

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕХАНОДИФФУЗИЯ СПЛОШНОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ РАВНОМЕРНОГО ДАВЛЕНИЯ, С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИИ ДИФФУЗИОННЫХ ПОТОКОВ

Зверев Н.А.<sup>1</sup>, Земсков А.В.<sup>1,2</sup>, Гарлаковский Д.В.<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

<sup>2</sup>НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается полярно-симметричная задача механодиффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного цилиндра, находящегося под действием равномерно распределенного по поверхности внешнего давления. Приложенные нагрузки инициируют массоперенос, который в свою очередь влияет на напряженно-деформированное состояние цилиндра. В качестве математической модели используется связанная система дифференциальных уравнений упругой диффузии в цилиндрической системе координат, которая учитывает релаксационные диффузионные эффекты, подразумевающие конечные скорости распространения диффузионных потоков.

Задача решается с помощью метода эквивалентных граничных условий, заключающегося в том, что вначале рассматривается некоторая вспомогательная задача, решение которой известно и отличающаяся от исходной задачи только граничными условиями. Затем строится соотношение, связывающее правые части граничных условий обеих задач. Указанное соотношение представляет собой интегральное уравнение, решение которого ищется с помощью квадратурных формул. Из этого уравнения находятся правые части граничных условий вспомогательной задачи. В результате решение исходной задачи находится в виде сверток функций Грина вспомогательной задачи с функциями, полученными при решении вышеуказанного интегрального уравнения.

Метод эквивалентных граничных условий разработан для начально-краевых задач, решение которых невозможно получить методом разделения переменных. Для нестационарных задач он является полуаналитическим, в стационарных и статических задачах он позволяет получить решение в аналитической форме.

На примере трехкомпонентного материала выполнено исследование взаимодействия механического и диффузионного полей в сплошном ортотропном цилиндре. Исследованы предельные переходы к статическим механодиффузионным режимам, а также к классическим моделям упругости. Промоделировано влияние релаксационных эффектов на кинетику массопереноса в сплошных средах. Результаты исследований представлены в аналитической и графической формах.

**Ключевые слова:** механодиффузия; нестационарные задачи; преобразование Лапласа; функции Грина; метод эквивалентных граничных условий; релаксация диффузионных потоков

## UNSTEADY ELASTIC DIFFUSION OF AN ORTHOTROPIC CYLINDER UNDER UNIFORM PRESSURE CONSIDERING RELAXATION OF DIFFUSION FLUXES

Zverev N.A.<sup>1</sup>, Zemskov A.V.<sup>1,2</sup>, Tarlakovskii D.V.<sup>2,1</sup>

<sup>1</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

A polar-symmetric elastic diffusion problem is considered for an orthotropic solid multi-component cylinder under the action of an external uniformly distributed pressure over the surface. The applied loads initiate a mass transfer, which affects the cylinder's stress-strain state. A coupled system of differential equations of elastic diffusion in a cylindrical coordinate system is used as a mathematical model. The model considers relaxation diffusion effects, implying finite velocities of diffusion fluxes propagation.

We solved the problem by the equivalent boundary conditions method, which consists of the fact that first some auxiliary problem is considered, the solution of which is known. This problem differs from the original problem only in the boundary conditions. Then a relation connecting the right-hand sides of the boundary conditions of both problems is constructed. The specified ratio is an integral equation, the solution of which is sought using quadrature formulas. From this equation, the right-hand sides of the boundary conditions of the auxiliary problem are found. As a result, the solution to the original problem is found in convolutions of the Green's functions of the auxiliary problem with the functions obtained by solving the above integral equation.

The equivalent boundary conditions method was developed for initial-boundary value problems, the solution of which cannot be obtained by the method of separation of variables. For unsteady problems, it is semi-analytical; in stationary and static problems, it allows one to obtain a solution in an analytical form.

Article considers calculus example based on a three-component material in which two components are independent. The study of the mechanical and diffusion fields interaction in a solid orthotropic cylinder is done. The limit transitions to static mechanodiffusion processes, as well as to classical models of elasticity, are investigated. The influence of relaxation effects on the kinetics of mass transfer is modeled in the continuum. The research results are presented in analytical and graphical forms.

**Keywords:** elastic diffusion; unsteady problems; Laplace transform; Green's functions; method of equivalent boundary conditions; relaxation of diffusion processes

### ВВЕДЕНИЕ

В связи с бурным развитием технологий и производства материалов и конструкций, работающих в условиях взаимодействия полей различной физической природы, интерес ученых все больше привлекают модели механики связанных полей, в том числе модели механодиффузии. Несмотря на то, что первые попытки математического описания указанных явлений были предприняты еще в середине 20-го века [1-3], данная проблема, судя по обзору научных работ, является весьма актуальной и на сегодняшний день.

Особым интересом пользуются задачи термомеханодиффузии, так как при повышенных температурах эффекты связанности полей проявляются наиболее заметно. В отличие от ранних моделей, в которых тепломассоперенос описывался

классическими законами Фурье и Фика, в настоящее время все чаще можно встретить постановки задач, учитывающие релаксационные эффекты [4-20], обусловленные конечными скоростями распространения тепловых и диффузионных потоков.

Однако, несмотря на большое разнообразие существующих моделей, проблемам анализа нестационарных процессов посвящено сравнительно небольшое число научных публикаций [12-20]. Если речь идет об аналитических решениях, то это, как правило, связано с известными математическими трудностями, возникающими при обращении интегрального преобразования Лапласа по времени, которое используется при решении таких задач. В перечисленных работах эта проблема решается в основном с помощью метода Дурбина и его модификаций [12,13,16-18] или численно [14,19]. При этом почти все задачи рассматриваются в малой окрестности начального момента времени, что не позволяет в полной мере промоделировать протекающие в средах механодиффузионные и термомеханодиффузионные процессы.

Известны также подходы к решению нестационарных задач, основанные на применении численных алгоритмов, таких как метод конечных разностей [21] и метод конечных элементов [20]. При использовании конечно-разностных схем, существенным вопросом является анализ данных схем на устойчивость, что, в свою очередь, влияет на сходимость решения, полученного с ее помощью, к решению исходной задачи. Это достаточно сложная математическая проблема, связанная с установлением непрерывной зависимости конечно-разностных схем от входных данных, к которым относятся коэффициенты дифференциальных операторов, а также параметры начальных и граничных условий. Указанное свойство, как известно, характеризует корректность конечно-разностной схемы и в каждом конкретном случае требует отдельного исследования.

