УДК 539.37
DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.04.455_476.02

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРУЖЕНИИ МНОГОСЛОЙНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЯМИ

Хохлов А.В.

НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
АО «Композит», г. Королев, Россия

АННОТАЦИЯ

Построено точное решение квазистатической задачи о напряженно-деформированном состоянии составной толстостенной трубы, состоящей из нескольких слоев нелинейно вязкоупругих изотропных материалов, каждый из которых подчиняется нелинейному определяющему соотношению Работнова с разными парами произвольных материальных функций одного аргумента и постулату несжимаемости, при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы, медленно меняющимися во времени, и задании нулевого осевого перемещения на торцах трубы. Проведено расщепление системы нелинейных интегральных уравнений для неизвестных радиальных напряжений на границах слоев и функций, описывающих поле деформаций каждого слоя, и ее решение сведено к одному нелинейному интегральному уравнению для одной неизвестной функции времени, зависящему от материальных функций слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. Для любых материальных функций слоев трубы перемещения, деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени и нормальные напряжения на границах слоев выражены через эту функцию времени явными формулами. Доказано, что в любой момент времени полная продольная сила, возникающая в поперечном сечении трубы, не зависит (в отличие от напряжений и деформаций) от количества слоев трубы и их толщин, от пар материальных функций, задающих вязкоупругие свойства, и от предыстории изменения нагрузки, а зависит лишь от мгновенных значений заданных давлений и радиусов двух радиусов трубы, на которых задана нагрузка, и совпадает с силой, найденной из решения задачи Ламе для однородного линейно упругого несжимаемого материала (хотя осевые напряжения не постоянны по сечению).

Для модели трубы со степенной функции нелинейности в случае пропорциональности всех функций ползучести материалов слоев одной и той же (произвольно заданной) функции времени построено точное решение ключевого интегрального уравнения, вычислены все интегральные операторы, входящие в общее решение, и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы.

Ключевые слова: многослойные толстостенные трубы; поле напряжений; нелинейная вязкоупроугость; ползучесть; упругопластичность; определяющее соотношение Работнова; функция релаксации, функция нелинейности, несжимаемый материал; интегральные уравнения; продольная сила

EXACT SOLUTION FOR STRAIN AND STRESS FIELDS IN A MULTILAYER THICK-WALLED TUBE OF NON-LINEAR VISCOELASTIC MATERIALS UNDER GIVEN INTERNAL AND EXTERNAL PRESSURES

Khokhlov Andrew V.

Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russia
JSC «Kompozit», Korolev, Russia

ABSTRACT

We construct the exact solution of the quasi-static boundary value problem for a multilayer thick-walled tubes made of physically non-linear viscoelastic materials obeying the Rabotnov constitutive equation with two arbitrary material functions for each layer (a material creep compliance and a function which governs physical non-linearity). We suppose that every layer material is homogeneous, isotropic and incompressible and that a tube is loaded by time-dependent internal and external pressures (varying slowly enough to neglect inertia terms in the equilibrium equations) and that a plain strain state is realized, i.e. zero axial displacements are given on the edge cross sections of the tube. We obtained the closed form expressions for displacement, strain and stress fields via the single unknown function of time and integral operators involving this function, pairs of (arbitrary) material functions of each tube layer, preset pressure values and ratios of tube layers radii and derived integral equation to determine this unknown function. To derive it we split and solve the set of non-linear integral equations for unknown functions of time governing strain fields of every tube layer and for unknown interlayer normal stresses (depending on time). Assuming material functions are arbitrary, we proved that the total axial force at a tube cross section doesn't depend on a number of layers, their thicknesses and pairs of material functions governing their mechanical behavior and on a history of loading although stresses and strains do. The axial force depends only on a tube radii and current values of given pressures. It proved to be equal to the axial force calculated for homogeneous linear elastic tube although axial stress depends on radial coordinate in the case of non-linear viscoelastic materials.

Assuming the material functions that govern non-linearity of each layer material coincide with a power function with a positive exponent and assuming their relaxation moduli are proportional to a single (arbitrary) function of time, we constructed exact solution of the resolving functional equation, calculated all the integrals involved in the general representation for the tube stress field and reduced it to simple algebraic formulas convenient for analysis.

Keywords: multilayer thick-walled tubes; stress field; non-linear viscoelasticity; creep; elastoplasticity; quasi-linear viscoelasticity; relaxation modulus; material function governing nonlinearity, incompressible material; integral equations; axial force

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья опирается на работы [1,2], в которых построено и аналитически исследовано точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния (НДС) полого цилиндра из физически нелинейного несжимаемого однородного изотропного материала, подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Работнова

$$\varepsilon_{ij}(t) = \tfrac{3}{2}\Phi\big(L(t)\big)\sigma(t)^{-1}\big[\sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}\big] + \tfrac{1}{3}\Phi_0\big(L_0(t)\big)\delta_{ij},\ t \ge 0, \tag{1}$$

$$L(t) := \mathbf{\Pi}\sigma,\ L_0(t) := \mathbf{\Pi_0}\sigma_0,\ \mathbf{\Pi}y = \int_0^t \Pi(t-\tau)\,dy(\tau),$$
$$\mathbf{\Pi_0}y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau)\,dy(\tau) \tag{2}$$

при нагружении внутренним и внешним давлениями, медленно меняющимися во времени, и задании нулевого осевого перемещения оснований цилиндра (обеспечивающего состояние плоской деформации). Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены через одну функцию времени, которая находится в результате решения нелинейного функционального уравнения, содержащего материальные функции (МФ) ОС (1) и заданную нагрузку (см. ниже). В частности, построены и изучены решения задачи о ползучести и длительной прочности толстостенной трубы [2] и показано, что построенные поля деформаций и напряжений совпадают в частных случаях (при специальном выборе одной из МФ) с известными классическими решениями для несжимаемого материала в рамках линейной теории вязкоупругости, упругости и упругопластичности с произвольным упрочнением [1].

ОС (1) содержит четыре произвольных материальных функции (МФ) $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$ (функции сдвиговой и объемной ползучести), $\Phi(x)$, $\Phi_0(x)$ (функции нелинейности) и описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}(t)$ и малых деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ в произвольной точке тела; $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ – среднее напряжение (первый инвариант $\boldsymbol{\sigma}(t)$), $\sigma = \left(1,5 s_{ij} s_{ij}\right)^{0.5}$ – интенсивность напряжений (второй инвариант девиатора $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$). Напряжение и время предполагаются обезразмеренными.

В настоящей статье результаты работ [1,2] использованы для построения точного решения задачи об НДС многослойной толстостенной трубы, составленной из нескольких (соединенных без натяга, ненапряженных) слоев разных нелинейно вязкоупругих несжимаемых материалов, каждый из которых подчиняется ОС Работнова (1) с разными парами произвольных МФ $\{\Pi_i, \Phi_i\}$ (при использовании допущения о несжимаемости материала в ОС остаются только две МФ – см. ниже). Некоторые слои могут быть заданы упругими, упругопластическими (с упрочнением, но без наследственных свойств, без ползучести) или линейно вязкоупругими при надлежащем задании МФ [1].

Статические и динамические задачи о напряженно-деформированном состояния (НДС) однородных полых цилиндров и многослойных толстостенных труб, нагруженных давлением на внутренней и внешней поверхностях в рамках теории упругости (задача Ламе, задача Гадолина и др.) и разных вариантов упругопластичности являются классическими из-за обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, шлангов, обделок туннелей, скважин, шахт, процессов запрессовки, проектирование труб и баллонов из функционально градиентных материалов, расчет на ползучесть поверхностно упрочненных труб и труб, подвергающихся агрессивным воздействиям среды, моделирование поведения кровеносных сосудов и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение (при тех или иных упрощающих предположениях) или хотя бы достаточно простой и эффективный аналитически проработанный алгоритм вычисления приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы (и продолжают активно исследоваться) в случае упругих и упругопластических изотропных и трансверсально-изотропных материалов без упрочнения и с линейным упрочнением [3-19] и в теории установившейся ползучести (как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения) [20-23]. Строились и решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций сдвиговой и объемной ползучести, а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, задаваемых конечными суммами экспонент, т.е. рядами Прони) и в пространстве преобразований Фурье или Лапласа (Лапласа-Карсона) [24-27], нередко – без восстановления оригиналов (из-за сложности или невозможности точного восстановления). При этом в большинстве случаев используется одно из трех дополнительных упрощающих допущений, позволяющих (в частности) уменьшить количество независимых материальных функций: 1) о несжимаемости материала, 2) о линейно упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения (т.е. об отсутствии объемной ползучести), 3) о независимости от времени коэффициента Пуассона. Качественные свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергались системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных МФ, а, как правило, рассчитывались на компьютерах для конкретных функций релаксации с несколькими параметрами. В случае нелинейной вязкоупругости построение решений резко усложняется из-за несправедливости принципа соответствия Вольтерры и неприменимости классических интегральных преобразований.

