

МОДЕЛЬ НЕСТАЦИОНАРНОГО ИЗГИБА УПРУГОДИФфуЗИОННОЙ БАЛКИ БЕРНУЛЛИ-ЭЙЛЕРА НА ВИНКЛЕРОВСКОМ ОСНОВАНИИ

Вестяк А.В.¹, Земсков А.В.^{1,2}, Тарлаковский Д.В.^{2,1}

¹ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия

²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается задача о нестационарных упругодиффузионных колебаниях ортотропной балки Бернулли-Эйлера, находящейся под действием распределенной поперечной нагрузки. Балка находится на упругом основании, моделью которого является основание Винклера.

Математическая постановка представляет собой замкнутую систему уравнений изгиба балки Бернулли-Эйлера с учетом диффузии, которая получена с помощью вариационного принципа Даламбера из модели упругой диффузии для сплошных сред, учитывающей релаксацию диффузионных потоков. Замыкают постановку задачи однородные краевые условия, выражающие условия свободного опирания и нулевые начальные условия, означающие отсутствие внутренних возмущений в начальный момент времени.

Решение задачи ищется с помощью метода функций Грина и представляется в виде сверток функций влияния с функциями, задающими нестационарные объемные возмущения. Для нахождения функций Грина используется интегральное преобразование Лапласа по времени и разложение в ряды Фурье по продольной координате. В результате, исходная система уравнений упругодиффузионных колебаний балки приводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье искомым функций в пространстве преобразования Лапласа. Обращение преобразования Лапласа осуществляется с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления.

Рассмотрены расчетные примеры для трехкомпонентной балки прямоугольного сечения. Найдены прогибы балки и изменение концентраций диффузанта под действием внезапно приложенной распределенной поперечной нагрузки. На примере трехкомпонентного материала выполнено численное исследование взаимодействия нестационарных механического и диффузионного полей в ортотропной балке. Результаты вычислений представлены в аналитической форме и в виде графиков зависимости искомым полей перемещения и приращений концентрации компонент среды от времени и координат.

В заключении приведены основные выводы о влиянии связанности полей на напряженно-деформированное состояние и массоперенос в балке.

Ключевые слова: механодиффузия; балка Бернулли-Эйлера; нестационарные задачи; ортотропные материалы; конструкционная анизотропия; основание Винклера

UNSTEADY ELASTIC DIFFUSION BENDING MODEL FOR A BERNULLY-EULER BEAM ON A WINKLER FOUNDATION

Vestyak A.V.¹, Zemskov A.V.^{1,2}, Tarlakovskii D.V.^{2,1}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

²*Research Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

ABSTRACT

We consider the unsteady elastic diffusion vibrations problem of an orthotropic Bernoulli-Euler beam on an elastic foundation under the action of a distributed transverse load. The Winkler model is used as an elastic foundation model.

For the mathematical formulation, we use the system of Bernoulli-Euler beam bending equations taking into account diffusion. These equations are obtained with use the d'Alembert variational principle, which is applied to the elastic diffusion model for a continuum. The resulting model consider the diffusion fluxes relaxation. The problem formulation is closed by homogeneous boundary conditions, which expressing the simple support conditions and zero initial conditions (internal disturbances absence at the initial time).

The problem solution is sought using the Green's functions method and is represented as convolutions of Green's functions with functions defining unsteady volumetric disturbances. To find the Green's functions, the integral Laplace transform in time and the expansion in Fourier series in the longitudinal coordinate are used. As a result, the original system of equations for elastic diffusion beam vibrations is reduced to the linear system of algebraic equations with respect to the sought functions Fourier coefficients in the Laplace transformation. The Laplace transform inversion is done analytically due to residues and operational calculus tables.

Calculation examples for a beam with rectangular section are considered. The beam deflections and the diffusants concentration increments under the action of a impulsively applied distributed transverse load are found. Numerical study of the mechanical and diffusion fields interaction in a beam is performed. We used three-component continuum as an example. The solution is presented in analytical form and in the graphs form of the displacement fields and concentration increments as functions of time and coordinate.

At the end of the article, the main conclusions about the coupling effect of the stress-strain state and mass transfer in the beam are represented.

Keywords: elastic diffusion; Bernoulli-Euler beam; unsteady problems; orthotropic materials; structural anisotropy

ВВЕДЕНИЕ

В связи развитием современных технологий производства конструкционных материалов, работающих в условиях взаимодействия полей различной физической природы, интерес ученых все больше привлекает вопрос о моделировании связанных физико-механических процессов в сплошных средах. На сегодняшний день на основе известных уравнений механики сплошных сред, уравнений тепло и массопереноса, уравнений электродинамики и законов термодинамики построены модели, учитывающие взаимное влияние механических, температурных, диффузионных, электромагнитных, химических и пр. полей.

Наибольший практический интерес вызывают задачи механо-dиффузии для балок, пластин и оболочек, которые являются основными элементами конструкций, используемых в технике. Различные постановки и методы решения задач о влиянии диффузионных процессов на несущую способность стержней, пластин и оболочек рассматривались в работах [1-7].

В перечисленных публикациях исследуются стационарные механо-dиффузионные процессы, что является полезным при расчете установившихся режимов работы технических систем. Для анализа кратковременных, импульсных воздействий необходимо использовать

нестационарные модели, которые должны описывать также и релаксационные диффузионные эффекты [8-10]. Последнее учитывается введением инерционных членов в уравнение массопереноса. Следует отметить, что постановка задач о нестационарных упруго-диффузионных колебаниях балок и пластин, а также их решения в известных к настоящему времени публикациях отсутствуют.

