

НЕСТАЦИОНАРНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ*

Локтева Н.А.^{1,2}, Сердюк Д.О.², Скопинцев П.Д.², Федотенков Г.В.^{1,2}

¹ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

²НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Данная работа посвящена описанию подхода к исследованию распространения нестационарных возмущений, напряжений и деформаций в тонкой упругой композитной цилиндрической оболочке.

Оболочка принимается неограниченной, с неизменной толщиной. На внешнюю поверхность оболочки по нормали действует совокупность подвижных нестационарных нагрузок. Полагается, что композитный материал оболочки линейно упругий, с симметричной укладкой относительно срединной поверхности оболочки. В качестве модели оболочки приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Для математического описания мгновенно приложенной к оболочке нагрузки использованы дельта-функции Дирака.

Исследование нестационарного деформирования оболочки ведется с использованием функции влияния, которая представляет собой нормальное перемещение, возникающее в ответ на действие единичной сосредоточенной по времени и координатам нагрузки. Функция влияния строится с помощью разложения в экспоненциальные ряды Фурье, интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа выполняется аналитически, оригинал интегрального преобразования Фурье находится посредством использования численного метода интегрирования быстро осциллирующих функций. Нестационарный нормальный прогиб цилиндрической оболочки представляется в виде тройной свертки функции влияния с функциями нестационарных сосредоточенных нагрузок с переменными во времени амплитудами и координатами воздействия. Интегралы свертки берутся при помощи квадратурных формул методом прямоугольников. Исследование пространственно-временного напряженно-деформированного состояния неограниченной тонкой упругой композитной цилиндрической оболочки становится возможным после построения нестационарной функции прогиба с дальнейшей связью физических и кинематических соотношений с напряженным состоянием оболочки и соотношений для деформаций в обобщенном законе Гука.

При исследовании нестационарного напряженно-деформированного состояния композитной оболочки применяется подход, основанный на приведенных технических постоянных, определяемых через обобщенные жесткости материала. В качестве примера построены пространственно-временные зависимости нестационарного прогиба, распределение напряжений и деформаций на внешней поверхности полимерной композитной оболочки. Нестационарное воздействие рассматривалось как совокупность подвижных сосредоточенных нагрузок.

Ключевые слова: композитная цилиндрическая оболочка; нестационарная динамика; функция влияния; функция прогиба; напряженно-деформированное состояние;

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №20-58-00023 и №19-08-00968).

обобщенные функции; внутренние силовые факторы; интегральные преобразования; квадратурные формулы; оболочка Кирхгофа-Лява

TRANSIENT STRESS-STRAIN STATE OF A COMPOSITE CYLINDRICAL SHELL

Lokteva N.A.^{1,2}, Serdyuk D.O.², Skopintsev P.D.², Fedotenkov G.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (national research university), Moscow, Russia*

²*Research Institute of Mechanics MSU by M.V. Lomonosov, Moscow, Russia*

ABSTRACT

This work is devoted to the description of an approach to studying the propagation of non-stationary disturbances, stresses and strains in a thin elastic composite cylindrical shell. The shell is accepted unlimited, with a constant thickness. An aggregate of non-stationary moving pressures affects along the normal to the outside surface of the shell.

The shell is assumed to be unbounded, with a constant thickness. The outer face of the shell is subjected to a set of non-steady moving loads. It is assumed also that the composite material of the shell is linearly elastic, with a lamination scheme symmetric with respect to the midsurface. The shell model is based on the Kirchhoff-Love hypotheses, while the load instantly applied to the shell are modeled by Dirac functions.

The study of non-steady deformation of the shell is carried out using the transient function, which is a normal displacement that occurs as a response to a single load concentrated in time and coordinates. The transient function is constructed using exponential Fourier series expansion, Laplace integral transformations in time domain and Fourier transforms with respect to the longitudinal coordinate. The inverse Laplace transform is performed analytically, whereas the original of the Fourier transform is found by using the numerical method of integrating rapidly oscillating functions. The non-steady normal deflection of the cylindrical shell is represented as a triple convolution of the transient function with the functions defining the moving concentrated loads with time-varying amplitudes and coordinates of the impact. The convolution integrals are evaluated using rectangle quadrature formulae. The study of the space-time stress-strain state of an unbounded thin elastic composite cylindrical shell becomes possible after constructing a non-steady deflection function with further use of constitutive and kinematic relations to obtain the stress state of the shell.

In the study of the non-steady stress-strain state of the composite shell, the given technical constants determined through the generalized stiffness of the material are used. As an example, the space-time dependences of the non-steady deflection, the distribution of stresses and deformations on the outer surface of the polymer composite shell are constructed. Non-steady impact was considered as a set of moving concentrated loads.

Keywords: composite cylindrical shell; non-steady dynamics; transient function; deflection; stress-strain state; distribution; internal power factors; integral transformation; quadrature; normal deflection; Kirchhoff-Love type shell

ВВЕДЕНИЕ

Довольно большое количество конструкций в машиностроении, рассчитываемых на прочность, может быть сведено к расчетной схеме тонких оболочек. Конструкции типа тонкостенных оболочек применяются в самых разнообразных отраслях промышленности, включая ракетно-космическую, самолетостроительную, атомную, судостроительную, нефтегазодобывающую,

машиностроительную отрасли, а также в строительстве промышленных и жилых помещений, химическом и пищевом машиностроении. Для усовершенствования и создания новых перспективных конструкций, работающих в нестационарных режимах, необходимо обладать знаниями о протекании процессов нестационарных вынужденных колебаний в проектируемых оболочечных конструкциях. Исследование нестационарных колебаний является важной задачей, так как при этом существенно проявляется неоднородность искомого решения по времени и координатам. Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек при воздействии ударных нагрузок, имитируемых импульсными функциями, представляет теоретический и прикладной интерес.

