rho_D^f(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \varphi_f(\sigma_i, \mu_\sigma) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, & dq > 0 \\ \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, & dq < 0 \end{cases}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij},$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda s_{ij}, \quad d\lambda > 0, \quad (2.4)$$

$$s_{ij} = \sigma'_{ij} - r_{ij}, \quad dr_{ij} = gd\varepsilon_{ij}^M, \quad \varepsilon_{ij}^M = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}, \quad (2.5)$$

$$\rho_D^m(\mu_s) \varphi_m(s^*, \mu_s) = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ \max \left\{ \frac{\varepsilon_i^{phst'}}{q} \right\}, & 0 < q \leq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$q = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t^{\pm})), \quad (2.7)$$

$$t^+ = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S},$$

$$t^- = 1 - \frac{T - A_s^\sigma}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}^- \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij}) + \varepsilon^0 \sigma_{kk}}{\Delta S},$$

$$Z(\sigma_{ij}) = \frac{C}{2} \sigma_{kk}^2 + \frac{D}{2} \sigma_i^2, \quad C = \frac{1}{3} \frac{K_A - K_M}{K_A K_M}, \quad D = \frac{1}{3} \frac{G_A - G_M}{G_A G_M},$$

$$k_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} + T \theta \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U + \varepsilon^0 \sigma_{kk} + \omega_{ij}^- \sigma'_{ij} + Z(\sigma_{ij})) \dot{q} - s_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{st}. \quad (2.8)$$

ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{phst} – тензоры полных, упругих и фазово-структурных деформаций; q – объемная доля мартенситной фазы; $E(q)$, E_M , E_A , $G(q)$, G_M , G_A и $K(q)$, K_M , K_A – модуль Юнга, сдвиговой и объемный модули, а также их значения для аустенитного (A) и мартенситного (M) фазовых состояний; $\nu(q)$ – коэффициент Пуассона; ε^0 – деформация объемного эффекта фазового перехода; функция f определяет отношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов и может быть аппроксимирована соотношением $f(q) = \frac{1}{q + C_0}$,

где константа материала $C_0 \geq 0$ может быть найдена из испытаний на ориентированное превращение; $\rho_D^f(\mu_\sigma)$ и $\rho_D^m(\mu_s)$ – максимальные интенсивности фазово-структурных деформаций при прямом фазовом превращении (f) и структурном деформировании в режиме мартенситной неупругости (m); μ_σ и μ_s – параметры вида напряженного состояния (в данной работе являются фиксированными величинами); $\varphi^f(\sigma_i)$ и $\varphi^m(\sigma_i)$ – материальные функции, определяющие вид диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости.

В работе [17] показано, что рационально в качестве функций, аппроксимирующих диаграммы прямого перехода $\varphi^f(\sigma_i)$ и мартенситной неупругости $\varphi^m(\sigma_i)$, использовать Гамма-распределение

$$\gamma(x, d, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{x}{d}} t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

с плотностью

$$\gamma'(x, d, \alpha) = \frac{1}{d^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{d}}.$$

$d > 0$ – параметр масштаба, $\alpha > 0$ – параметр формы, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$ – Гамма-функция Эйлера; ε_{ij}^M – тензор собственных фазово-структурных деформаций мартенсита; g – материальная константа, характеризующая трансляционное упрочнение во время структурного деформирования; M_s^0 , M_f^0 , M_s^σ и A_s^0 , A_f^0 , A_s^σ – температуры начала (s) и окончания (f) прямого (M) и обратного (A) фазовых переходов в ненагруженном состоянии (0), а также температуры начала прямого/обратного превращений при наличии напряжений (σ); k_q , C_σ , θ , ΔU , ΔS – коэффициент теплопроводности, теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, коэффициент температурного расширения, объемная плотность латентного тепла фазового перехода и скачок объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного состояния в аустенитное.

2.1. Обратное фазовое превращение.

Перед началом обратного превращения стержни находятся в мартенситном фазовом состоянии под действием постоянной нагрузки. Упругие и объемные фазово-структурные деформации в обоих стержнях одинаковы и равны $\frac{\sigma}{E_M}$ и ε^0 , соответственно. Девиаторные компоненты фазово-структурных деформаций предполагаются равными, но зависящими от того каким способом они были получены. Далее индексы у осевых компонент тензоров деформаций и напряжений опускаются.

Два наиболее простых способа задания начальных деформаций в стержнях:

I. Прямое фазовое превращение в свободном от нагрузок состоянии с последующим нагружением в режиме мартенситной неупругости

до напряжения $\sigma = \frac{P}{2F}$. Начальная фазово-структурная деформация

$\varepsilon^0 + \varepsilon_I^{phst'}$ ($1, \sigma$) принадлежит поверхности упрочнения (2.6). В пространстве

$(\varepsilon_{ij}^{phst}, \sigma_{ij})$ путь нагружения может быть схематически представлен следующим

образом: $(0, 0) \xrightarrow{A-M} (0, \varepsilon^0) \xrightarrow{M-M} (\sigma, \varepsilon^0 + \varepsilon_I^{st})$.

II. Прямое фазовое превращение под действием постоянного напряжения σ , во время которого принимаются меры для предотвращения потери устойчивости. Температура поддерживается на достаточно высоком уровне, чтобы во время монотонного увеличения нагрузки от нулевого значения материал находился в полностью аустенитном фазовом состоянии ($A_s^\sigma \leq T$).

Напряженно-деформированное состояние в конце прямого фазового превращения определяется диаграммой прямого превращения. Схема нагружения имеет следующий вид: $(\sigma, 0) \xrightarrow{A-M} (\sigma, \varepsilon^0 + \varepsilon_{II}^{phst'})$.