При исследовании поведения тонкостенных конструкций, выполненных из композитных материалов (волоконистые, слоистые, тканевые структуры и т.д.) возможен учет совместной работы матрицы и наполнителя с помощью использования осредненных физических характеристик материала (эффективных модулей), что позволяет с достаточной степенью точности рассматривать его как однородный, но анизотропный (конструктивно анизотропный) материал.

Процедура эквивалентной замены неоднородной (гетерогенной) среды на однородную (гомогенную или осредненную) носит название гомогенизации или осреднения. Саму возможность гомогенизации (осреднения) во многих работах по механике композитов принимают в качестве основной гипотезы. Например, в монографии [11] она называется гипотезой эквивалентной гомогенности.

Существует много различных методов вычисления эффективных модулей. С некоторыми, уже ставшими классическими, подходами можно ознакомиться в работах [12-18]. Например, в монографии [17], показано, материал, выполненный из однородных изотропных слоев, можно рассматривать как трансверсально изотропный, а материал, выполненный из ортотропных слоев, можно рассматривать как ортотропный материал при условии, что главные оси анизотропии совпадают с осями координат. Развитая в работах [13-17] асимптотическая теория осреднения композитных материалов периодической структуры была использована при моделировании термоупругих процессов в слоистых материалах [19].

В данной работе исследуются нестационарные механо-диффузионные колебания ортотропной балки Бернулли-Эйлера на упругом основании. При этом имеющаяся здесь анизотропия также может рассматриваться как конструкционная для балки, выполненной из изотропных, трансверсально-изотропных или ортотропных слоев. Математическая модель упруго-диффузионных колебаний получена на основе вариационных принципов, изложенных в работах [8-10]. Предлагается аналитический метод решения данной задачи, основанный на использовании интегрального преобразования Лапласа и разложений в ряды Фурье по собственным функциям упруго-диффузионного оператора.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о нестационарных изгибных колебаниях свободно опертой многокомпонентной балки Бернулли-Эйлера на упругом основании, находящейся под действием объемных механо-диффузионных возмущений. Схема приложенных сил и изгибающих моментов, а также ориентация осей прямоугольной декартовой системы координат представлена на рис. 1.

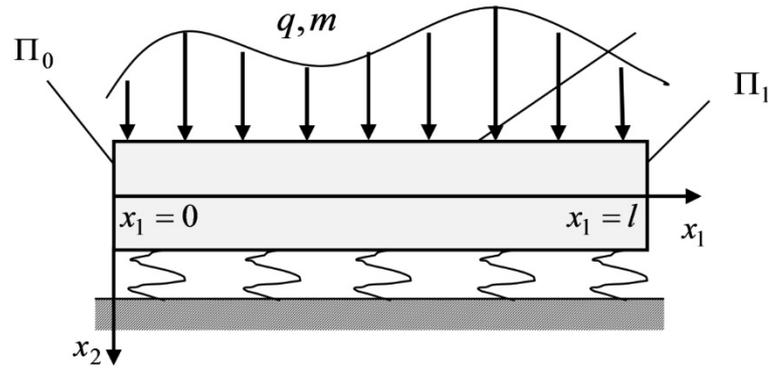


Рис.1. Иллюстрация к постановке задачи.

Уравнение поперечных колебаний балки с учетом релаксации диффузионных потоков имеет вид (точки обозначают производную по времени, штрих – производную по координате x_1) [8-10]

$$\begin{aligned} \ddot{v}'' - a\dot{v} = v^{IV} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} H_q'' - \frac{m' + \tilde{q}}{J_3}, \quad a = \frac{F}{J_3}, \\ \tau_q \dot{H}_q + \dot{H}_q = D_1^{(q)} H_q'' + \Lambda_{11}^{(q)} v^{IV} + \frac{z_q}{J_3}, \quad H_{N+1} = -\sum_{q=1}^N H_q. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} , вектора диффузионного потока $J_i^{(q)}$ определяются с помощью равенств [9]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = -\left(v'' + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} H_q \right) x_2, \quad \sigma_{22} = -\left(C_{12} v'' + \sum_{q=1}^N \alpha_2^{(q)} H_q \right) x_2, \quad \sigma_{12} = 0, \\ J_1^{(q)} + \tau_q \dot{J}_1^{(q)} = -\left(\Lambda_{11}^{(q)} v''' + D_1^{(q)} H_q' \right) x_2, \quad J_2^{(q)} + \tau_q \dot{J}_2^{(q)} = -\left(\Lambda_{21}^{(q)} v'' + D_2^{(q)} H_q \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Все величины в (1.1)-(1.2) являются безразмерными. Для них приняты следующие обозначения

$$\begin{aligned} x_i = \frac{x_i^*}{l}, \quad v = \frac{v^*}{l}, \quad \tau = \frac{Ct}{l}, \quad C_{\alpha\beta} = \frac{C_{\alpha\alpha\beta\beta}}{C_{1111}}, \quad m = \frac{lm^*}{C_{1111}}, \quad h = \frac{h^*}{l}, \quad b = \frac{b^*}{l}, \\ \tau_q = \frac{C\tau^{(q)}}{l}, \quad z_q = \frac{lz^{(q)}}{C}, \quad \alpha_1^{(q)} = \frac{\alpha_{11}^{(q)}}{C_{1111}}, \quad D_1^{(q)} = \frac{D_{11}^{(q)}}{Cl}, \quad F = \frac{F^*}{l^2}, \\ \Lambda_{11}^{(q)} = \frac{m^{(q)} D_{11}^{(q)} \alpha_1^{(q)} n_0^{(q)}}{\rho RT_0 Cl}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \tilde{q} = \frac{l\tilde{q}^*}{C_{1111}}, \quad J_3 = \frac{J_3^*}{l^4}, \end{aligned}$$