В пределах модели Кирхгофа-Лява наиболее полно исследованы задачи нестационарной динамики изотропных упругих пластин и оболочек на данный момент [1]. Проблемы динамики ортотропных цилиндрических оболочек, их осесимметричное и неосесимметричное деформирование под воздействием продольного ударного нагружения рассмотрены в работах [2,3]. Вопросы деформирования подкрепленных оболочек при действии осевых сжимающих динамических нагрузок и внешнего давления отражены в труде [4]. В работе [5] изучены задачи динамики тонких однородных цилиндрических композитных оболочек при внутреннем и внешнем импульсных воздействиях. Моделью материала являлась ограниченная слоистая среда, состоящая из ортотропных упругих слоев постоянной толщины. Работы [6-10] отражают исследование нестационарных контактных задач для упругого полупространства, а также для сферических и цилиндрических оболочек. Метод функции влияния для решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек применен в трудах [6-17]. В работах [11-13] отражены решения задач воздействия нестационарной нагрузки на ограниченную балку Тимошенко, проанализированы вопросы идентификации дефектов в упругих стержнях. Исследованы случаи нестационарного воздействия жесткого индентора на упругую полуплоскость [14,15]. Вопросам нестационарной динамики и особенностям построения функции влияния для анизотропных пластин посвящены работы [16,17].

Актуальным в настоящее время является вопрос нестационарного напряженно-деформируемого состояния упругих анизотропных оболочек, так как он является слабо изученным. В данной работе представлен подход для исследования напряженно-деформированного состояния неограниченной тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки при воздействии на ее внешнюю поверхность совокупности подвижных нестационарных нагрузок.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Объектом исследования является тонкая неограниченная цилиндрическая оболочка постоянной толщины (см. рис.1). Оболочка имеет радиус R и толщину h . Материал цилиндрической оболочки принят упругим, с симметричной относительно срединной плоскости схемой армирования. Для тонкой оболочки Кирхгофа-Лява рассматриваемый материал имеет шесть независимых упругих постоянных:

$$c_{11} = C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112}, c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{1222}, c_{66} = C^{1212},$$

вычисление которых производится при помощи связи тензора упругости с тензором податливости, компоненты которого определяются через приведенные технические постоянные. Для подсчета приведенных технических постоянных

через характеристики материала монослоя применяются обобщенные жесткости [18].

Материал оболочки характеризуется следующим набором технических постоянных: E_i – модули упругости первого рода, G_{ik} – модули упругости второго рода, μ_{ik} – коэффициенты Пуассона.

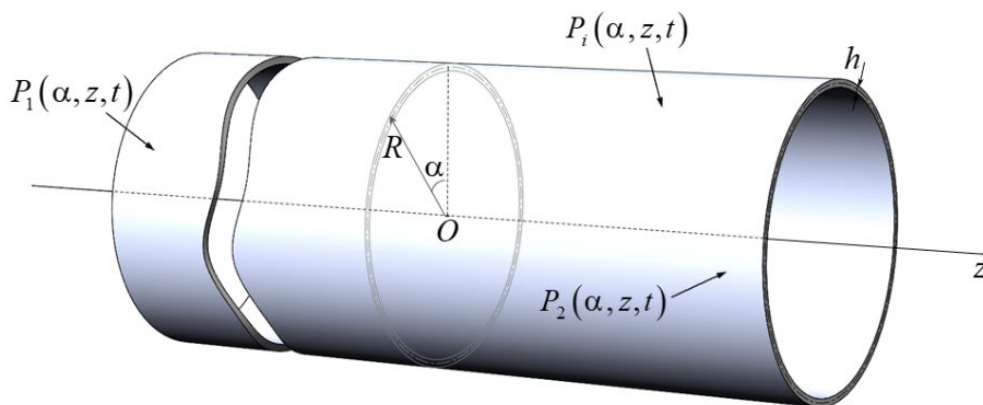


Рис.1. Цилиндрическая оболочка под воздействием совокупности нестационарных нагрузок.

В начальный момент времени оболочка находится в невозмущенном состоянии. Затем на нее воздействует нестационарные нормальные нагрузки $P_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2, 3..n$. Тангенциальные нагрузки приняты нулевыми.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа-Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учетом симметрии свойств материала исследуемой оболочки [1,19,20]. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$.

Уравнения движения оболочки Кирхгофа-Лява в перемещениях имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w), \\ \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w), \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + P, \end{aligned} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы определяются следующими соотношениями

$$\begin{aligned} K_{11}(u_\alpha) &= \frac{hc_{11}}{R^2} u_{\alpha,\alpha\alpha} + \frac{2hc_{16}}{R} u_{\alpha,\alpha z} + \left(\frac{Ic_{66}}{R^2} + hc_{66} \right) u_{\alpha,zz}, \\ K_{12}(u_z) &= \frac{hc_{16}}{R^2} u_{z,\alpha\alpha} + \left(\frac{hc_{12}}{R} + \frac{hc_{66}}{R} - \frac{Ic_{66}}{R^3} \right) u_{z,\alpha z} + hc_{26} u_{z,zz}, \\ K_{13}(w) &= \frac{hc_{11}}{R^2} w_{,\alpha} - \frac{2Ic_{66}}{R^2} w_{,\alpha z z} - \frac{Ic_{16}}{R^3} w_{,\alpha\alpha z} + \left(\frac{hc_{16}}{R} - \frac{Ic_{16}}{R^3} \right) w_{,z} - \frac{Ic_{26}}{R} w_{,zzz}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) = \left(\frac{hc_{66}}{R^2} + \frac{Ic_{66}}{R^4} \right) u_{z,\alpha\alpha} + \frac{2hc_{26}}{R} u_{z,\alpha z} + hc_{22} u_{z,zz}, \quad (3)$$

$$K_{23}(w) = \frac{Ic_{16}}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha} + \left(\frac{hc_{16}}{R^2} + \frac{Ic_{16}}{R^4} \right) w_{,\alpha} + \frac{2Ic_{66}}{R^3} w_{,\alpha\alpha z} +$$

$$+ \frac{Ic_{26}}{R^2} w_{,\alpha z z} + \frac{hc_{12}}{R} w_{,z},$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$K_{33}(w) = -\frac{Ic_{11}}{R^4} w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} - \frac{2Ic_{11}}{R^4} w_{,\alpha\alpha} - \frac{2Ic_{12}}{R^2} w_{,\alpha\alpha z z} -$$

$$- \frac{4Ic_{26}}{R} w_{,\alpha z z z} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} w_{,\alpha\alpha\alpha z} - \frac{4Ic_{66}}{R^2} w_{,\alpha\alpha z z} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} w_{,\alpha z} -$$

$$- Ic_{22} w_{,zzzz} - \frac{2Ic_{12}}{R^2} w_{,zz} - \left(\frac{Ic_{11}}{R^4} + \frac{hc_{11}}{R^2} \right) w. \quad (4)$$

В (1)-(4): ρ – плотность материала оболочки, w – нормальное перемещение, u_α, u_z – компоненты вектора тангенциальных перемещений, c_{ij} – упругие постоянные в цилиндрической системе координат, $I = h^3/12$ – погонный момент инерции.