Другие способы создания предварительных фазово-структурных деформаций, например, описанные в [18-19], не рассматриваются в данной работе. Далее будем называть рассмотренные процедуры предварительного деформирования стержней случаями I и II. Начальную фазово-структурную деформацию можно представить следующим образом

$$\varepsilon_{I,II}^* = \varepsilon^0 + \varepsilon_{I,II}^{phst'}(\sigma).$$

Если утверждение относится к обоим случаям подготовки стержней, то индекс I или II будет опускаться.

С учетом приведенных способов создания начальной деформации и реализуемыми режимами нагружения далее можно считать, что вид напряженного состояния сохраняется постоянным во время всего процесса подготовки. Данное заключение справедливо и для последующего процесса обратного фазового превращения, включая момент потери устойчивости. Далее считается, что $\rho_D^f = const$, $\rho_D^m = const$, $\varphi_f = \varphi_f(\sigma)$ и $\varphi_m = \varphi_m(\sigma)$.

После того, как определены деформации стержней перед началом обратного фазового превращения, задача устойчивости может считаться полностью поставленной.

3. РЕШЕНИЕ

3.1. Деформация прямого превращения.

Девиаторные компоненты неупругих деформаций удовлетворяют дифференциальным соотношениям (2.1), (2.5), (2.3) и (2.4).

Структурное деформирование мартенсита имеет место, когда одновременно выполняются два условия [11]:

1. точка, определяющая процесс деформирования в пространстве напряжений, принадлежит поверхности упрочнения (2.6);
2. скалярный множитель $d\lambda$ строго положителен.

При зарождении мартенситных элементов поверхность нагружения, определяющая структурное деформирование, не определена. Из экспериментов следует, что напряжения, при которых происходит структурное деформирование мартенсита, полученного путем прямого превращения под действием постоянных напряжений, превосходят напряжения его формирования.

На основании этого наблюдения для разрешения неоднозначности формулируются следующие гипотезы:

1. Неупругие деформации, зарождающиеся под действием постоянных напряжений, мартенситных структур определяются исключительно за счет фазового механизма.
2. Инициализация в новообразовавшихся мартенситных элементах параметров, описывающих структурное деформирование (радиус поверхности нагружения σ^* и тензор трансляции r_{ij}), производится на основании соотношений

$$\varepsilon_i^M = \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} = \rho_D^m \varphi_m(\sigma^*), \quad r_{ij} = 0. \quad (3.1)$$

Фазово-структурные деформации на первом этапе прямого превращения удовлетворяют соотношению (2.3), которое может быть представлено в следующем виде

$$\frac{d\varepsilon_{ij}^{phst'}}{dq} - f(q)\varepsilon_{ij}^{phst'} = h(q, \sigma_{ij}) = \frac{3}{2} \rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i)(1 - qf(q)), \quad \varepsilon_{ij}^{phst'}(0) = 0.$$

Решение данного уравнения может быть получено в аналитической форме

$$\varepsilon_{ij}^{phst'} = e^{\int_0^q f(x)dx} \int_0^q h(y, \sigma_{ij}) e^{-\int_0^y f(x)dx} dy = \frac{3}{2} \rho_D^f q \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i). \quad (3.2)$$

Радиус поверхности нагружения, согласно тождеству (3.1) равен

$$\sigma^* = \varphi_m^{-1} \left[\frac{\rho_D^f}{\rho_D^m} \varphi_f(\sigma_i) \right]. \quad (3.3)$$

На последующих этапах прямого превращения параллельно происходят два процесса: зарождение новых мартенситных структур и рост уже существующих мартенситных элементов. Оба данных процесса описываются принятой моделью определяющих соотношений. Остается ответить на вопрос, может ли одновременно с ростом мартенситных структур происходить их переориентация. Для этого рассмотрим первое необходимое условие структурного деформирования. Из выражения (3.3) и физических ограничений, накладываемых на функции, описывающие диаграммы мартенситной неупругости и прямого превращения ($\rho_D^f \varphi_f(\sigma_i) \geq \rho_D^m \varphi_f(\sigma_i)$), следует, что $\sigma_i < \sigma^*$. Выполнение последнего неравенства гарантирует отсутствие структурного деформирования

во время прямого превращения под действием постоянных напряжений в случае изотропно упрочняющейся поверхности нагружения.

В данной работе учитывается возможность перемещения поверхности нагружения, которое может происходить даже если точка, описывающая напряженное состояние, находится внутри данной поверхности.

Рассмотрим второй этап прямого превращения, когда можно наблюдать эволюцию уже сформировавшихся мартенситных элементов. Приращение тензора трансляции поверхности структурного деформирования определяется соотношением (2.5)

$$dr_{ij} = gd\varepsilon_{ij}^M = gd\left(\frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}\right) = g\left(\frac{d\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} - \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q^2}dq\right) = g\left(\omega_{ij}^+ - \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q}\right)\frac{dq}{q} + \frac{g}{q}d\varepsilon_{ij}^{st}.$$

Множитель в скобках у первого слагаемого равен нулю. Действительно, учитывая (2.3) его можно переписать следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q))\varphi_f(\sigma_i) + f(q)\varepsilon_{ij}^{phst'} - \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} = \\ = \left[\frac{3}{2}\rho_D^f \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \varphi_f(\sigma_i) - \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} \right] (1 - qf(q)), \end{aligned}$$

тогда принимая во внимание (3.2), нетрудно видеть, что слагаемое в квадратных скобках обращается в ноль.

Второе слагаемое также равно нулю, поскольку точка, описывающая напряженное состояние, не принадлежит поверхности структурного деформирования.