где t – время; x_i^* – прямоугольные декартовы координаты; v^* – прогибы балки; l – длина балки; h^* – высота балки; b^* – ширина балки; $\eta_q = x_2 H_q$ – приращение концентрации q -ой компоненты вещества в составе многокомпонентной среды; $n_0^{(q)}$ – начальная концентрации q -го вещества; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность; $\alpha_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты, характеризующие объемное изменение среды за счёт диффузии; $D_{ij}^{(q)}$ – коэффициенты самодиффузии; R – универсальная газовая постоянная; T_0 – температура среды; $m^{(q)}$ – молярная масса q -го вещества, F^* – площадь сечения балки; J_3^* – момент инерции сечения

относительно оси Ox_3 ; $\tau^{(q)}$ – время релаксации диффузионных потоков; m – распределённый по длине балки изгибающий момент (рис.1); $z^{(q)}$ – распределённые по длине балки источники массопереноса.

Полагаем, что основание, на котором находится балка, является винклеровским. В этом случае [21,22] в уравнениях (1.1)

$$\tilde{q} = -c_w b v + q, \quad (1.3)$$

где c_w – коэффициент постели для балки на основании Винклера, q – поперечная нагрузка (c_w^* и q^* – их размерные аналоги).

Уравнения (1.1) дополняются начально-краевыми условиями, которые в случае свободного опирания имеют вид

$$\left(v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(v'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} H_j \right) \Big|_{x_1=1} = 0; \quad (1.4)$$

$$v \Big|_{x_1=0} = 0, \quad v \Big|_{x_1=1} = 0, \quad H_q \Big|_{x_1=0} = 0, \quad H_q \Big|_{x_1=1} = 0.$$

Начальные условия полагаются нулевыми.

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Решения задачи (1.1), (1.3) и (1.4) ищется в интегральной форме

$$v(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{\tau} \int_0^{l_1} G_{1k}(x_1, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt,$$

$$H_q(x_1, \tau) = \sum_{k=1}^{N+2} \int_0^{\tau} \int_0^{l_1} G_{q+1,k}(x_1, \xi, \tau-t) F_k(\xi, t) d\xi dt, \quad (2.1)$$

$$F_1(x_1, \tau) = \frac{m'(x_1, \tau) + q(x_1, \tau)}{J_3}, \quad F_{q+1}(x_1, \tau) = \frac{z_q(x_1, \tau)}{J_3},$$

где G_{ik} – объёмные функции Грина задачи (1.1), (1.3) и (1.4), которые удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{G}_{1k}'' - a \ddot{G}_{1k} = G_{1k}^{IV} + \beta G_{1k} + \sum_{q=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{q+1,k}'' - \delta_{1k} \delta(x_1 - \xi) \delta(\tau), \quad (2.2)$$

$$\dot{G}_{q+1,k} + \tau_q \ddot{G}_{q+1,k} = D_1^{(q)} G_{q+1,k}'' + \Lambda_{11}^{(q)} G_{1k}^{IV} + \delta_{q+1,k} \delta(x_1 - \xi) \delta(\tau), \quad \beta = \frac{c_w b}{J_3},$$

и следующим граничным условиям

$$\left(G_{1k}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{j+1,k} \right) \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \left(G_{1k}'' + \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(q)} G_{j+1,k} \right) \Big|_{x_1=1} = 0, \quad (2.3)$$

$$G_{1k} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad G_{1k} \Big|_{x_1=1} = 0, \quad G_{q+1,k} \Big|_{x_1=0} = 0, \quad G_{q+1,kl} \Big|_{x_1=1} = 0.$$

Для нахождения функций Грина G_{ik} используются разложения в тригонометрические ряды Фурье и преобразование Лапласа по времени [8-10]. В результате, задача (2.2), (2.3) приводится к следующей системе линейных алгебраических уравнений (s – параметр преобразования Лапласа)

$$\begin{aligned}
 k_1(\lambda_n, s) G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) - \lambda_n^2 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} G_{j+1,k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) &= 2\delta_{1k} \sin \lambda_n \xi, \\
 -\Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 G_{1k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) + k_{q+1}(\lambda_n, s) G_{q+1,k}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) &= 2\delta_{q+1,k} \sin \lambda_n \xi, \\
 k_1(\lambda_n, s) &= (\lambda_n^2 + a) s^2 + \lambda_n^4 + \beta, \quad k_{q+1}(\lambda_n, s) = s + \tau_q s^2 + D_1^{(q)} \lambda_n^2,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\lambda_n = \pi n/l$, остальные величины определяются так

$$G_{mk}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) = 2 \int_0^1 G_{mk}^L(x_1, \xi, s) \sin \lambda_n x_1 dx_1, \tag{2.5}$$

$$G_{mk}^L(x_1, \xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{mk}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x_1.$$

Решение системы (2.4) имеет вид ($q, p = \overline{1, N}, l = 1, 2$)

$$G_{1k}^{Ls} = \frac{2P_{1k}(\lambda_n, s)}{P(\lambda_n, s)} \sin \lambda_n \xi, \quad G_{q+1,k}^{Ls} = \frac{2\delta_{q+1,k} \sin \lambda_n \xi}{k_{q+1}(\lambda_n, s)} + \frac{2P_{q+1,k}(\lambda_n, s)}{Q_q(\lambda_n, s)} \sin \lambda_n \xi, \tag{2.6}$$