Уравнения (1)-(4) совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_\alpha}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad u_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

образуют начальную задачу.

Постановку задачи замыкает условие ограниченности решения на бесконечности

$$w(z) = O(1) \quad z \rightarrow \infty.$$

Физические соотношения в перемещениях для оболочки имеют следующий вид

$$M_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t) = \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{11}}{R^2} (w_{,\alpha\alpha} + w) - c_{12} w_{,zz} - \frac{2c_{16}}{R} w_{,\alpha z} \right),$$

$$M_{\alpha z}(\alpha, z, t) = M_{z\alpha}(\alpha, z, t) = \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{16}}{R^2} (w_{,\alpha\alpha} + w) - c_{26} w_{,zz} - \frac{2c_{66}}{R} w_{,\alpha z} \right), \quad (6)$$

$$M_{zz}(\alpha, z, t) = \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{12}}{R^2} (w_{,\alpha\alpha} + w) - c_{22} w_{,zz} - \frac{2c_{26}}{R} w_{,\alpha z} \right).$$

$$\tilde{T}_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t) = \frac{hc_{11}}{R} w, \quad \tilde{T}_{\alpha z}(\alpha, z, t) = \frac{hc_{16}}{R} w, \quad \tilde{T}_{zz}(\alpha, z, t) = \frac{hc_{12}}{R} w. \quad (7)$$

В (6)-(7): $M_{ij}(\alpha, z, t)$ – компоненты тензора изгибающих моментов, $\tilde{T}_{ij}(\alpha, z, t)$ – компоненты симметричного тензора тангенциальных усилий.

Цель исследования заключается в построении нестационарных функций напряжений и деформаций в ответ на воздействие совокупности нестационарных нагрузок $P_i(\alpha, z, t)$, $i = 1, 2, 3..n$.

2. НЕСТАЦИОНАРНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Решение начальной задачи (1)-(5) может быть построено с помощью функции влияния $G_w(\alpha, z, t)$ для нормального перемещения [1]

$$w(\alpha, z, t) = G_w(\alpha, z, t) * * * P(\alpha, z, t). \quad (8)$$

В (8) через * обозначены свертки по пространственным координатам α, z и времени t .

Функции влияния нормальных перемещений $G_w(\alpha, z, t)$ и тангенциальных перемещений $G_{u_\alpha}(\alpha, z, t)$ и $G_{u_z}(\alpha, z, t)$ – решение следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{u_\alpha}}{\partial t^2} &= K_{11}(G_{u_\alpha}) + K_{12}(G_{u_z}) + K_{13}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_{u_z}}{\partial t^2} &= K_{21}(G_{u_\alpha}) + K_{22}(G_{u_z}) + K_{23}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_w}{\partial t^2} &= K_{31}(G_{u_\alpha}) + K_{32}(G_{u_z}) + K_{33}(G_w) + \delta(\alpha, z)\delta(t), \\ G_{u_\alpha}|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} G_{u_\alpha}|_{t=0} = G_{u_z}|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} G_{u_z}|_{t=0} = G_w|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} G_w|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\delta(*)$ – дельта-функция Дирака, а дифференциальные операторы $K_{ij}(G_k)$ имеют вид (2)-(4), где необходимо заменить соответствующие искомые функции на функции влияния.

Для решения поставленной начальной задачи применим к (9) разложения в экспоненциальные ряды Фурье по углу α , а также интегральные преобразования Фурье по координате z и Лапласа по времени t . В результате получим систему алгебраических уравнений относительно изображений функций влияния в пространстве изображений Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов.

Оригинал функции влияния по Лапласу найден аналитически при помощи таблиц [21] с предварительным применением метода неопределенных коэффициентов. Для нахождения оригинала по Фурье применён численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [22].

С учетом разложения в экспоненциальные ряды нестационарная функция влияния для нормального прогиба композитной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява примет вид [23]

$$G_w(\alpha, z, t) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-1} e^{in\alpha} \frac{\Delta}{2} \left(e^{i \frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot (D_1 G_{wn}^F(q_k, t) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, t)) \right), \quad (10)$$

где

$$\Delta = \frac{2A}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i,$$

$$q_k = A + k\Delta, \quad q_{k+1} = A + (k+1)\Delta, \quad k = 0..N-1.$$

В случае воздействия на внешнюю поверхность оболочки внезапно приложенной совокупности нестационарных нагрузок с переменными во времени амплитудой и координатами воздействия выражение для $P(\alpha, z, t)$ из (8) примет вид

$$P(\alpha, z, t) = \sum_{i=1}^s p_i(t) H(t) \delta[\alpha - f_i(t)] \delta[z - g_i(t)], \quad (11)$$

$$f_i(t) = a_i + V_{1i}t, \quad g_i(t) = b_i + V_{2i}t,$$

где $H(t)$ – функция Хэвисайда, $p_i(t)$ – законы изменения амплитуд воздействия, $f_i(t)$, $g_i(t)$ – законы изменения координат воздействия нагрузок, a_i , b_i – первоначальные координаты расположения нагрузок, V_{ki} , ($k=1,2$) – скорости движения нагрузок в направлениях осей α и z .

Тогда соотношение (8) с учётом (10) и (11), а также свойств дельта функции Дирака примет вид

$$w(\alpha, z, t) = \sum_{i=1}^s \int_0^t G_w(\alpha - f_i(t), z - g_i(t), t - \tau) p_i(t) dt. \quad (12)$$

Интеграл в (12) взят с помощью метода прямоугольников [22]. Приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \frac{t}{l} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l G_w\left(\alpha - f_i\left(\frac{t \cdot j}{l}\right), z - g_i\left(\frac{t \cdot j}{l}\right), t - \frac{t \cdot j}{l}\right) p_i\left(\frac{t \cdot j}{l}\right). \quad (13)$$

Соотношение (13) позволяет исследовать нестационарный нормальный прогиб неограниченной композитной цилиндрической оболочки с симметричной схемой армирования в случае действия совокупности нестационарных нагрузок с переменными во времени амплитудой и координатами воздействия.

Нормальные σ_α , σ_z и касательные $\tau_{\alpha z}$, $\tau_{z\alpha}$ напряжения в оболочке, согласно [24] определяются так

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\tilde{T}_{\alpha\alpha}}{h} + \frac{12M_{\alpha\alpha}}{h^3} \gamma, \quad \sigma_z = \frac{\tilde{T}_{zz}}{h} + \frac{12M_{zz}}{h^3} \gamma, \\ \tau_{\alpha z} &= \tau_{z\alpha} = \frac{\tilde{T}_{\alpha z}}{h} + \frac{12M_{\alpha z}}{h^3} \gamma, \end{aligned} \quad (14)$$

где $-\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2}$, а компоненты тензора изгибающих моментов M_{ij}

и симметричного тензора тангенциальных усилий \tilde{T}_{ij} определены соотношениями (6), (7) соответственно. С учетом физических и кинематических соотношений для анизотропной оболочки Кирхгофа-Лява, нестационарные функции нормальных и касательных напряжений (14) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(-\gamma c_{11} w_{,\alpha\alpha}(\alpha, z, t) - \gamma R^2 c_{12} w_{,zz}(\alpha, z, t) - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma R c_{16} w_{,\alpha z}(\alpha, z, t) + c_{11} (R - \gamma) w(\alpha, z, t) \right), \\ \sigma_z(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(-\gamma c_{12} w_{,\alpha\alpha}(\alpha, z, t) - \gamma R^2 c_{22} w_{,zz}(\alpha, z, t) - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma R c_{26} w_{,\alpha z}(\alpha, z, t) + c_{12} (R - \gamma) w(\alpha, z, t) \right), \\ \tau_{\alpha z}(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(-\gamma c_{16} w_{,\alpha\alpha}(\alpha, z, t) - \gamma R^2 c_{26} w_{,zz}(\alpha, z, t) - \right. \\ &\quad \left. - 2\gamma R c_{66} w_{,\alpha z}(\alpha, z, t) + c_{16} (R - \gamma) w(\alpha, z, t) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Соотношения для деформаций, согласно обобщенному закону Гука, с учетом рассматриваемой анизотропии материала оболочки имеют вид [25]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha}(\alpha, z, t) &= d_{11}\sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{12}\sigma_z(\alpha, z, t) + d_{16}\tau_{\alpha z}(\alpha, z, t), \\ \varepsilon_z(\alpha, z, t) &= d_{12}\sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{22}\sigma_z(\alpha, z, t) + d_{26}\tau_{\alpha z}(\alpha, z, t), \\ \gamma_{\alpha z}(\alpha, z, t) &= d_{16}\sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{26}\sigma_z(\alpha, z, t) + d_{66}\tau_{\alpha z}(\alpha, z, t),\end{aligned}\quad (16)$$

где d_{ij} – компоненты тензора податливости.

Соотношения (15) и (16), с учётом (13) позволяют исследовать пространственно-временное нестационарное напряжённо-деформированное состояние неограниченной тонкой упругой композитной цилиндрической оболочки при воздействии совокупности нестационарных нагрузок с переменными во времени амплитудой и координатами воздействия. Соотношения (13), (15), (16) могут быть применены при исследовании анизотропных цилиндрических оболочек в целом, а также оболочек, материал которых изотропный, трансверсально-изотропный или ортотропный, путём задания нулевых значений соответствующих упругих постоянных c_{ij} и упругих податливостей d_{ij} .

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Исследуем напряженно-деформированное состояние полимерной композитной цилиндрической оболочки с симметричной относительной срединной поверхности схемой армирования. Толщина оболочки $h = 3$ мм, радиус $R = 0.5$ м, плотность $\rho = 1570$ кг/м³. Приведенные технические постоянные для пакета следующие (модули упругости в МПа)

$$\begin{aligned}E_1 &= 72530, \quad E_2 = 62700, \quad E_3 = 8540, \\ G_{12} &= 19520, \quad G_{23} = 19520, \quad G_{31} = 19520, \\ \mu_{12} &= 0.23, \quad \mu_{23} = 0.26, \quad \mu_{13} = 0.23,\end{aligned}$$

для которых упругие постоянные c_{ij} и упругие податливости d_{ij} имеют следующие значения (c_{ij} в Па, d_{ij} в Па⁻¹)

$$\begin{aligned}c_{11} &= 7.681 \times 10^{10}, \quad c_{12} = 1.596 \times 10^{10}, \quad c_{16} = 0, \\ c_{22} &= 6.660 \times 10^{10}, \quad c_{26} = 0, \quad c_{66} = 1.952 \times 10^{10}, \\ d_{11} &= 1.379 \times 10^{-11}, \quad d_{12} = -3.171 \times 10^{-12}, \quad d_{16} = 0, \\ d_{22} &= 1.595 \times 10^{-11}, \quad d_{26} = 0, \quad d_{66} = 5.123 \times 10^{-11}.\end{aligned}$$

На оболочку воздействуют две нагрузки ($s = 2$), изменяющиеся во времени по закону (нагрузка в Н)

$$p_1(t) = p_2(t) = 400 \sin(80t) e^{-160t},$$

находящиеся на нулевой координате оси z . Нагрузки разнесены от образующей цилиндра на углы $\alpha = \pm \pi/3$ и движутся по радиусу оболочки навстречу друг другу по законам

$$f_1(t) = -\frac{\pi}{3} + 40t, \quad g_1(t) = \frac{\pi}{3} - 40t.$$

Выражение (13) с учетом условий задачи примет вид

$$w(\alpha, z, t) \approx \frac{t}{m} \sum_{j=1}^m \left[G_w \left(\alpha + \frac{\pi}{3} - 40 \frac{t \cdot j}{m}, z, t - \frac{t \cdot j}{m} \right) p \left(\frac{t \cdot j}{m} \right) + G_w \left(\alpha - \frac{\pi}{3} + 40 \frac{t \cdot j}{m}, z, t - \frac{t \cdot j}{m} \right) p \left(\frac{t \cdot j}{m} \right) \right].$$

При расчётах в соотношениях (10) и (13) приняты следующие параметры численного интегрирования: $A=10$, $N=125$, $l=10$, $n=40$, выбор которых обусловлен результатами анализа сходимости результатов [23] по норме Чебышева

$$\|G_{w1}(0, z, 0.01) - G_{w2}(0, z, 0.01)\| = \max_{-5 \leq z \leq 5} |G_{w1}(0, z, 0.01) - G_{w2}(0, z, 0.01)| = 0.284 \times 10^{-4},$$

где функция влияния $G_{w1}(0, z, 0.01)$ построена при $A=102$, $N=1275$, а функция $G_{w2}(0, z, 0.01)$ – при $A=10$, $N=125$.

$$\|w_1(0, z, 0.01) - w_2(0, z, 0.01)\| = \max_{-5 \leq z \leq 5} |w_1(0, z, 0.01) - w_2(0, z, 0.01)| = 0.943 \times 10^{-6},$$

где функция прогиба $w_1(0, z, 0.01)$ построена при $A=10$, $N=125$, $l=10$, $n=40$, а функция $w_2(0, z, 0.01)$ – при $A=102$, $N=1275$, $l=20$, $n=80$.

На рис.3 представлены утрированные прогибы оболочки в трех сечениях (см. рис.2) в моменты времени 2, 5 и 8 мс. Сплошная линия – 2 мс, пунктирная линия – 5 мс, штрихпунктирная – 8 мс.

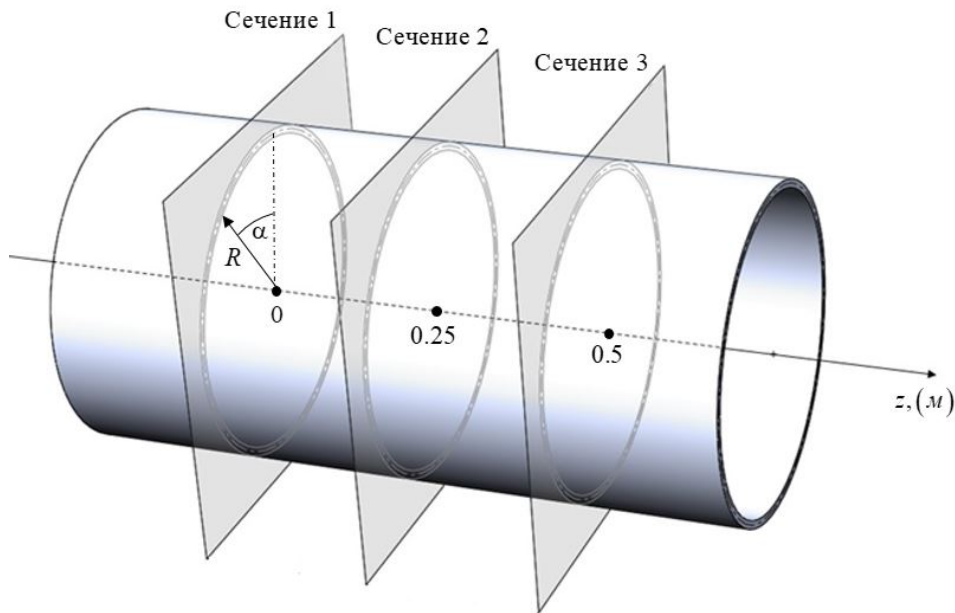


Рис.2. Рассматриваемые сечения оболочки.

На рис.3 прослеживается смещение локальных максимумов нестационарного прогиба в соответствии со смещением нагрузок. При удалении от плоскости приложения нагрузок наблюдается рост плавности прогибов оболочки и уменьшение их значений.

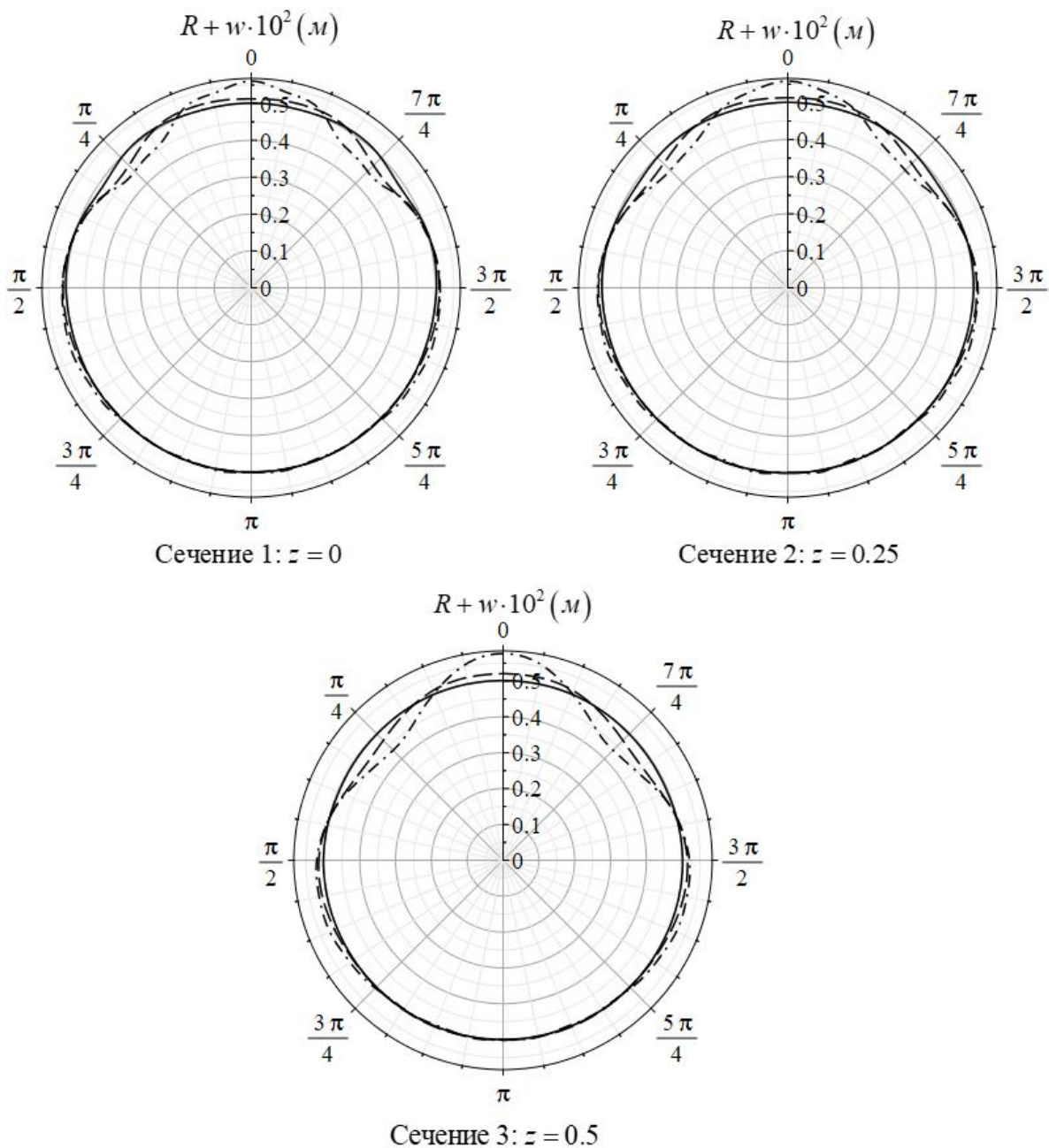


Рис.3. Прогибы в сечениях оболочки в моменты времени 2, 5, 8 мс.

На рис.4 и рис.5 представлены пространственные распределения напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_z, \tau_{\alpha z}$ и деформаций $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_z, \gamma_{\alpha z}$ на внешней поверхности композитной цилиндрической оболочки в момент времени 3 мс.

На рис.4 и рис.5 видна существенная неоднородность напряженного и деформированного состояния оболочки по координатам, при этом прослеживаются две плоскости симметрии распространения нестационарных возмущений, что согласуется с особенностью ортотропной среды.

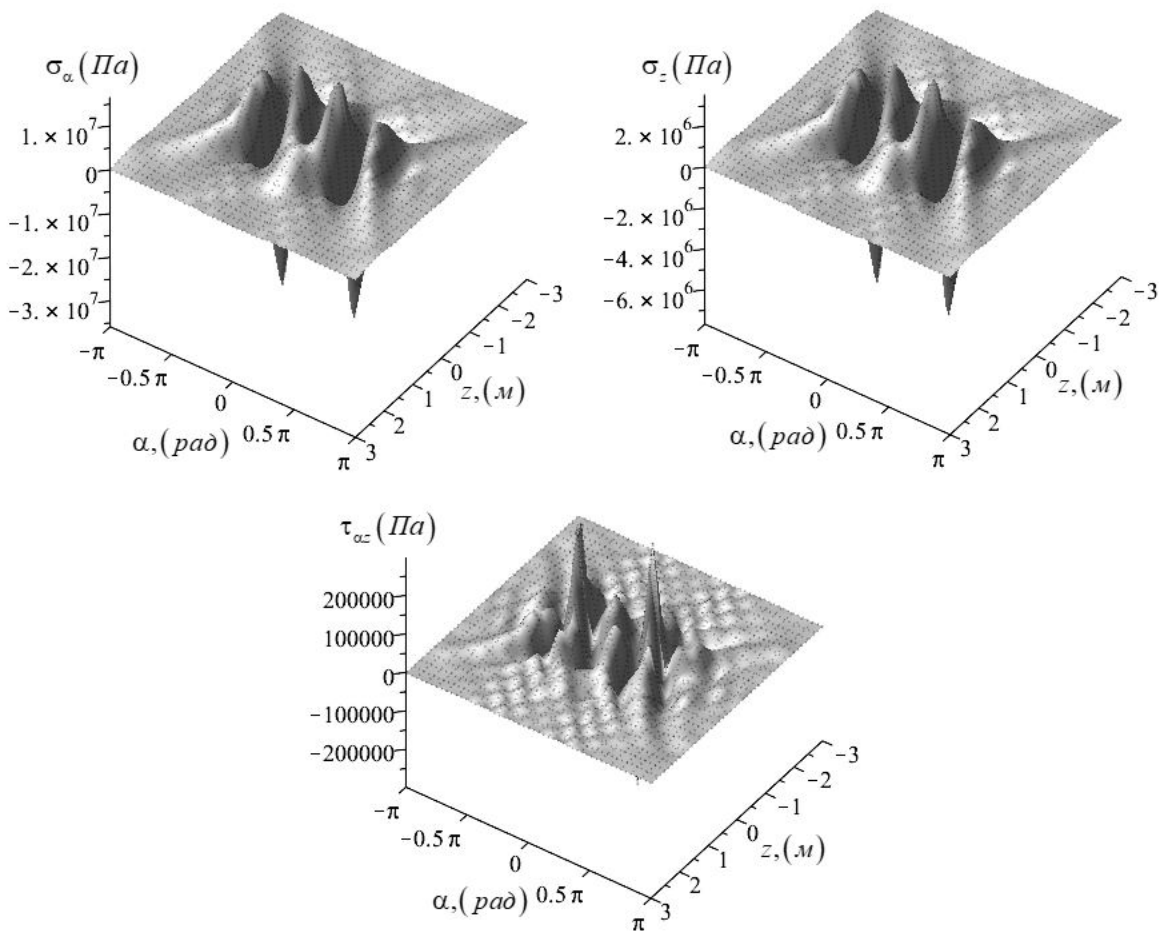


Рис.4. Распределения напряжений в момент времени 3 мс.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрирован подход к построению нестационарных функций нормальных перемещений, напряжений и деформаций в тонкой упругой анизотропной неограниченной цилиндрической оболочке Кирхгофа-Лява постоянной толщины при воздействии совокупности подвижных нестационарных нагрузок. Данный подход базируется на принципе суперпозиции, согласно которому искомое решение связано с нестационарной нагрузкой посредством трехмерного интегрального оператора типа свертки по времени, осевой и угловой координатам. Ядром оператора является нестационарная функция влияния для анизотропной оболочки, представляющая собой нормальное перемещение в ответ на действие единичной нагрузки, математически моделируемой с помощью дельта-функции Дирака.

В качестве примера исследована нестационарная динамика композитной цилиндрической оболочки при воздействии на ее внешнюю поверхность внезапно приложенной совокупности нестационарных нагрузок с переменными во времени амплитудой и координатами воздействия.

Представленный подход демонстрирует возможности для выработки инженерных рекомендаций при решении прикладных задач, а также для анализа нестационарных перемещений, напряжений и деформаций протяженных композитных цилиндрических оболочек.

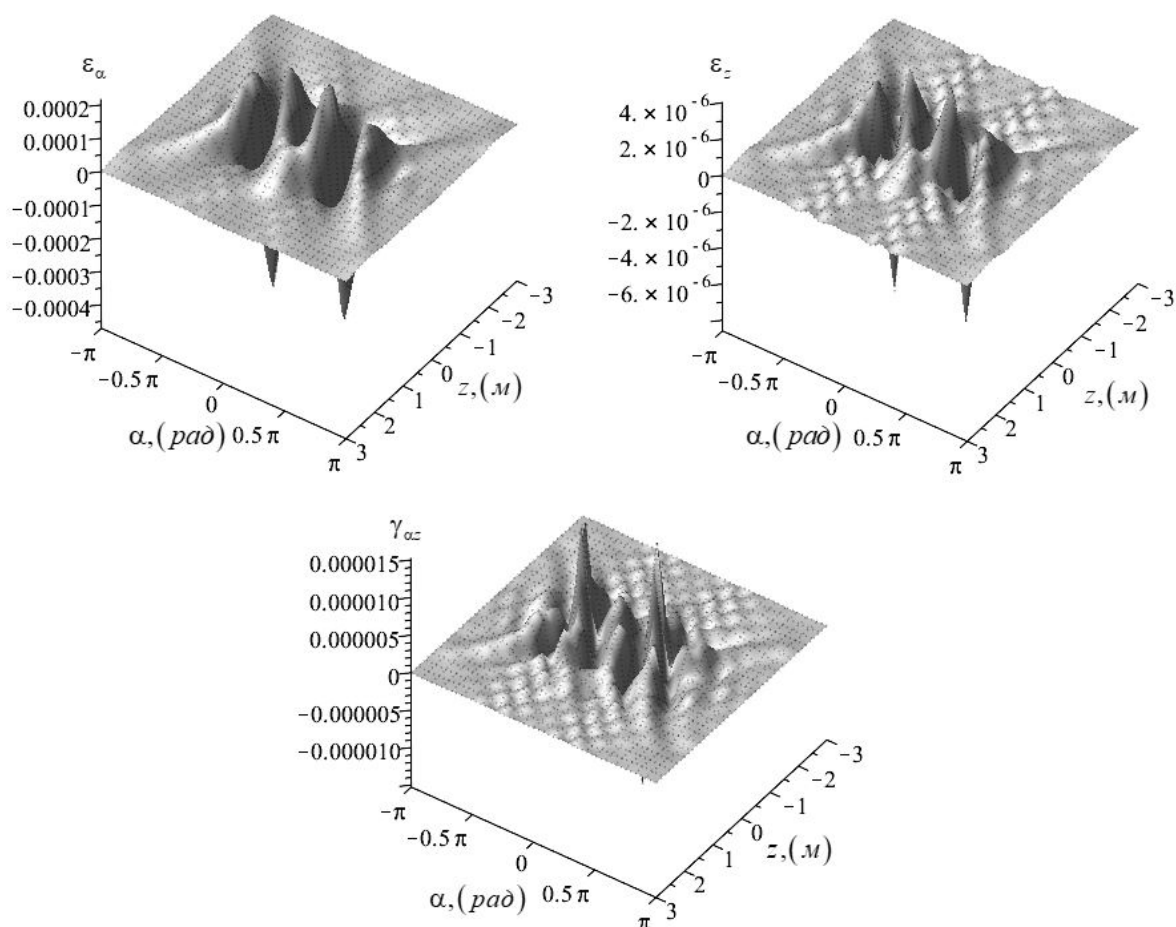


Рис.5. Распределения деформаций в момент времени 3 мс.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах: Учеб. пособие: для вузов.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
2. Богданович А.Е. *Деформирование и прочность цилиндрических композитных оболочек при динамических нагрузках.* Рига, 1985. – 560 с.
3. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек.* Рига, 1987. – 295 с.
4. Кошкина Т.Б. *Деформирование и прочность подкрепленных композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках.* Академия наук Латвийской ССР, Рига, 1984. – 180 с.
5. Сибиряков А.В. *Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: диссертация доктора технических наук: 01.02.06.* – Москва, 2002. – 319 с.
6. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // Mechanics of Solids.* – 2011. – Vol.46. – No.2. – Pp.239-247.

7. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol.43. – No.2. – Pp.145-152.
8. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell* // Mechanics of Solids. – 2015. – Vol.50. – No.2. – Pp.208-217.
9. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall* // Shell Structures: Theory and Applications. – 2017. – Vol.4. – Pp.305-308.
10. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier* / In book: Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. – 2019. – Pp.385-386.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon timoshenko beam* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.439-447.
12. Вахтерова Я.А., Федотенков Г.В. *Нестационарная обратная задача по идентификации дефектов в упругом стержне* / XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т.3: Механика деформируемого твердого тела. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С.878-880.
13. Вахтерова Я.А., Серпичева Е.В., Федотенков Г.В. *Обратная задача об идентификации нестационарной нагрузки для балки Тимошенко* // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2017. – №4. – С.82-92.
14. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. *Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance* / IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol.158. – No.1. – 012073.
15. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. *Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – No.4. – Pp.489-498.
16. Сердюк А.О., Сердюк Д.О., Федотенков Г.В. *Исследование нестационарного напряженного состояния неограниченной анизотропной пластины Кирхгофа* / X Международная научно-практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте». Материалы конференции в 5 ч. – Гомель: БелГУТ, 2020. – Ч.1. – С.122-124.
17. Сердюк А.О. Сердюк Д.О. Федотенков Г.В. *Нестационарный прогиб анизотропной пластины на упругом основании* / 10-я Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». Сборник трудов. – М.: ООО «Сам Полиграфист», 2020. – С.199-204.
18. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
19. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости. Учебное пособие*. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. – 112 с.
20. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Упругие пластины и пологие оболочки: Учебное пособие*. – М.: Изд-во МАИ, 2018. – 92 с.

21. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований*. – М.: Изд-во НАУКА, 1971. – 288 с.
22. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. – М.: Наука, 1975. – 630 с.
23. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchoff-Love shell* // Journal of Applied Engineering Science. – 2020. – Vol.18. – No.4. – Pp.737-744.
24. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Изд-во «Наука», 1974. – 448 с.
25. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. – М.: Изд-во «ОГИЗ», 1947. – 356 с.

REFERENCES

1. Gorshkov A.G., Medvedskij A.L., Rabinskij L.N., Tarlakovskij D.V. *Volny v sploshnykh sredakh: Ucheb. posobie: dlya vuzov [Waves in continuous media]*. Moskva, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
2. Bogdanovich A.E. *Deformirovanie i prochnost' tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri dinamicheskikh nagruzkakh [Deformation and strength of cylindrical composite shells under dynamic loads]*. Riga, 1985, 560 p.
3. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, 1987, 295 p.
4. Koshkina T.B. *Deformirovanie i prochnost' podkreplennykh kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek pri dinamicheskikh szhimayushhikh nagruzkakh [Deformation and strength of reinforced composite cylindrical shells under dynamic compressive loads]*. Akademiya nauk Latvijas SSR, Riga, 1984, 180 p.
5. Sibiryakov A.V. *Dinamika sloistykh kompozitsionnykh plastin i obolochek pri impul'snom nagruzenii: dissertatsiya doktora tekhnicheskikh nauk: 01.02.06 [Dynamics of layered composite plates and shells under pulsed loading: PhD thesis]*. Moskva, 2002, 319 p.
6. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.239-247.
7. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells*. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol.43, No.2, Pp.145-152.
8. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.208-217.
9. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall*. Shell Structures: Theory and Applications, 2017, Vol.4, Pp.305-308.
10. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier*. In book: Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, 2019, Pp.385-386.
11. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. *Identification of non-stationary load upon timoshenko beam*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.439-447.

12. Vahterova Ya.A., Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnaya obratnaya zadacha po identifikatsii defektov v uprugom sterzhne [Nonstationary inverse problem on the identification of defects in the elastic bar]*. XII Vserossijskij s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki: sbornik trudov v 4 tomakh. T.3: Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. Ufa, RITS BashGu, 2019, Pp.878-880.
13. Vahterova Ya.A., Serpicheva E.V., Fedotenkov G.V. *Obratnaya zadacha ob identifikatsii nestatsionarnej nagruzki dlya balki Timoshenko [Inverse problem on identification of non-stationary load for Timoshenko beam]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2017, No.4, Pp.82-92.
14. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. *Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, Vol.158, No.1, 012073.
15. Okonechnikov A.S., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. *Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force*. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, Vol.40, No.4, Pp.489-498.
16. Serdyuk A.O., Serdyuk D.O., Fedotenkov G.V. *Issledovanie nestatsionarnogo napryazhennogo sostoyaniya neogranichennoj anizotropnoj plastiny Kirkhgofa [Investigation of the unsteady stress state of an unbounded anisotropic Kirchhoff plate]*. X Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya "Problemy bezopasnosti na transporte". Materialy konferentsii v 5 ch. Gomel', BelGUT, 2020, Ch.1, Pp.122-124.
17. Serdyuk A.O. Serdyuk D.O. Fedotenkov G.V. *Nestatsionarnyj progib anizotropnoj plastiny na uprugom osnovanii [Unsteady deflection of an anisotropic plate on an elastic foundation]*. 10-ya Vserossijskaya nauchnaya konferentsiya s mezhdunarodnym uchastiem "Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksij, slozhnykh i geterogennykh sred". Sbornik trudov. Moskva, OOO "Sam Poligrafist", 2020, Pp.199-204.
18. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksij iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of Composite Structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
19. Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Obshhie sootnosheniya i variatsionnye printsipy matematicheskoy teorii uprugosti: Uchebnoe posobie [General relations and variational principles of the mathematical theory of elasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI-PRINT, 2009, 112 p.
20. Mihajlova E.Yu., Tarlakovskij D.V., Fedotenkov G.V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki: Uchebnoe posobie [Elastic plates and shallow shells]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2018, 92 p.
21. Dyoch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasy i Z-preobrazovanij [A practical guide to the Laplace transform and Z-transforms]*. Moskva, Izdatel'stvo NAUKA, 1971, 288 p.
22. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody [Numerical methods]*. Moskva, Nauka, 1975, 630 p.
23. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff-Love shell*. Journal of Applied Engineering Science, 2020, Vol.18, No.4, Pp.737-744.

24. Ambartsumyan S.A. *Obshhaya teoriya anizotropnykh obolochek [Theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 448 p.
25. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki [Anisotropic plates]*. Moskva, OGIz, 1947, 356 p.

Поступила в редакцию 23 сентября 2020 года.

Сведения об авторах:

Локтева Наталья Александровна – к.т.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: nlok@rambler.ru

Сердюк Дмитрий Олегович – к.т.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» г. Москва, Россия; e-mail: d.serduk55@gmail.com

Скопинцев Павел Дмитриевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» г. Москва, Россия; e-mail: chgpashka@gmail.com

Федотенков Григорий Валерьевич – к.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru