

УДК 517.74:539.3:624-15

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.04.491_499.04

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СВАИ С ГРУНТОМ

Власов Д.А., Зерцалов М.Г.

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе построено точное аналитическое решение краевой задачи теории упругости о плосконапряженном состоянии полуплоскости с периодической системой линейных полубесконечных одномерных включений (ребер жесткости) ортогональных к поверхности. Аналитическое решение представляется в виде рядов по собственным функциям Папковича-Фадля, коэффициенты которых находятся точно с помощью функций биортогональных к собственным, а сами ряды равносходятся с тригонометрическими. Полученное решение применяется для оценки напряженно-деформированного состояния массива дисперсного и скального грунта при его взаимодействии с вертикально нагруженной свайей. При этом в аналитическом решении расстояние между ребрами жесткости принимается равным зоне влияния нагруженной сваи. Кроме того, считается, что на границе контакта свая-грунт реализуются идеальные контактные условия. Приводится сравнение аналитического решения задачи о взаимодействии сваи с грунтом с численным решением, которое было получено в 3D постановке с использованием метода конечных элементов (МКЭ), реализованном в программном комплексе ZSoil. Сравнение показывает, что использование точных решений двумерных задач теории упругости может быть достаточно эффективным при оценке напряженно-деформированного состояния массива дисперсного и скального грунта, взаимодействующего с нагруженной свайей.

Ключевые слова: полуплоскость; собственные функции Папковича-Фадля; грунтовый массив; свая; перемещения; напряжения

ANALYTICAL AND NUMERICAL SOLUTIONS TO THE PROBLEM OF PILE-SOIL AND ROCK INTERACTION

Vlasov D.A., Zertsalov M.G.

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper presents an exact analytical solution to the plane stress elastic boundary value problem of a half-plane with a periodic system of linear semi-infinite one-dimensional inclusions (stiffeners) orthogonal to the surface. The solution is given in the form of Papkovich-Fadl eigenfunction series whose coefficients are found exactly using functions biorthogonal to the eigenfunctions, and the series themselves are equivalent to trigonometric ones. The solution is used to assess the stress-strain state of the soil and rock mass interacting with a vertically loaded pile. At the same time, in the analytical solution, the distance between the stiffeners (piles) is chosen in such a way that they do not affect one another. In addition, the perfect interface between the pile and the soil and rock is assumed. The analytical solution to the

problem of pile-soil and rock interaction is compared with the numerical simulation, which was obtained in a 3D setting using the finite element method (FEM) implemented in the ZSoil software. The comparison indicates that the use of exact solutions to elastic two-dimensional problems can be quite effective in assessing the stress-strain state of a soil and rock mass interacting with a loaded pile.

Keywords: half-plane; Papkovitch-Fadl eigenfunctions; soil; pile; displacements; stresses

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальным, лабораторным и численным методам изучения взаимодействия сваи с окружающим грунтовым массивом, в частности скальным, посвящено множество публикаций [1-5]. В этой работе сравниваются модельное решение, построенное на основе точного решения двумерной краевой задачи для упругой полуплоскости с периодическим набором ребер жёсткости и численное решение, полученное с использованием программного комплекса ZSoil. Основная идея, на которой базируется использование двумерного решения для описания трехмерной задачи, заключается в следующем. Каждое ребро жесткости, имитирующее сваю, сопряжено с двумя примыкающими к ребру справа и слева пластинами, которые имитируют породный массив. Допустим, что ребро имеет цилиндрическую форму, а пластины центрально-симметрично примыкают к нему по всему периметру его кругового сечения. Тогда в узкой области, прилегающей к ребру, там, где зазоры между примыкающими пластинами малы, можно надеяться на то, что решение рассматриваемой двумерной задачи будет не сильно отличаться от решения соответствующей трехмерной задачи для полупространства. Если считать, что расстояние между сваями велико, то получим решение для одиночной сваи в полупространстве. Ниже приводятся формулы, описывающие решение двумерной задачи для полуплоскости с периодическим набором ребер жесткости. В основе этого решения лежат результаты, полученные в работах [6-9]. Расчеты выполнялись для реальной сваи и реальных физико-механических характеристик скального массива.