где

$$P(\lambda_n, s) = k_1(\lambda_n, s) \Pi(\lambda_n, s) - \lambda_n^6 \sum_{j=1}^N \alpha_1^{(j)} \Lambda_{11}^{(j)} \Pi_j(\lambda_n, s),$$

$$Q_q(\lambda_n, s) = k_{q+1}(\lambda_n, s) P(\lambda_n, s),$$

$$P_{11}(\lambda_n, s) = \Pi(\lambda_n, s), \quad P_{q+1,1}(\lambda_n, s) = \Lambda_{11}^{(q)} \lambda_n^4 \Pi_q(\lambda_n, s),$$

$$P_{1,q+1}(\lambda_n, s) = \lambda_n^2 \alpha_1^{(q)} \Pi_q(\lambda_n, s), \quad P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s) = \lambda_n^6 \alpha_1^{(q)} \Lambda_{11}^{(q)} \Pi_p(\lambda_n, s),$$

$$\Pi(\lambda_n, s) = \prod_{j=1}^N k_{j+1}(\lambda_n, s), \quad \Pi_q(\lambda_n, s) = \prod_{j=1, j \neq q}^N k_{j+1}(\lambda_n, s).$$

Оригиналы в (2.6) находим с помощью вычетов и таблиц операционного исчисления (штрих обозначает производную по параметру s)

$$\begin{aligned}
 G_{1k}^s(\lambda_n, \xi, s) &= 2 \sum_{j=1}^{2N+2} A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} \sin \lambda_n \xi, \\
 G_{q+1,k}^s(\lambda_n, \xi, \tau) &= 2\delta_{q+1,k} \sum_{l=1}^2 \frac{e^{\chi_l(\lambda_n)\tau} \sin \lambda_n \xi}{k'_{q+1}(\lambda_n, \chi_l(\lambda_n))} + \\
 &\quad + 2 \sum_{j=1}^{2N+4} A_{q+1,k}^{(j)}(\lambda_n) e^{s_j(\lambda_n)\tau} \sin \lambda_n \xi,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где ($k = \overline{1, N+1}, q = \overline{1, N}$)

$$A_{1k}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{1k}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{P'(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}, \quad A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+1,1}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{P'(\lambda_n, s_j(\lambda_n))},$$

$$A_{q+1,p+1}^{(j)}(\lambda_n) = \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}{Q'_q(\lambda_n, s_j(\lambda_n))}, \quad A_{q+1,p+1}^{(2N+2+l)} = \frac{P_{q+1,p+1}(\lambda_n, \chi_l(\lambda_n))}{Q'_q(\lambda_n, \chi_l(\lambda_n))},$$

Здесь $s_j(\lambda_n), j = \overline{1, 2N+2}$ – нули полинома $P(\lambda_n, s)$, $\chi_l(\lambda_n) = s_{2N+2+l}(\lambda_n)$ – дополнительные нули многочлена $Q_q(\lambda_n, s)$, которые определяются так

$$\chi_1(\lambda_n) = s_{2N+3}(\lambda_n) = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q},$$

$$\chi_2(\lambda_n) = s_{2N+4}(\lambda_n) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4\tau_q D_1^{(q)} \lambda_n^2}}{2\tau_q}.$$

Подставляя теперь (2.7) в представления (2.5), получаем объемные функции Грина задачи (1.1), (1.3) и (1.4).

Полагая, далее, в равенствах (2.6) $\alpha_1^{(q)} = 0$, получаем функции Грина классической задачи для упругой балки Бернулли-Эйлера на основании Винклера

$$G^{L(el)}(x_1, \xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{11}^{Ls}(\lambda_n, \xi, s) \sin \lambda_n x_1 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n x_1}{(\lambda_n^2 + a)s^2 + \lambda_n^4 + \beta}.$$

Оригинал находим по таблицам операционного исчисления [23]

$$G^{(el)}(x_1, \xi, \tau) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n \tau \sin \lambda_n \xi \sin \lambda_n x_1}{\lambda_n^4 + \beta}, \quad \gamma_n = \frac{\sqrt{\lambda_n^4 + \beta}}{\sqrt{\lambda_n^2 + a}}. \quad (2.8)$$

3. РАСЧЕТНЫЙ ПРИМЕР

Для расчета, полагаем, что внешние возмущения в уравнениях (1.1) заданы следующим образом

$$F_1(x_1, \tau) = \frac{q(x_1, \tau)}{J_3} + \frac{m'(x_1, \tau)}{J_3} = H(x_1)H(\tau), \quad F_{q+1}(x_1, \tau) = \frac{z_q(x_1, \tau)}{J_3} = 0, \quad (3.1)$$

Тогда, согласно (2.1), решение упругодиффузионной задачи (1.1), (1.3) и (1.4) имеет вид

$$v(x_1, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^1 G_{11}(x_1, \xi, \tau - t) F_1(\xi, t) d\xi dt =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2N+2} \left[1 - (-1)^n \right] \frac{(e^{s_j(\lambda_n)\tau} - 1) A_{11}^{(j)}(\lambda_n)}{\lambda_n s_j(\lambda_n)} \sin \lambda_n x_1, \quad (3.2)$$

$$H_q(x_1, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^1 G_{q+1,1}(x_1, \xi, \tau - t) F_1(\xi, t) d\xi dt =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2N+4} \left[1 - (-1)^n \right] \frac{(e^{s_j(\lambda_n)\tau} - 1) A_{q+1,1}^{(j)}(\lambda_n)}{\lambda_n s_j(\lambda_n)} \sin \lambda_n x_1.$$

