

УДК 531.01

DOI 10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.191\_204.03

## ДВЕ МОДЕЛИ РЕЗИНОКОРДНОГО СЛОЯ

Шешенин С.В., Ду Икунь

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Брекерные слои в пневматической радиальной шине – это важная часть в конструкции шины. Эти слои включают металлический корд, что приводит к существенной жесткости на изгиб. При гомогенизации таких слоев применяют метод «обрезания» брекерного слоя. В результате возникает более тонкий слой, обладающий адекватными жесткостями как на растяжение, так и на изгиб. В данной работе используется феноменологический подход для получения эффективных свойств однородного анизотропного гиперупругого материала эквивалентного слоя. Для описания осредненных свойств можно использовать две модели: трансверсально-изотропного или ортотропного материала. В данной работе на основании численных экспериментов делается выбор между этими моделями для обрезанного резинокордного слоя. В обоих случаях потенциалы строятся на базе потенциалов Трелоара или Муни.

Отметим, что в случае неоднородного тонкого слоя традиционное определение осреднения нуждается в модификации. В предыдущих работах авторов предложено определение трехмерных осредненных упругих свойств слоя путем окружения его однородным материалом. Это позволяет корректно учесть тот факт, что пограничный эффект от граничных условий на верхней и нижней поверхностях пронизывает всю ячейку периодичности.

Предложен набор локальных задач, достаточный для определения материальных констант. Решены нелинейные локальные задачи на периодической ячейке и определены материальные константы упругого потенциала. Для «обрезанного» слоя определена возможность применимости ортотропного потенциала (вторая модель). Обнаружено, что ортотропные свойства проявляются относительно продольных сдвигов. Результаты показывают пригодность предложенной структуры потенциала и схемы определения материальных параметров.

**Ключевые слова:** резинокордный слой; физическая и геометрическая нелинейность; гомогенизация; трансверсально-изотропная группа преобразований

## HOMOGENIZATION OF THIN RUBBER-CORD LAYERS AT MODERATE LARGE DEFORMATIONS

Sheshenin S.V., Du Yikun

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

Breaker layers in a pneumatic tire are an important part in the tire construction. These layers have a metal cord resulting in substantial bending stiffness. When homogenizing such layers, a “shave” method is applied to the breaker layer. This results in a thinner layer having adequate stiffness in both tension and bending. In this work, a phenomenological approach

is used to obtain the effective properties of a homogeneous anisotropic hyper elastic material of an equivalent layer. Two models utilize transverse isotropic or orthotropic potential used to describe the homogenized properties. Comparison is made between these models for the “shaved” rubber-cord layer based on numerical experiments. In both cases, the potentials are built on the basis of the Treloar or Mooney potentials.

Note that in the case of an inhomogeneous thin layer, the traditional definition of homogenization needs to be modified. In previous works of the authors, it was proposed to determine 3D averaged elastic properties of a layer by surrounding it with a homogeneous material. This makes it possible to correctly take into account the fact that the boundary effect from the upper to lower surfaces that penetrates through the whole periodicity cell.

A set of local problems formulated for the periodicity cell is proposed. This set is sufficient for determining elastic potential material parameters. Nonlinear local problems on a periodic cell are solved and the material constants of the elastic potential are determined. The applicability of the orthotropic potential (second model) is determined for the “shaved” layer. It was found that orthotropic properties are manifested relative to longitudinal shears. The results show the suitability of the proposed potential and the scheme for determining the material parameters.

**Keywords:** rubber-cord layer; physical and geometric nonlinearity; homogenization; transversely isotropic transformation group

## ВВЕДЕНИЕ

Резинокордные слои являются основой конструкции пневматических шин. Например, в радиальных шинах легковых автомобилей используется два брекерных слоя и один слой каркаса. Для построения точной модели каждого слоя с учетом нитей корда требуется огромное количество вычислений, которое невозможно осуществить в настоящее время. Более целесообразно применение двухуровневого подхода, при котором в модели всей шины используются осредненные однородные слои, а напряжения на уровне структуры корда вычисляются на основе осредненного напряженно-деформированного состояния (НДС) и точного задания структуры. Математически это есть метод осреднения в первом приближении [1-4]. Инженеры интуитивно пришли к такому подходу для определения натяжения в корде, ответственного в первую очередь за целостность резинокордного слоя. Для напряжения в корде никаких локальных задач на ячейке периодичности решать фактически не нужно. Следовательно, использование метода гомогенизации значительно упрощает вычисления и сохраняет достаточную точность определения НДС.

Для неоднородного слоя важным является точное определение эффективных упругих свойств и представительной области (RVE – representative volume element).

В случае трехмерной среды одно из первых определений RVE и эффективных модулей было дано Хиллом [5,6], также был предложен метод самосогласования для приближенного вычисления эффективных модулей [6]. Методы асимптотической гомогенизации использовались при анализе периодических сред как в трехмерном случае [7], так и в случае неоднородных слоев [8-10]. В [11] двухслойный резинокордный ламинат был проанализирован в рамках линейной упругости. В [12] используется метод конечных элементов (МКЭ) для расчета эффективных модулей также в области линейной упругости.