1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

На рис.1 показана схема задачи. Задача решается в плоской постановке (плоское напряженное состояние).

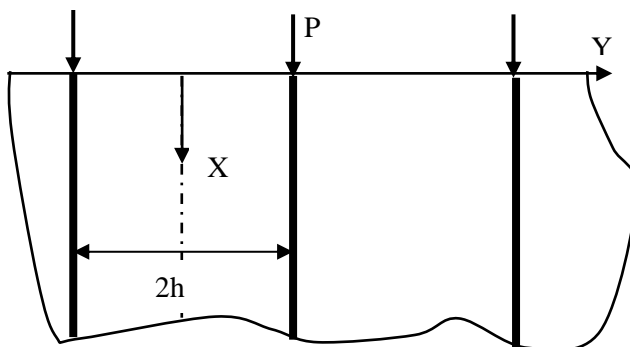


Рис.1. Полуплоскость с периодической системой ребер.

Рассмотрим характерную полуполосу $\{x \geq 0, |y| \leq h\}$, у которой продольные стороны $y = \pm h$ подкреплены рёбрами жёсткости, работающими только на растяжение-сжатие (см. рис.1). Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; f – площадь поперечного сечения ребра; R – радиус поперечного сечения ребра; $t = \pi R$ – толщина пластины справа и слева от ребра; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – соответственно, продольное и поперечное перемещения в пластине; $P = \sigma_0(0)f$; $\sigma_0(0)$ – постоянное напряжение в ребре при $x = 0$. Из условия равновесия элементарного участка ребра dx

$$f \frac{d\sigma_0(x)}{dx} - 2t\tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (1)$$

на основании закона Гука получим первое граничное условие при $y = \pm h$

$$\frac{E_1 f}{2Gt} \cdot \frac{d^2 U(x, h)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, h) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_0(x)$ – напряжение в ребре; $\tau_{xy}(x, h)$ – касательные напряжения вдоль линии контакта ребра и пластины.

Второе граничное условие получим, полагая, что ребро, в силу симметрии задачи, не прогибается, т.е.

$$V(x, \pm h) = 0. \quad (3)$$

Запишем уравнения плоской задачи в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} U + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} V &= 0 \\ \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} U &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

и введем функцию перемещений по формулам

$$U = -\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F, \quad V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F. \quad (5)$$

Тогда первое уравнение равновесия (4) тождественно удовлетворится, а из второго получим бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} F + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} F + \frac{\partial^4}{\partial y^4} F = 0. \quad (6)$$

Разыскивая решение бигармонического уравнения (6) методом разделения переменных в виде $F(x, y) = \Phi(y)e^{\alpha x}$ и удовлетворяя затем граничным условиям (2), (3), получим трансцендентное характеристическое уравнение относительно параметра α . Вводя новый параметр $\lambda = \alpha h$, трансцендентное уравнение можно записать так

$$L(\lambda) = \sin^2 \lambda - D \frac{\lambda}{4} \left((\nu - 3) \frac{\sin 2\lambda}{2} + (1 + \nu) \lambda \right) = 0, \quad D = \frac{E_1 f}{2Gth}. \quad (7)$$

Уравнение (7) имеет два нулевых, два вещественных $\pm \lambda_1$ и бесконечный набор комплексно-сопряжённых корней $\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k$, поэтому

$$F(x, y) = C_0 + C_1 x + a_1 \Phi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \Phi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \Phi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \quad (8)$$

$(\lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_k < 0, k = 2, 3, \dots)$, C_0, C_1, a_k, \bar{a}_k – неизвестные коэффициенты разложений, которые должны быть найдены из граничных условий при $x = 0$ (C_0, C_1 отвечают нулевым корням характеристического уравнения). Воспользовавшись (8), с помощью формул (5) и закона Гука получим представления для перемещений и напряжений в виде рядов по собственным функциям Папковича-Фадля

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{1-\nu}{2}(C_0 + C_1 x) + a_1 \xi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= a_1 \chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -C_1 + a_1 s_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= -\nu C_1 + a_1 s_y(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= a_1 t_{xy}(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (9)$$