Возьмем для расчета трехкомпонентный стержень длины $l = 10^{-2}$ м, прямоугольного сечения $h^* \times b^* = 0.05l \times 0.1l$. Полагаем, что независимыми компонентами являются цинк (компонента 1) и медь (компонента 2), которые диффундируют в дюралюминии. Алюминий с оставшимися примесями принимаются в качестве третьей компоненты вещества. Физические характеристики рассматриваемого материала [24]

$$C_{1122} = 6.93 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad C_{1212} = 2.56 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}, \quad T_0 = 700 \text{ К},$$

$$\rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \alpha_{11}^{(1)} = 6.55 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \quad \alpha_{11}^{(2)} = 6.14 \cdot 10^7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}},$$

$$D_{11}^{(1)} = 2.62 \cdot 10^{-12} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad D_{11}^{(2)} = 2.89 \cdot 10^{-15} \frac{\text{М}^2}{\text{с}}, \quad l = 10^{-2} \text{ м}, \quad (3.3)$$

$$n_0^{(1)} = 0.01, \quad n_0^{(2)} = 0.045, \quad m^{(1)} = 0.065 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}, \quad m^{(2)} = 0.064 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}.$$

Обезразмеренные геометрические характеристики сечения равны:

$$F = 5.00 \cdot 10^{-3}, \quad J_3 = 4.16 \cdot 10^{-6}.$$

Результаты вычислений представлены на рис.2-7. На рис.2 изображены прогибы свободно опертой балки на упругом основании. Для расчета полагаем коэффициент постели равным $c_w^* b^* = 5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$. На рис.3 для сравнения показаны прогибы балки при отсутствии упругого основания.

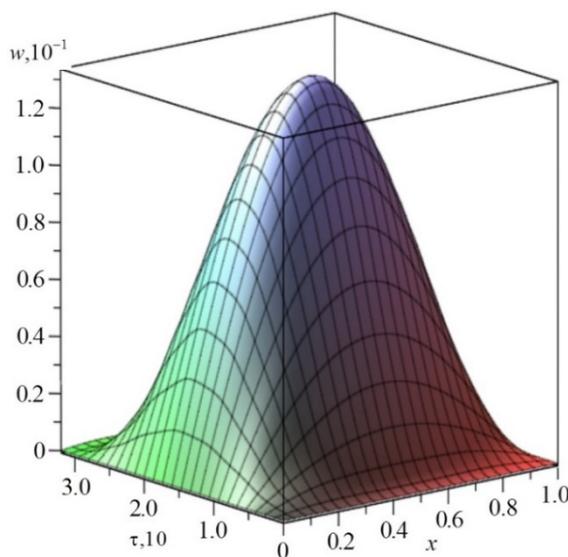


Рис.2. Прогибы балки на упругом основании.

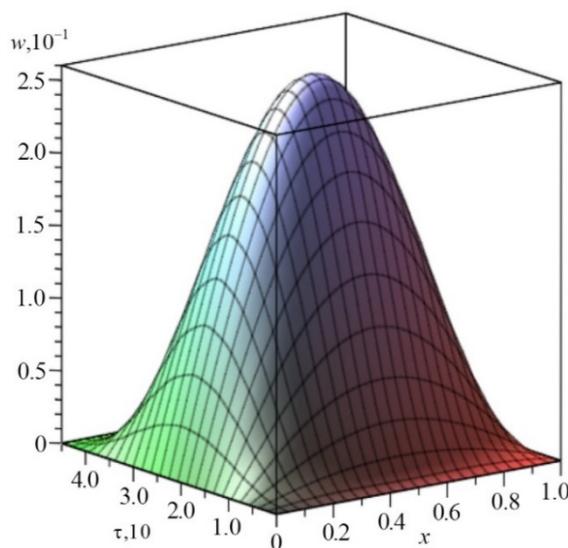


Рис.3. Прогибы свободно опертой балки.

На рис.4 показана линейная плотность приращения концентрации цинка (1-я компонента вещества) при упругодиффузионном изгибе свободно опертой балки на винклеровском основании. На рис.5 то же самое, но без упругого основания. Из проведенных расчетов видно, что нестационарный изгиб балки инициирует диффузионные потоки. Но наличие упругого основания уменьшает интенсивность массопереноса.

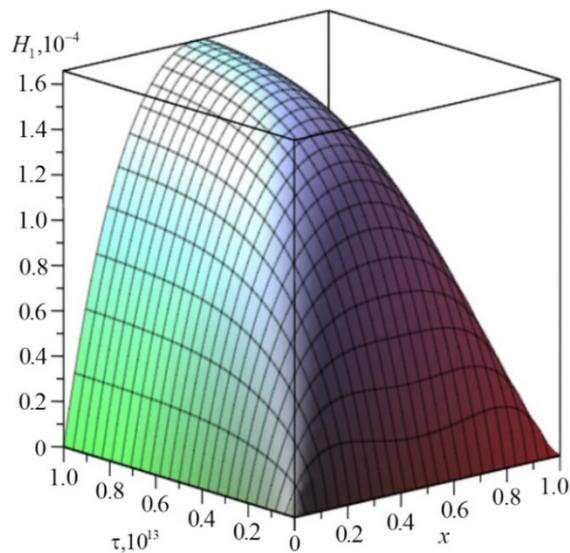


Рис.4. Линейная плотность приращения концентрации цинка для балки на упругом основании.