Итак, во время прямого превращения при фиксированном уровне напряжений, в рамках рассматриваемой модели определяющих соотношений, структурное деформирование не происходит. На момент окончания прямого превращения осевая компонента фазово-структурной деформации определяется соотношением

$$\varepsilon_{ii}^* = \varepsilon^0 - \rho_D^f \varphi_f(|\sigma|). \tag{3.4}$$

Если рассматривается случай I, то после окончания прямого превращения мартенсит хаотически ориентирован, а радиус поверхности нагружения и тензор трансляции равны нулю. При монотонном приложении сжимающей нагрузки неупругое деформирование происходит по структурному механизму и описывается соотношениями

$$\begin{cases} d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda s_{ij} \\ dr_{ij} = gd\varepsilon_{ij}^{st} \\ \rho_D^m \varphi_m(s_i) = \max\{\varepsilon_i^{st}\} \end{cases} \tag{3.5}$$

В общем случае функция трансляционного упрочения g может зависеть от действующих напряжений, остаточных напряжений, неупругих деформаций и других внутренних параметров состояния материала. В данной работе предполагается, что g является постоянной величиной и, с учетом отсутствия остаточных напряжений в материале на момент начала структурного деформирования, второе уравнение системы может быть заменено конечным линейным соотношением.

Параметр $d\lambda$ определяется из выражения для полного дифференциала последнего уравнения системы (3.5). Эксперименты показывают, что диаграмма мартенситной неупругости является монотонной функцией действующих напряжений, поэтому операция взятия максимума может быть опущена

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda s_{ij} \\ d\varepsilon_{ij}^{st} = d\lambda = \frac{\frac{3}{2} \rho_D^m \varphi'_m(s_i) \frac{s_{kl}}{s_i} d\sigma'_{kl}}{\frac{2}{3} s_{kl} \frac{\varepsilon_{kl}^{st}}{\varepsilon_i^{st}} + \rho_D^m g s_i \varphi'_m(s_i)} > 0 \\ s_{ij} = \sigma'_{ij} - g \varepsilon_{ij}^{st} < 0 \\ \rho_D^m \varphi_m(s_i) = \varepsilon_i^{st} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$\sigma'_{ij} = s_{ij} = \varepsilon_{ij}^{st} = d\sigma_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{st} = 0$, если $i \neq j$. Для простоты будем рассматривать стержни, имеющие две ортогональные оси симметрии, направления которых совпадают с направлением осей Ox_2 и Ox_3 . Учитывая отсутствие объемной компоненты у структурной деформации ($\varepsilon_{kk}^{st} = 0$)

$$\varepsilon_{ij}^{st} = \varepsilon^{st} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i = |\sigma| = -\sigma, \quad \varepsilon_i^{st} = |\varepsilon^{st}| = -\varepsilon^{st}, \quad \sigma'_{kl} \varepsilon_{kl}^{st} = \sigma \varepsilon^{st} = |\sigma| |\varepsilon^{st}|,$$

$$s_{kl} \varepsilon_{kl}^{st} = S \varepsilon^{st}, \quad s_{kl} d\sigma'_{kl} = \frac{2}{3} S d\sigma, \quad S = \sigma - \frac{3}{2} g \varepsilon^{st},$$

$$s_i = \sqrt{\sigma_i^2 - 3g\sigma'_i \varepsilon_{ij}^{st} + \frac{9}{4} g^2 (\varepsilon_i^{st})^2} = |S|.$$

В одномерном случае система (3.6) эквивалентна двум уравнениям

$$\left\{ \begin{array}{l} d\varepsilon^{st} = \Lambda(\sigma, \varepsilon^{st}) d\sigma, \Lambda = \frac{\rho_D^m \varphi'_m(|S(\sigma, \varepsilon^{st})|)}{\left[\text{sign}(\varepsilon^{st} S) + \frac{3}{2} \rho_D^m g \varphi'_m(|S(\sigma, \varepsilon^{st})|) \right]} \\ \rho_D^m \varphi_m(|S|) = |\varepsilon^{st}| \end{array} \right. \quad (3.7)$$

с начальным условием $\varepsilon^{st}(0) = 0$.

Решать данную систему можно двумя путями:

1. Прямой. Независимо проинтегрировать первое уравнение и проверить, что его решение удовлетворяет второму уравнению системы.
2. Обратный. Разрешить второе уравнение относительно ε^{st} и проверить выполнение двух условий:
 - a. $\Lambda(\sigma, \varepsilon^{st})$ непрерывно дифференцируема по обоим аргументам;
 - b. $\Lambda(\sigma, \varepsilon^{st}(\sigma)) > 0, \forall \sigma$.

Первое условие позволяет гарантировать существование и единственность решения задачи Коши, а второе является необходимым условием структурного деформирования. Выполнение начального условия гарантируется вторым уравнением, поэтому отдельно не проверяется.

Таким образом начальная деформация в случае I определяется выражением

$$\varepsilon_i^* = \varepsilon^0 + \varepsilon^{st}(\sigma). \quad (3.8)$$

3.2. Тривиальный процесс.

Описанные в п.2.3 способы подготовки стержней, согласно выражениям полученным в п.3.1, приводят к различным деформированным состояниям. Из этого следует, что процессы деформирования во время обратного фазового превращения также могут отличаться. Удобно снова вернуться к представлению фазовых деформаций $\varepsilon_{i,II}^*$ в виде точек в пространстве $(\varepsilon^{phst}, \sigma)$. В I-ом случае точка принадлежит поверхности структурного деформирования, а во II-ом – не принадлежит. После начала обратного фазового превращения объемная доля мартенсита, а вместе с ней и фазовые деформации, монотонно уменьшается. Процесс деформирования описывается дифференциальными уравнениями (2.1), (2.5), (2.3) и (2.4)

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = \frac{\varepsilon_{ij}^{phst'}}{q} dq + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad (3.9)$$

с начальными условиями $\varepsilon_{ij}^{phst'} = \varepsilon_{ij}^*$.