В предположении плоского напряженного состояния для резинокордного слоя или пакета слоев в рамках классической ламинатной теории в большинстве

работ находятся двумерные эффективные модули (см., например, [13-15]). Однако, для анализа НДС в рамках 3D конечно-элементной модели требуется знать модули в поперечном направлении. В предыдущих работах авторов [16,17] отмечается, что стандартное определение 3D эффективных модулей для слоя некорректно, поскольку в поперечном направлении нет представительного объема. Другими словами, краевой эффект пронизывает всю ячейку периодичности. Поэтому в [16,17] предложены обобщения определений представительной области и эффективных модулей для слоя, пригодные в рамках как линейной упругости, так и нелинейной упругости.

Заметим, что стандартное определение эффективных свойств вполне корректно для жесткостей слоя в плане, но не изгибных жесткостей. Однако методы осреднения [8-10] одновременно понижают размерность задачи, сводят трехмерный слой к модели пластины и позволяют определять как жесткости в плане, так и изгибные жесткости. При этом изгибные жесткости, вообще говоря, не могут быть получены из осредненных жесткостей в плане слоя. Другими словами, эквивалентный однородный слой с найденными эффективными жесткостями в плане может обладать неправильными изгибными жесткостями. Для исправления ситуации используют так называемое «обрезание» резинокордных слоев. Это означает, что слой в конечно-элементной модели искусственно делается более тонким, чем реальный резинокордный слой. Другой вариант состоит в моделировании резинокордного слоя моментной упругой средой [18].

Однако деформация в резинокордном слое может достигать 15-20%. Следовательно, материал резинового корда целесообразно моделировать как гиперупругий однородный материал. В [18-20] предложены модели наполненной резины при больших деформациях с учетом вязкоупругости в рамках обобщенной модели Максвелла. В работах [21,22] построены модели резинокорда при больших деформациях, а также рассматриваются его вязкоупругие свойства. В [23] разработаны трансверсально-изотропные гиперупругие определяющие модели для резиновых материалов, армированных волокном. В [24] взаимодействие между резиновой матрицей и кордом также учитывалось при построении упругой потенциальной энергии.

Количество независимых инвариантов, входящих в упругий потенциал, определяется типом анизотропии. В изотропном случае потенциальная энергия и вид определяющего соотношения не должны зависеть от выбора системы координат, поэтому потенциал является функцией инвариантов всех преобразований, входящих в группу ортогональных преобразований. В [17] численными экспериментами показано, что необрезанный резинокордный слой может моделироваться трансверсально-изотропным гиперупругим потенциалом, предложенным в [25]. Это первая модель резинокордного слоя. Сложнее обстоит дело в случае обрезанного слоя. Данная статья является продолжением работы [17] и касается ортотропных свойств обрезанного слоя (вторая модель).

## 1. ЗАДАЧА НА ЯЧЕЙКЕ

Ячейка периодичности «обрезанного» слоя брекера (рис.1) с  $\eta = \frac{h}{l} \approx 0,5$  тоньше, чем ячейка каркаса, исследованная в предыдущей работе авторов [17] с  $\eta \approx 1$ , вследствие применяемого метода «обрезания» брекерного слоя. «Обрезание» слоя может применяться, чтобы гомогенный слой имел изгибные

жесткости, близкие соответствующим жесткостям неоднородного слоя.

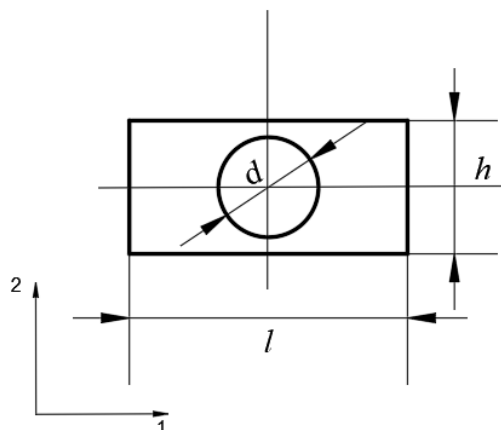


Рис.1. Ячейка периодичности (RVE) «обрезанного» слоя брекера.

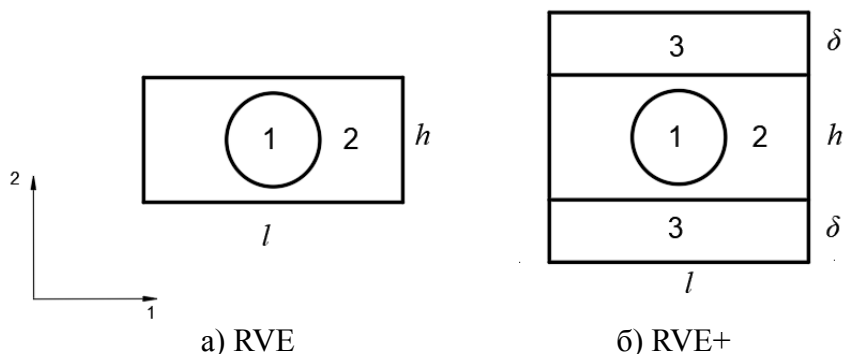
Для резинокордного слоя стандартное определение осредненных упругих свойств [5] уже не подходит, как это пояснено в предыдущих работах авторов [16-17]. Это определение предполагает наличие представительной области, на границе которой задаются специального вида перемещения (задача I) или поверхностные силы (задача II). Должна существовать представительная область, чтобы краевой эффект не влиял на расчет эквивалентного модуля. Однако в случае слоя краевой эффект пронизывает всю ячейку периодичности. Это приводит, в частности, к тому, что вычисленные согласно классическому определению эффективные модули линейной упругости не являются обратными к эффективным податливостям. Поэтому определение осредненных упругих свойств нуждается в изменении.