Нелинейное ОС (1) – один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [27-33,21,25] с двумя МФ φ, Π $\left(\varphi=\Phi^{-1}\right)$

$$\varphi\left(\varepsilon(t)\right)=\int_0^t \Pi(t-\tau)\,d\sigma(\tau),\quad \sigma(t)=\int_0^t R(t-\tau)\varphi'\left(\varepsilon(\tau)\right)d\varepsilon(\tau),\quad t>0,\quad (3)$$

на сложное напряженное состояние в предположениях изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta=3\varepsilon_0=\varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от σ_0) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов.

Данная статья продолжает цикл работ [34-38] по системному аналитическому исследованию ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в статьях [35-38].

1. ОС РАБОТНОВА И ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Одноосное ОС (3) предложено Ю.Н. Работновым для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t)=\int_0^t \Pi(t-\tau)\,d\sigma(\tau)=\mathbf{\Pi}\sigma,\quad \sigma(t)=\int_0^t R(t-\tau)\,d\varepsilon(\tau)=\mathbf{R}\varepsilon,\quad t>0,\quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$ [27-30,21,25]. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$, связаны интегральным уравнением

$$\mathbf{R}\Pi=h(t)\ \text{ или }\ \mathbf{\Pi}R=h(t),\ t>0 \quad (5)$$

($h(t)$ – функция Хевисайда), выражающим условие взаимной обратности операторов (4) (и (3)) [23]. В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y.C. Fung [39-48]. В работах [21,25,27-33] и др. ОС (3) применялось к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [39-48] – связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma=\mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция оператора действия функции φ и линейного оператора $\mathbf{R}$ из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0

$$\sigma_0=\mathbf{R_0}\varphi_0(\theta),\quad \sigma=\mathbf{R}\varphi(\varepsilon),\quad s_{ij}(t)=\tfrac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \tag{6}$$

где $\varphi=\Phi^{-1}$, $\varphi_0=\Phi_0^{-1}$, $\mathbf{e}=\boldsymbol{\varepsilon}-\varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\varepsilon=\left(\tfrac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right)^{0.5}$ – девиатор и интенсивность деформаций, а функции релаксации $R(t)$, $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 уравнениями вида (5). Из трех МФ φ, Π, R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ.

На функции ползучести и релаксации в ОС (1) (или (6)) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости [49,50]: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ предполагаем положительными и дифференцируемыми на $(0;\infty)$, функции Π и Π_0 – возрастающими и выпуклыми вверх, а R и R_0 – убывающими и выпуклыми вниз на $(0;\infty)$, R и R_0 могут иметь интегрируемую особенность или δ-сингулярность в точке $t=0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta>0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует существование предела $\Pi(0)=\inf\Pi(t)\ge 0$ ($y(0):=y(0+)$ – предел функции $y(t)$ справа в т. $t=0$). На МФ φ и φ_0 в ОС (6) и на МФ Φ и Φ_0 в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [35-38]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0;\omega)$, $\omega>0$, а $\varphi_0(u)$ – на множестве $(\omega_-;0)\cup(0;\omega_+)$ (где $\omega_-\omega_+<0$), причем $\varphi(0+)=0$ и $\varphi_0(0+)=\varphi_0(0-)=0$ (иначе процессу $\boldsymbol{\varepsilon}(t)\equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\boldsymbol{\sigma}(t)$). Из возрастания φ и φ_0 следует существование обратных функций $\Phi(x)=\varphi^{-1}$, $x\in(0;X)$, $X:=\sup\varphi(u)$, и $\Phi_0(x)=\varphi_0^{-1}$, $x\in(\underline{x};\overline{x})$, где $\underline{x}=\varphi_0(\omega_-+0)$, $\overline{x}=\varphi_0(\omega_+-0)$, и обратимость ОС (1). Примеры семейств функций, которые удобно использовать для задания МФ Φ,Φ_0 или φ,φ_0, приведены в [35-38].

Отметим, что ОС (1) (т.е. (6)) с $\varphi(x)=x$, $\varphi_0(x)=x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред

$$s_{ij}(t)=\tfrac{2}{3}\mathbf{R}\,e_{ij},\quad \sigma_0=\mathbf{R_0}\theta, \tag{7}$$

так как (7) не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают только на множестве процессов простых нагружений $\sigma_{ij}=\gamma(t)\overline{\sigma}_{ij}$ при любых i,j (или простых деформирований $\varepsilon_{ij}=\gamma(t)\overline{\varepsilon}_{ij}$), где $\dot{\gamma}>0$, а $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ – постоянный тензор, на которых линейное ОС (7) обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. Из построенного в [1] решения задачи об НДС трубы следует, что в любой точке трубы реализуется процесс простого деформирования, и потому решение задачи для ОС (1) с МФ $\varphi(x) = Ax$ действительно совпадает с решением для линейно вязкоупругой несжимаемой среды [1].

Если задать ФП постоянной (пренебречь сдвиговой ползучестью), то ОС (1) для несжимаемого материала вырождается в ОС для упрочняющегося упругопластического несжимаемого материала (без наследственности) с произвольной МФ $\Phi(x)$, связывающей интенсивности напряжений и деформаций в точности так, как в деформационной теории пластичности [7], а построенное решение задачи о НДС трубы из наследственного материала, подчиняющегося ОС (1), превращается (как показано в [1]) в классическое решение [3-8].

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОРОДНОЙ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ

Рассмотрим задачу об определении НДС полого цилиндра из наследственного несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному ОС Работнова (1) с произвольными материальными функциями, под действием давлений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра при $t > 0$. Считаем, что давления меняются медленно: так, чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебречь (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат, ось z направим вдоль оси цилиндра. Пусть r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы ненагруженного цилиндра (при $t = 0$). Тогда краевые условия имеют вид

$$\sigma_r\big|_{r_1} = -p_1(t),\ \ \sigma_r\big|_{r_2} = -p_2(t),\ \ \sigma_{r\theta}\big|_{r_1} = \sigma_{rz}\big|_{r_1} = 0,\ \ \sigma_{r\theta}\big|_{r_2} = \sigma_{rz}\big|_{r_2} = 0. \qquad (8)$$

Задача осесимметрична, и в любой точке (r,θ,z) в любой момент времени все компоненты перемещений, деформаций и напряжений не зависят от угла θ и

$$\begin{aligned}&\sigma_{r\theta} \equiv 0,\ \ \sigma_{\theta z} \equiv 0,\ \ u_\theta \equiv 0,\ \ \varepsilon_\theta(r,t) = r^{-1}\left(u_{\theta,\theta} + u_r\right) = r^{-1}u_r,\\ &\varepsilon_r(r,t) = u_{r,r},\ \ \varepsilon_z(r,t) = u_{z,z}.\end{aligned} \qquad (9)$$

Предполагаем, что труба закреплена на торцах так, что $u_z = 0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta} = 0$ и $\sigma_{rz} = 0$. Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z, и (помимо (9)) справедливы равенства $\sigma_{rz} \equiv 0$, $\varepsilon_{z\theta} \equiv 0$, $\varepsilon_{r\theta} \equiv 0$, $\varepsilon_z \equiv 0$, $u_z \equiv 0$, $\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(u_{r,z} + u_{z,r}\right) \equiv 0$, $\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2}\left(u_{\theta,z} + r^{-1}u_{z,\theta}\right) \equiv 0.$ Поэтому тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, $\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$, а зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид: $u_r(r,t)$, $\varepsilon_r(r,t)$, $\varepsilon_\theta(r,t)$, $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_\theta(r,t)$, $\sigma_z(t)$. Будем считать материал несжимаемым. Тогда $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{s} := \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\}$, а ОС (1) (и обратное ему ОС (6)) сводится к одномерному ОС $\varepsilon = \Phi(\mathbf{\Pi}\sigma)$ с двумя МФ (Φ и Π или φ и R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности девиаторов (6): $s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t)$, $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (первое уравнение ОС (6) не используется, и среднее напряжение σ_0 находится из решения краевой задачи, как обычно бывает при допущении несжимаемости).