Следует также отметить, что одна из сложностей в построении решений связанных нестационарных задач заключается в том, что далеко не при любых граничных условиях можно использовать метод разделения переменных, хорошо зарекомендовавший себя при решении классических задач математической физики. Там, где это возможно, коэффициенты ряда Фурье являются рациональными функциями параметра преобразования Лапласа, и их обращение осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления. Поэтому в данной работе предлагается комплексный подход к решению нестационарных задач механодиффузии, состоящий из двух этапов. Сначала с помощью метода разделения переменных строится решение некоторой вспомогательной задачи, отличающейся от исходной задачи лишь граничными условиями. Затем решение поставленной задачи ищется с помощью метода эквивалентных граничных условий, который позволяет связать правые части краевых условий двух различных типов. Таким образом решение исходной задачи выражается через функции Грина некоторой вспомогательной задачи. Данная методика была апробирована при решении задач механодиффузии в прямолинейной декартовой системе координат [22,23].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается ортотропный сплошной многокомпонентный цилиндр, на поверхности которого заданы нестационарные упругодиффузионные возмущения в виде механического давления и диффузионных полей.

Дифференциальные уравнения, описывающие связанные упругодиффузионные процессы, без учета массовых сил, в полярно-симметричной постановке, имеют следующий вид [24-26]

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} - \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} \eta'_q, \quad \eta^{(N+1)} = -\sum_{q=1}^N \eta^{(q)}, \\ \dot{\eta}_q + \tau_q \ddot{\eta}_q &= -\Lambda_{11}^{(q)} \left( u''' + \frac{2u''}{r} - \frac{u'}{r^2} + \frac{u}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left( \eta_q'' + \frac{\eta_q'}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Начальные условия полагаются нулевыми. Краевые условия, соответствующие постановке задачи, записываются следующим образом

$$\left( u' + c_{12} \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_1(\tau), \quad \eta_q \Big|_{r=1} = f_{q+1}(\tau). \quad (1.2)$$

В формулах (1.1) и (1.2) все величины являются безразмерными. Их связь со своими размерными аналогами определяется следующими соотношениями

$$\begin{aligned} u &= \frac{u_r}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}}, \quad \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{L}, \\ r &= \frac{r^*}{L}, \quad \alpha_1^{(q)} = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{c_{11}}, \quad D_1^{(q)} = \frac{D_{11}^{(q)}}{CL}, \quad \Lambda_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} \alpha_{11}^{(q)} D_{11}^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho CLRT_0}, \end{aligned}$$

где  $t$  – время;  $u_r$  – радиальная компонента вектора механических перемещений;  $r^*$  – радиальная координата;  $\eta_q$  – приращение концентрации  $q$ -го вещества в составе многокомпонентной сплошной среды;  $n_0^{(q)}$  и  $m^{(q)}$  – начальная концентрация и молярная масса  $q$ -го компонента;  $\rho$  – плотность сплошной среды;  $\tau^{(q)}$  – время релаксации диффузионных потоков;  $\alpha_{11}^{(q)}$  – коэффициент, характеризующий деформации, возникающие вследствие диффузии;  $D_{11}^{(q)}$  – коэффициент самодиффузии;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $T_0$  – температура сплошной среды. Характерный линейный размер  $L$  равен радиусу цилиндра.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Основная проблема заключается в невозможности построения решения поставленной задачи в виде рядов Фурье. Это существенно осложняет обращение преобразования Лапласа, которое также используется при решении этой задачи. Для преодоления указанной трудности используется метод эквивалентных граничных условий, который заключается в том, что вместо исходной задачи (1.1), (1.2) рассматривается вспомогательная задача для уравнений (1.1) с граничными условиями вида

$$\left( u' + \frac{u}{r} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \eta_j \right) \Big|_{r=1} = f_1^*(\tau), \quad \eta_q \Big|_{r=1} = f_{q+1}(\tau). \quad (2.1)$$

где функция  $f_1^*(\tau)$  подлежит определению. Решение этой задачи записывается в виде

$$u(r, \tau) = \int_0^\tau G_{11}(r, \tau-t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{1m}(r, \tau-t) f_m(t) dt, \quad (2.2)$$

$$\eta_q(r, \tau) = \int_0^\tau G_{q+1,1}(r, \tau-t) f_1^*(t) dt + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau G_{q+1,m}(r, \tau-t) f_m(t) dt,$$

где  $G_{nm}(r, \tau) \quad \forall n, m = \overline{1, N+1}$  – поверхностные функции Грина рассматриваемой задачи, т.е. решения следующих начально-краевых задач

$$-\Lambda_{11}^{(q)} \left( G_{1m}'' + \frac{2G_{1m}''}{r} - \frac{G_{1m}'}{r^2} + \frac{G_{1m}}{r^3} \right) + D_1^{(q)} \left( G_{q+1,m}'' + \frac{G_{q+1,m}'}{r} \right) = \\ = \dot{G}_{q+1,m} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,m}, \quad (2.3)$$

$$\left( G_{1m}'' + \frac{G_{1m}'}{r} - \frac{G_{1m}}{r^2} \right) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m}' = \ddot{G}_{1m},$$

$$\left( G_{1m}' + \frac{1}{r} G_{1m} - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m} \right) \Big|_{r=1} = \delta_{1m} \delta(\tau), \quad G_{q+1,m} \Big|_{r=1} = \delta_{q+1,m} \delta(\tau), \quad (2.4)$$

$$G_{1m} \Big|_{\tau=0} = \dot{G}_{1m} \Big|_{\tau=0} = G_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = \dot{G}_{q+1,m} \Big|_{\tau=0} = 0.$$

Решение задачи (2.3), (2.4) получено в работах [26] и имеет вид (индекс «L» обозначает трансформанту Лапласа)

$$G_{1m}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{H_1}(\lambda_n, \tau) J_1(\lambda_n r), \quad G_{q+1,m}(r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{H_0}(\lambda_n, \tau) J_0(\lambda_n r), \quad (2.5)$$

$$G_{1m}^L(r, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) J_1(\lambda_n r), \quad G_{q+1,m}^L(r, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, s) J_0(\lambda_n r),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^{LH_1}(\lambda_n, s) \\ G_{q+1,m}^{LH_0}(\lambda_n, s) \end{array} \right\} = \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)} \int_0^1 r \left\{ \begin{array}{l} G_{1m}^L(r, s) J_1(\lambda_n r) \\ G_{q+1,m}^L(r, s) J_0(\lambda_n r) \end{array} \right\} dr.$$