Кратко приведем модифицированное понимание представительной области [16,17]. Пусть имеется ячейка периодичности  $V_{RVE}$  неоднородного слоя в начальной конфигурации с границей  $\Sigma_{RVE}$ , показанная на рис.2а.

Предполагаем, что материал ячейки удовлетворяет определяющему соотношению

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{x}, \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}}$$

где  $W$  есть упругий потенциал, зависящий от  $\mathbf{x}$  как от параметра. Здесь  $\mathbf{S}$  – второй тензор Пиолы-Кирхгофа,  $\mathbf{C}$  – мера деформаций Коши-Грина.



а) RVE

б) RVE+

Рис.2. Вид ячейки периодичности: а) ячейка периодичности резинокордного слоя; б) та же ячейка, но дополненная слоями окружающего материала сверху и снизу. 1 – материал корда, 2 – материал матрицы, 3 – материал, окружающий резинокордный слой.

Ячейка сверху и снизу дополняется слоями однородного материала, который окружает неоднородный слой в конструкции. Эта схема показана на рис.2б. Так получается ячейка  $RVE^+$ , которая состоит из верхней и нижней поверхностей, обозначаемых  $\Sigma_{tb}$  ( $t$  – top,  $b$  – bottom), и боковой поверхности  $\Sigma_{lat}$  ( $lat$  – lateral). Идея расширенного определения [17] эффективных упругих свойств состоит в том, что аффинное преобразование начальных координат в текущие задается на границе  $\Sigma_{tb}$ , а средние напряжения и деформации вычисляются по области  $RVE$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \mathbf{S} dV, \quad \langle \mathbf{C} \rangle = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \mathbf{C} dV.$$

На боковой поверхности ячейки периодичности  $\Sigma_{lat}$  задаются условия, учитывающие периодичность НДС.

Так же, как в [17], будем обозначать задачу, в которой граничные условия задаются на границе ячейки  $RVE$ , как задачу  $I$ , а при задании условий на границе  $RVE^+$  – как задачу  $I^+$ . Предполагается существование эффективных потенциалов, таких, что

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\partial W^{eff}(\langle \mathbf{C} \rangle)}{\partial \langle \mathbf{C} \rangle}, \quad \langle \mathbf{C} \rangle = \frac{\partial W^{eff}(\langle \mathbf{S} \rangle)}{\partial \langle \mathbf{S} \rangle}. \quad (1)$$

## 2. СТРУКТУРА УПРУГОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛА RVE

Эффективный потенциал резинкорда (1) представим в виде изотропной части и корректирующих членов

$$W^{eff} = W_{iso} + W_{corr} \quad (2)$$

Изотропная часть (2) зависит от трех инвариантов тензора  $\mathbf{C}$ :  $W_{iso} = W_{sh}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + W_{vol}(J)$ , где

$$I_1(\bar{\mathbf{C}}) = \bar{C}_{11} + \bar{C}_{22} + \bar{C}_{33}, \quad I_2(\bar{\mathbf{C}}) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(\bar{\mathbf{C}}^2)) \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}, \quad I_3 = J^2, \quad J = \det(\mathbf{F})$$

$\mathbf{F}$  – деформационный градиент. Энергия сдвига  $W_{sh}$  может быть описана потенциалом Муни или потенциалом Трелоара. Для энергии деформации объема существует несколько известных формул, использующих модуль объемного сжатия  $K$ . Мы примем следующие представления

$$W_{sh} = W_{Treloar} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3), \quad W_{sh} = W_{Mooney} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3),$$

$$W_{vol} = \frac{K}{2}(J - 1)^2.$$

Для ортотропных материалов число независимых инвариантов равно шести [4]. Однако в выражении потенциала, можно использовать зависимые инварианты. Например, в потенциалах Муни-Ривлина используются различные степени потенциалов  $\bar{I}_1, \bar{I}_2$ , которые алгебраически зависимы между собой. Для описания потенциала ортотропного материала к инвариантам (3) можно добавить

инварианты  $I_{41}$ ,  $I_{42}$  и  $I_5$ ,  $I_6$

$$I_{41} = \frac{1}{2} C_{13}^2, \quad I_{42} = \frac{1}{2} C_{23}^2, \quad I_5 = \frac{1}{2} (C_{33} - 1)^2, \quad I_6 = \frac{1}{2} (C_{22} - 1)^2.$$

Следовательно

$$W^{eff} = W_{sh} + W_{vol} + W_{sh_1} + W_{sh_2} + W_{33} + W_{22},$$

где  $W_{sh_1} = \frac{a_{13}}{2} I_{41}$ ,  $W_{sh_2} = \frac{a_{23}}{2} I_{42}$  – потенциальная энергия сдвига вдоль волокон

в плоскостях 1-3 и 2-3, а  $W_{33} = \frac{b_{33}}{2} I_5$ ,  $W_{22} = \frac{b_{22}}{2} I_6$ . Таким образом, рассматриваемый потенциал ортотропной среды имеет шесть (или семь, если использует потенциал Муни) материальных параметров:  $c_{10}$ ,  $(c_{01})$ ,  $K$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $b_{33}$ ,  $b_{22}$ .