Параметр $d\lambda$ для обратного фазового превращения снова может быть найден при помощи (2.6)

$$d\lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{1}{g} q \frac{s_{kl}}{s_i^2} d\sigma'_{kl}, & \varepsilon_i^{phst} < \max\{\varepsilon_i^{phst}\} \\ \frac{2}{3} \frac{\rho_D^m q \varphi'_m(s_i) s_{kl}}{s_i} d\sigma'_{kl}, & \varepsilon_i^{phst} = \max\{\varepsilon_i^{phst}\}, d\varepsilon_i^M > 0 \\ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_{kl}^{phst'}}{\varepsilon_i^{phst}} s_{kl} + \rho_D^m g s_i \varphi'_m(s_i) & \end{cases} \quad (3.10)$$

откуда следует, что при прямом превращении под действием постоянной нагрузки ($\delta\sigma_{ij} = 0$) $d\lambda = 0$. Таким образом структурное деформирование в тривиальном процессе не происходит. Следует отдельно отметить, что радиус и тензор остаточных напряжений также не получают приращений во время обратного фазового перехода под действием постоянной нагрузки.

Неупругая компонента осевой деформации определяется из уравнения (3.9)

$$\varepsilon^{phst} = \varepsilon^*(\sigma)q. \quad (3.11)$$

3.3. Переход к смежной форме равновесия.

Приращение упругой деформации для каждого стержня можно получить проварьировав (2.2)

$$\delta\varepsilon_\alpha^e = \frac{\delta\sigma_\alpha}{E} + B\sigma\delta q_\alpha, \quad B = \frac{E_A - E_M}{E_A E_M}, \quad (3.12)$$

где греческой буквой $\alpha = 1, 2$ обозначается номер стержня стойки.

Вариация фазовой деформации определяется соотношением (2.3)

$$\delta \varepsilon_{\alpha}^{ph} = \varepsilon^*(\sigma) \delta q_{\alpha}. \quad (3.13)$$

Во время тривиального процесса поверхность упрочнения и точка, описывающая напряженно-деформированное состояние мартенсита, полностью определяются своими значениями, полученными в результате подготовки стержней. В момент выпучивания напряжения в стержнях получают бесконечно малые вариации, которые могут, в случае совпадения знака действующего напряжения и его приращения, инициировать дополнительное структурное деформирование в догружаемом стержне. При этом точка $(\varepsilon_{ij}^{phst'}, \sigma'_{ij})$ должна принадлежать поверхности структурного упрочнения (2.6). Это требование выполняется только в первом случае подготовки стержней, для которого на основании уравнений (2.4) и (2.6) можно определить приращения структурной деформации

$$\delta \varepsilon_{\alpha}^{st} = \Lambda q \langle \delta \sigma_{\alpha} \rangle_{-}, \quad (3.14)$$

$$\text{где } \langle y \rangle_{-} = \begin{cases} y, & y < 0 \\ 0, & y \geq 0 \end{cases}$$

Вывод данного уравнения аналогичен приведенному в п.3.1, поскольку правая часть выражения (2.6) равна $\max \left\{ \frac{\varepsilon_i^{phst}}{q} \right\} = |\varepsilon^0 + \varepsilon^*(\sigma)|$.

Для второго случая подготовки стойки вариации структурных деформаций стержней тождественно равны нулю.

Приращение объемной доли мартенситной фазы может быть найдено при помощи варьирования уравнения (2.7)

$$\delta q = \lambda(q) (\delta A_s^{\sigma} - \delta T), \quad \lambda = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{A_f^0 - A_s^0}. \quad (3.15)$$

Приращение температуры начала обратного фазового превращения, определяется выражением

$$\Delta S \delta A_s^{\sigma} = [\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma] \delta \sigma + \frac{\sigma}{q} \delta \varepsilon^{st}. \quad (3.16)$$

Вариация температуры может быть найдена из уравнения энергетического баланса (2.8). При этом предполагается допустимость замены операции дифференцирования по времени на варьирование. Дополнительно принимается гипотеза о равномерном распределении поля температуры по объему стержней ($\Delta T = 0$). Таким образом изменение температуры, вызванное переходом к смежной форме равновесия может быть найдено из следующего соотношения

$$C_{\sigma} \delta T = -\theta(q) T(q, \sigma) \delta \sigma + [\Delta U + \varepsilon^*(\sigma) \sigma + Z(\sigma)] \delta q + S(\sigma) \delta \varepsilon^{st}. \quad (3.17)$$

Температура в тривиальном процессе определяется из уравнения (2.7).

Подставляя выражения (3.16) и (3.17) в соотношение (3.15) и учитывая монотонное убывание объемного содержания мартенситной фазы во время прямого фазового превращения, получим

$$\delta q = \frac{\langle \Upsilon \delta \sigma \rangle_{-}}{\Theta} \quad (3.18)$$

$$\Upsilon = \frac{\lambda(q)}{\Delta S} \left[\theta(q) \frac{\Delta S}{C_\sigma} T(q, \sigma) + \varepsilon^*(\sigma) + B\sigma + \left(\frac{\sigma}{q} - S(\sigma) \frac{\Delta S}{C_\sigma} \right) \Lambda(\sigma) q H(-\delta\sigma) \right],$$

$$\Theta = 1 + \frac{\lambda(q)}{C_\sigma} [\Delta U + \varepsilon^*(\sigma)\sigma + Z(\sigma)],$$

где $H(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$.

Второй аргумент в функциях S и Λ отброшен, поскольку в тривиальном процессе структурное деформирование отсутствует, и активные напряжения можно явным образом выразить через напряжения

$$S = \sigma - \frac{3}{2} g [\varepsilon^*(\sigma) - \varepsilon^0].$$

Следует отметить, что для второго случая подготовки стержней $\Lambda \equiv 0$.