В работе [1] (в предположениях плоской деформации трубы и однородности, изотропности и несжимаемости материала) поля перемещений, деформаций и напряжений в трубе из материала, подчиняющегося ОС (1) с двумя произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ (или $R(t)$ и $\varphi(x)$ в (6)), выражены через одну (искомую) функцию времени $y(t)$

$$u_r(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)r_1/\overline{r}, \quad u_\theta\equiv 0, \quad u_z\equiv 0; \tag{10}$$

$$\varepsilon_\theta(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)\overline{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r,t)=-\varepsilon_\theta(r,t)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}y(t)\overline{r}^{-2}, \quad \varepsilon_z\equiv 0; \tag{11}$$

$$\sigma_r(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F\left(\left|y(t)\right|\right)-F\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right)\right]; \tag{12}$$

$$\sigma_\theta(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F\left(\left|y(t)\right|\right)-F\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right)+2\varphi\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right)\right]; \tag{13}$$

$$\sigma_z(r,t)=-p_1+\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F\left(\left|y(t)\right|\right)-F\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right)+\varphi\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right)\right]. \tag{14}$$

При этом $\sigma_z=(\sigma_r+\sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0=\sigma_z$. Интенсивности деформаций и напряжений

$$\varepsilon(r,t)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_\theta=\left|y(t)\right|/\overline{r}^2, \quad \sigma(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left|\sigma_r-\sigma_\theta\right|=\mathbf{R}\varphi\left(\left|y(t)\right|/\overline{r}^2\right). \tag{15}$$

В формулах (10)-(15) $\overline{r}:=r/r_1\in[1,r_2/r_1]$, $z(t)=\operatorname{sgn}p(t)$, $p(t):=p_1(t)-p_2(t)$,

$$F(s):=\int_0^s\varphi(x)x^{-1}dx, \quad s>0 \tag{16}$$

(из $\varphi(x)>0$ при $x>0$ следует возрастание $F(s)$), а $y(t)$ – решение уравнения

$$p_1-p_2=\tfrac{1}{\sqrt{3}}z(t)\mathbf{R}\left[F\left(\left|y(t)\right|\right)-F\left(q\left|y(t)\right|\right)\right] \tag{17}$$

или эквивалентного ему уравнения

$$F(Y(t))-F(qY(t))=P(t), \ P(t):=\sqrt{3}\mathbf{\Pi}\left[zp(t)\right]=\sqrt{3}\mathbf{\Pi}\left|p(t)\right|, \ t>0. \tag{18}$$

Здесь $Y:=\left|y(t)\right|$, $q:=(r_1/r_2)^2\in(0;1)$, а $P(t)$ – известная функция, если задана функция ползучести и разность давлений $p(t)$. Из (15) и (11) следует, что $Y(t)=\varepsilon(t,r_1)=\varepsilon(t,r_2)/q$ – интенсивность деформаций, а $y(t)$ – измеримая в испытаниях физическая величина, пропорциональная окружной деформации на поверхности трубы: $y(t)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_\theta(r_2,t)/q$. В статье [1] исследованы свойства найденного НДС трубы (11)-(14).

Решение уравнения (18) $Y(t)$ существует (в окрестности любой точки (t,Y), $t,Y>0$) по теореме о неявной функции, ибо производная функции $f(t,Y):=F(Y)-F(qY)-P(t)$ по Y существует и отлична от нуля для $t,Y>0$: $\partial f/\partial Y=F'(Y)-qF'(qY)=\left[\varphi(Y)-\varphi(qY)\right]Y^{-1}>0$, так как $F'(s)=\varphi(s)/s$, а из возрастания $\varphi(x)$ следует, что $\varphi(Y)-\varphi(qY)>0$ при $Y>0$. Из тождества (18) следует, что функция $Y(t,q)$ дифференцируема по t и по параметру q

$$\begin{gathered}\partial Y/\partial q=q^{-1}Y\varphi(qY)\left[\varphi(Y)-\varphi(qY)\right]^{-1}>0,\\ \dot{Y}=Y\left[\varphi(Y)-\varphi(qY)\right]^{-1}\dot{P}(t).\end{gathered} \tag{19}$$

После определения $y(t)$ из уравнения (18) (в общем случае приближённого, хотя в [1] получено и аналитическое решение для важного класса МФ) можно вычислить поля перемещений и напряжений (10)-(14). Вместо функционального уравнения (18) можно решать задачу Коши для дифференциального уравнения (19), задавая начальное условие $Y(0)$ как решение уравнения (18) при $t=0$.

Интеграл от напряжения (13) по отрезку $[r_1, r_2]$ равен $p_1(t)r_1 - p_2(t)r_2$, т.е. выполнено условие равновесия половины трубы в проекции на ось, ортогональную z. Среднее значение окружного напряжения (13)

$$\bar{\sigma}_\theta(t) = (p_1 r_1 - p_2 r_2)/(r_2 - r_1) = \left(q^{1/2} p_1(t) - p_2(t)\right)/\left(1 - q^{1/2}\right). \tag{20}$$

Продольная сила и среднее осевое напряжение $\bar{\sigma}_z(t) = N/S = N/\left[\pi r_2^2 (1-q)\right]$ вычисляются интегрированием напряжения (14) по сечению трубы

$$\begin{aligned} N &= \pi r_2^2 \left[q p_1(t) - p_2(t) \right] = \pi \left[r_1^2 p_1(t) - r_2^2 p_2(t) \right], \\ \bar{\sigma}_z(t) &= (1-q)^{-1} \left[q p_1(t) - p_2(t) \right] \end{aligned} \tag{21}$$

(преобразования интегралов опущены, формула (21) выведена в работе [1]). Знак продольной силы (21) совпадает со знаком разности $qp_1 - p_2$, она равна нулю лишь в случае $p_2 = qp_1$. Примечательно, что *продольная сила (в отличие от напряжений) не зависит от предыстории изменения нагрузки и от МФ ОС* (1), *а только от радиусов трубы и мгновенных значений давлений, и совпадает с силой, найденной из решения задачи Ламе для линейно упругого несжимаемого материала* (при динамической постановке задачи, т.е. при учете инерционных членов в уравнении равновесия, это уже не так [1]).

Если внешнее давление $p_2(t) \equiv 0$, *то отношение средних напряжений* (20) *и* (21) *не зависит от нагрузки и от времени и всегда* $\bar{\sigma}_\theta / \bar{\sigma}_z > 2$

$$\bar{\sigma}_\theta(t)/\bar{\sigma}_z(t) = q^{-1/2}(1-q)/\left(1-q^{1/2}\right) = q^{-1/2}\left(1+q^{1/2}\right) = 1 + q^{-1/2} = 1 + r_2/r_1. \tag{22}$$

В случае ОС (1) с ФР $R(t) = E = \text{const}$ и произвольной МФ φ общее решение (12)-(11) превращается в решение для случая нелинейной упругости материала (или упруго-пластичности при активном нагружении), поскольку МФ φ, связывает интенсивности деформаций и напряжений в точности так, как в деформационной теории пластичности, и задает упрочнение материала. Действие оператора $\mathbf{R}$ на произвольную функцию (см. (2)) сводится к умножению на E и формулы (12)-(14) упростятся и совпадут с классическими решениями [3-8]. Если дополнительно $\varphi(x) = x$, то $F(s) = s$ и поле напряжений совпадет с решением квазистатической задачи в рамках линейной теории упругости

$$\begin{aligned} &\sigma_r = -p_2(t) + \tfrac{1}{\sqrt{3}} E\left(q - \bar{r}^{-2}\right) y(t), \ \ \sigma_\theta = -p_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}} E\left(q + \bar{r}^{-2}\right) y(t), \\ &\sigma_z = -p_2 + \tfrac{1}{\sqrt{3}} E q y(t). \end{aligned}$$

3. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРУЖЕНИИ ДАВЛЕНИЯМИ ДВУХСЛОЙНОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОС (1)

При тех же основных допущениях (несжимаемость изотропного материала, плоская деформация, те же краевые условия) рассмотрим квазистатическую задачу об определении напряжений и деформаций в трубе, состоящей из двух слоев разных однородных вязкоупругих материалов (с радиусами границ r_0, r_1, r_2), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС Работнова (1) (т.е. (6)) с разными (произвольными) парами МФ $\{R_i, \varphi_i\}$, $i = 1;2$, под действием давлений $p_0(t)$ и $p_2(t)$, $t > 0$, заданных на внутренней и внешней поверхности трубы (при $r = r_0$ и $r = r_2$). Считаем, что давления меняются медленно: так, чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебречь.