Для их определения требуются либо эксперименты с образцами резинокордного материала, либо численное решение задачи на ячейке.

### 3. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Материальные и геометрические параметры «обрезанного» слоя брекера приведены в таблице 1.

Первое нагружение представительной ячейки – растяжение вдоль оси 1, т.е.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} (1+\varepsilon)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1.

Параметры ячейки «обрезанного» слоя.

$E_c$ , МПа	$\nu_c$	$c_{01}$ , МПа	$c_{10}$ , МПа	$K$ , МПа	$\eta$	$\delta$ , мм	Концентрация корда, %
230000	0,3	0,0576	1,43	100	0,5	0,3	21,2

Средние деформации  $\langle \varepsilon_{\alpha\alpha} \rangle = \langle C_{\alpha\alpha} - 1 \rangle$ ,  $\alpha = 1, 2$  и напряжения  $\langle S_{\alpha\alpha} \rangle$ , вычисленные по RVE при решении задачи  $I^+$ , приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Результаты вычислительного эксперимента на растяжение  
вдоль оси 1 в задаче  $I^+$ .

$\langle \varepsilon_{11} \rangle$ , %	4	7,8	11,6	15,2	19
$\langle \varepsilon_{22} \rangle$ , %	0	0	0	0	0
$\langle S_{11} \rangle$ , МПа	5,3	9,7	14,3	18,4	22,3
$\langle S_{22} \rangle$ , МПа	5,4	10,6	16,8	23,1	30

Расчеты, проведенные для обеих задач  $I$  и  $I^+$ , дают весьма близкие значения средних. Расчеты осуществлялись на сетке, содержащей 24427 узлов, и на сетке, у которой было вдвое больше узлов по каждому направлению. Разница в вычисленных деформациях и напряжениях оказалась не больше 1%. В задаче  $I^+$

при растяжении вдоль оси 1 на границе  $\Sigma_{RVE^+}$  добавлены перемещения, чтобы сделать  $\langle \varepsilon_{22} \rangle$  равной нулю. Результаты растяжения вдоль оси 2 приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Данные одноосного растяжения вдоль оси 2 в задаче  $I^+$ .

$\langle \varepsilon_{22} \rangle, \%$	3,8	7,8	10,1	15,2	18,4
$\langle \varepsilon_{11} \rangle, \%$	0	0	0	0	0
$\langle S_{11} \rangle, \text{МПа}$	5	10,8	14,4	23	29
$\langle S_{22} \rangle, \text{МПа}$	5	9,9	12,7	18,5	22

Выражение для  $S_{11}$  при растяжении вдоль оси 1 для потенциала Муни имеет вид  $(\varepsilon = C_{11} - 1)$  (здесь и далее для потенциала Трелоара нужно положить  $c_{01} = 0$ )

$$S_{11} = \frac{4}{3} c_{10} \varepsilon (\varepsilon + 2) (\varepsilon + 1)^{-\frac{8}{3}} + \frac{4}{3} c_{01} \varepsilon (\varepsilon + 2) (\varepsilon + 1)^{-\frac{10}{3}} + K \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}. \quad (4)$$

Аналогично  $S_{22}$  при растяжении вдоль оси 2 имеет вид

$$S_{22} = \frac{4}{3} c_{10} \varepsilon (\varepsilon + 2) (\varepsilon + 1)^{-\frac{8}{3}} + \frac{4}{3} c_{01} \varepsilon (\varepsilon + 2) (\varepsilon + 1)^{-\frac{10}{3}} + K \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + b_{22} \varepsilon + \frac{b_{22}}{2} \varepsilon^2. \quad (5)$$

Из рис.3 следует, что для задач  $I^+$  диаграммы деформирования вдоль осей 1 и 2 почти одинаковы. Из (4) и (5) вытекает, что  $b_{22} = 0$ .

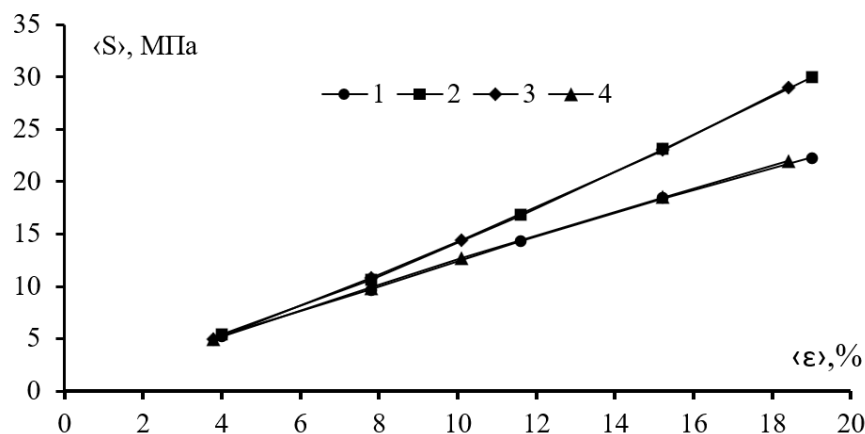


Рис.3. Диаграммы «напряжение – деформация», полученные на основе задач  $I^+$ : 1 –  $\langle S_{11} \rangle$ , 2 –  $\langle S_{22} \rangle$  при одноосном растяжении вдоль оси 1; 3 –  $\langle S_{22} \rangle$ , 4 –  $\langle S_{11} \rangle$  при одноосном растяжении вдоль оси 2.

Определим теперь константы  $c_{10}$ ,  $c_{01}$  из опыта на поперечный сдвиг

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Связь между касательным напряжением и удвоенной деформацией сдвига  $\gamma$  выражается формулой

$$S_{12} = \frac{\partial W}{\partial C_{12}} + \frac{\partial W}{\partial C_{21}} = 2c_{10}\gamma \left(1 + \frac{\gamma^2}{3}\right) + 2c_{01}\gamma \left(1 + \frac{2\gamma^2}{3}\right) = G\gamma + g_3\gamma^3. \quad (6)$$

Для потенциала Трелоара ( $c_{01} = 0$ ), коэффициент  $c_{10}$  можно сразу получить из выражения (6). Для потенциала Муни данное выражение трудно использовать для получения констант  $c_{10}$ ,  $c_{01}$ , поскольку вычисленная зависимость  $\langle S_{12} \rangle$  от  $\gamma$  близка к линейной для деформаций до 20%. Поэтому удобно воспользоваться вычисляемой квадратичной зависимостью  $\langle S_{22} \rangle$  от  $\gamma$

$$S_{22} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{22}} = \left[ -\frac{2}{3}(c_{10} + 2c_{01}) + \frac{b_{22}}{2} \right] \gamma^2 = \left[ -\frac{2}{3}(c_{10} + 2c_{01}) \right] \gamma^2 = -g_3\gamma^2.$$

Средние напряжения при простом сдвиге приведены в таблице 4 в случае задачи  $I$ .

Таблица 4.

Данные вычислительного эксперимента на простой поперечный сдвиг в задаче  $I$ .

$\langle \varepsilon_{12} \rangle$ , %	4	8	12	15,7	19,5
$\langle S_{12} \rangle$ , МПа	0,25	0,5	0,76	1	1,3
$\langle S_{22} \rangle$ , МПа	-0,0072	-0,029	-0,064	-0,12	-0,18

Средние напряжения при сдвиговом деформировании приведены в таблице 5 в случае задачи  $I^+$  и заметно отличаются от решения задачи  $I$ .

Таблица 5.

Данные вычислительного теста на поперечный простой сдвиг в задаче  $I^+$

$\langle \varepsilon_{12} \rangle$ , %	3,8	7,6	11,4	16	19,5
$\langle S_{12} \rangle$ , МПа	0,18	0,37	0,55	0,77	0,96
$\langle S_{22} \rangle$ , МПа	-0,0019	-0,0075	-0,017	-0,032	-0,049

В обоих случаях разница в вычислении  $\langle S_{12} \rangle$  на двух последовательных сетках составляет 0,1%, а  $\langle S_{22} \rangle$  – 1%. Найденные константы приведены в таблице 6.

Таблица 6.

Вычисленные значения констант упругих потенциалов Трелоара и Муни (МПа).

Потенциал	Трелоара		Муни		
	$C_{10}$	$K$	$C_{10}$	$C_{01}$	$K$
$I$	3,1	125	1,95	2,4	122
$I^+$	2,37	132	2,5	-0,28	132

Для расчета констант  $a_{13}$  и  $a_{23}$  на ячейке была создана трехмерная модель,



образованная из двумерной ячейки периодичности, продолженной вдоль оси  $x_3$  так, что длина в этом направлении в 3 раз превышала размеры ячейки в плоскости 1-2.

Деформация сдвига в плоскости 1-3

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1+\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Выражение для  $S_{13}$  при сдвиге в плоскости 1-3 для двух используемых в работе потенциалов имеет вид

$$S_{13} = \frac{\gamma a_{13}}{2} + 2\gamma c_{01} + 2\gamma c_{10} + \frac{4}{3}c_{01}\gamma^3 + \frac{2}{3}c_{10}\gamma^3.$$

Средние напряжения при простом сдвиге в плоскости 1-3 приведены в таблице 7 в случае задачи  $I$ .

Таблица 7.

Данные вычислительного эксперимента на простой сдвиг в задаче  $I$ .