Здесь  $J_\nu(z)$  – функции Бесселя I рода, порядка  $\nu$ ,  $\lambda_n$  – корни уравнения  $J_0(\lambda_n) = 0$ , а остальные величины определяются так ( $\forall k = \overline{1, q+1}$ )

$$G_{1k}^{LH_1}(\lambda_n, s) = \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)}, \quad G_{1k}^{H_1}(\lambda_n, \tau) = \frac{2}{J_1(\lambda_n)} \sum_{l=1}^{2N+2} \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_l)}{P'(\lambda_n, s_l)} e^{s_l \tau},$$

$$G_{q+1,1}^{LH_0}(\lambda_n, s) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s)}{Q(\lambda_n, s)} + \frac{\lambda_n \Lambda_{11}^{(q)}}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} \right],$$

$$G_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, s) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s)}{Q(\lambda_n, s)} + \frac{\lambda_n (\Lambda_{11}^{(q)} \alpha_1^{(p)} - D_1^{(q)} \delta_{pq})}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} \right], \quad (2.6)$$

$$G_{q+1,1}^{H_0}(\lambda_n, \tau) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \sum_{l=1}^{2N+4} \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s_l)}{Q'(\lambda_n, s_l)} e^{s_l \tau} + \lambda_n \Lambda_{11}^{(q)} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\xi_j \tau}}{k'_{q+1}(\lambda_n, \xi_j)} \right],$$

$$G_{q+1,p+1}^{H_0}(\lambda_n, \tau) = -\frac{2}{J_1(\lambda_n)} \left[ \sum_{l=1}^{2N+4} \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s_l)}{Q'(\lambda_n, s_l)} e^{s_l \tau} + \lambda_n \sum_{j=1}^2 \frac{(\Lambda_{11}^{(q)} \alpha_1^{(p)} - D_1^{(q)} \delta_{pq}) e^{\xi_j \tau}}{k'_{q+1}(\lambda_n, \xi_j)} \right].$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 k_1(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = D_1^{(q)}\lambda_n^2 + s + \tau_q s^2, \\
 P(\lambda_n, s) &= k_1(\lambda_n, s)\Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^4 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \\
 Q_q(\lambda_n, s) &= k_{q+1}(\lambda_n, s)P(\lambda_n, s), \quad \Pi_j(\lambda_n, s) = \prod_{k=1, k \neq j}^N k_{k+1}(\lambda_n, s), \\
 P_{11}(\lambda_n, s) &= \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s), \\
 P_{1,q+1}(\lambda_n, s) &= \lambda_n^2 \alpha_1^{(q)} \left[ D_1^{(q)} \Pi_q(\lambda_n, s) - \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s) \right], \\
 P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= -\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^3 P_{1k}(\lambda_n, s), \quad \Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1}(\lambda_n, s),
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

где  $s_l(\lambda_n)$  – нули полинома  $P(\lambda_n, s)$ , а  $\xi_j(\lambda_n)$  – дополнительные нули полинома  $Q_q(\lambda_n, s)$ , определяемые по формулам

$$\xi_{1,2}(\lambda_n) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Далее полагаем, что решение вспомогательной задачи (1.1), (2.1) должно удовлетворять граничным условиям (1.2), поэтому

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left[ G'_{11}(1, \tau - t) + c_{12} G_{11}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,1}(1, \tau - t) \right] f_1^*(t) dt + \\
 & + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau \left[ G'_{1m}(1, \tau - t) + c_{12} G_{1m}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,m}(1, \tau - t) \right] f_m(t) dt = \\
 & = f_1(\tau).
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

С учетом граничных условий (2.1) имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\tau \left[ G'_{11}(1, \tau - t) + G_{11}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,1}(1, \tau - t) \right] f_1^*(t) dt = \\
 & = \int_0^\tau \delta(\tau - t) f_1^*(t) dt = f_1^*(\tau).
 \end{aligned}$$

поэтому уравнение (2.8) запишется следующим образом

$$\begin{aligned}
 & f_1^*(\tau) + \int_0^\tau a(\tau - t) f_1^*(t) dt = \varphi(\tau), \quad a(\tau - t) = (c_{12} - 1)G_{11}(1, \tau - t), \\
 & \varphi(\tau) = f_1(\tau) - \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^\tau \left[ G'_{1m}(1, \tau - t) + c_{12} G_{1m}(1, \tau - t) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{q+1,m}(1, \tau - t) \right] f_m(t) dt.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Полученное уравнение решается численно с помощью квадратурных формул. Так как функции Грина могут иметь особенности, то, для более успешного применения формул численного интегрирования, преобразуем уравнение (2.9) к следующему виду

$$\int_0^{\tau} \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial \tau} dt + \int_0^{\tau} A(\tau-t) \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial \tau} dt = F(\tau), \quad (2.10)$$

$$A(\tau) = \int_0^{\tau} a(t) dt, \quad A(\tau-t) = \int_0^{\tau-t} a(\xi) d\xi, \quad F(\tau) = \varphi(\tau) - A(\tau) f_1^*(0).$$

При этом функции  $f_1^*(0)$  должны удовлетворять определенным соотношениям. Исходя из условия сопряжения начальных и граничных условий в угловых точках пространственно-временной области рассматриваемых задач, а также с учетом нулевых начальных условий, будем далее полагать, что  $f_1^*(0) = 0$ . Следовательно,  $F(\tau) = \varphi(\tau)$ .

Теперь, для решения уравнения (2.10) разбиваем область  $[0, T]$  изменения времени  $\tau$  на  $N_\tau$  отрезков точками  $\tau_m = mh$  ( $m = \overline{0, N_\tau}$ ) с равномерным шагом  $h = T/N_\tau$  и вводим сеточные функции вида  $y_m = \partial f_1^*(\tau_m) / \partial \tau$ ,  $A_m = A(\tau_m)$ .

Интеграл в интегральном уравнении (2.10) при  $\tau = \tau_m$  приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} A(\tau-t) \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial \tau} dt &\approx h S_{m-1/2} + h A_{1/2} y_{m-1/2}, \quad S_{m-1/2} = \sum_{l=1}^{m-1} A_{m-l+1/2} y_{l-1/2}, \\ \int_0^{\tau} \frac{\partial f_1^*(t)}{\partial \tau} dt &\approx h Q_{m-1/2} + h Q_{1/2} y_{m-1/2}, \quad Q_{m-1/2} = \sum_{l=1}^{m-1} y_{l-1/2}, \\ \tau_{m-1/2} &= \frac{\tau_{m-1} + \tau_m}{2} = h \left( m - \frac{1}{2} \right), \quad \tau_{m-l+1/2} = \tau_m - \tau_{l-1/2} = h \left( m - l + \frac{1}{2} \right) \quad (\forall m = \overline{1, N_\tau}). \end{aligned}$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности равенств ( $\forall m \geq 1$ )

$$(A_{1/2} + 1) y_{m-1/2} = \frac{\varphi(\tau_m)}{h} - S_{m-1/2} - Q_{m-1/2}.$$

Откуда получаем

$$y_{m-1/2} = \frac{1}{A_{1/2} + 1} \left[ \frac{\varphi(\tau_m)}{h} - S_{m-1/2} - Q_{m-1/2} \right]. \quad (2.11)$$

Решение исходной задачи (1.1), (1.2) получается путем численного вычисления свертки (2.2) функций Грина вспомогательной задачи (1.1), (2.1) с функцией, полученной в результате численного решения уравнения (2.10). Значения этой функции в узлах сетки определяются по формулам (2.11). Таким образом численное решение исходной задачи запишется так

$$\begin{aligned} u(r, \tau_i) &= h \sum_{m=1}^i G_{11}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2} + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau_i} G_{1m}(r, \tau_i - t) f_m(t) dt, \\ \eta_q(r, \tau_i) &= h \sum_{m=1}^i G_{q+1,1}^*(r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2} + \sum_{m=2}^{N+1} \int_0^{\tau_i} G_{q+1,m}(r, \tau_i - t) f_m(t) dt, \quad (2.12) \\ G_{mk}^*(x, \tau) &= \int_0^{\tau} G_{mk}(x, t) dt. \end{aligned}$$

### 3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ДЛЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Полагая  $\tau_q = 0$ , получаем классическую модель механо диффузии с бесконечной скоростью распространения диффузионных потоков. При  $\tau_q \rightarrow 0$ , степень многочлена  $P(\lambda_n, s)$  изменяется с  $2N + 2$  до  $N + 2$ , а для дополнительных нулей имеют место следующие предельные переходы:  $\xi_1(\lambda_n) \rightarrow D_1^{(q)} \lambda_n^2$ ,  $\xi_2(\lambda_n) \rightarrow -\infty$  ( $\tau_q \rightarrow 0$ ). Тогда:  $e^{\xi_1 \tau} \rightarrow e^{-D_1^{(q)} \lambda_n^2 \tau}$ ,  $e^{\xi_2 \tau} \rightarrow 0$  ( $\tau_q \rightarrow 0$ ).

Полагая далее  $\alpha_1^{(p)} = 0$ , переходим к классическим моделям упругости и массопереноса для сплошного цилиндра в задаче (1.1), (2.1). Вычисляя соответствующие пределы в (2.7) при  $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$ , получаем (учитывая, что  $\Lambda_{11}^{(q)} \rightarrow 0$  при  $\alpha_1^{(q)} \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{11}(\lambda_n, s) &= \Pi(\lambda_n, s), \quad \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{1,q+1}(\lambda_n, s) = 0, \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P_{q+1,k}(\lambda_n, s) &= 0, \quad \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} P(\lambda_n, s) = k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s), \\ \lim_{\alpha_1^{(j)} \rightarrow 0} Q_q(\lambda_n, s) &= c_{12} k_{q+1}(\lambda_n, s) k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Функции Грина для несвязанных задач будем обозначать в виде  $G^u(r, \tau)$ ,  $G_q^n(r, \tau)$  и представим в форме рядов (2.5)

$$\begin{aligned} G^u(r, \tau) &= G_{11}(r, \tau) \Big|_{\alpha_1^{(q)}=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G^{H_1}(\lambda_n, \tau) J_1(\lambda_n r), \\ G_q^n(r, \tau) &= G_{q+1,q+1}(r, \tau) \Big|_{\alpha_1^{(q)}=0} = \sum_{n=1}^{\infty} G^{H_0}(\lambda_n, \tau) J_0(\lambda_n r), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где коэффициенты этих рядов определяются по формулам (2.6) при  $\alpha_1^{(p)} = 0$ .

С учетом предельных переходов (3.1) имеем

$$G^{H_1}(\lambda_n, \tau) = \frac{2 \sin \lambda_n \tau}{J_1(\lambda_n) \lambda_n}, \quad G^{H_0}(\lambda_n, \tau) = \frac{2 \lambda_n D_1^{(q)}}{J_1(\lambda_n)} \sum_{j=1}^2 \frac{e^{\xi_j \tau}}{k'_{q+1}(\lambda_n, \xi_j)}. \tag{3.3}$$

В соответствии с (2.12), решение исходной задачи (1.1), (1.2) при  $\alpha_1^{(p)} = 0$  запишется так

$$\begin{aligned} u(r, \tau_i) &= \sum_{m=1}^i \tilde{G}^u(r, t_{i-m+1/2}) y_{m-1/2}, \quad \tilde{G}^u(x, \tau) = \int_0^{\tau} G^u(x, t) dt, \\ \eta_q(r, \tau) &= \int_0^{\tau} G_q^n(r, \tau-t) f_{q+1}(t) dt \quad (i = \overline{1, N_\tau}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Наконец, полагая в граничных условиях (1.2) и (2.1)

$$f_1^*(\tau) = \tilde{f}_1^* H(\tau), \quad f_1(\tau) = \tilde{f}_1 H(\tau), \quad f_{q+1}(\tau) = \tilde{f}_{q+1} H(\tau) \tag{3.5}$$

и переходя к пределу при  $\tau \rightarrow \infty$ , получаем решение статической задачи механо диффузии для сплошного цилиндра.



Функции Грина статической задачи  $G_{mk}^{st}(x)$  выражаются через функции Грина  $G_{mk}(r, \tau)$  соответствующей динамической задачи с помощью равенства [27]

$$G_{mk}^{st}(r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} [G_{mk}(r, \tau) * H(\tau)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s G_{mk}^L(r, s) \frac{1}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} G_{mk}^L(r, s). \quad (3.6)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} G_{11}^{stH_1}(\lambda_n) &= G_{11}^{LH_1}(\lambda_n, 0) = \frac{2}{J_1(\lambda_n)\lambda_n^2}, \quad G_{1,q+1}^{stH_1}(\lambda_n) = G_{1,q+1}^{LH_1}(\lambda_n, 0) = \frac{2\alpha_1^{(q)}}{J_1(\lambda_n)\lambda_n^2}, \\ G_{q+1,1}^{stH_0}(\lambda_n) &= G_{q+1,1}^{LH_0}(\lambda_n, 0) = 0, \quad G_{q+1,p+1}^{stH_0}(\lambda_n) = G_{q+1,p+1}^{LH_0}(\lambda_n, 0) = \frac{2\delta_{pq}}{J_1(\lambda_n)\lambda_n}, \\ G_{11}^{st}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{stH_1}(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n)\lambda_n^2}, \quad G_{q+1,1}^{st}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,1}^{stH_0}(\lambda_n) J_0(\lambda_n r) = 0, \\ G_{1,q+1}^{st}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1,q+1}^{stH_1}(\lambda_n) J_1(\lambda_n r) = 2\alpha_1^{(q)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n)\lambda_n^2}, \\ G_{q+1,p+1}^{st}(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{q+1,p+1}^{stH_0}(\lambda_n, \tau) J_0(\lambda_n r) = 2\delta_{pq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n)\lambda_n}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Статический аналог уравнения (2.10) запишется так