Собственные функции Папковича-Фадля $\xi(\lambda_k, y)$ и т.д. имеют вид ($|y| \leq h$)

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{4} \cos \lambda_k + \frac{\nu-3}{4\lambda_k} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{1+\nu}{4} \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h}, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \frac{1+\nu}{4} \left(-\cos \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{y}{h} \sin \lambda_k \cos \lambda_k \frac{y}{h} \right), \\ s_x(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k - \frac{3+\nu}{2} \sin \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} + \\ &\quad + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h}, \\ s_y(\lambda_k, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \cos \lambda_k \frac{y}{h} - \\ &\quad - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \sin \lambda_k \frac{y}{h}, \\ t_{xy}(\lambda_k, y) &= \left(\sin \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \cos \lambda_k \right) \sin \lambda_k \frac{y}{h} + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \frac{y}{h} \sin \lambda_k \cos \lambda_k \frac{y}{h}. \end{aligned} \quad (10)$$

Неизвестные коэффициенты разложений a_k, \bar{a}_k будем определять из следующей системы уравнений при $x = 0$

$$C_1 = a_1 s_x(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y), \quad (11)$$

$$0 = a_1 t_{xy}(\lambda_1, y) + \sum_{k=2}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y).$$

Тогда на прямолинейной границе полуплоскости, согласно (9), нормальные и касательные напряжения будут равны нулю. Пусть, как отмечалось во введении, ребро имеет форму цилиндра, а пластины центрально-симметрично примыкают к нему по всему периметру его кругового сечения радиуса R . Тогда, если $\sigma_0(0)$ – величина равномерного давления на сваю при $x = 0$, то

$$C_1 = \sigma_0(0) \frac{\pi R^2}{2\pi R h} = \frac{\sigma_0(0) R}{2h}. \tag{12}$$

Приведем окончательные формулы для перемещений и напряжений в пластине

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{G} \left[\frac{\xi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\lambda_k \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im} \lambda_k} \right], \\ v(x, y) &= \frac{1}{G} \left[-\frac{\chi(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 x) + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im} \lambda_k} \right], \\ \sigma_x(x, y) &= -C_1 + \frac{s_x(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} \sigma_1 (1 - \lambda_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(-\bar{\lambda}_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im} \lambda_k}, \\ \sigma_y(x, y) &= -\nu C_1 - \frac{s_y(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} \sigma_1 (1 + \lambda_1 x) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(-\lambda_k e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im} \lambda_k}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{t_{xy}(\lambda_1, y) e^{\lambda_1 x}}{M_1} \sigma_1 \lambda_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(\sigma_k \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \right) \frac{\operatorname{Im}(-e^{\lambda_k x})}{\operatorname{Im} \lambda_k}. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь числа

$$\sigma_k = \frac{C_1}{\lambda_k^2} \left(D \frac{1-\nu}{2} + 1 \right). \tag{14}$$

Нормирующие множители

$$M_k = \frac{L'(\lambda_k)}{2\lambda_k^2}. \tag{15}$$

Нормальные напряжения в свае определялись по формуле

$$\sigma_0(x) = E_1 \frac{du(x, h)}{dx}, \tag{16}$$

где $u(x, h)$ – вертикальные перемещения.

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Аналитические решения сравнивали с численным на основе МКЭ в программном комплексе ZSoil.

Расчётная область представляет собой прямоугольный параллелепипед, в центре которого моделируется цилиндрическая свая. Вокруг сваи, где происходит основное изменение напряженно-деформированного состояния грунтового массива, сетка конечных элементов имеет сгущение. Размеры геометрической модели назначались с целью исключения влияния границ на работу сваи. Расстояние от оси сваи до боковых границ расчётной области для всех случаев составляет 15 м. Расстояние от подошвы сваи до нижней границы расчётной области составляет 2,5 диаметра (D) сваи. Длина сваи в расчетах принималась равной 20 м, а ее диаметр – 2 м. Таким образом, размеры расчётной модели составили 42×42×25 м. Сетка разбивки модели расчетной области насчитывала 11700 объёмных элементов.