Исходя из предположения о бесконечно малом повороте оси стойки при переходе к смежной форме равновесия вариация полной деформации может быть представлена в виде суммы компонентов, связанных с различными механизмами деформирования

$$\delta\varepsilon_\alpha = \delta\varepsilon_\alpha^e + \delta\varepsilon_\alpha^{ph} + \delta\varepsilon_\alpha^{st}.$$

Данные соотношения на основании равенств (3.12), (3.13) и (3.14), при учете выражения (3.18) могут быть представлены в виде

$$\delta\varepsilon_\alpha = \Psi_\alpha(q, \sigma) \delta\sigma_\alpha, \quad \delta\sigma_\alpha = \delta\sigma + 2(-1)^\alpha L_b \sigma \delta\varphi$$

$$\Psi_\alpha = \frac{1}{E(q)} + [\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma] \frac{\Upsilon}{\Theta} \quad H(-\Upsilon \delta\sigma_\alpha) + \Lambda(\sigma) q H(-\delta\sigma_\alpha) \quad (3.19)$$

где $\Upsilon = \Upsilon[q, \sigma, \text{sign}(\delta\sigma_\alpha)]$ и $\Theta = \Theta(q, \sigma)$.

3.4. Критическая длина.

Соотношение (2.1) для смежной формы равновесия, учитывая малость угла отклонения стойки $\sin(\delta\varphi) \approx \delta\varphi$, принимает следующий вид

$$c\delta\varphi = \delta\varepsilon_1 - \delta\varepsilon_2 = \Psi_1 \delta\sigma_1 - \Psi_2 \delta\sigma_2. \quad (3.20)$$

Подставляя в (3.20) выражения для вариаций полных деформаций в стержнях (1.7)

$$c\delta\varphi = \Psi_1 \delta\sigma_1 - \Psi_2 \delta\sigma_2 = \Psi_1 (\delta\sigma - 2L_b \sigma \delta\varphi) - \Psi_2 (\delta\sigma + 2L_b \sigma \delta\varphi) =$$

$$= (\Psi_1 - \Psi_2) \delta\sigma - 2L_b \sigma (\Psi_1 + \Psi_2) \delta\varphi$$

или

$$l = \frac{(\Psi_1 - \Psi_2) \delta\sigma}{2\sigma(\Psi_1 + \Psi_2) \delta\varphi} \quad (3.21)$$

где $l = \frac{L_b}{c} = \frac{aL}{b^2}$ – безразмерный параметр, при фиксированных значениях a и b , эквивалентный длине стержня, упрощенной моделью которого является стойка Шенли.

Для корректной формулировки задачи устойчивости необходимо, чтобы $z = \frac{1}{2L_b\sigma} \frac{\delta\sigma}{\delta\varphi} = O(1)$.

Функции Ψ_α зависят от знаков приращений $\delta\sigma_\alpha$, которые непосредственно связаны с величиной z . Действительно, $\delta\varphi > 0$ и $\text{sign}(\delta\sigma_\alpha) = \text{sign}\left[\frac{\delta\sigma}{\delta\varphi} + 2(-1)^\alpha L_b\sigma\right] = \text{sign}(\sigma)\text{sign}\left[z + (-1)^\alpha\right]$.

$$\Psi_\alpha = \Psi_\alpha(q, \sigma, z)$$

1. $z < -1$: $\delta\sigma_1 > 0$ и $\delta\sigma_2 > 0$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \frac{1}{E(q)} + (\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma) \frac{\Upsilon}{\Theta} H(-\Upsilon)$$

2. $z = -1$: $\delta\sigma_1 > 0$ и $\delta\sigma_2 = 0$

$$\Psi_1 = \frac{1}{E(q)} + [\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma] \frac{\Upsilon}{\Theta} H(-\Upsilon), \quad \Psi_2 = \frac{1}{E(q)}$$

3. $-1 < z < 1$: $\delta\sigma_1 > 0$ и $\delta\sigma_2 < 0$

$$\Psi_1 = \frac{1}{E(q)} + (\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma) \frac{\Upsilon}{\Theta} H(-\Upsilon), \quad \Psi_2 = \frac{1}{E(q)} + (\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma) \frac{\Upsilon}{\Theta} H(\Upsilon) + \Lambda(\sigma)q$$

4. $z = 1$: $\delta\sigma_1 = 0$ и $\delta\sigma_2 < 0$

$$\Psi_1 = \frac{1}{E(q)}, \quad \Psi_2 = \frac{1}{E(q)} + (\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma) \frac{\Upsilon}{\Theta} H(\Upsilon) + \Lambda(\sigma)q$$

5. $z > 1$: $\delta\sigma_1 < 0$ и $\delta\sigma_2 < 0$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \frac{1}{E(q)} + (\varepsilon^*(\sigma) + B\sigma) \frac{\Upsilon}{\Theta} H(\Upsilon) + \Lambda(\sigma)q$$

Нетрудно видеть, что критическая длина не зависит от z , если $|z| > 1$. При $|z| > 1$ функции Ψ_1 и Ψ_2 не зависят от z , а критическая длина является линейной функцией относительно этой переменной, т.е. достигает экстремума в крайних точках рассматриваемого интервала $|z| = 1 - \delta$, $1 \gg \delta > 0$. Граничные точки $z = \pm 1$ следует рассматривать отдельно, поскольку в них значения функций Ψ_1 и Ψ_2 претерпевают разрыв.