Пусть $p_1(t) = -\sigma_r(r_1, t)$ – неизвестное давление на границе слоев $r = r_1$ (поверхностная плотность силы их контактного взаимодействия). Для каждого слоя справедливы формулы (10)-(18) с заменой МФ R, φ на $\{R_i, \varphi_i\}$, $y(t)$ – на $y_i(t)$ (а для внутреннего слоя еще нужно пару радиусов r_1, r_2 заменить на r_0, r_1). Интегральное уравнение (17) для искомой функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$p_0 - p_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} z_1(t) \mathbf{R}_1 \left[F_1(|y_1(t)|) - F_1(q_1 |y_1(t)|) \right], \tag{23}$$

$$p_1 - p_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} z_2(t) \mathbf{R}_2 \left[F_2(|y_2(t)|) - F_2(q_2 |y_2(t)|) \right], \tag{24}$$

где $z_1(t) = \operatorname{sgn}(p_0(t) - p_1(t))$, $z_2(t) = \operatorname{sgn}(p_1(t) - p_2(t))$, $q_1 := (r_0/r_1)^2$, $q_2 := (r_1/r_2)^2$, $q_i :\in (0;1)$, а радиальное перемещение (10) в любой точке трубы

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y_1(t) \ \text{ при } r \in [r_0, r_1], \\ u(r,t) &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} r_1^2 r^{-1} y_2(t) \ \text{ при } r \in [r_1, r_2] \end{aligned} \tag{25}$$

($u_\theta \equiv 0$, $u_z \equiv 0$). Так как касательные напряжения и перемещения равны нулю, условия сопряжения на границе слоев $r = r_1$ – непрерывность $\sigma_r(r_1, t)$ (уже использована в (23),(24)) и перемещения (25), т.е. тождество $r_0^2 y_1(t) = r_1^2 y_2(t)$, или

$$y_2(t) = q_1 y_1(t). \tag{26}$$

Уравнения (23), (24), (26) образуют систему уравнений для трех неизвестных функций $p_1(t)$, $y_1(t)$ и $y_2(t)$, определив которые, можно вычислить поля перемещений, деформаций и напряжений по формулам вида (10)-(14) для каждого слоя трубы. Эту систему можно решить методом исключения неизвестных и свести к одному интегральному уравнению для $y_1(t)$. Для упрощения формул будем рассматривать случай нагрузки $p_0(t) \ge p_2(t)$, $t > 0$, когда $z_i(t) = 1$, $y_i(t) \ge 0$. Сложим (23) и (24) (исключая $p_1(t)$) и подставим (26)

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_1 \left[F_1(y_1(t)) - F_1(q_1 y_1(t)) \right] + \mathbf{R}_2 \left[F_2(q_1 y_1(t)) - F_2(q_1 q_2 y_1(t)) \right] = \\ &= \sqrt{3}(p_0 - p_2). \end{aligned} \tag{27}$$

После определения $y_1(t)$ из интегрального уравнения (27) (в общем случае приближённого, хотя ниже будет получено и аналитическое решение для одного класса МФ) можно вычислить $y_2(t)$ и $p_1(t)$ по формулам (26), (23) (или (24)) и поля перемещений, деформаций и напряжений в каждом слое трубы по (10)-(14)

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_0(t) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[F_1(y_1(t)) - F_1(q_1 y_1(t))\right] = \\ &= p_2(t) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(q_1 y_1(t)\right) - F_2\left(q_2 q_1 y_1(t)\right)\right]; \end{aligned} \qquad (28)$$

$$u(r,t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-1} y_1(t) \text{ при } r \in [r_0, r_1] \cup [r_1, r_2],\ t > 0,\ u_\theta \equiv 0,\ u_z \equiv 0; \qquad (29)$$

$$\varepsilon_\theta(r,t) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y_1(t),\ \varepsilon_r(r,t) = -\varepsilon_\theta(r,t) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2} r_0^2 r^{-2} y_1(t),\ \varepsilon_z \equiv 0 \qquad (30)$$

(в силу (26) формулы (25) сливаются). По (12)-(14) напряжения в каждом слое трубы выражаются разными формулами (через свою пару МФ): при $r \in [r_0, r_1)$

$$\sigma_r(r,t) = -p_0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[F_1\left(y_1(t)\right) - F_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right], \qquad (31)$$

$$\sigma_\theta(r,t) = -p_0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[F_1\left(y_1(t)\right) - F_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right) + 2\varphi_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right], \qquad (32)$$

$$\sigma_z(r,t) = -p_0 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[F_1\left(y_1(t)\right) - F_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right) + \varphi_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right]; \qquad (33)$$

а при $r \in (r_1, r_2]$

$$\sigma_r = -p_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(q_1 y_1(t)\right) - F_2\left(q_1 y_1(t) r_1^2 r^{-2}\right)\right],$$

$$\sigma_\theta(r,t) = -p_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(q_1 y_1(t)\right) - F_2\left(q_1 y_1(t) r_1^2 r^{-2}\right) + 2\varphi_2\left(q_1 y_1(t) r_1^2 r^{-2}\right)\right],$$

$$\sigma_z(r,t) = -p_1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(q_1 y_1(t)\right) - F_2\left(q_1 y_1(t) r_1^2 r^{-2}\right) + \varphi_2\left(q_1 y_1(t) r_1^2 r^{-2}\right)\right],$$

и подстановка $q_1 r_1^2 = r_0^2$, $q_2 q_1 = r_0^2 r_2^{-2}$ и второго выражения (28) для $p_1(t)$ дает

$$\sigma_r(r,t) = -p_2(t) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(r_0^2 r_2^{-2} y_1(t)\right) - F_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right], \qquad (34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r,t) = -p_2(t) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\Big[&F_2\left(r_0^2 r_2^{-2} y_1(t)\right) - \\ &- F_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right) + 2\varphi_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\Big], \end{aligned} \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r,t) = -p_2(t) + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\Big[&F_2\left(r_0^2 r_2^{-2} y_1(t)\right) - \\ &- F_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right) + \varphi_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\Big], \end{aligned} \qquad (36)$$

Интенсивность напряжений вычисляется по (15)

$$\begin{aligned} \sigma(r,t) &= \mathbf{R}_1\left[\varphi_1\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right], \quad r \in [r_0, r_1), \\ \sigma(r,t) &= \mathbf{R}_2\left[\varphi_2\left(y_1(t) r_0^2 r^{-2}\right)\right], \quad r \in (r_1, r_2]. \end{aligned} \qquad (37)$$

Радиальное напряжение (и деформации), очевидно, непрерывно на границе слоев $r = r_1$, а окружное и осевое напряжения, имеют разрыв первого рода. Вычислим их скачки в точке $r = r_1$. Из (33) и (36) при $r = r_1$ получим

$$\sigma_z\left(r_1-0,t\right)=-p_0\left(t\right)+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[F_1\left(y_1\left(t\right)\right)-F_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right]+$$
$$+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[\varphi_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right],$$
$$\sigma_z\left(r_1+0,t\right)=-p_2\left(t\right)+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[F_2\left(q_1q_2y_1\left(t\right)\right)-F_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right]+$$
$$+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[\varphi_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right],$$
$$\sigma_z\left(r_1+0,t\right)-\sigma_z\left(r_1-0,t\right)=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[\varphi_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right]-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[\varphi_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right],\quad t>0, \tag{38}$$

поскольку сумма всех остальных слагаемых тождественно равна нулю в силу (27). Скачок (38) зависит от времени и может обращаться в нуль в некоторые моменты. Аналогично, вычисляется скачок окружного напряжения на границе слоев $r=r_1$

$$\sigma_\theta\left(r_1+0,t\right)-\sigma_\theta\left(r_1-0,t\right)=\tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_2\left[\varphi_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right]-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\mathbf{R}_1\left[\varphi_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)\right],\quad t>0. \tag{39}$$

В любой момент времени он в два раза больше скачка осевого напряжения (38).