На голову сваи прикладывается сжимающая распределённая нагрузка, увеличение которой происходит до начала нелинейного деформирования. В качестве критерия разрушения принималось условие прочности Мора-Кулона.

При выполнении численных расчётов назначались следующие граничные условия по закреплениям: на поверхности расчётной области – свободное перемещение узлов по всем направлениям; на боковых границах расчётной области – свободное перемещение в вертикальном направлении и запрет на горизонтальные перемещения; на подошве расчётной области – запрет перемещений по всем направлениям. На границе контакта свая-скальный грунт принимались идеальные контактные условия.

Общий вид расчётной модели – сваи, взаимодействующей со скальными массивом, представлен на рис.2.

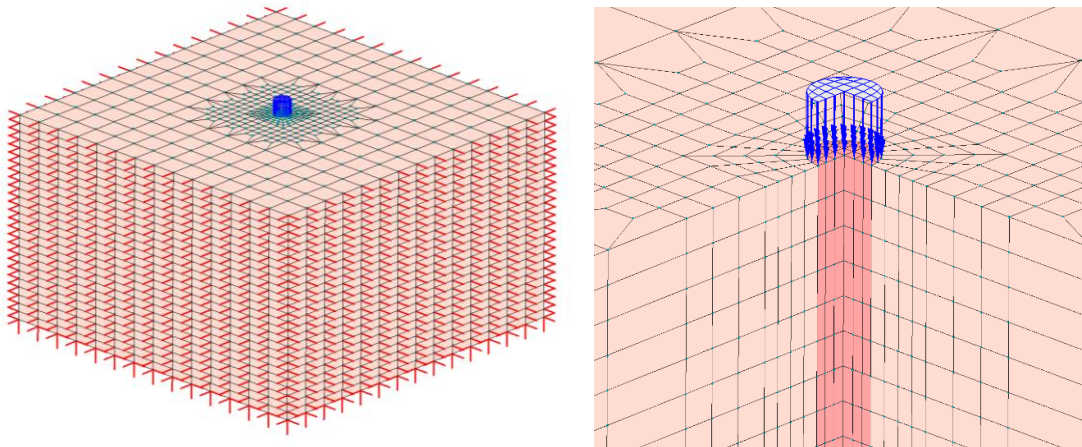


Рис.2. Пространственная схема для расчёта 20 м буронабивной сваи в скальном массиве.

По результатам расчётов было определено напряженно-деформированное состояние массива, взаимодействующего с вертикально равномерно нагруженной свайей. На рис.3 и 4 представлены нормальные напряжения и вертикальные перемещения, полученные по результатам расчетов при вертикальной нагрузке на голову сваи равной $\sigma_0(0) = 16400 \text{ кН/м}^2$.

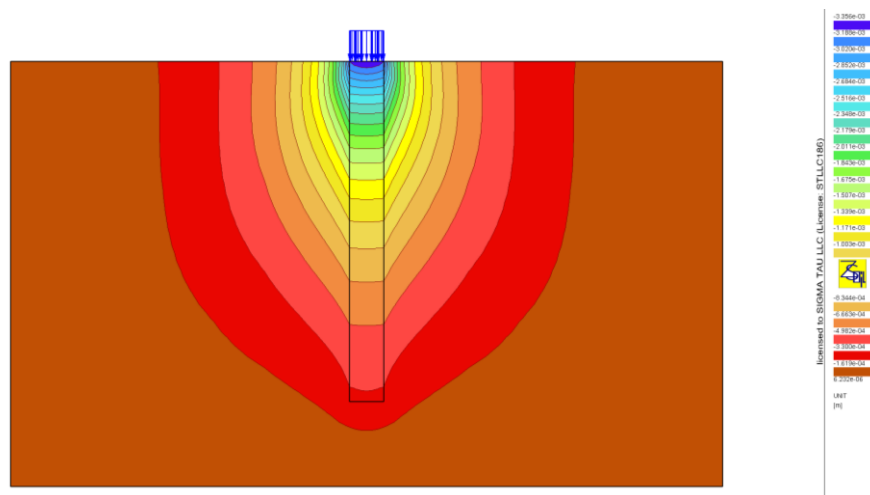


Рис.3. Изополя вертикальных перемещений.