Обобщая вышесказанное можно заключить, что задача поиска критической длины в концепции ВН относительно переменных q и z , при фиксированном значении величины действующего напряжения, может быть сведена к следующему виду

$$l(\sigma) = \min_q \{l(q, \sigma, -1 - \delta), l(q, \sigma, -1), l(q, \sigma, -1 + \delta), l(q, \sigma, 1), l(q, \sigma, 1 - \delta), l(q, \sigma, 1), l(q, \sigma, 1 + \delta)\}. \quad (3.22)$$

В концепции ФН $z \equiv 0$ и критическая длина определяется соотношением

$$l(\sigma) = \frac{1}{2|\sigma| \max_q \{\Psi_1 + \Psi_2\}}. \quad (3.23)$$

Критическая длина, полученная в рамках концепции ФН, ограничивает сверху значения критических длин, которые могут быть получены в концепции ВН.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение безразмерное напряжение $s = \frac{\sigma}{\sigma_Y}$. Непрерывные

линии диаграммы прямого превращения (случай I) и мартенситной неупругости (случай II), пунктирная линия — структурная деформация на момент окончания подготовки стержней (случай I).

Кривые, определяющие фазово-структурные деформации формоизменения на момент начала обратного фазового превращения для случаев I и II, представлены на рис.2.

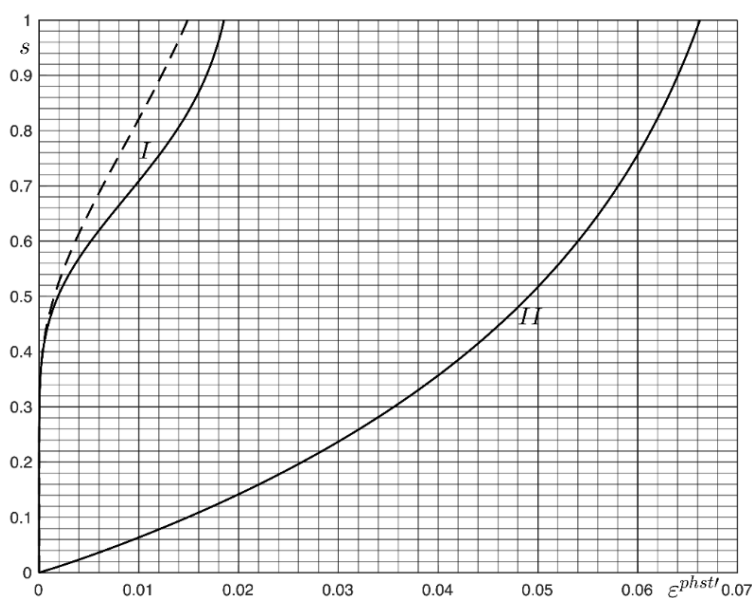


Рис.2.

Из-за наличия трансляционного упрочнения при деформировании по структурному механизму диаграмма мартенситной неупругости $\rho_D^m \varphi_m(|\sigma|)$ и диаграмма, изображающая структурную деформацию, накопленную в каждом из стержней стойки перед началом обратного превращения в случае I, определяемую уравнением (24), не совпадают.

На рис.3,4 изображены графики зависимости критической длины и величины параметра фазового состава от величины действующего напряжения, когда начальная деформация получена при помощи мартенситной неупругости. На рис.5,6 те же графики построены для стержней, начальная деформация в которых создана за счет осуществления прямого превращения под действием постоянной нагрузки.

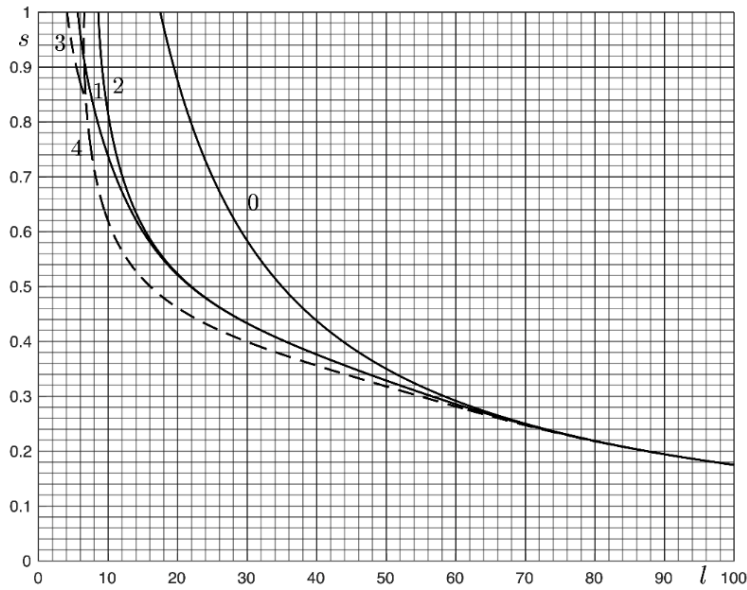


Рис.3.

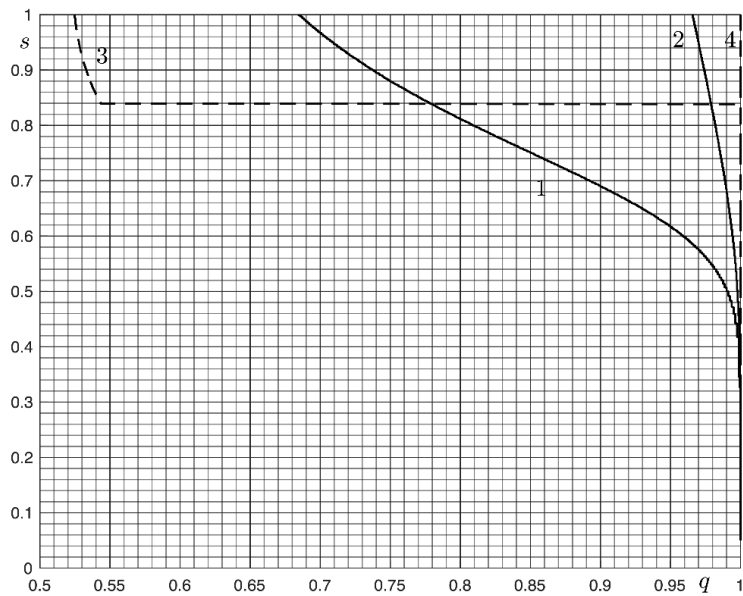


Рис.4.