4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И СПЕЦИФИКА НДС ДЛЯ ТРУБЫ ИЗ МАТЕРИАЛОВ СО СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ РЕЛАКСАЦИИ

Рассмотрим двухслойную трубу из материалов с МФ

$$R_i=G_iR\left(t\right),\quad \varphi_1\left(x\right)=\varphi_2\left(x\right)=Ax^\alpha,\quad \alpha,A>0,\quad G_i>0, \tag{40}$$

где функция $R\left(t\right)$ (положительная, убывающая, выпуклая вниз) и показатель степени произвольны. Модель (40) обеспечивает классическую степенную зависимость кривых ползучести (и скорости ползучести) каждого материала от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном НДС) [35,37] и степенную аппроксимацию диаграмм деформирования [38]. В частности, при $R\left(t\right)=\mathrm{const}$ получим слои упругопластических материалов со степенной функцией упрочнения и разными модулями сдвига.

Построим аналитическое решение ключевого интегрального уравнения (27), вычислим все интегральные операторы, входящие в общее представление для поля напряжений (31)-(36), и выведем простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы.

В силу (40) уравнение (27) принимает вид

$$\mathbf{R}\left[G_1F_1\left(y_1\left(t\right)\right)-G_1F_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)+G_2F_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)-G_2F_2\left(q_1q_2y_1\left(t\right)\right)\right]=$$
$$=\sqrt{3}\left(p_0-p_2\right).$$

Применив обратный $\mathbf{R}$ оператор $\mathbf{\Pi}$, получим функциональное уравнение для y_1

$$G_1F_1\left(y_1\left(t\right)\right)-G_1F_1\left(q_1y_1\left(t\right)\right)+G_2F_2\left(q_1y_1\left(t\right)\right)-G_2F_2\left(q_1q_2y_1\left(t\right)\right)=P\left(t\right),\quad P\left(t\right):=\sqrt{3}\mathbf{\Pi}p\left(t\right). \tag{41}$$

Здесь $P\left(t\right)\geq 0$ – известная функция, если задана опорная функция релаксации $R\left(t\right)$ (и следовательно, функция ползучести, связанная с ней интегральным уравнением (5)) и разность давлений $p=p_0\left(t\right)-p_2\left(t\right)\geq 0$, $t>0$ (например, в задаче о ползучести трубы при постоянной при $t>0$ нагрузке $p(t)=\overline{p}h(t)$ имеем $P(t)=\sqrt{3}\overline{p}\Pi(t)$). По (16) $F_i(s)=A\alpha^{-1}s^{\alpha}$, и уравнение (41) упрощается

$$By_1(t)^{\alpha}=P(t),\quad B:=A\alpha^{-1}q_1^{\alpha}\left[G_1\left(q_1^{-\alpha}-1\right)+G_2\left(1-q_2^{\alpha}\right)\right].$$

Здесь $B(q_1,q_2,\alpha)>0,$ поскольку $q_i\in(0;1)$ и $q_1^{\alpha}\in(0;1)$ при $\alpha>0$, и решение $y_1(t)$ находится аналитически для произвольной функции релаксации $R(t)$ в (40) и любого нагружения $p(t)\geq 0$

$$y_1(t)=a(q_1,q_2,\alpha)P(t)^{1/\alpha},\quad a(q_1,q_2,\alpha)=B^{-1/\alpha}>0,\quad t>0. \tag{42}$$

Подстановка $y_1(t)$ и $y_2(t)=q_1y_1(t)$ в формулы (29), (30) дает выражения для перемещения и деформаций

$$u(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}a(q_1,q_2,\alpha)r_0^2r^{-1}P(t)^{1/\alpha}\quad\text{при}\quad r\in[r_0,r_1]\cup[r_1,r_2], \tag{43}$$

$$\varepsilon_{\theta}(r,t)=u/r=\tfrac{\sqrt{3}}{2}ar_0^2r^{-2}P(t)^{1/\alpha},\quad \varepsilon_r=-\varepsilon_{\theta},\quad \varepsilon=ar_0^2r^{-2}P(t)^{1/\alpha}. \tag{44}$$

Зависимость деформаций от времени полностью определяется функцией $P(t)^{1/\alpha}$, зависящей от программы нагружения $p(t)$ и функции релаксации $R(t)$. Влияние относительных толщин слоев трубы характеризуется множителем $a(q_1,q_2,\alpha)$ из (42). При фиксированном t модули деформаций (44) – убывающие функции r.

Однородность функций φ_i в (40) и $F_i=\varphi_i(x)/\alpha$ позволяет вычислить все интегральные операторы в формулах (31)-(36) и получить для напряжений в любой точке трубы простые алгебраические формулы. Сначала необходимо вычислить функции, на которые действуют операторы $\mathbf{R}_i=G_i\mathbf{R}$ в (31)-(36)

$$F_1(y_1(t))=A\alpha^{-1}a^{\alpha}P(t)=w(q_1,q_2,\alpha)P(t),$$

где

$$w=q_1^{-\alpha}\left[G_1\left(q_1^{-\alpha}-1\right)+G_2\left(1-q_2^{\alpha}\right)\right]^{-1}, \tag{45}$$

$$F_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)=w(q_1,q_2,\alpha)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}P(t),$$

$$\varphi_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)=\alpha w(q_1,q_2,\alpha)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}P(t),$$

$$F_1(y_1(t))-F_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)=w(q_1,q_2,\alpha)\left(1-r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}\right)P(t),$$

$$F_1(y_1(t))-F_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)+2\varphi_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)=$$
$$=w(q_1,q_2,\alpha)\left[1+(2\alpha-1)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}\right]P(t),$$

$$F_1(y_1(t))-F_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)+\varphi_1\left(y_1(t)r_0^2r^{-2}\right)=$$
$$=w(q_1,q_2,\alpha)\left[1+(\alpha-1)r_0^{2\alpha}r^{-2\alpha}\right]P(t).$$

Все эти функции пропорциональны $P(t)$, и потому вычисление всех линейных интегральных операторов $\mathbf{R}_1=G_1\mathbf{R}$ по времени в (31)-(33) сводится к вычислению образа $\mathbf{R}_1P(t)=G_1\mathbf{R}P(t)=\sqrt{3}G_1\mathbf{R\Pi}\,p(t)=\sqrt{3}G_1p(t)$ (поскольку $\mathbf{R\Pi}=\mathbf{I}$) и умножению на соответствующий множитель, не зависящий от времени. Поэтому формулы (31)-(33) для напряжений при $r \in [r_0, r_1)$ принимают вид

$$\sigma_r(r,t) = -p_0(t) + G_1 w(q_1,q_2,\alpha)\left[1-(r/r_0)^{-2\alpha}\right]p(t), \tag{46}$$

$$\sigma_\theta(r,t) = -p_0(t) + G_1 w(q_1,q_2,\alpha)\left[1+(2\alpha-1)(r/r_0)^{-2\alpha}\right]p(t), \tag{47}$$

$$\sigma_z(r,t) = -p_0(t) + G_1 w(q_1,q_2,\alpha)\left[1+(\alpha-1)(r/r_0)^{-2\alpha}\right]p(t). \tag{48}$$

В этих формулах $w(q_1,q_2,\alpha) > 0$, поскольку $q_i \in (0;1)$ и $q_1^\alpha \in (0;1)$ при $\alpha > 0$. Из (45) также следует оценка $w > 1/(G_1 + q_1^\alpha G_2)$.