$\langle \gamma_{13} \rangle$ , %	4	7,7	11,6	15,7	19,2
$\langle S_{11} \rangle$ , МПа	-0,016	-0,065	-0,15	-0,26	-0,39
$\langle S_{13} \rangle$ , МПа	0,21	0,41	0,61	0,81	1

Разница между средними напряжениями на двух последовательных сетках составляет менее 1%. В случае задачи  $I^+$  средние напряжения показаны в таблице 8. Аналогично проведены расчеты продольного сдвига в плоскости 2-3. Все результаты приведены в таблице 9.

Таблица 8.

Данные вычислительного эксперимента на простой сдвиг в задаче  $I^+$ .

$\langle \gamma_{13} \rangle$ , %	4	7,8	11,6	15,4	19,2
$\langle S_{11} \rangle$ , МПа	-0,018	-0,072	-0,16	-0,28	-0,43
$\langle S_{13} \rangle$ , МПа	0,22	0,45	0,67	0,88	1,1

Таблица 9.

Результаты расчета параметров  $a_{13}$  и  $a_{23}$  (МПа).

	$a_{13}$ (Муни)	$a_{13}$ (Трелоар)	$a_{23}$ (Муни)	$a_{23}$ (Трелоар)
$I$	-6,9	-2	3,9	1,1
$I^+$	2,6	2	4	3,4

#### 4. СРАВНЕНИЕ ГОМОГЕНИЗИРОВАННОЙ МОДЕЛИ И МИКРОМОДЕЛИ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ ИЗГИБА

Основные типы деформирования слоя резинокорда в шине – растяжение и изгиб. Задача на изгиб с растяжением была использована для проверки описанной выше осредненной модели при плоско-деформированном состоянии. Микромодель, используемая при проверке, состояла из 100 ячеек периодичности.

Решалась задача о цилиндрическом изгибе такой пластины в результате заданной в середине сосредоточенной силы  $F_y$  (рис.4а). Задача решалась МКЭ в двумерной постановке.

В результате решения вычислялось перемещение. Вычисленная зависимость перемещения от силы сравнивалась с аналогичной зависимостью, полученной на основе однородной осредненной модели, показанной на рис.4б.

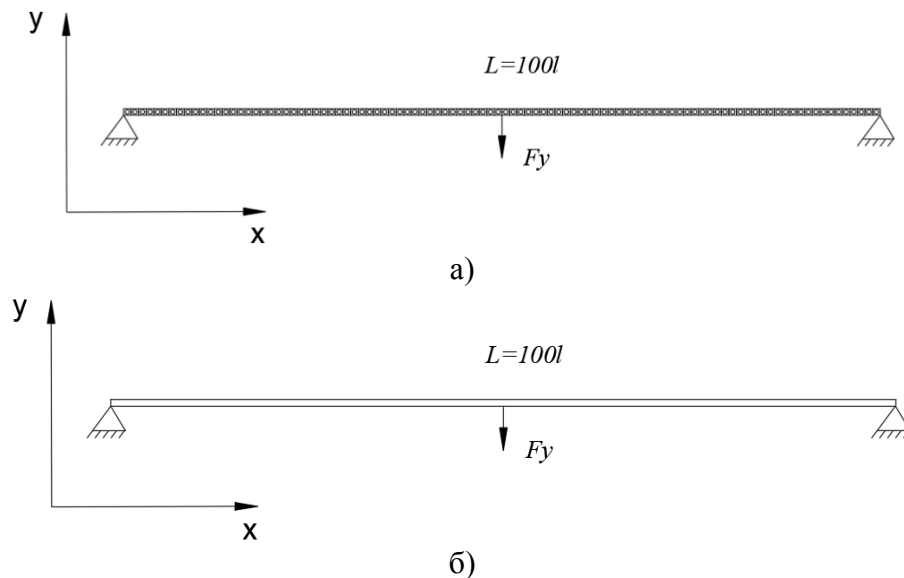


Рис.4. Микромодель и граничные условия (а), гомогенизированная модель и граничные условия (б).

Параметры осредненной модели были получены на основании вышеописанной методики. Результат расчета показан на рис.5.