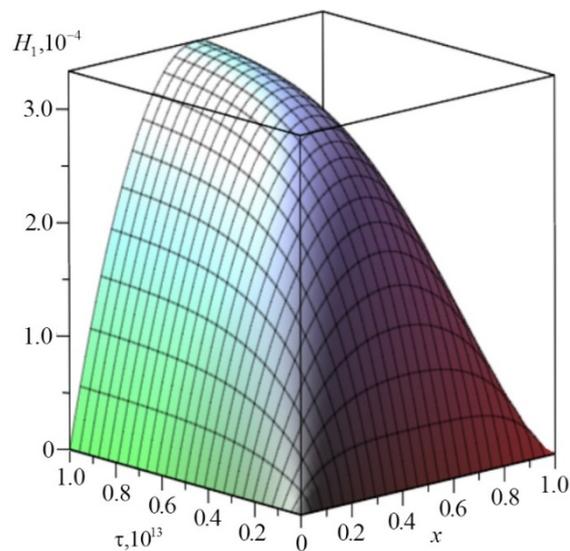


Рис.5. Линейная плотность приращения концентрации цинка для свободно опертой балки.

Для оценки влияния массопереноса на напряженно-деформированное состояние балки найдем решение упругой задачи. Используя функции Грина (2.8) и вычисляя соответствующую свертку (2.1) получаем

$$v^{(el)}(x_1, \tau) = \int_0^{\tau} \int_0^1 G^{(el)}(x_1, \xi, \tau) F_1(\xi, t) d\xi dt =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n] (1 - \cos \gamma_n \tau) \frac{\sin \lambda_n x_1}{\lambda_n (\lambda_n^4 + \beta)}$$

На рис.6 и 7 продемонстрировано влияние диффузии на прогибы балки при наличии упругого основания. Сплошная линия соответствует решению упругодиффузионной задачи, пунктирная – решению упругой. Показано, что, начиная с некоторого момента времени ($\tau \div 10^{10}$), упругодиффузионные поперечные смещения начинают заметно запаздывать по отношению к чисто упругим.

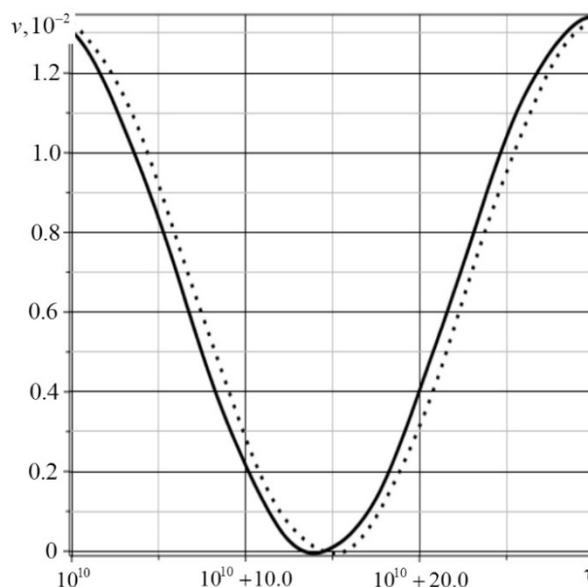


Рис.6. Прогибы балки на упругом основании в точке $x_1 = 0.5$.

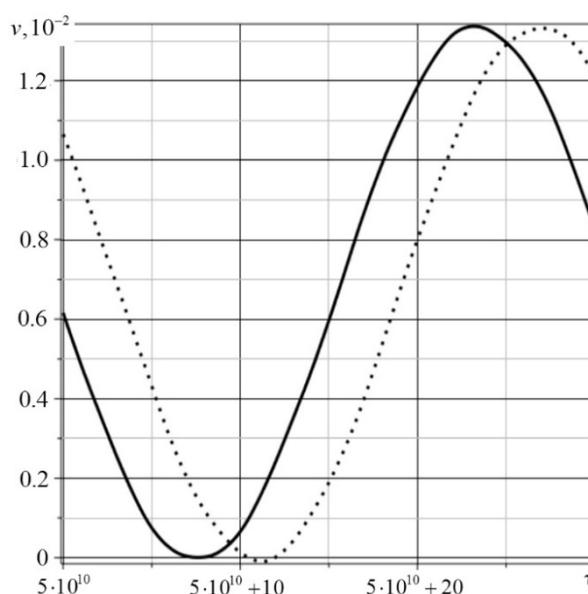


Рис.7. Прогибы балки на упругом основании в точке $x_1 = 0.5$.

Влияние релаксации диффузионных потоков на кинетику массопереноса внутри балки проиллюстрировано на рис.8,9. Здесь сплошная линия соответствует линейной плотности приращения концентрации цинка, полученной при решении упругодиффузионной задачи при $\tau^{(i)} = 200$ с., пунктирная линия соответствует решению при $\tau^{(i)} = 100$ с., штриховая линия – решение задачи в случае отсутствия релаксационных эффектов $\tau^{(i)} = 0$ с. Показано, что с определенного момента времени ($\tau \div 10^9$) релаксационные эффекты практически не проявляются (рис.9).

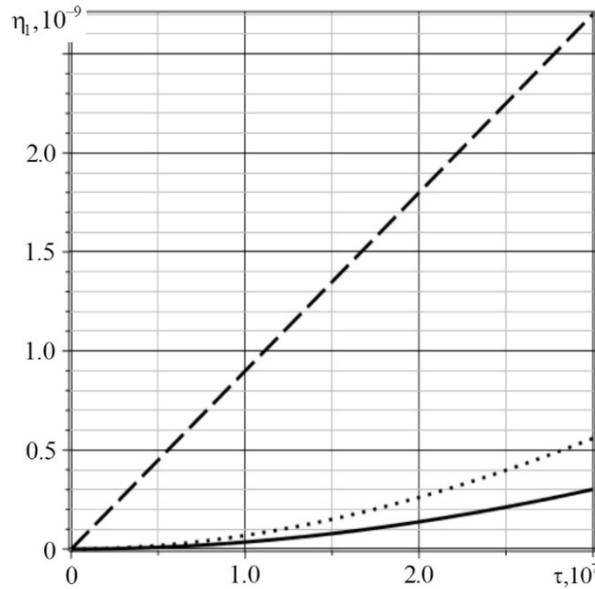


Рис.8. Линейная плотность приращения концентрации цинка для балки на упругом основании в точке $x_1 = 0.1$.