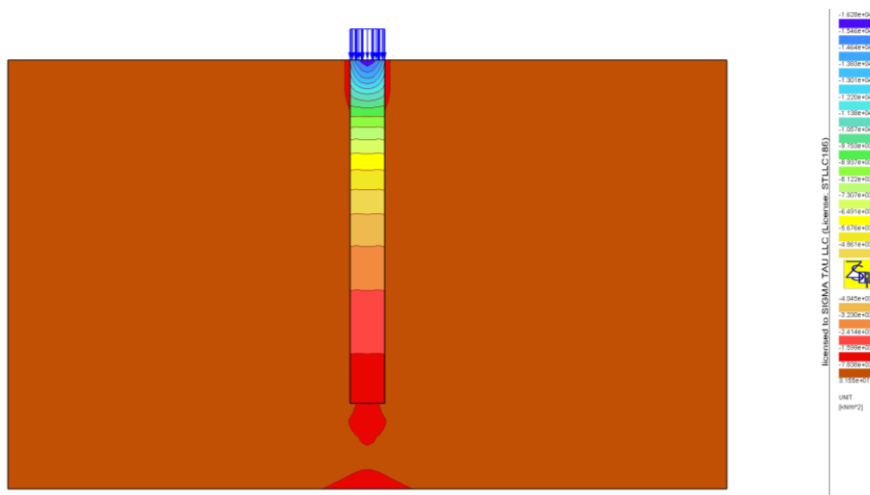


Рис.4. Изополя нормальных напряжений.

3. СРАВНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЙ

Вычисления выполнялись при следующих значениях параметров: радиус сваи $R = 1$ м, расстояние между сваями $h = 13$ м (в численном решении свая одиночная), коэффициент Пуассона для сваи и скального массива $\nu = 0.3$ модуль упругости сваи $E_1 = 325 \cdot 10^5$ кН/м², модуль деформации массива $E = 242 \cdot 10^4$ кН/м², напряжение на голове сваи $\sigma_0(0) = 16400$ кН/м².

На рис.5а,б показаны соответственно вертикальные перемещения и нормальные напряжения в свае. Сплошным кривым отвечает аналитическое решение, пунктирным – численное.

Отметим также, что распределение касательных напряжений по контакту свая-грунт при аналитическом и численном решениях практически совпали.

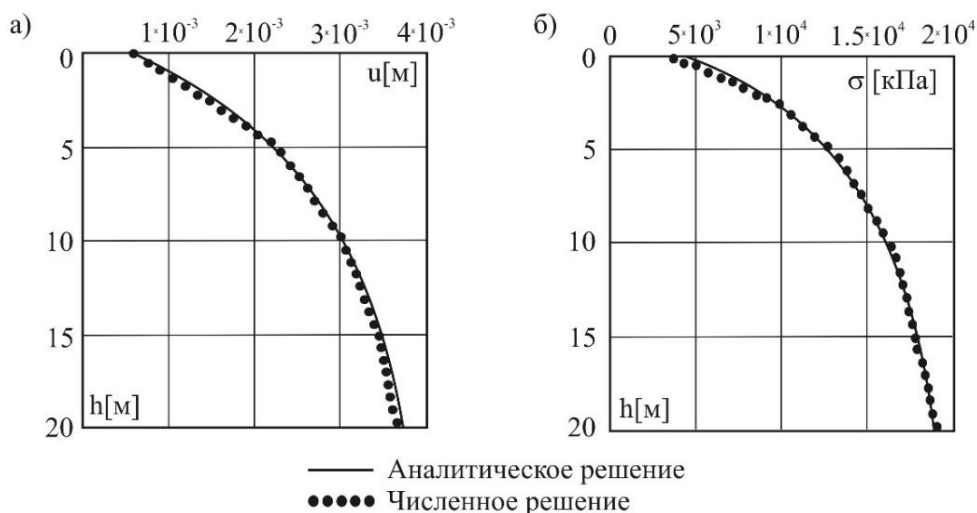


Рис.5. а) – вертикальные перемещения сваи; б) – нормальные напряжения.