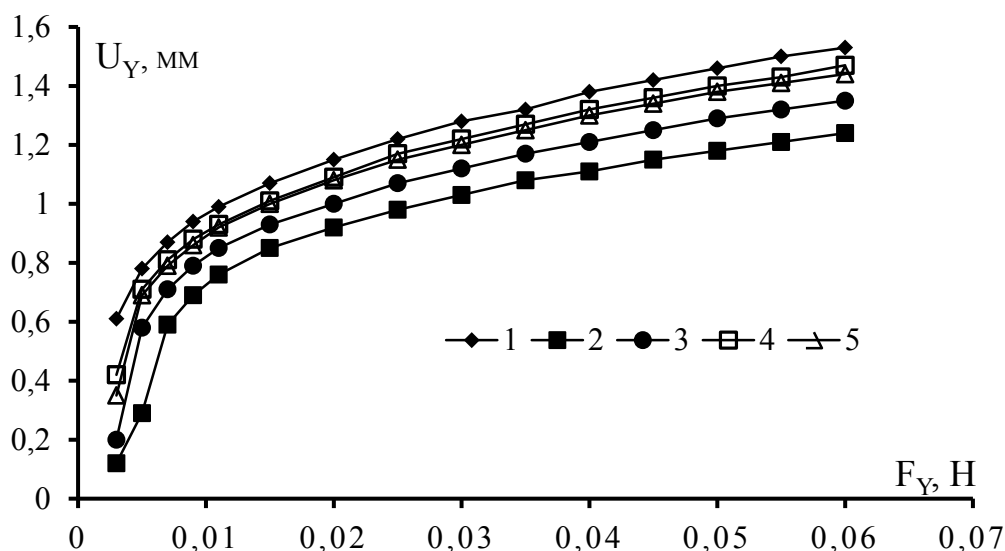


Рис.5. Сравнение между моделями при деформировании изгиба: 1 – микромодель; гомогенизированные модели в задачах: 2 –  $I$  (Муни), 3 –  $I$  (Трелоар), 4 –  $I^+$  (Муни), 5 –  $I^+$  (Трелоар).

На рис.5 видно, что приближение решения по осредненной модели

к решению по микромодели лучше, когда свойства определялись из задачи  $I^+$ , чем из задачи  $I$ . Для задачи  $I^+$  решение практически не зависит от того, какой потенциал выбрать – Муни или Трелоара.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование упругих свойств «обрезанного» резинокордного слоя, ячейка периодичности которого имеет вытянутую форму. В работе используется модифицированное определение [16,17] осредненных свойств для неоднородного слоя, находящегося в окружении однородного материала. Показано, что такой слой может моделироваться как однородный слой гиперупругого ортотропного материала, но не трансверсально изотропного. Реализована предложенная схема вычисления параметров потенциала. Как показали численные эксперименты, свойства при растяжении в поперечных к волокнам направлениях практически одинаковы. Однако ортотропия проявляется относительно сдвигов. Также выявлено, что разница в использовании предложенного и традиционного определения эффективных свойств проявляется больше всего при определении сдвиговых параметров потенциала. Выявлено, что в диапазоне деформаций до 20% ортотропные потенциалы, построенные на основе потенциалов Трелоара и Муни, приводят к близким результатам.

Решение задачи об изгибе показывает, что параметры потенциала, найденные согласно модифицированному определению  $RVE$ , приводят к решению, которое ближе к решению на основе микромодели.

Авторы выражают неподдельную благодарность Н.Б. Артамоновой за помощь в оформлении текста.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. – Amsterdam, New York: North-Holland Pub. Co., 1978. – 392 p.
2. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogenous Media and Vibration Theory (Lecture Notes in Physics)*. – New York: Springer-Verlag, 1980. – 400 p.
3. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
5. Hill R. *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles* // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – Vol.11. – Pp.357-372.
6. Hill R. *A self-consistent mechanics of composite materials* // J. Mech. Phys. Solids. – 1965. – Vol.13. – Pp.213-222.
7. Hassani B., Hinton E. *A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure* // Comput. Struct. – 1998. – Vol.69. – Pp.707-717.
8. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness* // Int. J. Solids and Struct. – 1984. – Vol.20. – Pp.333-350.
9. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells: asymptotic analysis and homogenization*. – New York: World Scientific Pub. Co., 2000. – 739 p.

10. Шешенин С.В. *Асимптотический анализ периодических в плане пластин* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – №6. – С.71-79.
11. Pidaparti R., Kakarla V. *Three-dimensional stress analysis of two-ply cord-rubber composite laminates* // Composite Structures. – 1994. – Vol.28. – Pp.433-440.
12. Pidaparti R., May A. *A micromechanical analysis to predict the cord-rubber composite properties* // Composite Structures. – 1996. – Vol.34. – Pp.361-396.
13. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and analysis of composite materials*. – Kidlington, Oxford: Elsevier Science Ltd., 2001. – 412 p.
14. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. – Philadelphia: Taylor & Francis, 1998. – 519 p.
15. Feng K. *Statische Berechnung des Gurtelreifens unter besonderer Berucksichtigung der kordverstarkten Lagen*. – Berlin: VDI Verlag, 1995. – 150 p.
16. Шешенин С.В., Ду Икунь *Модель резинокорда при умеренно больших деформациях* / 8-я Всеросс. научн. конф. с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО «Сам Полиграфист». – 2019. – С.101-109.
17. Шешенин С.В., Ду Икунь *Гомогенизация резинокордного слоя при умеренно больших деформациях* // Механика композитных материалов. – 2021. – Т.57. – №3.
18. Kaliske M., Rothert H. *Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains* // Computational Mechanics. – 1997. – Vol.19. – Pp.228-239.
19. Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H. *An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures* // Computational Mechanics. – 1997. – Vol. 22. – Pp.395-403.
20. Marvalova B. *Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modeling* // Engineering Mechanics. – 2007. – Vol.14. – No.1/2. – Pp.81-89.
21. Nam T.H. *Mechanical properties of the composite material with elastomeric matrix reinforced by textile cords* // PhD thesis. – Technical University of Liberec. – Liberec, Czech Republic, 2004. – 130 p.
22. Tuan H.S., Marvalova B. *Constitutive material model of fiber-reinforced composites at finite strains in comsol multiphysics* / 15<sup>th</sup> Annual conference proceedings. Conference Technical Computing. – Prague, 2007.
23. Brown L.W., Smith L.M. *A simple transversely isotropic hyperelastic constitutive model suitable for finite element analysis of fiber reinforced elastomers* // J. Eng. Mater. Technol. – 2011. – Vol.133. – Pp.1-13.
24. Zihan Zhao, Xihui Mu, Fengpo Du. *Constitutive model research for rubber-cord composites used in rubber track* // Materials Today Communications. – 2020. – Vol.23. – 100937.
25. Шешенин С.В., Закалюкина И.М., Скопцов К.А. *Упругий потенциал резинокордного монослоя* // Вестник МГСУ. – 2013. – Т.11. – С.100-106.