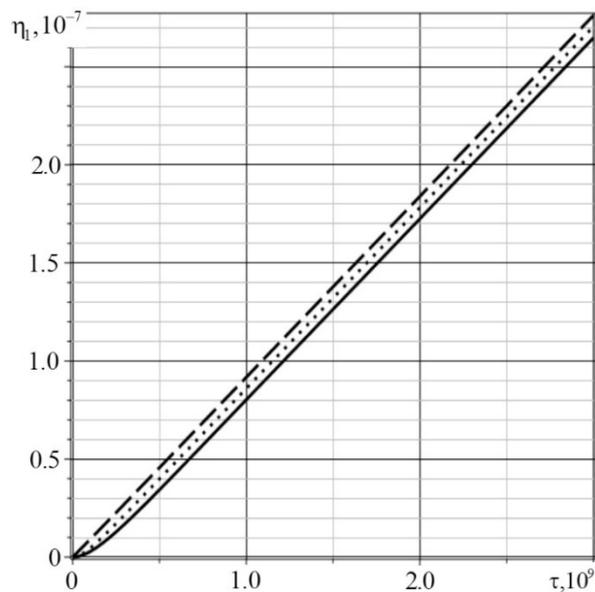


Рис.9. Линейная плотность приращения концентрации цинка для балки на упругом основании в точке $x_1 = 0.1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом в работе рассмотрена математическая модель упругодиффузионных нестационарных колебаний балки Бернулли-Эйлера на упругом основании, описывающая взаимосвязь между механическими и диффузионными полями в сплошных средах. Предложен алгоритм построения объемных функций Грина, основанный на использовании преобразования Лапласа и разложений в тригонометрические ряды Фурье.

На примере свободно опертой балки из трехкомпонентного материала, находящейся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки исследовано взаимное влияние механического и диффузионного полей друг на друга.

Показано, что механические нагрузки инициируют диффузионные процессы в сплошных средах. Возникающий при этом массоперенос также оказывает влияние на поле перемещений, что проявляется в запаздывании механодиффузионного поля перемещений по отношению к упругому полю перемещений.

Результаты исследований представлены в графической и аналитических формах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец Р.Н., Флячок В.М. *Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек* // Мат. физ. и нелинейн. мех. – 1991. – №16. – С.39-43.
2. Aouadi M., Copetti M.I.M. *Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory* // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2015. – Pp.1-24.
3. Copetti M.I.M., Aouadi M. *A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory* // Applied Numerical Mathematics. – 2016. – Vol.109. – Pp.157-183.
4. Aouadi M., Miranville A. *Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model* // Asymptotic Analysis. – 2015. – Vol.95. – Pp.129-160.
5. Aouadi M. *On thermoelastic diffusion thin plate theory* // Appl. Math. Mech.-Engl. Ed. – 2015. – Vol.36. – No.5. – Pp.619-632.
6. Aouadi M., Miranville A. *Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory* // Evolution equations and control theory. – 2015. – Vol.4. – No.3. – Pp.241-263.
7. Bhattacharya D., Kanoria M. *The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell* // Intern. J. of Engineering and Technical Research (IJETR). – 2014. – Vol.2. – Iss.5. – Pp.151-159.
8. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Unsteady Vibration Model of the Euler-Bernoulli Beam Taking into Account Diffusion* / IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol.1158. – 042043.
9. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. *An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation* // Math. Comput. Appl. – 2019. – Vol.24. – Iss.1. – 23.
10. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. *Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed*

transverse load action / Multiscale Solid Mechanics. Advanced Structured Materials. Vol.141. – Springer Nature Switzerland AG, 2021. – Pp.487-499.

11. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*. – М.: Мир, 1982. – 343 с.
12. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
13. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И. *Математическое моделирование физических процессов в композитных материалах периодической структуры*. – М.: УРСС, 2003. – 376 с.
14. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
15. Моргунов Б.И. *Математический анализ физико-механических процессов*. – М.: МИЭМ, 1995. – 151 с.
16. Моргунов Б.И. *Математическое моделирование связанных физических процессов*. – М.: МИЭМ, 1997. – 224 с.
17. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
18. Хорошун Л.П., Солтанов Н.С. *Термоупругость двухкомпонентных смесей*. – Киев: Наук. думка, 1984. – 112 с.
19. Вестяк В.А., Земсков А.В., Федотенков Г.В. *Слабо неравномерный нагрев неограниченной слоистой пластины* // Вестник МАИ. – 2010. – Т.17. – №6. – С.152-158.
20. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. *Method of Averaging in Problems of Thermoelasticity of Composite Materials* / Encyclopedia of thermal stress. Vol.6. – Dordrecht: Springer, 2014. – Pp.2982-2990.
21. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Нестационарный прогиб анизотропной пластины на упругом основании* / 10-я Всеросс. науч. конф. с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2020. – С.199-205.
22. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. – М.: Физматлит, 2011. – 560 с.
23. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. – М.: Высшая школа, 1965. – 568 с.
24. Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М. и др. *Физические величины: Справочник*. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.