ВЫВОДЫ

1. В аналитическом решении длинная свая моделировалась полубесконечным одномерным элементом, а в численном решении длина сваи принималась конечной. Кроме того, в численном решении на расстоянии равном сжимаемой толще под сваем ниже ее пяты перемещения считались равными нулю. На основании сравнения численного эксперимента с аналитическим решением было установлено, что при расстоянии между сваями большими или равными зоне влияния нагруженной сваи численное и аналитическое решения близки.

2. Сравнение аналитического и численного решений показывает, что использование точных решений двумерных задач теории упругости может быть достаточно эффективным при оценке напряженно-деформированного состояния массива грунта, взаимодействующего с нагруженной сваем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter J.P., Kulhawy F.H. *Analysis and Design of Drilled Shaft Foundation Socketed into Rock*. – Palo Alto: Electric Power Research Institute, 1988.
2. Rowe R.K., Armitage H.H. *Theoretical solutions for axial deformation of drilled shafts in rock* // Canadian Geotechnical Journal. – 1987. – Vol.24. – Pp.114-125.
3. Turner J. *NCHRP Synthesis 360: Rock-Socketed Shafts for Highway Structure Foundations*. – Washington, D.C.: Transportation Research Board, 2006.
4. Zhang L. *Drilled Shafts in Rock: Analysis and Design*. – London: CRC Press, 2004.
5. Zertsalov M.G., Merkin V.E., Khokhlov I.N. *The influence of the interface of drilled socketed shafts and rock mass on their behavior* / In Vladimir Litvinenko (ed.), *Geomechanics and geodynamics of rock masses*. – London: CRC Press, 2018. – Pp.937-942.
6. Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V. *Borel transform in the class W of quasi-entire functions* // Complex Analysis and Operator Theory. – 2018. – Vol.12(3). – Pp.571-587.

7. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. *On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2018. – Vol.69. – Iss.5. – Art.121.
8. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions* // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. – 2020. – Vol.71. – Iss.6. – Art.199.
9. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *Expansions in terms of Papkovich–Fadle eigenfunctions in the problem for a half-strip with stiffeners* // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2021b.

REFERENCES

1. Carter J.P., Kulhawy F.H. *Analysis and Design of Drilled Shaft Foundation Socketed into Rock*. Palo Alto, Electric Power Research Institute, 1988.
2. Rowe R.K., Armitage H.H. *Theoretical solutions for axial deformation of drilled shafts in rock*. Canadian Geotechnical Journal, 1987, Vol.24, Pp.114-125.
3. Turner J. *NCHRP Synthesis 360: Rock-Socketed Shafts for Highway Structure Foundations*. Washington, D.C., Transportation Research Board, 2006.
4. Zhang L. *Drilled Shafts in Rock: Analysis and Design*. London, CRC Press, 2004.
5. Zertsalov M.G., Merkin V.E., Khokhlov I.N. *The influence of the interface of drilled socketed shafts and rock mass on their behavior*. In Vladimir Litvinenko (ed.), *Geomechanics and geodynamics of rock masses*. London, CRC Press, 2018, Pp.937-942.
6. Kerzhaev A.P., Kovalenko M.D., Menshova I.V. *Borel transform in the class W of quasi-entire functions*. Complex Analysis and Operator Theory, 2018, Vol.12(3), Pp.571-587.
7. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P. *On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2018, Vol.69, Iss.5, Art.121.
8. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *A boundary value problem in the theory of elasticity for a rectangle: exact solutions*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2020, Vol.71, Iss.6, Art.199.
9. Kovalenko M.D., Menshova I.V., Kerzhaev A.P., Yu G. *Expansions in terms of Papkovich–Fadle eigenfunctions in the problem for a half-strip with stiffeners*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 2021b.

Поступила в редакцию 04 октября 2021 года.

Сведения об авторах:

Власов Даниил Александрович – асп., Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: vlasov.daniil1994@gmail.com

Зерцалов Михаил Григорьевич – д.т.н., проф., Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), г. Москва, Россия; e-mail: mzertsalov@yandex.ru