Так как у модели (40) $F_1(x) = F_2(x)$, то вычисление напряжений при $r \in (r_1, r_2]$ по формулам (34)-(36) отличается только множителем в операторе $\mathbf{R}_2 = G_2\mathbf{R}$ и наличием множителя $r_0^2 r_2^{-2} = q_1 q_2$ в аргументе функции $F_2(s) = A\alpha^{-1}s^\alpha$ в первом слагаемом под знаком оператора в каждой из формул (34)-(36). Постоянный множитель $(q_1q_2)^\alpha$ выносится из оператора, и потому при $r \in (r_1, r_2]$

$$\sigma_r(r,t) = -p_2(t) + G_2 w(q_1,q_2,\alpha)(q_1q_2)^\alpha\left[1-(r/r_2)^{-2\alpha}\right]p(t), \tag{49}$$

$$\sigma_\theta(r,t) = -p_2(t) + G_2 w(q_1,q_2,\alpha)(q_1q_2)^\alpha\left[1+(2\alpha-1)(r/r_2)^{-2\alpha}\right]p(t), \tag{50}$$

$$\sigma_z(r,t) = -p_2(t) + G_2 w(q_1,q_2,\alpha)(q_1q_2)^\alpha\left[1+(\alpha-1)(r/r_2)^{-2\alpha}\right]p(t). \tag{51}$$

Функции релаксации и ползучести модели (40) *не входят в формулы для напряжений* (46)-(51)*, т.е. напряжения не зависят от наследственных свойств материала и предыстории нагружения, а зависят лишь от величин давлений* $p_i(t)$ *в данный момент времени* (для модели (40) напряжения такие же, как в квазистатической задаче для трубы из нелинейно упругого материала).

Характер зависимостей напряжений (46)-(51) от r (интервалы монотонности и выпуклости, наличие точек экстремума) в любой фиксированный момент времени определяется поведением функций

$$S_r(x) = 1 - x^{-2\alpha},\quad S_z(x) = 1 + (\alpha-1)x^{-2\alpha},\quad S_\theta(x) = 1 + (2\alpha-1)x^{-2\alpha}$$

($x = r/r_0 \geq 1$ для $r \in [r_0, r_1]$ и $x = r/r_2$, $0 < r_1/r_2 \leq x \leq 1$ для $r \in [r_1, r_2]$), поскольку $w(q_1,q_2,\alpha) > 0$, $q_i > 0$, $G_i > 0$ и $p(t) \geq 0$ (выше рассматривался лишь случай $p(t) \geq 0$), т.е. полностью определяется величиной α и знаком $x-1$. На знак напряжений еще влияют отношения $p_2(t)/p_1(t)$ и q_i.

Поскольку $S_\theta(x) > S_z(x) > S_r(x)$ при $\alpha > 0$, $S_r(x) > 0$ при $x > 1$ и $S_r(x) < 0$ при $x < 1$, то из (46)-(51) следуют неравенства

$$\sigma_\theta(r,t) > \sigma_z(r,t) > \sigma_r(r,t),\quad -p_0(t) < \sigma_r(r,t) < -p_2(t) \leq 0$$

для всех $r \in (r_0, r_1) \cup (r_1, r_2)$ и в любой момент времени, когда $p(t) > 0$. Так как $\alpha > 0$ и $S_r(x)$ возрастает при $x > 0$, то в любой момент времени, когда $p(t) > 0$, *напряжение* $\sigma_r(r)$ *возрастает по* r (а $|\sigma_r(r)|$ убывает). О*севое напряжение* $\sigma_z(r)$ в любой момент времени (когда $p(t) > 0$) *возрастает по* r*, если* $\alpha \in (0;1)$

(как и функция $S_z(x)$), *убывает, если* $\alpha>1$, *и постоянно по сечению лишь при* $\alpha=1$ (т.е. в случае линейно вязкоупругого материала). *Окружное напряжение* $\sigma_\theta(r)$ *возрастает при* $\alpha\in(0;0.5)$, *убывает при* $\alpha>0.5$ *и не зависит от координат при* $\alpha=0.5$. Если в некоторый момент времени $p(t_0)=0$, т.е. $p_0(t_0)=p_2(t_0)$, то все напряжения не зависят от r и одинаковы: $\sigma_\theta(r,t_0)=\sigma_z(r,t_0)=\sigma_r(r,t_0)=-p_0(t_0)$.

Так как при любом $\alpha>0$ в любой момент времени $\sigma_r(r,t)$, $\sigma_\theta(r,t)$, $\sigma_z(r,t)$ монотонны по r, то наибольшее и наименьшее значения они принимают на границах слоев при $r=r_i$.

Интенсивность напряжений (и $\tau_{\max}(r,t)=\sigma(r,t)/\sqrt{3}$) выражается по (37)

$$\begin{aligned}&\sigma=\sqrt{3}G_1\alpha wp(t)(r/r_0)^{-2\alpha},\quad r\in[r_0,r_1),\\&\sigma=\sqrt{3}G_2\alpha wp(t)(r/r_0)^{-2\alpha},\quad r\in(r_1,r_2].\end{aligned}\tag{52}$$

В любой момент времени, кроме тех, когда $p(t)=0$, *интенсивность напряжений* (как) *убывает по* r *при любом* $\alpha>0$ и максимальна на внутренней границе каждого слоя.

Формулы (38), (39) для скачков осевого и окружного напряжений на границе слоев трубы $\hat{\sigma}_z(t)$ и $\hat{\sigma}_\theta(t)$ дают для модели (40)

$$\hat{\sigma}_z(t)=(G_2-G_1)\alpha w(q_1,q_2,\alpha)q_1^\alpha p(t),\quad \hat{\sigma}_\theta(t)=2\hat{\sigma}_z(t).$$

При $\alpha=1$ (т.е. в случае линейно вязкоупругих материалов) все компоненты тензора напряжений (46)-(51) совпадают с решением задачи для трубы из несжимаемых линейно *упругих* материалов, в частности σ_z не зависит от r.

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАГРУЖЕНИИ МНОГОСЛОЙНОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ОС (1) С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПАРАМИ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Тем же способом строится точное решение задачи о нагружении давлениями многослойной трубы, состоящей из любого количества слоев нелинейно вязкоупругих материалов (с радиусами внешних границ r_i, $i=1;...;n$), каждый из которых подчиняется нелинейному ОС Работнова (1) с разными парами материальных функций $\{R_i,\varphi_i\}$, под действием давлений $p_0(t)$ и $p_n(t)$, $t>0$, заданных на внутренней и внешней поверхности трубы (при $r=r_0$ и $r=r_n$). Система из $2n-1$ уравнения для неизвестных функций $y_i(t)$ и неизвестных давлений на границах слоев $p_i(t)$, $i=1;...;n-1$, расщепляется и сводится к одному интегральному уравнению для $y_1(t)$. В самом деле, интегральное уравнение (17) для неизвестной функции $y_i(t)$ каждого слоя имеет вид

$$\begin{aligned}&p_{i-1}-p_i=\tfrac{1}{\sqrt{3}}z_i(t)\mathbf{R}_i\left[F_i(|y_i(t)|)-F_i(q_i|y_i(t)|)\right],\\&q_i:=(r_{i-1}/r_i)^2,\ i=1;...;n\end{aligned}\tag{53}$$

радиальное перемещение в любой точке трубы выражается формулами

$$u_i(r,t)=\tfrac{\sqrt{3}}{2}r_{i-1}^2 r^{-1} y_i(t) \text{ при } r\in[r_{i-1},r_i],\ i=1;...;n-1, \qquad (54)$$

условия непрерывности радиального перемещения (54) на границах слоев $r=r_i$, $i=1;...;N-1$, имеют вид $r_{i-1}^2 y_i(t)=r_i^2 y_{i+1}(t)$, т.е. $y_{i+1}(t)=q_i y_i(t)$, или

$$y_{i+1}(t)=Q_i y_1(t),\quad Q_i:=q_1...q_i=(r_0/r_i)^2,\quad i=1;...;N-1. \qquad (55)$$

Разрешающее уравнение для $y_1(t)$ получается в результате сложения всех уравнений (53)

$$\sum_1^n \mathbf{R}_i\left[F_i(y_i(t))-F_i(q_i y_i(t))\right]=\sqrt{3}(p_0-p_n),$$

т.е.

$$\sum_1^n \mathbf{R}_i\left[F_i(Q_{i-1}y_1(t))-F_i(Q_i y_1(t))\right]=\sqrt{3}(p_0-p_n). \qquad (56)$$

После определения $y_1(t)$ из интегрального уравнения (56) легко вычисляются все $y_i(t)$ для слоев по формулам (55), последовательно определяются все давления на границах слоев $p_i(t)$ по (53) и, наконец, по формулам вида (10)-(14) вычисляются поля перемещений и напряжений в каждом слое трубы.