REFERENCES

1. Shvecz R.N., Flyachok V.M. *Variatsionnyj podkhod k resheniyu dinamicheskikh zadach mekhanotermodyffuzii anizotropnykh obolochek* [Variational approach to solving dynamic problems of mechano-thermal diffusion of anisotropic shells]. *Mat. fiz. i nelinejn. mekh.*, 1991, No.16, Pp.39-43.
2. Aouadi M., Copetti M.I.M. *Analytical and numerical results for a dynamic contact problem with two stops in thermoelastic diffusion theory*. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech*, 2015, Pp.1-24.
3. Copetti M.I.M., Aouadi M. *A quasi-static contact problem in thermoviscoelastic diffusion theory*. *Applied Numerical Mathematics*, 2016, Vol.109, Pp.157-183.

4. Aouadi M. Miranville A. *Smooth attractor for a nonlinear thermoelastic diffusion thin plate based on Gurtin–Pipkin’s model*. Asymptotic Analysis, 2015, Vol.95, Pp.129-160.
5. Aouadi M. *On thermoelastic diffusion thin plate theory*. Appl. Math. Mech.-Engl. Ed., 2015, Vol.36, No.5, Pp.619-632.
6. Aouadi M., Miranville A. *Quasi-stability and global attractor in nonlinear thermoelastic diffusion plate with memory*. Evolution equations and control theory, 2015, Vol.4, No.3, Pp.241-263.
7. Bhattacharya D., Kanoria M. *The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell*. Intern. J. of Engineering and Technical Research (IJETR), 2014, Vol.2, Iss.5, Pp.151-159.
8. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Unsteady Vibration Model of the Euler-Bernoulli Beam Taking into Account Diffusion*. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series, 2019, Vol.1158, 042043.
9. Tarlakovskii D.V., Zemskov A.V. *An Elastodiffusive Orthotropic Euler-Bernoulli Beam with Considering Diffusion Flux Relaxation*. Math. Comput. Appl., 2019, Vol.24, Iss.1, 23.
10. Zemskov A.V., Okonechnikov A.S., Tarlakovskii D.V. *Unsteady elastic-diffusion oscillations of a simply supported Euler-Bernoulli beam under the distributed transverse load action*. Multiscale Solid Mechanics, Advanced Structured Materials, Vol.141, Springer Nature Switzerland AG, 2021, Pp.487-499.
11. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, A Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, 1979.
12. Alfutov N.A., Zinovev P.A., Popov B.G. *Raschet mnogoslojnykh plastin i obolochek iz kompozitsionnykh materialov [Calculation of multilayer plates and shells made of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1984, 264 p.
13. Badzokas D.I., Zobnin A.I. *Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov v kompozitnykh materialakh periodicheskoy struktury [Mathematical modeling of physical processes in composite materials with a periodic structure]*. Moskva, URSS, 2003, 376 p.
14. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging of processes in periodic medium]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
15. Morgunov B.I. *Matematicheskij analiz fiziko-mekhanicheskikh protsessov [Mathematical analysis of physical and mechanical processes]*. Moskva, Moskovskij institut ehlektroniki i matematiki, 1995, 151 p.
16. Morgunov B.I. *Matematicheskoe modelirovanie svyaznykh fizicheskikh protsessov [Mathematical modeling of coupled physical processes]*. Moskva, Moskovskij institut ehlektroniki i matematiki, 1997, 116 p.
17. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel’stvo MGU, 1983, 336 p.
18. Khoroshun L.P., Soltanov N.S. *Termouprugost’ dvukhkomponentnykh smesey [Thermoelasticity of two-component mixtures]*. Kiev, Naukova dumka, 1984, 112 p.
19. Vestyak V.A., Zemskov A.V., Fedotenkov G.V. *Slabo neravnomernyj nagrev neogranichennoj sloistoj plastiny [Weakly nonuniform heating of an unbounded layered plate]*. Vestnik MAI, 2010, Vol.17, No.6, Pp.152-158.
20. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. *Method of Averaging in Problems of Thermoelasticity of Composite Materials*. Encyclopedia of thermal stress, Vol.6, Dordrecht, Springer, 2014, Pp.2982-2990.
21. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnyy progib anizotropnoi*

plastiny na uprugom osnovanii [Unsteady deflection of an anisotropic plate on an elastic foundation]. 10-ya Vserossiyskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij, slozhnykh i geterogennykh sred". Sbornik trudov, Moskva, OOO "Sam Poligrafist", 2020, Pp.199-205.

22. Pleskachevskij Yu.M., Starovojtov E.I., Leonenko D.V. *Mekhanika trekhslojnykh sterzhnej i plastin, svyazannykh s uprugim osnovaniem [Mechanics of three-layer rods and plates associated with an elastic foundation].* Moskva, Fizmatlit, 2011, 560 p.
23. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook on Operational Calculus].* Moskva, Vysshaya shkola, 1965, 168 p.
24. Babichev A.P., Babushkina N.A., Bratkovskij A.M. i dr. *Fizicheskie velichiny: Spravochnik [Physical quantities: Handbook].* Moskva, Ehnergoatomizdat, 1991, 1232 p.

Поступила в редакцию 11 января 2021 года.

Сведения об авторах:

Вестяк Анатолий Васильевич – к.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail kaf311@yandex.ru

Земсков Андрей Владимирович – д.ф.-м.н., доц., проф., ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: azemskov1975@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович – д.ф.-м.н., проф., зав.лаб., НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: tdv902@mai.ru