На всех перечисленных рисунках (3, 4, 5, 6) используются одинаковые обозначения: Линия 0 – несвязанная постановка, Линии 1 (непрерывная) и 3 (пунктирная) – однократно связанная постановка в концепциях ФН и ВН, Линии 2 (непрерывная) и 4 (пунктирная) – дважды связанная постановка в концепциях ФН и ВН.

Разрыв касательной к кривой 3 на рис.3 и резкое изменение величины параметра фазового состава аналогичной кривой на рис.4 при $s_3 = 0.84$, обусловлены сменой механизма деформирования, приводящего к потере устойчивости в обоих стержнях с дополнительного структурного превращения ($s < s_3$) на дополнительный фазовый переход ($s \geq s_3$).

Потеря устойчивости для случая II происходит при существенно более низких значениях параметра фазового состава, за исключением кривой 3 для

($s \geq s_3$). Это обусловлено влиянием дополнительного фазового деформирования на процесс потери устойчивости.

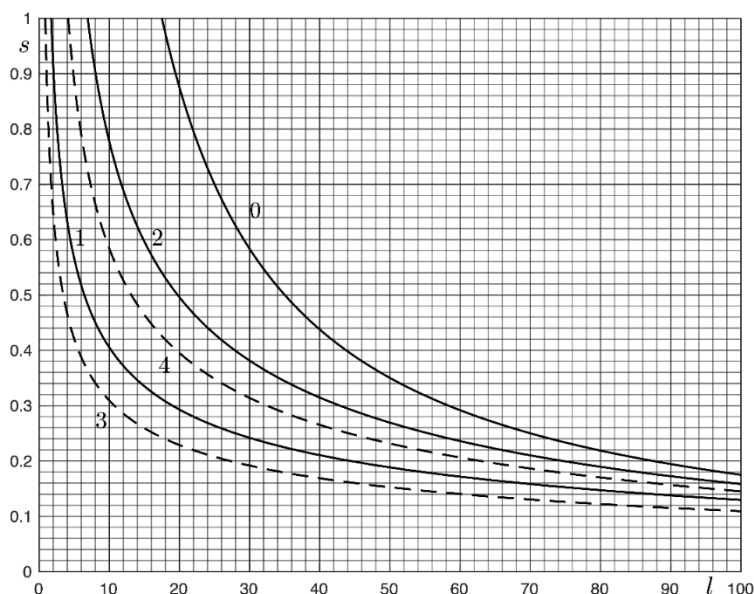


Рис.5.

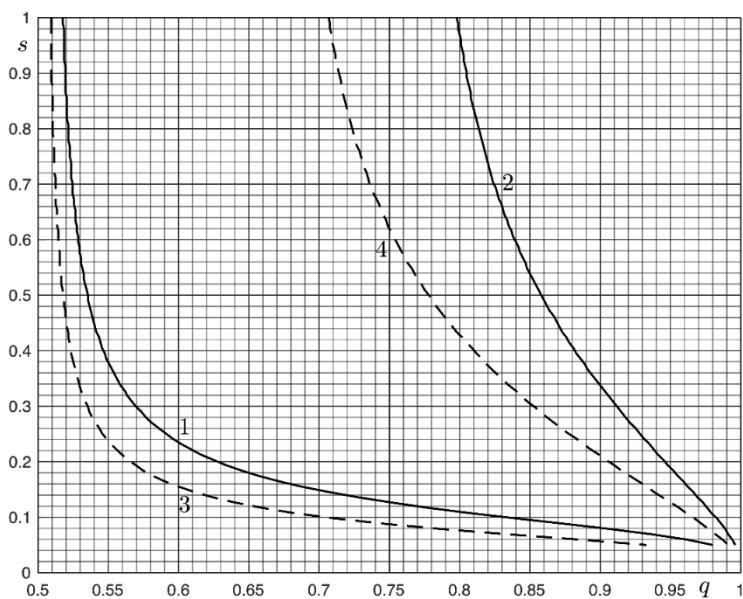


Рис.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установлено, что в рамках рассматриваемой задачи, концепция ФН является частным случаем концепции ВН. Связанным постановкам соответствуют меньшие значения критических длин, в сравнении с несвязанной. Решение, полученное для однократно связанной постановки в концепции ВН, соответствует наименьшему значению критической длины среди всех рассматриваемых постановок и концепций. Для одинаковых действующих нагрузок, стойка, предварительные деформации в стержнях которой получены при помощи прямого фазового превращения (случай II), обладает существенно большими