$$\tilde{f}_1^* + (c_{12} - 1)G_{11}^{st}(1)\tilde{f}_1^* = \tilde{\varphi}, \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{\varphi} = \tilde{f}_1 - \sum_{m=2}^{N+1} \left[ G_{1m}^{st'}(1) + c_{12} G_{1m}^{st}(1) + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{q+1,m}^{st}(1) \right] \tilde{f}_m. \quad (3.9)$$

Следовательно

$$\tilde{f}_1^* = \frac{\tilde{\varphi}}{1 + (c_{12} - 1)G_{11}^{st}(1)}.$$

Отсюда, преобразуя в (2.12) свертки, в соответствии с равенством (3.6) и учитывая соотношения (3.5), получаем решение статического аналога задачи (1.1), (1.2) в следующем виде

$$\begin{aligned} u^{st}(r) &= \frac{\tilde{\varphi} G_{11}^{st}(r)}{1 + (c_{12} - 1)G_{11}^{st}(1)} + \sum_{m=2}^{N+1} G_{1m}^{st}(r) \tilde{f}_m, \\ \eta_q^{st}(r) &= \frac{\tilde{\varphi} G_{q+1,1}^{st}(r)}{1 + (c_{12} - 1)G_{11}^{st}(1)} + \sum_{m=2}^{N+1} G_{q+1,m}^{st}(r) \tilde{f}_m. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если на поверхности цилиндра заданы только механические нагрузки, т.е.  $\tilde{f}_m = 0$ , ( $\forall m \geq 2$ ), то из формул (3.7) следует, что  $\eta_q^{st}(r) = 0$ . Следовательно, статические радиальные механические нагрузки на поверхности цилиндра, в рамках линейной модели (1.1), (1.2), никак не влияют на диффузионное поле внутри цилиндра. Это согласуется с экспериментальными исследованиями, согласно которым увеличение коэффициента объемной диффузии в первом приближении пропорционально скорости деформации [28]. Так как в статике скорость деформации равна нулю, получаем и нулевую диффузию.

#### 4. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

В качестве примера рассматриваем трехкомпонентный цилиндр ( $N=2$ , независимые компоненты: цинк 1,0% и медь 4,5%, которые диффундируют в алюминии). Физические характеристики этого материала [29], после применения процедуры перехода к безразмерным величинам (1.3), следующие

$$c_{12} = 4.92 \cdot 10^{-1}, \quad \alpha_1^{(1)} = 6.32 \cdot 10^{-4}, \quad \alpha_1^{(2)} = 5.92 \cdot 10^{-4},$$

$$D_1^{(1)} = 8.46 \cdot 10^{-13}, \quad D_1^{(2)} = 9.34 \cdot 10^{-16}, \quad \Lambda_{11}^{(1)} = 2.30 \cdot 10^{-15}, \quad \Lambda_{11}^{(2)} = 1.05 \cdot 10^{-17}.$$

Полагаем для расчета в граничных условиях (1.2)

$$f_1(\tau) = H(\tau), \quad f_{q+1}(\tau) = 0. \quad (4.1)$$

По формулам (2.11) вычисляем  $\partial f_1^*(\tau_m)/\partial \tau$ . Затем по формулам (2.12) находим решение исходной задачи.

На рис.1 представлено пространственно-временное распределение поля перемещений внутри цилиндра. Расчеты по формулам (2.12) и (3.4) показывают, что на рассматриваемом промежутке времени решения упругодиффузионной и упругой задачи совпадают. Это согласуется с результатами, полученными ранее [30,31], где отмечается, что влияние диффузии на механическое поле начинает заметно проявляться в виде фазового сдвига только по истечении определенного промежутка времени, который на несколько порядков превышает рассмотренный здесь.

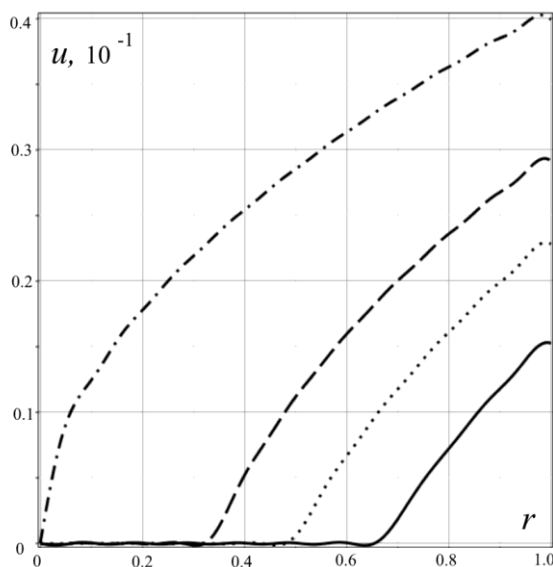


Рис.1. Поле механических перемещений  $u(r)$ . Сплошная линия соответствует времени  $\tau = 0.33$ , пунктирная –  $\tau = 0.5$ , штриховая –  $\tau = 0.67$ , штрихпунктирная –  $\tau = 1$ .

На рис.2 продемонстрировано изменение приращения концентрации первого компонента (цинк), которое инициировано механическими нагрузками, приложенными к боковой поверхности цилиндра.

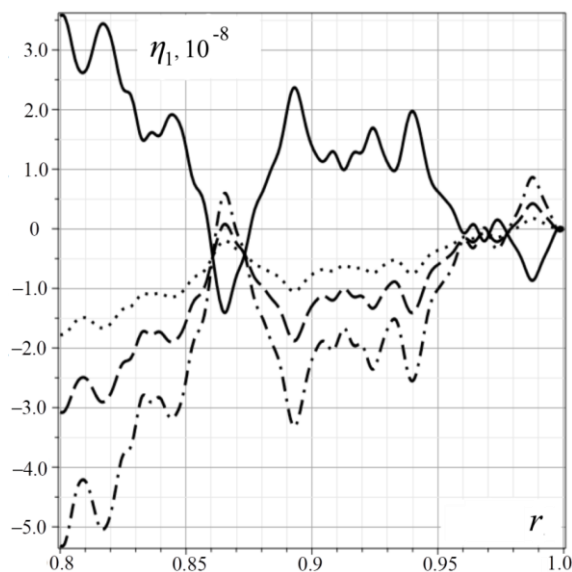


Рис.2. Поле концентраций  $\eta_1(r)$ . Сплошная линия соответствует времени  $\tau=1.67 \cdot 10^{12}$ , пунктирная –  $\tau=2.50 \cdot 10^{12}$ , штриховая –  $\tau=3.33 \cdot 10^{12}$ , штрихпунктирная –  $\tau=5.0 \cdot 10^{12}$ .

Влияние релаксационных эффектов на кинетику массопереноса показано на рис.3-5. Здесь различной штриховкой изображены графики приращений концентраций цинка для моделей с конечными и бесконечными скоростями распространения диффузионных потоков. Видно, что релаксационные эффекты проявляются на некотором конечном промежутке времени и далее исчезают. Так, уже на рис.5, соответствующем моменту времени  $\tau=10^{12}$ , все три кривые совпадают.

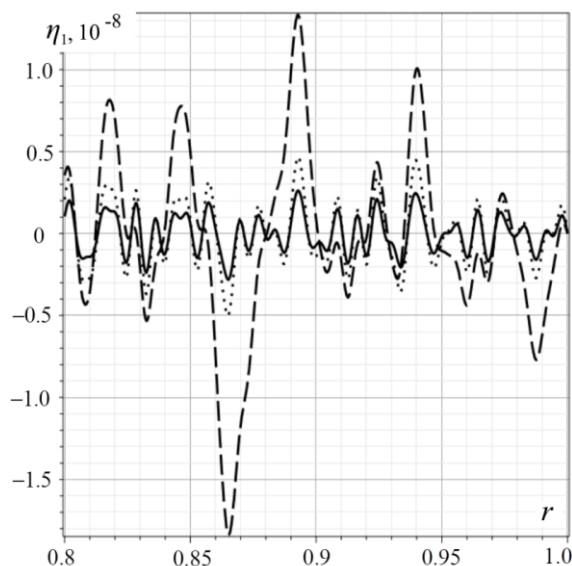


Рис.3. Поле концентраций  $\eta_1(r, 10^9)$ . Сплошная линия соответствует времени  $\tau^{(a)}=200$  сек., пунктирная –  $\tau^{(a)}=100$  сек., штриховая –  $\tau^{(a)}=0$ .

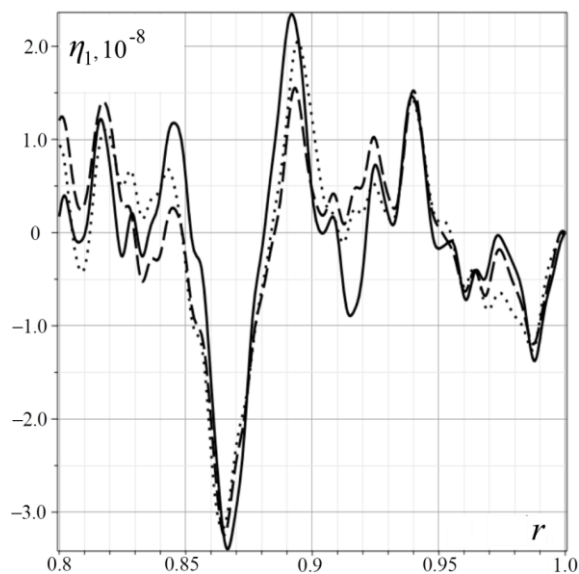


Рис.4. Поле концентраций  $\eta_1(r, 10^{10})$ . Сплошная линия соответствует времени  $\tau^{(g)} = 200$  сек., пунктирная –  $\tau^{(g)} = 100$  сек., штриховая –  $\tau^{(g)} = 0$ .

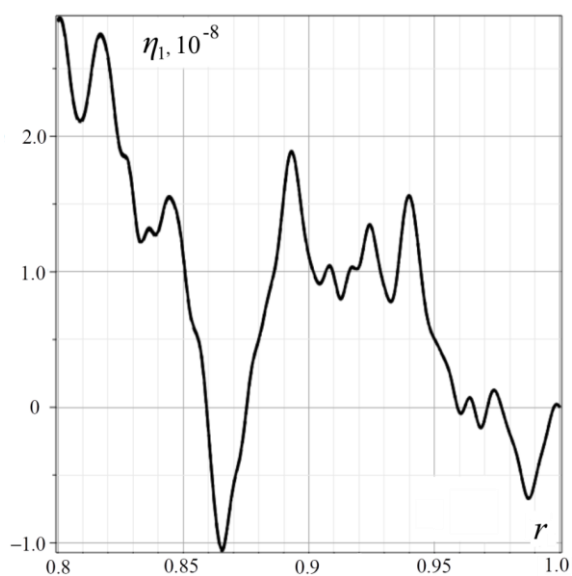


Рис.5. Поле концентраций  $\eta_1(r, 10^{12})$ . Сплошная линия соответствует времени  $\tau^{(g)} = 200$  сек., пунктирная –  $\tau^{(g)} = 100$  сек., штриховая –  $\tau^{(g)} = 0$ .

На рис.6 приведено решение статической задачи, полученное по формулам (3.10). Для расчета, в соответствии с (4.1), положено  $\tilde{f}_1 = 1, \tilde{f}_{q+1} = 0$ . В этом случае, согласно (3.7),  $\eta_q^{st} = 0$ . Отметим также, что статические перемещения в упругой и упругодиффузионной задачах совпадают.

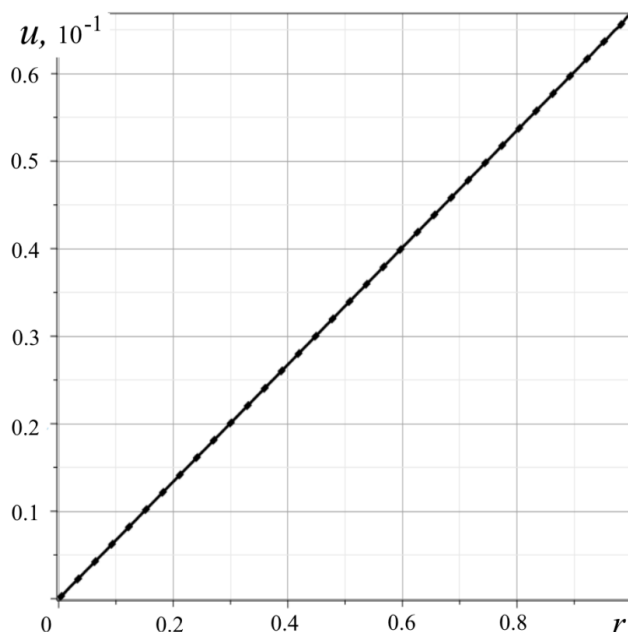


Рис.6. Поле механических перемещений  $u^{st}(r)$ . Сплошная линия соответствует решению упругодиффузионной задачи, пунктирная – решению упругой.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изложен алгоритм решения одномерной полярно-симметричной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропного сплошного многокомпонентного однородного цилиндра, с учетом релаксации диффузионных процессов, находящегося под действием равномерно распределенного по поверхности внешнего давления. Для демонстрации работы алгоритма рассмотрен пример, иллюстрирующий эффект связанности механического и диффузионных полей, а также влияние релаксационных процессов на диффузионные поля в трехкомпонентном сплошном цилиндре.

Исследованы предельные переходы к несвязанным задачам упругости и диффузии, а также к статическим упругодиффузионным задачам. Показано, что в рамках линейных моделей взаимодействие механического и диффузионного полей при статических радиальных механических нагрузках не проявляется.

Результаты вычислений представлены в виде графиков зависимости искомых полей от времени в различных точках цилиндра.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Prussin S. *Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion* // J. Appl. Phys. – 1961, – Vol.32. – Pp.1876-1881.
2. Подстригач Я.С., Павлина В.С. *Дифференциальные уравнения термодинамических процессов в N-компонентном твёрдом растворе* // Физико-химическая механика материалов. – 1965. – №4. – С.383-389.
3. Nowacki W. *Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids* // Proc. Vib. Prob. – 1974. – Vol.15. – Pp.105-128.
4. Lata P. *Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate* // Coupled Systems Mechanics. – 2019. – Vol.8. – No.1. – Pp.39-53.

5. Sur A., Kanoria M. *Elasto-Thermodiffusive Response in a Two-Dimensional Transversely Isotropic Medium* // Mechanics of Advanced Composite Structures. – 2019. – Vol.6. – Pp.95-104.
6. Парфенова Е.С., Князева А.Г. *Влияние параметров химической реакции на взаимодействие тепловых, диффузионных и механических волн в условиях обработки поверхности потоком частиц* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т.14. – №1. – С.77-90.
7. Kumar R., Gupta V. *Uniqueness, reciprocity theorem, and plane waves in thermoelastic diffusion with a fractional order derivative* // Chin. Phys. B. – 2013. – Vol.22. – No.7. – 074601.
8. Abo-Dahab S.M. *Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories* // Appl. Math. Inf. Sci. – 2019. – Vol.13. – No.2. – Pp.317-337.
9. Kaur I., Lata P. *Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion* // Intern. J. of Mechanical and Materials Engineering. – 2019. – Vol.14. – Pp.12.
10. Zenkour A.M. *Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model* // J. of Ocean Engineering and Science. – 2020. – Vol.5. – Iss.3. – Pp.214-222.
11. Комар Л.А., Свистков А.Л. *Термодинамика упругого материала с релаксирующим потоком тепла* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №4. – С.152-157.
12. Aouadi M. *A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2007. – Vol.44. – Pp.5711-5722.
13. Abbas A. Ibrahim. *Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity* // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – Vol.39. – Iss.20. – Pp.6196-6206.
14. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. *Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction* // Physica B: Condensed Matter. – 2016. – Vol.496. – Pp.57-68.
15. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. *Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect* // Intern. J. of Computer Sciences and Engineering. – 2019. – Vol.7. – Iss.1. – Pp.148-156.
16. Kumar R., Devi S. *Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources* // CMST. – 2019. – Vol.25. – No.4. – Pp.167-176.
17. Kumar R., Devi S. *Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium* // J. of Solid Mechanics. – 2019. – Vol.11. – No.3. – Pp.581-592.
18. Wen M., Xu J., Xiong H. *Thermal Diffusion Effects in a Tunnel with a Cylindrical Lining and Soil System under Explosive Loading* // Mathematical Problems in Engineering. – 2019. – Vol.2019. – 2535980.
19. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. *Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions* // Acta Mech. – 2015. – Vol.226. – Pp.3263-3274.

20. Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P. *The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity* // Intern. J. of Engineering Science. – 2009. – Vol.47. – Pp.669-679.
21. Минов А.В. *Исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра, подверженного термодиффузионному воздействию углерода в осесимметричном тепловом поле, переменном по длине* // Известия вузов. Машиностроение. – 2008. – №10. – С.21-26.
22. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. *Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer* // Materials Physics and Mechanics. – 2015. – No.1. – Vol.23. – Pp.36-41.
23. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Файкин Г.М. *Нестационарный изгиб консольно-закрепленной балки Бернулли-Эйлера с учетом диффузии* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2021. – Т.14. – №1. – С.40-50.
24. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol.158. – No.1. – 012101.
25. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. *Полярно-симметричная задача упругой диффузии для многокомпонентной среды* // Проблемы прочности и пластичности. – 2018. – №80(1). – С.5-14.
26. Зверев Н.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. *Моделирование нестационарных связанных механодиффузионных процессов в изотропном сплошном цилиндре* // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т.82. – №2. – С.156-167.
27. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. – М.: Высшая школа, 1965. – 568 с.
28. Мацевитый Ю.М., Вакуленко К.В., Казак И.Б. *О заживании дефектов в металлах при пластической деформации (аналитический обзор)* // Проблемы машиностроения. – 2012. – Т.15. – №1. – С.66-76.
29. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. *Физические величины: Справочник*. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
30. Вестяк А.В., Земсков А.В. *Модель нестационарных упругодиффузионных колебаний шарнирно закрепленной балки Тимошенко* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2020. – №5. – С.107-119.
31. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S, Tarlakovskii D.V. *Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action* / In: Multiscale Solid Mechanics. Strength, Durability, and Dynamics (Advanced Structured Materials, Vol.141). – Cham: Springer, 2021. – Pp.487-499.

## REFERENCES

1. Prussin S. *Generation and Distribution of Dislocations by Solute Diffusion*. J. Appl. Phys., 1961, Vol.32, Pp.1876-1881.
2. Podstrigach YA.S., Pavlina B.C. *Differentsial'nye uravneniya termodinamicheskikh protsessov v N-komponentnom tvyordom rastvore [Differential equations of thermodynamic processes in an N-component solid solution]*. Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov, 1965, No.4, Pp.383-389.
3. Nowacki W. *Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids*. Proc. Vib. Prob., 1974., Vol.15, Pp.105-128.

4. Lata P. *Time harmonic interactions in fractional thermoelastic diffusive thick circular plate*. Coupled Systems Mechanics, 2019, Vol.8, No.1, Pp.39-53.
5. Sur A., Kanoria M. *Elasto-Thermodiffusive Response in a Two-Dimensional Transversely Isotropic Medium*. Mechanics of Advanced Composite Structures, 2019, Vol.6, Pp.95-104.
6. Parfenova E.S., Knyazeva A.G. *The influence of chemical reaction parameters on the interaction of thermal, diffusion and mechanical waves in the condition of surface treatment by particles beam*. Computational continuum mechanics, 2021, Vol.14, No.1, Pp.77-90.
7. Kumar R., Gupta V. *Uniqueness, reciprocity theorem, and plane waves in thermoelastic diffusion with a fractional order derivative*. Chin. Phys. B, 2013, Vol.22, No.7, 074601.
8. Abo-Dahab S.M. *Generalized Thermoelasticity with Diffusion and Voids under Rotation, Gravity and Electromagnetic Field in the Context of Four Theories*. Appl. Math. Inf. Sci., 2019, Vol.13, No.2, Pp.317-337.
9. Kaur I., Lata P. *Rayleigh wave propagation in transversely isotropic magneto-thermoelastic medium with three-phase-lag heat transfer and diffusion*. Intern. J. of Mechanical and Materials Engineering, 2019, Vol.14, Pp.12.
10. Zenkour A.M. *Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model*. J. of Ocean Engineering and Science, 2020, Vol.5, Iss.3, Pp.214-222.
11. Komar L.A., Svistkov A.L. *Thermodynamics of Elastic Material with Relaxing Heat Flux*. Mechanics of Solids, 2020, No.4, Pp.584-588.
12. Aouadi M. *A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion*. Intern. J. of Solids and Structures, 2007, Vol.44, Pp.5711-5722.
13. Abbas A. Ibrahim. *Eigenvalue approach on fractional order theory of thermoelastic diffusion problem for an infinite elastic medium with a spherical cavity*. Applied Mathematical Modelling, 2015, Vol.39, Iss.20, Pp.6196-6206.
14. Deswal S., Kalkal K.K., Sheoran S.S. *Axi-symmetric generalized thermoelastic diffusion problem with two-temperature and initial stress under fractional order heat conduction*. Physica B: Condensed Matter., 2016, Vol.496, Pp.57-68.
15. Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M. *Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect*. Intern. J. of Computer Sciences and Engineering, 2019, Vol.7, Iss.1, Pp.148-156.
16. Kumar R., Devi S. *Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources*. CMST, 2019, Vol.25. No.4, Pp.167-176.
17. Kumar R., Devi S. *Effects of Viscosity on a Thick Circular Plate in Thermoelastic Diffusion Medium*. J. of Solid Mechanics, 2019, Vol.11, No.3, Pp.581-592.
18. Wen M., Xu J., Xiong H. *Thermal Diffusion Effects in a Tunnel with a Cylindrical Lining and Soil System under Explosive Loading*. Mathematical Problems in Engineering, 2019, Vol.2019, 2535980.
19. Tripathi J.J., Kedar G.D., Deshmukh K.C. *Two-dimensional generalized thermoelastic diffusion in a half-space under axisymmetric distributions*. Acta Mech., 2015, Vol.226, Pp.3263-3274.
20. Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P. *The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity*. Intern. J. of Engineering Science, 2009, Vol.47, Pp.669-679.



21. Minov A.V. *Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya pologo tsilindra, podverzhennogo termodiffuzionnomu vozdeystviyu ugleroda v osesimmetrichnom teplovom pole, peremennom po dline* [Investigation of the stress-strain state of a hollow cylinder subject to thermal diffusion action of carbon in an axisymmetric thermal field, variable along its length]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroenie*, 2008, No.10, Pp.21-26.
22. Zemskov A.V., Tarlakovskiy D.V. *Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer*. *Materials Physics and Mechanics*, 2015, No.1, Vol.23, Pp.36-41.
23. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V., Faykin G.M. *Unsteady bending of a cantilevered Euler–Bernoulli beam with diffusion*. *Computational continuum mechanics*, 2021, Vol.14, No.1, Pp.40-50.
24. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Polar-symmetric problem of elastic diffusion for isotropic multi-component plane*. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, Vol.158, No.1, 012101.
25. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Polyarno-simmetrichnaya zadacha uprugoy diffuzii dlya mnogokomponentnoj sredy* [Polar-symmetric problem of elastic diffusion for a multicomponent medium]. *J. Problems of Strength and Plasticity*, 2018, No.1. Pp.5-14.
26. Zverev N.A., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Modelirovanie nestatsionarnykh svyazannykh mekhanodiffuzionnykh protsessov v izotropnom sploshnom tsilindre* [Modeling of unsteady coupled mechanodiffusion processes in an isotropic solid cylinder]. *J. Problems of Strength and Plasticity*, 2020, Vol.82, No.2, Pp.156-167.
27. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Handbook on Operational Calculus]. Moskva, Vysshaya shkola, 1965, 568 p.
28. Macevityj Yu.M., Vakulenko K.V., Kazak I.B. *O zalechivanii defektov v metallakh pri plasticheskoj deformatsii (analiticheskij obzor)* [On the healing of defects in metals under plastic deformation (analytical review)]. *Problemy mashinostroeniya*, 2012, Vol.15, No.1, Pp.66-76.
29. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskij A.M. i dr. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik* [Physical quantities: Handbook]. Moskva, Ehnergoatomizdat, 1991, 1232 p.
30. Vestyak A.V., Zemskov A.V. *Unsteady Elastic Diffusion Model of a Simply Supported Timoshenko Beam Vibrations*. *Mechanics of Solids*, 2020, No.5, Pp.690-700.
31. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S, Tarlakovskii D.V. *Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action*. In: *Multiscale Solid Mechanics. Strength, Durability, and Dynamics (Advanced Structured Materials, Vol.141)*. Cham, Springer, 2021, Pp.487-499.

*Поступила в редакцию 26 августа 2021 года.*

---

Сведения об авторах:

Зверев Николай Андреевич – асп., асс., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [nikolayzverev1995@gmail.com](mailto:nikolayzverev1995@gmail.com)

Земсков Андрей Владимирович – д.ф.-м.н., доц., проф., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [azemskov1975@mail.ru](mailto:azemskov1975@mail.ru)

Тарлаковский Дмитрий Валентинович – д.ф.-м.н., проф., зав. лаб., НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [tdv902@mai.ru](mailto:tdv902@mai.ru)