## REFERENCES

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Amsterdam, New York, North-Holland Pub. Co., 1978, 392 p.

2. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogenous Media and Vibration Theory (Lecture Notes in Physics)*. New York, Springer-Verlag, 1980, 400 p.
3. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media*. New York, Springer-Verlag, 1989, 366 p.
4. Pobedrya B.Ye. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1984, 336 p.
5. Hill R. *Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles*. J. Mech. Phys. Solids, 1963, Vol.11, Pp.357-372.
6. Hill R. *A self-consistent mechanics of composite materials*. J. Mech. Phys. Solids, 1965, Vol.13, Pp.213-222.
7. Hassani B., Hinton E. *A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure*. Comput. Struct., 1998, Vol.69, Pp.707-717.
8. Kohn R.V., Vogelius M. *A new model of thin plates with rapidly varying thickness*. Int. J. Solids and Struct., 1984, Vol.20, Pp.333-350.
9. Levinski T., Telega J.J. *Plates, laminates and shells: asymptotic analysis and homogenization*. New York, World Scientific Pub. Co., 2000, 739 p.
10. Sheshenin S.V. *Asymptotic analysis of plates with periodic cross-sections*. Mech. Solids., 2006, Vol.41, No.6, Pp.57-63.
11. Pidaparti R., Kakarla V. *Three-dimensional stress analysis of two-ply cord-rubber composite laminates*. Composite Structures, 1994, Vol.28, Pp.433-440.
12. Pidaparti R., May A. *A micromechanical analysis to predict the cord-rubber composite properties*. Composite Structures, 1996, Vol.34, Pp.361-396.
13. Vasiliev V.V., Morozov E.V. *Mechanics and analysis of composite materials*. Kidlington, Oxford, Elsevier Science Ltd., 2001, 412 p.
14. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. Philadelphia, Taylor & Francis, 1998, 519 p.
15. Feng K. *Statische Berechnung des Gurtelreifens unter besonderer Berucksichtigung der kordverstarkten Lagen*. Berlin, VDI Verlag, 1995, 150 p.
16. Sheshenin S.V., Du Yikun. *Model' rezinokorda pri umerenno bol'shikh deformatsiyakh [Rubber-cord model at moderate large deformations]*. 8-ya Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiyem "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy, slozhnykh i geterogennykh sred". Sbornik trudov. Moskva, OOO "Sam Poligrafist", 2019, Pp.101-109.
17. Sheshenin S.V., Du Yikun. *Homogenization of rubber-cord layers at moderate large deformations*. Mechanics of Composite Materials, 2021, Vol.57, No.3.
18. Kaliske M., Rothert H. *Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains*. Computational Mechanics, 1997, Vol.19, Pp.228-239.
19. Nasdala L., Kaliske M., Becker A., Rothert H. *An efficient viscoelastic formulation for steady-state rolling structures*. Computational Mechanics, 1997, Vol.22, Pp.395-403.
20. Marvalova B. *Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modeling*. Engineering Mechanics, 2007, Vol.14, No.1/2, Pp.81-89.
21. Nam T.H. *Mechanical properties of the composite material with elastomeric matrix reinforced by textile cords*. PhD thesis, Technical University of Liberec, Czech Republic, 2004, 130 p.

22. Tuan H.S., Marvalova B. *Constitutive material model of fiber-reinforced composites at finite strains in comsol Multiphysics*. 15th annual conference proceedings, Conference Technical Computing, Prague, 2007.
23. Brown L.W., Smith L.M. *A simple transversely isotropic hyperelastic constitutive model suitable for finite element analysis of fiber reinforced elastomers*. J. Eng. Mater. Technol., 2011, Vol.133, Pp.1-13.
24. Zihan Zhao, Xihui Mu, Fengpo Du. *Constitutive model research for rubber-cord composites used in rubber track*. Materials Today Communications, 2020, Vol.23, 100937.
25. Sheshenin S.V., Zakalyukina I.M., Skoptsov K.A. *Uprugiy potentsial rezinokordnogo monosloya [Elastic potential of a rubber-cord monolayer] // Vestnik MGSU, 2013, Vol.11, Pp.100-106.*

*Поступила в редакцию 5 апреля 2021 года.*

---

Сведения об авторах:

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: [sergey.sheshenin@mail.ru](mailto:sergey.sheshenin@mail.ru)

Ду Икунь – асп., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: [dyk7556178@gmail.com](mailto:dyk7556178@gmail.com)