начальными фазовыми деформациями и меньшими значениями критических длин, чем стойка, подготовка стержней которой осуществлялась за счет деформирования в режиме мартенситной неупругости. Наиболее близкие значения критических длин для различных случаев подготовки стержней реализуются при рассмотрении дважды связанной постановки в концепции ФН. В первом случае подготовки стержней различия между связанными постановками и концепциями менее выражены, чем во втором случае задания начальной деформации. Это означает, что для создания наиболее устойчивых конструкций, геометрия и условия нагружения в которых схожи со стойкой Шенли, например, фермы, содержащие стержни из СПФ, или достаточно длинные стержни, предпочтительным способом создания в них начальных фазово-структурных деформаций является прямое фазовое превращение в свободном от нагрузок состоянии с последующим увеличением уровня напряжений до эксплуатационного значения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Auricchio F., Boatti E., Conti M., Marconi S. *SMA biomedical applications. Chapter 19* / In: Shape Memory Alloy Engineering. – Butterworth-Heinemann, 2021. – Pp.627-658.
2. Kato T. *The use of shape memory alloys (SMAs) in automobiles and trains. Chapter 10* / In: Shape memory and superelastic alloys. – Woodhead Publishing, 2011. – Pp.120-124.
3. Rao A., Srinivasa A.R., Reddy J.N. *Introduction to Shape Memory Alloys* / In: Design of Shape Memory Alloy (SMA) Actuators. – Cham: Springer, 2015. – Pp.1-31.
4. Kumar P., Lagoudas D. *Introduction to Shape Memory Alloys* / In: Shape Memory Alloys. – Boston: Springer, 2008. – Pp.1-51.
5. Paiva A., Savi M.A. *An overview of constitutive models for shape memory alloys* // Mathematical Problems in Engineering. – 2006. – Vol.2006. – Pp.1-30.
6. Lagoudas D.C. *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. – Boston: Springer, 2008. – 436 p.
7. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
8. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
9. Cheikh Cisse, Wael Zaki, Tarak Ben Zineb. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
10. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.
11. Мовчан А.А. *Модель неупругого деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2021. – №3. – С.8-17.
12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное исследование потери устойчивости стержней из никелида титана,*

- вызванной обратным термоупругим мартенситным превращением // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №09. – С.2-7.
13. Думанский С.А., Мовчан А.А. *Дважды связанная постановка задачи о потере устойчивости вызванной обратным термоупругим фазовым превращением в сплаве с памятью формы* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2017. – №5. – С.37-48.
 14. Думанский С.А., Мовчан А.А. *Потеря устойчивости стержня из сплава с памятью формы, вызванная обратным мартенситным превращением* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – №4. – С.94-108.
 15. Byskov E. *Elastic–Plastic Buckling The Shanley Column* / In: Elementary Continuum Mechanics for Everyone. Solid Mechanics and Its Applications. – Dordrecht: Springer, 2013. – Vol.194.
 16. Пановко Я.Г., Губанова И.И. *Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки*. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 352 с.
 17. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
 18. Dumanskiy S.A. *Stability of shape memory alloy rods under reverse phase transformation in case of initial tensile phase-structural strains* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol.934. – 012034.
 19. Dumanskiy S.A. *Stability analysis of a round cross-section rod from shape memory alloys at reverse phase transition* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol.747. – 012001.

REFERENCES

1. Auricchio F., Boatti E., Conti M., Marconi S. *SMA biomedical applications. Chapter 19*. In: Shape Memory Alloy Engineering. Butterworth-Heinemann, 2021, Pp.627-658.
2. Kato T. *The use of shape memory alloys (SMAs) in automobiles and trains. Chapter 10*. In: Shape memory and superelastic alloys. Woodhead Publishing, 2011, Pp.120-124.
3. Rao A., Srinivasa A.R., Reddy J.N. *Introduction to Shape Memory Alloys*. In: Design of Shape Memory Alloy (SMA) Actuators. Cham, Springer, 2015, Pp.1-31.
4. Kumar P., Lagoudas D. *Introduction to Shape Memory Alloys*. In: Shape Memory Alloys. Boston, Springer, 2008, Pp.1-51.
5. Paiva A., Savi M.A. *An overview of constitutive models for shape memory alloys*. Mathematical Problems in Engineering, 2006, Vol.2006, Pp.1-30.
6. Lagoudas D.C. *Shape Memory Alloys. Modeling and Engineering Applications*. Boston, Springer, 2008, 436 p.
7. Movchan A.A., Movchan I.A., Silchenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
8. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3-4, Pp.214-223.

9. Cheikh Cisse, Wael Zaki, Tarak Ben Zineb. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. Intern. J. of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
10. Movchan A.A. *Model for the effect of the phase mechanism of deformation on the structural mechanism in shape memory alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
11. Movchan A.A. *Shape memory alloys inelastic straining model*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.10, Pp.1203-1212.
12. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental study of the buckling of titanium nickelide rods caused by the reverse thermoelastic martensitic transformation*. Russian Metallurgy (Metally), 2021, Vol.2021, No.4, Pp.341-346.
13. Dumanskii S.A., Movchan A.A. *Two-way coupled statement of the problem of loss of stability due to inverse thermoelastic phase transition in a shape memory alloy*. Mechanics of Solids, 2017, Vol.52, No.5, Pp.501-510.
14. Dumanskii S.A., Movchan A.A. *Loss of stability of a rod from a shape-memory alloy caused by reverse martensitic transformation*. Mechanics of Solids, 2019, Vol.54, No.4, Pp.929-940.
15. Byskov E. *Elastic-Plastic Buckling The Shanley Column*. In: Elementary Continuum Mechanics for Everyone. Solid Mechanics and Its Applications. Vol.194. Dordrecht, Springer, 2013.
16. Panovko I.A., Gubanova I.I. *Stability and oscillation of elastic systems: modern concepts, paradoxes and errors*. Washington, National Aeronautics and Space Administration, 1973.
17. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Experimental identification of a nonlinear deformation model for a shape memory alloy during phase and structural transformations russian metallurgy (metally)*. Russian Metallurgy (Metally), 2019, Vol.2019, No.4, Pp.301-308.
18. Dumanskiy S.A. *Stability of shape memory alloy rods under reverse phase transformation in case of initial tensile phase-structural strains*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, Vol.934, 012034.
19. Dumanskiy S.A. *Stability analysis of a round cross-section rod from shape memory alloys at reverse phase transition*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, Vol.747, 012001.

Поступила в редакцию 27 сентября 2021 года.

Сведения об авторе:

Думанский Станислав Александрович – асп., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: stanislavdym@mail.ru