Вычислим полную продольную силу, используя формулу (21) для всех слоев

$$N_i=\pi r_i^2\left[q_i p_{i-1}(t)-p_i(t)\right]=\pi\left[r_{i-1}^2 p_{i-1}(t)-r_i^2 p_i(t)\right],$$
$$N(t)=\sum_1^n N_i=\pi\left[r_0^2 p_0(t)-r_n^2 p_n(t)\right]. \qquad (57)$$

Примечательно, что в любой момент времени *продольная сила* (57) (в отличие от напряжений) *не зависит от количества и толщины слоев трубы, от МФ* $\{R_i,\varphi_i\}$, задающих свойства материалов, *и от предыстории изменения нагрузки, а зависит лишь от мгновенных значений заданных давлений* $p_0(t)$, $p_n(t)$ *и внешних радиусов трубы* r_0, r_n, *на которых задана нагрузка, и совпадает с силой, найденной из решения задачи Ламе для однородного линейно упругого несжимаемого материала.* Знак силы (57) совпадает со знаком разности $r_0^2 p_0(t)-r_n^2 p_n(t)$, она равна нулю лишь в те моменты времени, когда $r_0^2 p_0(t)=r_n^2 p_n(t)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построено точное решение квазистатической задачи об определении напряженно-деформированного состояния составной толстостенной трубы, состоящей из нескольких (соединенных без натяга, ненапряженных) слоев нелинейно вязкоупругих изотропных материалов, каждый из которых подчиняется нелинейному ОС Работнова (1) с разными парами произвольных материальных функций (МФ) одного аргумента (функцией ползучести и функцией нелинейности) и постулату несжимаемости, при нагружении давлениями на внутренней и внешней поверхностях трубы, медленно меняющимися во времени. Проведено расщепление системы из $2n-1$ нелинейных интегральных уравнений для неизвестных радиальных напряжений на границах слоев и функций, описывающих поле деформаций каждого слоя, и ее решение сведено к одному нелинейному интегральному уравнению (56) для одной неизвестной функции времени, зависящему от МФ слоев трубы, их относительных толщин и заданных на границах трубы давлений. Для любых материальных функций слоев трубы перемещения, деформации и напряжения в любой точке трубы в любой момент времени и нормальные напряжения на границах слоев выражены через эту функцию времени явными формулами (формулами (28)-(36) для двухслойной трубы). Выведено выражение (57) для продольной силы, возникающей в поперечном сечении трубы в любой момент времени, и доказано, что она не зависит (в отличие от напряжений и деформаций) от количества слоев трубы и их толщин, от пар МФ, задающих вязкоупругие свойства материалов, и от предыстории изменения нагрузки, а зависит лишь от мгновенных значений заданных давлений и двух радиусов трубы, на которых задана нагрузка, и совпадает с силой, найденной из решения задачи Ламе для однородного линейно упругого несжимаемого материала (хотя осевые напряжения не постоянны по сечению). Для произвольных МФ выведены формулы (38), (39) для скачков окружного и осевого напряжений на границе слоев трубы в любой момент времени.

Для модели двухслойной трубы (40) со степенной функцией нелинейности (с любым показателем) в случае пропорциональности всех функций сдвиговой релаксации материалов слоев одной и той же (произвольно заданной) функции времени построено точное решение ключевого интегрального уравнения (27), вычислены все интегральные операторы в общих выражениях для напряжений (31)-(36), и выведены простые алгебраические формулы (43), (44), (46)-(51) для деформаций и напряжений в любой точке трубы в любой момент времени через опорную функцию релаксации слоев, показатель функции нелинейности, относительные толщины слоев и заданные на границах трубы давления.

Построенные точные решения полезны для верификации приближенных расчетов НДС составных вязкоупругих труб (в частности, из композиционных материалов) при произвольных материальных функциях (найденных в результате идентификации по данным испытаний реономных материалов), и решений, построенных при отказе от некоторых упрощающих допущений (несжимаемость, плоская деформация, однородность материала). В дальнейшем полученное точное решение будет обобщено на случай труб из функционально градиентных материалов с кусочно-степенной зависимостью вязкоупругих свойств от радиальной координаты (в частности труб из слоистых композитов, труб с покрытиями и упрочненными поверхностными слоями или подвергшихся воздействию агрессивной среды).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хохлов А.В. *Особенности эволюции напряженно-деформированного состояния толстостенной трубы из нелинейно вязкоупругого материала под действием постоянных давлений* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №2. – С.224-246.
2. Хохлов А.В. *Деформация, длительная прочность и разрушение толстостенной трубы из нелинейно наследственного материала под действием постоянного давления* // Деформация и разрушение материалов. – 2020. – №6. – С.2-11.

3. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – 306 с.
4. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids*. *Vol.1*. – N.-Y.: McGraw-Hill, 1950. – 572 p.
5. Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 356 p.
6. Prager W., Hodge P.G. *Theory of perfectly plastic solids*. – N.-Y.: John Wiley and Sons, 1951. – 328 p.
7. Ильюшин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
8. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. *Упруго-пластические деформации полых цилиндров*. – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.
9. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
10. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
11. Gao X.-L. *An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material* // Int. J. of Pressure Vessels and Piping. – 1992. – Vol.52. – No.1. – Pp.129-144.
12. Wong H., Simionescu O. *An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress* // Int. J. Eng. Sci. – 1996. – Vol.34. – No.11. – Pp.1259-1269.
13. Gao X.-L. *Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory* // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol.40. – Pp.6445-6455.
14. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. *On Thick-Walled Cylinder Under Internal Pressure* // Journal of Pressure Vessel Technology. – 2003. – Vol.125. – No.3. – Pp.267-273.
15. Шарафутдинов Г.З. *Осесимметричная деформация толстостенной трубы из высокоэластичного материала* // Известия РАН. МТТ. – 2009. – №2. – С.108-120.
16. Радченко В.П., Кубышкина С.Н. *Математическая модель реологического деформирования и разрушения толстостенной трубы* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 1998. – Вып.6. – С.23-34.
17. Радченко В.П., Цветков В.В. *Напряжённо-деформированное состояние цилиндрического образца из сплава Д16Т в условиях осевого растяжения и кручения при ползучести* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – Вып.3(32). – С.77-86.
18. Зингерман К.М., Левин В.А. *Обобщение задачи Ламе-Гадолина для больших деформаций и ее аналитическое решение* // ПММ. – 2013. – Т.77. – Вып.2. – С.322-336.
19. Бухалов В.И., Попов А.Л., Челюбеев Д.А. *Задача Гадолина в упругопластической постановке* // ПММ. – 2018. – Т.82. – Вып.6. – С.804-812.
20. Качанов Л.М. *Теория ползучести*. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
21. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
22. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.

23. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. – N.-Y., L.: Acad. Press, 1971. – 256 p.
24. Москвитин В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе).* – М.: Наука, 1972. – 328 с.
25. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
26. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. – Heidelberg: Springer, 1989. – 769 p.
27. Работнов Ю.Н. *Равновесие упругой среды с последействием* // ПММ. – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
28. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. *Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории* // ПМТФ. – 1971. – №2. – С.76-82.
29. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. *Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах* // Механика полимеров. – 1971. – №1. – С.74-87.
30. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. *Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии* // Механика полимеров. – 1973. – №5. – С.779-785.
31. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. *Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния* // Механика композитных материалов. – 1993. – №5. – С.602-607.
32. Суворова Ю.В. *О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях* // Известия АН СССР. МТТ. – 2004. – №1. – С.174-181.
33. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. *Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями* // Композиты и наноструктуры. – 2011. – №2. – С.28-39.
34. Khokhlov A.V. *Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions* // Moscow Univ. Mech. Bulletin. – 2017. – Vol.72. – No.5. – Pp.103-107.
35. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – №3. – С.93-123.
36. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory* // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – Vol.54. – No.4. – Pp.473-486.
37. Хохлов А.В. *Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.407-436.
38. Хохлов А.В. *Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Известия РАН. МТТ. – 2019. – №2. – С.29-47.
39. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation* / In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by Fung Y.C. et al.). – New Jersey: Prentice-Hall, 1972. – Pp.181-208.

40. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues.* – N.-Y.: Springer, 1993. – 568 p.
41. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. *Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments* // J. Biomech. Eng. – 2000. – Vol.122. – Pp.15-22.
42. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. *Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments* // J. Biomech. Eng. – 2003. – Vol.125. – No.5. – Pp.754-758.
43. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. *An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory* // J. Biomech. Eng. – 2004. – Vol.126. – Pp.92-97.
44. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. *A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling* // J. of Biomechanics. – 2007. – Vol.40. – No.14. – Pp.3070-3078.
45. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model* // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2007. – Vol.6. – No.4. – Pp.245-251.
46. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. *Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment* // Acta Mechanica. – 2009. – Vol.205. – Pp.23-33.
47. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 461 p.
48. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model* // Proc. R. Soc. A. – 2014. – Vol.470. – 20140058.
49. Хохлов А.В. *Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики её идентификации* // Известия РАН. МТТ. – 2018. – №3. – С.81-104.
50. Хохлов А.В. *Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т.23. – №4. – С.671-704.

REFERENCES

1. Khokhlov A.V. *Osobennosti ehvolyutsii napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstostennoj truby iz nelinejno vyazkouprugogo materiala pod dejstviem postoyannykh davlenij [Characneristic features of stress-strain state evolution in thick-walled tubes of non-linear viscoelastic material subject to constant pressures]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2020, Vol.26, No.2, Pp.224-246.
2. Khokhlov A.V. *Deformatsiya, dlitel'naya prochnost' i razrushenie tolstostennoj truby iz nelinejno nasledstvennogo materiala pod dejstviem postoyannogo davleniya [Deformation and long-term strength of a thick tube of physically non-linear viscoelastic material under given constant pressure]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2020, No.6, Pp.2-11.
3. Sokolovskii V.V. *Teoriya plastichnosti [Theory of plasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo AN SSSR, 1946, 306 p.

4. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids. Vol.1*. N.-Y., McGraw-Hill, 1950, 572 p.
5. Hill R. *The mathematical theory of plasticity*. Oxford, Clarendon Press, 1950, 356 p.
6. Prager W., Hodge P.G. *Theory of perfectly plastic solids*. N.-Y., John Wiley and Sons, 1951, 328 p.
7. Il'yushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshhej matematicheskoj teorii [Theory of plasticity. Mathematical base]*. Moskva, Izdatel'stvo AN SSSR, 1963, 271 p.
8. Il'yushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov [Elastoplastic deformations of hollow cylinders]*. Moskva, Izdatel'stvo MGU, 1960, 227 p.
9. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 400 p.
10. Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematic theory of plasticity]*. Moskva, Fizmatlit, 2001, 704 p.
11. Gao X.-L. *An exact elasto-plastic solution for an open-ended thick-walled cylinder of a strain-hardening material*. Int. J. of Pressure Vessels and Piping, 1992, Vol.52, No.1, Pp.129-144.
12. Wong H., Simionescu O. *An analytical solution of thermoplastic thick-walled tube subject to internal heating and variable pressure, taking into account corner flow and nonzero initial stress*. Int. J. Eng. Sci., 1996, Vol.34, No.11, Pp.1259-1269.
13. Gao X.-L. *Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory*. Int. J. Solids Struct., 2003, Vol.40, Pp.6445-6455.
14. Zhao W., Seshadri R., Dubey R.N. *On thick-walled cylinder under internal pressure.* J. of Pressure Vessel Technology, 2003, Vol.125, No.3, Pp.267-273.
15. Sharafutdinov G.Z. *Axisymmetric strain of a thick-walled pipe made of a highly elastic material.* Mechanics of Solids, 2009, Vol.44, No.2, Pp.257-268.
16. Radchenko V.P., Kubyshkina S.N. *Matematicheskaya model' reologicheskogo deformirovaniya i razrusheniya tolstostennoj truby [A mathematical model of rheological deformation and fracture for thick-walled pipe]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 1998, No.6, Pp.23-34.
17. Radchenko V.P., Tsvetkov V.V. *Napryazhyonno-deformirovannoe sostoyanie tsilindricheskogo obraztsa iz splava D16T v usloviyakh osevogo rastyazheniya i krucheniya pri polzuchesti [The stress-strain state of cylindrical sample from alloy D16T under axial tension and torsion creep]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 2013, No.3(32), Pp.77-86.
18. Zingerman K.M., Levin V.A. *Extension of the Lamé-Gadolin problem for large deformations and its analytical solution*. J. Appl. Math. Mech., 2013, Vol.77, No.2, Pp.235-244.
19. Bukhalov V.I., Popov A.L., Chelyubeev D.A. *Gadolin's Theory in Elastoplastic Formulation.* Mech. Solids, 2019, Vol.54, No.2, Pp.356-363.
20. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti [Creep theory]*. Moskva, Fizmatgiz, 1960, 456 p.
21. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruktsij [Creep problems in structural members]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
22. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-lasting strength of metals]*. Moskva, Fizmatlit, 2016, 504 p.

23. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction.* N.-Y., L., Acad. Press, 1971, 256 p.
24. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov [Strength of viscoelastic materials]*. Moskva, Nauka, 1972, 328 p.
25. Rabotnov Yu.N. *Ehlementy nasledstvennoj mekhaniki tverdykh tel [Introduction to hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
26. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Heidelberg, Springer, 1989, 769 p.
27. Rabotnov Yu.N. *Ravnovesie uprugoj sredy s posledejstviem [Equilibrium of elastic medium with heredity]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1948, Vol.12, No.1, Pp.53-62.
28. Dergunov N.N., Papernik L.H., Rabotnov Yu.N. *Analiz povedeniya grafita na osnove nelinejnoj nasledstvennoj teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the non-linear hereditary theory]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1971, No.2, Pp.76-82.
29. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev Y.I. *Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material*. Polimer mechanics, 1971, Vol.7, No.1, Pp.63-73.
30. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev E.I. *Description of creep of composition materials under tension and compression*. Polymer Mechanics, 1973, Vol.9, No.5, Pp.690-695.
31. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. *Nonlinear model of an isotropic hereditary medium in state of complex stress*. Mech. Compos. Mater., 1994, Vol.29, No.5, Pp.443-447.
32. Suvorova Y.V. *O nelinejno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Yu.N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]*. Izvestiya AN SSSR, Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.1, Pp.174-181.
33. Alekseyeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. *Analiz vyazkouprugikh svojstv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of the viscoelastic properties of polymer composites with carbon fillers]*. Kompozity i nanostruktury, 2011, No.2, Pp.28-39.
34. Khokhlov A.V. *Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions*. Moscow Univ. Mech. Bulletin, 2017, Vol.72, No.5, Pp.103-107.
35. Khokhlov A.V. *Analiz obshhikh svojstv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii, porozhdaemykh nelinejnym sootnosheniem Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings]*. Vestnik MGTU im. N.Eh. Baumana. Seriya Estestvennye nauki, 2017, No.3, Pp.93-123.
36. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory*. Mechanics of Composite Materials, 2018, Vol.54, No.4, Pp.473-486.
37. Khokhlov A.V. *Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koehffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshh'yu nelinejno-nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]*.

Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.407-436.
38. Khokhlov A.V. *Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials.* Mechanics of Solids, 2019, Vol.54, No.3, Pp.384-399.
39. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation*. In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by Fung Y.C. et al.). New Jersey, Prentice-Hall, 1972, Pp.181-208.
40. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. N.-Y., Springer, 1993, 568 p.
41. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. *Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments*. J. Biomech. Eng., 2000, Vol.122, Pp.15-22.
42. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. *Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments*. J. Biomech. Eng., 2003, Vol.125, No.5, Pp.754-758.
43. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. *An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory*. J. Biomech. Eng., 2004, Vol.126, Pp.92-97.
44. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. *A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling.* J. of Biomechanics, 2007, Vol.40, No.14, Pp.3070-3078.
45. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2007, Vol.6, No.4, Pp.245-251.
46. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. *Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment*. Acta Mechanica, 2009, Vol.205, Pp.23-33.
47. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 461 p.
48. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model*. Proc. R. Soc. A, 2014, Vol.470, 20140058.
49. Khokhlov A.V. *Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification.* Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.3, Pp.307-328.
50. Khokhlov A.V. *Analiz vliyaniya ob''emnoj polzuchesti na krivye nagruzheniya s postoyannoj skorost'yu i ehvolyutsiyu koehffitsienta Puassona v ramkakh linejnoj teorii vyazkouprugosti [Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 2019, Vol.23, No.4, Pp.671-704.

Поступила в редакцию 27 июля 2020 года.

Сведения об авторе:
Хохлов Андрей Владимирович – к.т.н., в.н.с., Лаборатория упругости и пластичности, доц., Кафедра механики композитов механико-математического факультета МГУ, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru