

УДК 539.4

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.409\_435.09

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Бобок Д.И.

*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный  
исследовательский университет)», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача механики деформируемого твердого тела о цилиндрическом баке из сплава с памятью формы (СПФ) под внутренним давлением в ходе прямого термоупругого мартенситного фазового превращения под действием постоянного давления. Рассматривается как безмоментная оболочка, так и влияние краевого эффекта при жестком и шарнирном закреплении. Решена также задача о релаксации в аналогичной оболочке при прямом фазовом превращении. Во второй задаче внутреннее давление прикладывается к оболочке в аустенитном фазовом состоянии. Далее производится охлаждение материала оболочки через интервал температур прямого термоупругого мартенситного превращения. Требуется определить необходимое уменьшение в процессе такого перехода величины равномерно распределенной нагрузки, чтобы прогиб оболочки оставался неизменным.

Для описания поведения материала оболочки использовалась модель линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях. Решение получено в рамках теории тонких изотропных оболочек и предположении о том, что параметр фазового состава в каждый момент рассматриваемого процесса равномерно распределен по материалу оболочки, что соответствует несвязанной постановке задачи для случая равномерного распределения по материалу температуры. Не учитывается возможность структурного превращения в материале оболочки. Пренебрегается переменностью упругих модулей при фазовом переходе и свойством разносопротивляемости СПФ.

Для получения аналитического решения всех уравнений краевой задачи применялся метод преобразования Лапласа по величине объемной доли мартенситной фазы. После преобразования в пространстве изображений получается эквивалентная упругая задача, решая которую, образы по Лапласу искомых величин получаются в виде аналитических выражений, включающих операторы, являющиеся образами по Лапласу от упругих постоянных. Эти выражения являются дробно-рациональными функциями образа по Лапласу от параметра фазового состава. Возвращаясь в пространство оригиналов путём аналитического разложения выражений для искомых величин в пространстве изображений на простые множители, получаются искомые аналитические решения.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; прямое превращение; релаксация; тонкие оболочки; цилиндрические оболочки; безмоментное напряженное состояние; краевой эффект; жесткое закрепление; шарнирное закрепление; линейная модель

## ANALYTICAL SOLUTION OF THE CYLINDRICAL TANK MADE OF A SHAPE MEMORY ALLOY UNDER INTERNAL PRESSURE

Bobok D.I.

## ABSTRACT

The paper considers the problem of the mechanics of a deformable solid about a cylindrical tank made of an alloy with shape memory (SMA) under a pressure during direct thermoelastic martensitic phase transformation under constant pressure. Both the momentless shell and the influence of the edge effect with rigid and articulated fastening are considered. The problem of relaxation in a similar shell during direct phase transformation has also been solved. In the second problem, internal pressure is applied to the shell in an austenitic phase state. Next, the shell material is cooled through the temperature range of the direct thermoelastic martensitic transformation. It is required to determine the necessary decrease in the process of such a transition of the uniformly distributed load so that the deflection of the shell remains unchanged.

To describe the behavior of the shell material, we used the model of linear SMA deformation during phase transformations. The solution was obtained in the framework of the theory of thin isotropic shells and the assumption that the phase composition parameter at each moment of the process under consideration is uniformly distributed over the shell material, which corresponds to an unrelated statement of the problem for the case of uniform distribution of temperature over the material. The possibility of structural transformation in the shell material is not taken into account. It neglects the variability of the elastic moduli during the phase transition and the property of the SMA diversity resistance.

To obtain an analytical solution to all the equations of the boundary value problem, the Laplace transform method using the volume fraction of the martensitic phase was used. After the transformation in the space of images, an equivalent elastic problem is obtained, solving which the Laplace images of the sought quantities are obtained in the form of analytical expressions, including operators that are Laplace images of elastic constants. These expressions are fractional rational functions of the Laplace image of the phase composition parameter. Returning to the space of originals by analytically decomposing the expressions for the sought quantities in the space of images into simple factors, we obtain the desired analytical solutions.

**Keywords:** shape memory alloys; direct transformation; relaxation; thin shells; cylindrical shells; momentless stress; edge effect; rigid fastening; articulation; linear model

## 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Какими бы уникальными свойствами не обладали сплавы с памятью формы (СПФ), их применение в технике за несколько десятков лет, прошедших с момента их открытия, остаётся ограниченным. Причина тому не только их высокая стоимость как в производстве, так и в обработке, но также и недостаточность развития моделей термомеханического их поведения. Слабо развиты и определяющие соотношения, достаточно точно описывающие качественные и количественные уникальные свойства этих материалов, и методы решения краевых задач для конструкций, из сплавов с памятью формы изготовленных. Однако нельзя сказать, что таких методик не существует в принципе.

Так, в работах [1-30] описаны различные системы определяющих соотношений для СПФ. В данной статье, в частности, применяется простейшая модель линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях, изложенная в работах [6-8]. Суть данной модели заключается в пренебрежении явлением мартенситной неупругости (поскольку оно заведомо нелинейно), нелинейностью зависимости приращения деформации СПФ за счет прямого фазового

превращения от действующих напряжений, переменностью упругих модулей СПФ при фазовых переходах, а также свойством разносопротивляемости СПФ [31].

В рамках этих систем определяющих соотношений из числа краевых задач были решены задачи кручения [32-41], задачи изгиба [43,30] (в частности, изгиб балок [44-51] и изгиб пластинок [52,53]). Отдельно вопрос изгиба круглых пластин был рассмотрен в работе [54], устойчивость круглых пластин – в работах [55,56]. Также были решены осесимметричные и центрально-симметричные задачи для толстостенных сферы и цилиндра [57-63]. Однако вопрос построения аналитического решения задачи для тонкостенной сферы и цилиндра с учетом краевых эффектов до этого момента не поднимался.

Основным известным способом решения краевых задач для элементов из СПФ являются численные методы, так как определяющие соотношения, описывающие уникальные свойства данных материалов достаточно сложны. Однако всё же методы аналитического решения существуют, хотя, как правило, они применимы только для простейших одномерных задач, и то в весьма упрощенных постановках.

В рамках данного исследования найдены аналитические решения двух видов задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндрической оболочки из СПФ, как в безмоментном состоянии, так и с учетом краевого эффекта, материал которой претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение.

В задачах первого типа прямое превращение в оболочке происходит под действием постоянного по величине внутреннего давления. Далее задачи такого типа для краткости будут обозначены как задачи о прямом превращении.

В задачах второго типа оболочка, материал которой находится в аустенитном состоянии, нагружается равномерным внутренним давлением. Следует определить, как должна изменяться в процессе последующего прямого превращения величина распределенной нагрузки с тем, чтобы прогиб точек оболочки не подвергался изменениям. Далее для краткости задачи такого типа будут называться задачами о релаксации напряжений.

Предполагается, что параметр фазового состава в каждый момент рассматриваемого процесса распределен равномерно по материалу. Данная гипотеза приемлема в случае медленного процесса охлаждения, обеспечивающего равномерное распределение по материалу изменяющейся со временем температуры, в рамках несвязанной постановки задачи для СПФ, при которой пренебрегается влиянием действующих напряжений на характерные температуры фазового перехода.

При решении пренебрегается изменением упругих модулей в процессе фазового перехода. Решение задачи применимо как для аустенитного, так и для мартенситного значения модулей, что дает возможность получить двустороннюю оценку для искомых величин.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задачи решаются в рамках линейной модели деформирования СПФ при фазовых переходах, предложенной в [6-8]. В [64-66] предложен метод аналитического решения краевых задач о деформировании элементов из сплавов с памятью формы при прямом фазовом превращении, основанный на преобразовании Лапласа [67] всех уравнений краевой задачи по величине

объемной доли мартенситной фазы  $q$ . Установлено, что после такого преобразования полная система уравнений краевой задачи для прямого превращения в СПФ переходит в пространстве изображений в полную систему уравнений эквивалентной задачи линейной теории упругости, в определяющих соотношениях которой упругие модули являются известными функциями материальных параметров СПФ и переменной  $s$ , соответствующей в пространстве изображений переменной  $q$ .

Входящие в эти формулы параметры определяются зависимостями, приведенными в таблице 1.

Таблица 1.

Имя переменной	Значение	Имя переменной	Значение
$E$	$E \frac{s - a_0}{s - \beta}$	$\nu$	$\nu \frac{s - \gamma}{s - \beta}$
$\beta$	$a_0 - \frac{2}{3} c_0 E$	$\chi$	$\frac{2\beta - \nu\gamma}{2 - \nu}$
$\gamma$	$a_0 - \frac{Ec_0}{3\nu}$		

Здесь величины  $a_0$  и  $c_0$  – материальные параметры определяющего соотношения для фазовой деформации при прямом превращении модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [6-8]:  $\frac{d\varepsilon_{ij}^{ph}}{dq} = (c_0 \sigma'_{ij} + a_0 \varepsilon'_{ij}{}^{ph})$ ,

где  $\varepsilon_{ij}^{ph}$  – девиатор тензора фазовых деформаций,  $\sigma'$  – девиатор тензора напряжений. Исходными являются решения упругих задач, изложенные в [68-72]. Искомые величины эквивалентной упругой задачи в пространстве изображений записываются в виде функций от образов упругих постоянных.

В результате для этих величин получаются дробно-рациональные функции от переменной преобразования  $s$ . Эти выражения разлагаются на простые множители, после чего определяются соответствующие решения в пространстве оригиналов. В таблице 2 приведены значения параметров, необходимые для получения численных результатов.

Таблица 2.

Переменная	Значение	Переменная	Значение
$a_0$	0.718	$\chi$	-3.879
$c_0$	$0.243 \cdot 10^{-3}$ МПа <sup>-1</sup>	$\beta$	-3.818
$E$	28000 МПа	$G$	9459 МПа
$\nu$	0.48	$\gamma$	-4.007

### 3. РЕШЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ОРИГИНАЛОВ

Исходя из теории тонкостенных оболочек, прогиб цилиндра при нагружении равномерным внутренним давлением определяется как сумма безмоментного решения и краевого эффекта

$$w = w^* + w^k, \quad (1)$$

где  $w^* = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)$  – безмоментное решение,

а  $w^x = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) [1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))]$  – решение с учетом краевого эффекта [71].

Применяя преобразование Лапласа (подставляя вместо упругих констант выражения из таблицы 1) к выражению для безмоментного решения, получим следующее выражение

$$\hat{w}^* = \frac{pR^2}{\hat{E}h} \left(1 - \frac{\hat{\nu}}{2}\right). \quad (2)$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, получим после возвращения в пространство оригиналов следующее выражение

$$w = \frac{pR^2}{Eh} [A + Be^{a_0 q}], \quad (3)$$

где  $A = -\frac{\nu\gamma - 2\beta}{a_0} = -7.956$  и  $B = \frac{-a_0\nu + \gamma\nu + 2a_0 - 2\beta}{a_0} = 9.476$  (с учетом значений из таблицы 2). Графически зависимость  $w(q)$  будет выглядеть следующим образом, если для удобства отнести значения по оси ординат к  $\frac{pR^2}{Eh}$ .

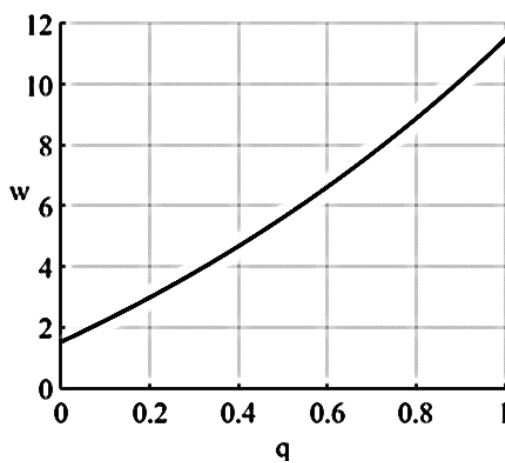


Рис. 1.  $w(q)$  безмоментной цилиндрической оболочки.

По радиусу и продольной координате, очевидно, прогиб изменяться не будет.

Для исследования влияния специфики свойств сплавов с памятью формы на краевой эффект цилиндрических оболочек будет исследоваться выражение

$$w = e^{-\eta x} (C_1 \cdot \cos(\eta x) + C_2 \cdot \sin(\eta x)) + \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right), \quad \eta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}} \quad (4)$$

куда уже подставлено частное безмоментное решение. Константы  $C_1$  и  $C_2$  подбираются таким образом, чтобы в начале отсчета удовлетворить условиям жесткого закрепления или шарнирной заделки соответственно

$$w = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \left[1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))\right], \quad (5)$$

$$w = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \left[1 - e^{-\eta x} \cos(\eta x)\right]. \quad (6)$$

Коэффициент Пуассона входит в выражение для прогиба (4) чрезвычайно сложным образом через показательные, тригонометрические и иррациональные функции. В результате возникают серьезные математические проблемы при применении преобразования Лапласа. В [74] при решении аналогичной проблемы для оболочки из вязкоупругого материала рекомендовано при вычислении параметра  $\eta$  через коэффициент Пуассона считать этот коэффициент не оператором, а постоянной величиной, в результате чего постоянной величиной становится и  $\eta$ . Этот приближенный подход используется и в данной работе. Тогда при применении линейной теории в выражении (5) и (6) преобразованию будет подвержена только часть, соответствующая выражению (2), так как  $\left[1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))\right]$  и  $\left[1 - e^{-\eta x} \cos(\eta x)\right]$  от переменной преобразования не зависят, исходя из принятого допущения. Таким образом, значения неопределенных коэффициентов будут соответствовать значениям для безмоментного решения, а само выражение (5) после применения преобразования Лапласа и возвращения в пространство оригиналов получится следующим

$$w = \frac{pR^2}{Eh} \left[A + Be^{a_0 q}\right] \left[1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))\right], \quad (7)$$

$$w = \frac{pR^2}{Eh} \left[A + Be^{a_0 q}\right] \left[1 - e^{-\eta x} \cos(\eta x)\right]. \quad (8)$$

Для того, чтобы построить графическое отображение полученных результатов, придется задаться рядом параметров оболочки. Во-первых, если коэффициент  $\eta$  принят постоянным, то и значение коэффициента Пуассона  $\nu$ , от которого он зависит, так же будет постоянным и равным 0.3. Так же требуются геометрические размеры оболочки. Для того, чтобы расчет оставался в рамках теории тонких оболочек, радиус оболочки будет принят  $R = 1$  м, а толщина  $h = 0.01R$ . Таким образом, коэффициент  $\eta$  будет равен

$$\eta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}} = \sqrt[4]{\frac{3(1-0.3^2)}{1\text{ м}^2 \cdot (0.01\text{ м})^2}} = 12.854 \text{ м}^{-1} \quad (9)$$

С принятой в данной работе точностью в 5%, на расстоянии, превышающем  $2.7\sqrt{Rh}$  (в нашем конкретном случае оно составит 0.27 метров), влияние краевого эффекта пренебрежимо мало и для практических целей несущественно [68].

Построим ряд зависимостей  $w(q)$  для случая жесткого закрепления края оболочки при нескольких фиксированных значениях  $x$ . В качестве минимальной точки будем рассматривать значение  $x = 0$ , а максимальной -  $x = 0.27$ . Помимо этого, рассмотрим значения, соответствующие четверти, половине и трем четвертям выбранного промежутка. Таким образом, множитель  $\left[1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))\right]$  примет следующие значения (таблица 3)

Таблица 3.

Значение $x$	0	$0.27/4$	$0.27/2$	$3 \cdot 0.27/4$	0.27
Значение $[1 - e^{-\eta x} (\sin(\eta x) + \cos(\eta x))]$	0	0.408	0.135	0.855	1.039

Очевидно, что при  $x = 0$  перемещения так же будут обращаться в ноль независимо от фазового состава материала, однако для прочих случаев построение графической зависимости имеет смысл (рис.2).

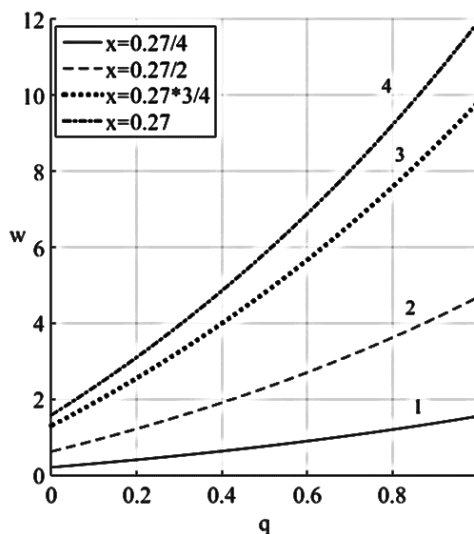


Рис.2.  $w(q)$  жестко защемленного края.

Для примера будут рассмотрены значения  $q$  от нуля до единицы с шагом в четверть. В таком случае множитель  $[A + Be^{a_0q}]$  примет следующие значения (табл.4).

Таблица 4.

Значение $q$	0	$1/4$	$1/2$	$3/4$	1
Значение $[A + Be^{a_0q}]$	1.52	3.383	5.612	8.28	11.472

Построим графические зависимости для всех пяти случаев (рис.3).

Абсолютно аналогичным образом выстраиваются графические зависимости и для шарнирного закрепления. Так же построим два типа графиков – зависимости  $w(q)$  и  $w(x)$ . Для зависимости прогиба от фазового состава примем те же значения для координаты  $x$ . Тогда множитель  $[1 - e^{-\eta x} \cos(\eta x)]$  будет расписываться следующим образом (таблица 5).

Таблица 5.

Значение $x$	0	$0.27/4$	$0.27/2$	$3 \cdot 0.27/4$	0.27
Значение $[1 - e^{-\eta x} \cos(\eta x)]$	0	0.728	1.029	1.064	1.029

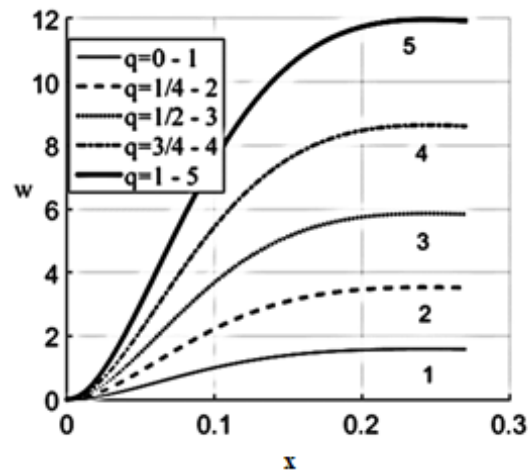


Рис.3.  $w(x)$  жестко защемленного края.

Опять же логично, что при  $x=0$  этот множитель обратится в ноль, что обнулит всё выражение для прогиба целиком, а вот для остальных случаев представлены графически соответствующей зависимости (рис.4).

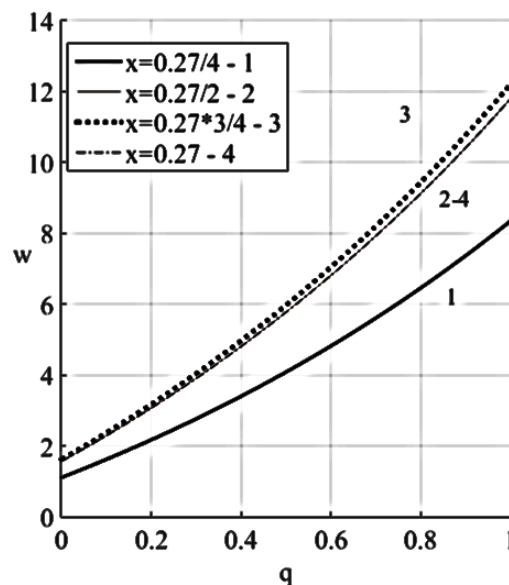


Рис.4.  $w(q)$  шарнирно защемленного края.

Для построения зависимости от координаты  $x$  в целях анализа влияния доли мартенсита в составе сплава, фиксироваться будет параметр фазового состава  $q$ . Здесь рационально воспользоваться результатами предыдущих вычислений, так как множитель  $[A + Be^{a_0q}]$  примет точно такие же значения, как и в случае жесткого закрепления края оболочки, а значит, кривые будут следующими (рис.5).

И снова так же, как и в случае жесткого закрепления оболочки очевидно, что величина прогиба растет с увеличением доли мартенсита в сплаве.



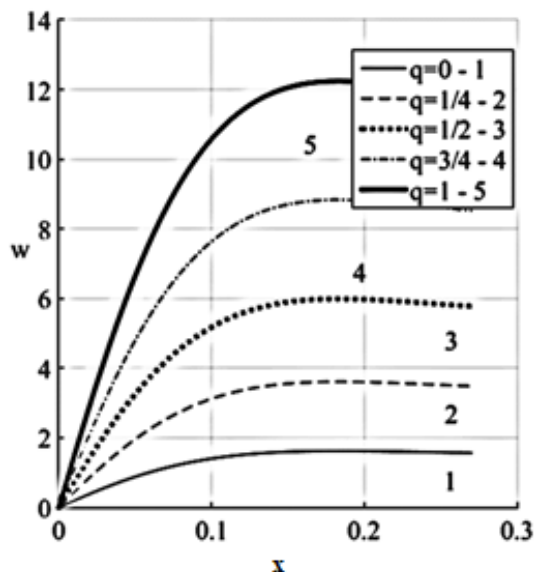


Рис.5.  $w(x)$  шарнирно защемленного края.

#### 4. РАСЧЕТ НАПРЯЖЕНИЙ

В случае цилиндрической оболочки напряжения в безмоментной теории выражаются следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \frac{PR}{2h}, \quad \sigma_\phi = \frac{PR}{h}, \tag{10}$$

где  $\sigma_x$  – меридиональное напряжение, а  $\sigma_\phi$  – радиальное.

Ввиду очевидного отсутствия в выражении (10) упругих констант, при преобразовании Лапласа для расчета случая сплава с памятью формы изменяться эти соотношения не будут. Следовательно, никаких особенных эффектов при фазовом переходе не наблюдается. Однако гораздо больший интерес представляют случаи краевого эффекта вблизи закреплений

$$\sigma_x^{(u)} = \left\{ -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} [\cos(\eta x) - \sin(\eta x)] e^{-\eta x} \right\} \frac{pR}{h}; \quad \sigma_\phi^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)}; \tag{11}$$

$$\sigma_\phi^{(p)} = \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{2} [\cos(\eta x) + \sin(\eta x)] e^{-\eta x} \right\} \frac{pR}{h}; \quad \sigma_x^{(p)} = \frac{pR}{2h}, \tag{12}$$

где индекс  $^{(u)}$  соответствует изгибным напряжениям, а  $^{(p)}$  – радиальным или тангенциальным. Сразу же можно заметить, что даже в случае краевого эффекта выражение для  $\sigma_x^{(p)}$  соответствует безмоментному и так же не содержит упругих постоянных, а потому в рассмотрении не нуждается. Однако остальные выражения представляют некоторый интерес.

Начнем с выражения для изгибных меридиональных напряжений – (11). Все принятые ранее допущения применимы так же и здесь, соответственно, после преобразования Лапласа, применения метода неопределенных коэффициентов и возвращения в пространство оригиналов уравнение будет иметь следующий вид

$$\sigma_x^{(u)} = -\frac{pR [\cos(\eta x) - \sin(\eta x)] e^{-\eta x}}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}h} [A + Be^{\beta q}], \quad (13)$$

где  $A = -\frac{3(\nu\gamma - 2\beta)}{\beta} = 4.489$  и  $B = \frac{3\nu(\gamma - \beta)}{\beta} = 0.071$  в аналитическом и численном виде соответственно. Для построения графической иллюстрации влияния уровня мартенсита в сплаве снова построим два типа зависимостей –  $\sigma_x^{(u)}(q)$  и  $\sigma_x^{(u)}(x)$ . Здесь и далее все значения на оси абсцисс будут отнесены к  $\frac{pR}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}h}$ , что сохранит характер кривой и обеспечит безразмерность величин. При построении зависимости  $\sigma_x^{(u)}(q)$  ряд значений множителя  $[\cos(\eta x) - \sin(\eta x)] e^{-\eta x}$  в зависимости от координаты  $x$  будет следующим (табл.6).

Таблица 6.

Значение $x$	0	$0.27/4$	$0.27/2$	$3 \cdot 0.27/4$	0.27
Значение $[\cos(\eta x) - \sin(\eta x)] e^{-\eta x}$	1	-0.048	-0.203	-0.102	-0.019

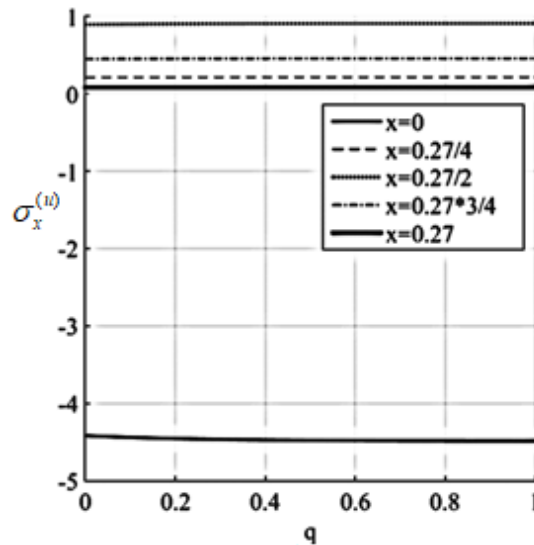


Рис.6.  $\sigma_x^{(u)}(q)$  жестко защемленного края.

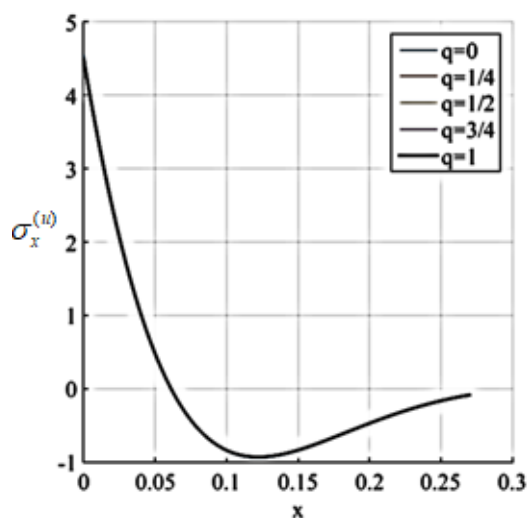
Как видно, несмотря на очень схожий характер кривых (рис.6), они пропорционально различаются на достаточно большое значение, которое «разбрасывает» их по оси ординат, сводя практически к прямым, хотя сами по себе они имеют выраженный экспоненциальный характер.

Для построения зависимости  $\sigma_x^{(u)}(x)$  зафиксируем значения параметра фазового состава  $q$ , после чего множитель  $[A + Be^{\beta q}]$  примет следующие значения (табл.7).

Таблица 7.

Значение $q$	0	1/4	1/2	3/4	1
Значение $[A + Be^{\beta q}]$	4.56	4.492	4.489	4.489	4.489

Уже здесь очевидно, что при превышении долей мартенсита половины в составе сплава, значения практически совпадают, различаясь только в четвертом-пятом знаке после запятой. Особенно ярко это заметно на общем графике со всеми пятью прямыми в одних осях (рис.7).

Рис.7.  $\sigma_x^{(u)}(x)$  жестко зашумленного края.

Тем не менее, эти различия достаточно невелики для того, чтобы с уверенностью сказать, что в рамках линейной теории изменение параметра фазового состава оказывает незначительное влияние на изгибные меридиональные напряжения.

Схожим образом рассчитаем величины  $\sigma_\varphi^{(p)}$  – (12). Снова примем те же пренебрежения, что и для расчета  $\sigma_x^{(u)}$ . После применения преобразования Лапласа, метода неопределенных коэффициентов и возвращения в пространство оригиналов получим выражение вида

$$\sigma_\varphi^{(p)} = \frac{pR}{2h} [A + Be^{\beta q}],$$

где

$$A = 9.559e^{-12.854x} [\cos(12.854x) + \sin(12.854x)] - 7.636$$

и

$$B = -12.039e^{-12.854x} [\cos(12.854x) + \sin(12.854x)] + 9.636.$$

Проиллюстрируем выведенное выражение с помощью двух типов графических зависимостей –  $\sigma_\varphi(q)$  (рис.8) и  $\sigma_\varphi(x)$  (рис.9).

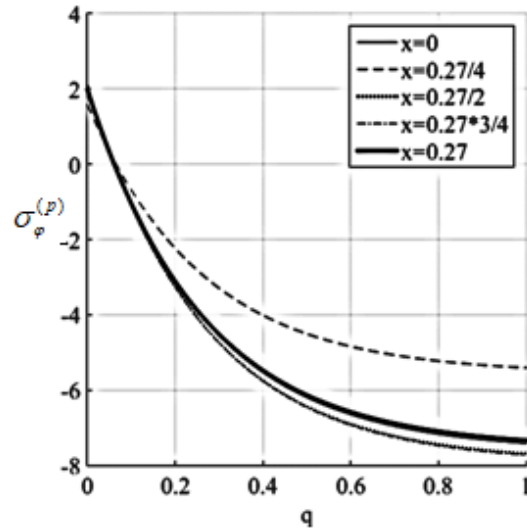


Рис.8.  $\sigma_{\varphi}^{(p)}(q)$  жестко защемленного края.

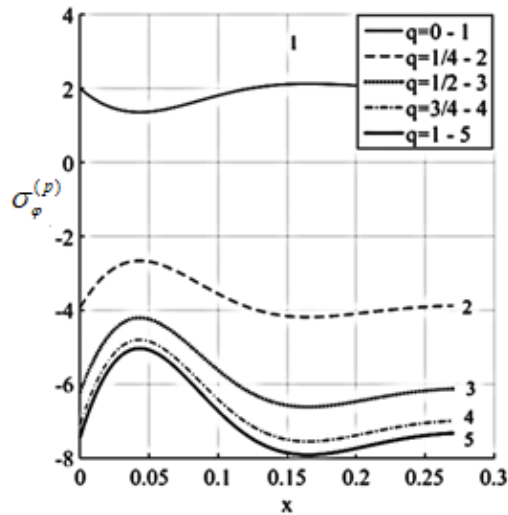


Рис.9.  $\sigma_{\varphi}^{(p)}(x)$  жестко защемленного края.

Выстраивая зависимость  $\sigma_{\varphi}(x)$ , таким же образом зафиксируем значения параметра фазового состава  $q$  в нескольких точках, считая его постоянным.

Выражение для тангенциального напряжения по  $x$  соответствует безмоментному и от упругих постоянных не зависит, поэтому в ходе преобразования Лапласа изменяться не будет.

При рассмотрении случая шарнирного закрепления цилиндрической оболочки выражения для напряжений будут следующими

$$\sigma_x^{(u)} = \left\{ -\frac{3(2-\nu)}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sin(\eta x) e^{-\eta x} \right\} \frac{pR}{h}; \quad (14)$$

$$\sigma_{\varphi}^{(u)} = \nu \sigma_x^{(u)};$$

$$\sigma_{\varphi}^{(p)} = \left\{ 1 - \frac{2-\nu}{2} \cos(\eta x) e^{-\eta x} \right\} \frac{pR}{h}; \quad (15)$$

$$\sigma_x^{(p)} = \frac{pR}{2h}.$$

Легко заметить, что выражения для меридионального изгибного напряжения в случаях для шарнирного и жесткого закрепления отличаются только компонентой, отвечающей за краевой эффект ((11) и (14)). Соответственно, если придерживаться тех же допущений, что и при расчете в случае жесткого закрепления, то этот самый множитель  $\sin(\eta x)$  будет константой, которая непосредственно в процессе преобразования Лапласа участвовать не будет. Тогда выражение для преобразованного по линейной теории  $\sigma_x^{(u)}$  можно получить путем замены в выражении (13) множителя  $[\cos(\eta x) - \sin(\eta x)]$  на соответствующий ему  $\sin(\eta x)$

$$\sigma_x^{(u)} = -\frac{pR \sin(\eta x) e^{-\eta x}}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}h} [A + B e^{\beta q}]. \tag{16}$$

Таким образом, пересчитывать значения неопределенных коэффициентов  $A$  и  $B$  нет необходимости, и их значения будут соответствовать случаю жесткого закрепления.

В качестве иллюстрации полученных соотношений снова построим два типа зависимостей –  $\sigma_x(q)$  (рис.10) и  $\sigma_x(x)$  (рис.11). Для зависимости меридионального напряжения от параметра фазового состава зафиксируем ряд значений координаты  $x$  в некоторых точках, что приведет к тому, что множитель  $\sin(\eta x)$  примет следующие значения (таблица 8):

Таблица 8.

Значение $x$	0	$0.27/4$	$0.27/2$	$3 \cdot 0.27/4$	0.27
Значение $\sin(\eta x)$	0	0.763	0.986	0.513	-0.323

Кривую для случая при  $x=0$  строить нецелесообразно, кривые для остальных значений  $x$  приведены на рис.10.

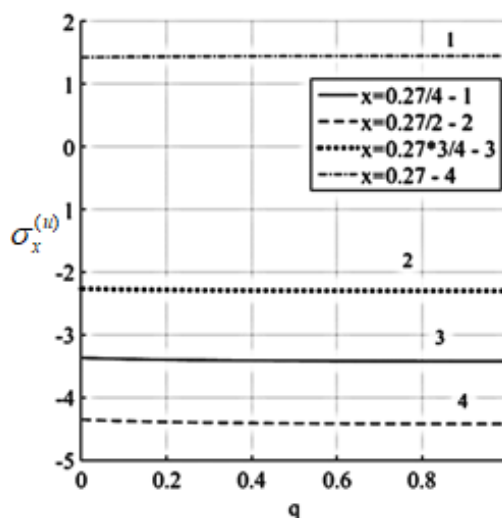


Рис.10.  $\sigma_x^{(u)}(q)$  шарнирно закрепленного края.

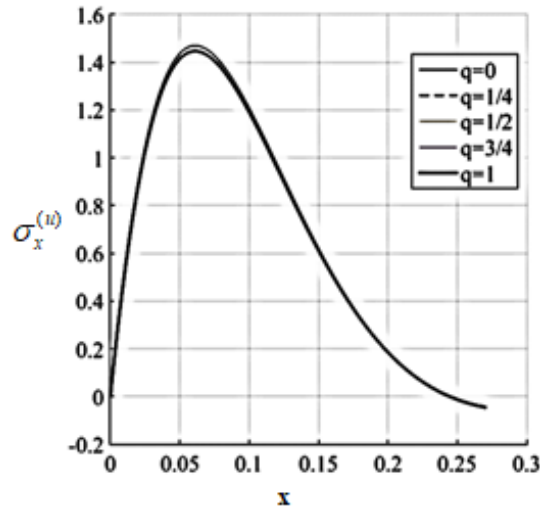


Рис.11.  $\sigma_x^{(u)}(x)$  шарнирно закрепленного края.

Аналогично случаю жесткого закрепления, все кривые на рис.10, имея ярко выраженную экспоненциальную природу, на общем графике оказываются достаточно разнесены по оси абсцисс.

Построение графиков зависимости  $\sigma_x(x)$  происходит схожим образом, только фиксируются значения параметра фазового состава  $q$ .

Соотношения для  $\sigma_\phi^{(p)}$  в случаях шарнирного и жесткого закреплений ((12) и (15)) отличаются только множителем, ответственным за проявление краевого эффекта.

Тогда итоговое выражение в пространстве оригиналов останется неизменным, а значения коэффициентов  $A$  и  $B$  в общем виде будут следующими

$$A = -v\gamma \cos(\eta x) e^{-\eta x} - 2\beta \cos(\eta x) e^{-\eta x} + 2\beta$$

и  $B = v\gamma \cos(\eta x) e^{-\eta x} + 2\beta \cos(\eta x) e^{-\eta x} - v \cos(\eta x) e^{-\eta x} - 2\beta - 2 \cos(\eta x) e^{-\eta x} + 2$ , или

$$A = 9.559 \cdot \cos(12.854x) e^{-12.854x} - 7.636 \text{ и } B = -12.039 \cdot \cos(12.854x) e^{-12.854x} + 9.636.$$

С помощью данных значений построим графики зависимости кольцевых напряжений от  $q$  и от  $x$ , изображенные на рис.12 и 13.

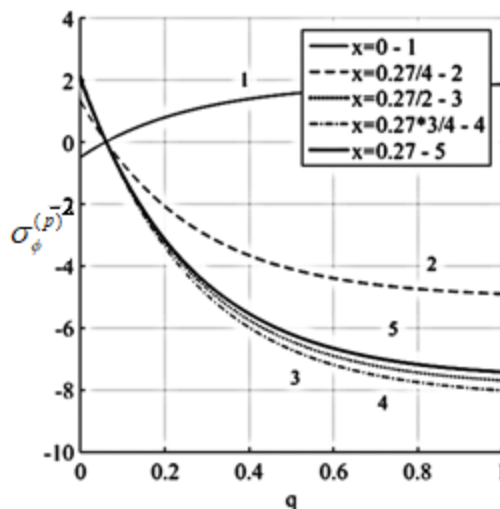


Рис.12.  $\sigma_\phi^{(p)}(q)$  шарнирно закрепленного края.

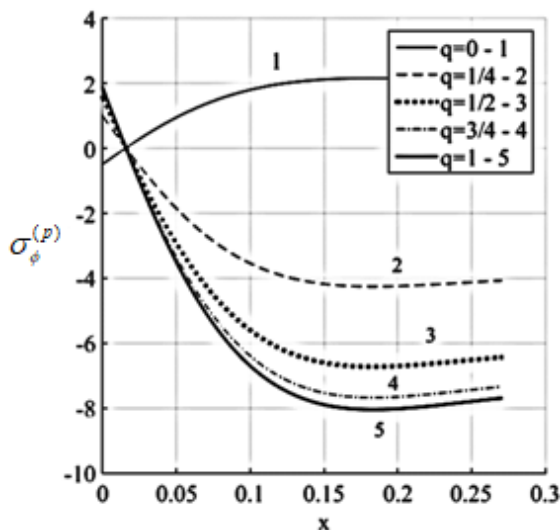


Рис.13.  $\sigma_{\varphi}^{(p)}(x)$  шарнирно закрепленного края.

### 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РЕЛАКСАЦИИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНЫМ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Среди вязкоупругих задач не меньший, если не больший интерес представляют задачи релаксации, где рассматривается уменьшение напряжения при сохранении заданного ранее смещения. Для решения такой задачи в случае цилиндрической оболочки из СПФ воспользуемся соотношением между внутренним давлением и прогибом в безмоментной цилиндрической оболочке, разрешенным относительно давления

$$p = \frac{wEh}{R^2 \left(1 - \frac{\nu}{2}\right)}. \tag{17}$$

Применим к упругим постоянным выражения (17) преобразование Лапласа, метод неопределенных коэффициентов и получим следующее выражение в пространстве оригиналов

$$p = \frac{wEh}{R^2} [A + Be^{\chi q}],$$

где  $A = \frac{a_0}{\chi} = -0.191$  и  $B = -\frac{a_0 - \chi}{\chi} = 1.191$ .

Для графического представления этого решения отнесем полученные результаты к  $\frac{wEh}{R^2}$ , что приведет к безразмерности величин, отложенных по оси ординат (рис.14).

Для нахождения напряжений в безмоментной цилиндрической оболочке в случае релаксации, подставим в соотношение (17):

$$\sigma_{\varphi} = \frac{Ew}{R(1-\nu/2)}, \quad \sigma_x = \frac{Ew}{2R(1-\nu/2)}. \tag{18}$$

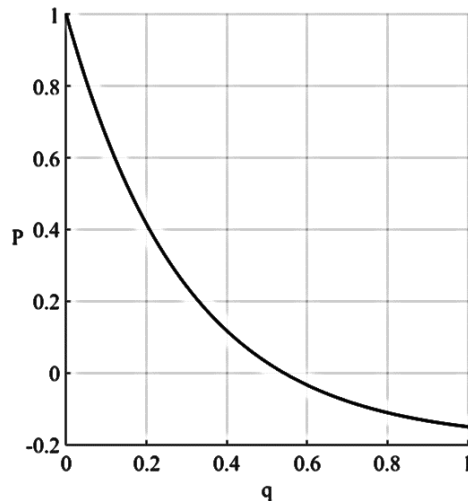


Рис.14.  $P(q)$  для релаксации безмоментной цилиндрической оболочки.

Из чего сделаем очевидный вывод, что в ходе преобразования Лапласа значения неопределенных коэффициентов не будут отличаться от тех, что были получены в ходе расчета давления. Таким образом, в пространстве оригиналов система (18) будет выглядеть следующим образом

$$\sigma_{\varphi} = \frac{Ew}{R} [A + B \exp(\chi q)], \quad \sigma_x = \frac{Ew}{2R} [A + B \exp(\chi q)], \quad (19)$$

где коэффициенты будут совпадать с коэффициентами для давления в случае релаксации. Соответственно, и вид кривых для выражения (19) будет совпадать с рис.14 при отнесении оси ординат к  $\frac{wEh}{2R}$  и  $\frac{wEh}{R}$  соответственно.

## ВЫВОДЫ

В рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях исследовано поведение тонкостенной цилиндрической оболочки, материал которой претерпевает прямое термоупругое мартенситное превращение под действием постоянного внутреннего давления. Задача решена как для безмоментной оболочки, так и для области воздействия краевого эффекта. Установлено, что прогибы исследуемых точек оболочки в таком процессе возрастают. Осевые напряжения (как безмоментные, так и учитывающие краевой эффект) при прямом превращении практически не меняются. Кольцевые напряжения в зоне краевого эффекта испытывают с ростом объемной доли мартенситной фазы существенные изменения.

Решена задача о поддержании фиксированной деформированной формы цилиндрической оболочки, заданной путем нагружения в аустенитном безмоментном состоянии и претерпевающей прямое термоупругое мартенситное превращения. Определен характер убывания внешней нагрузки, обеспечивающий неизменность формы оболочки.

В обеих задачах получены аналитические зависимости искомых величин от продольной координаты и параметра фазового состава.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME. – 1990. – Vol.112. – No.2. – Pp.158-163.
2. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials* // J. of Intell. Mater. Syst. and Struct. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
3. Liang C., Rogers C.A. *A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys* // J. Eng. Math. – 1992. – Vol.26. – Pp.429-443.
4. Brinson L.S. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1993. – Vol.4. – Pp.229-242.
5. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1994. – Vol.5. – Pp.78-79.
6. Мовчан А.А. *Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин (Машиноведение). – 1994. – №6. – С.47-53.
7. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
8. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
9. Brinson L.S., Huang M.S. *Simplification and comparisons of shape memory alloys constitutive models* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. – 1996. – Vol.7. – Pp.108-114.
10. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part 1. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – No.6. – Pp.805-842.
11. Leclercq S., LExcellent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys* // J. Mech. Phys. Solids. – 1996. – Vol.44. – No.6. – Pp.953-980.
12. Мовчан А.А., Шельмагин П.В., Казарина С.А. *Определяющие уравнения для двухэтапных термоупругих фазовых превращений* // Прикладная механика и техническая физика. – 2001. – Т.42. – №5(249). – С.152-160.
13. Peultier B., Ben Zineb T., Patoor E. *Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM* // Mechanics of materials. – 2006. – Vol.38. – No.5-6. – Pp.510-524.
14. LExcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. Solids and Struct. – 2006. – Vol.43. – No.3-4. – Pp.613-626.
15. Sadjadpour A., Bhattacharya K. *A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys: the one-dimensional case* // Smart Mater. Struct. – 2007. – Vol.16. – Pp.51-62.
16. Moumni Z., Zaki W. and Nguyen Q.S. *Theoretical and numerical modeling of solid/solid phase change: application to the description of the thermomechanical*

- behavior of shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – No.4. – Pp.614-645.
17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2009. – Vol.198. – No.17-20. – Pp.1631-1637.
  18. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings* // Int. J. of Plasticity. – 2010. – Vol.26. – Pp.976-991.
  19. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering martensite reorientation* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2010. – Vol.25. – Pp.345-362.
  20. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures* // Smart Materials and Structure. – 2011. – Vol.20. – 094006 (20pp).
  21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects* // Theoret. Appl.Mech. – 2011. – Vol.38. – No.2. – Pp.155-207.
  22. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
  23. Auricchio F. and Bonetti E. *A new exible 3D macroscopic model for shape memory alloys* // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2013. – Vol.6. – Pp.277-291.
  24. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G. and Uberitini F. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation* // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol.59. – Pp.30-54.
  25. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
  26. Gu X., Zaki W., Morin C., Moumni Z. and Zhang W. *Time integration and assessment of a model for shape memory alloys considering multiaxial nonproportional loading cases* // International Journal of Solids and Structures. – 2015. – Vol.54. – Pp.82-99.
  27. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
  28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006.
  29. Xiaojun Gu, Weihong Zhang, Wael Zaki and Ziad Moumni. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading* // Smart Mater. Struct. – 2017. – Vol.26. – 095047 (16pp).
  30. Мовчан А.А. *Модель влияния фазового механизма деформирования на структурный в сплавах с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №7. – С.14-23.

31. Movchan Andrey A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2019. – Vol.10. – No.3. – Pp.233-245.
32. Мовчан А.А. *Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2000. – №6. – С.143-154.
33. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs* // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – Pp.611-624.
34. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol.47. – Pp.118-128.
35. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under tension-torsion combined loading* // Smart Mater. Struct. – 2006. – Vol.15. – Pp.1651-1660.
36. Hyoung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.A299. – Pp.305-308.
37. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars* // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol.42. – Pp.797-806.
38. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
39. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
40. Саганов Е.Б. *Анализ напряженно-деформированного состояния торсионного актуатора из сплава с памятью формы при рабочем ходе в условиях стесненного деформирования* // Вестник Московского Авиационного Института. – 2015. – Т.22. – №1. – С.109-116.
41. Саганов Е.Б. *Решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы в режиме сверхупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №4. – С.549-563.
42. Саганов Е.Б. *Моделирование процессов фазовых и структурных переходов при кручении тонкостенных трубок из сплава с памятью формы* // Машиностроение и инженерное образование. – 2016. – №1. – С.2-9.
43. Plietsch R., Bouraueil C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys* // Journal of Materials Science. – 1994. – Vol.29. – No.22. – Pp.5892-5902.
44. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.164-173.
45. Данилин А.Н., Мовчан А.А. *Метод решения геометрически нелинейных задач изгиба стержней из сплавов с памятью формы при прямом превращении* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2002. – №4. – С.83-90.
46. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis* // Strain. An

International journal for Experimental Mechanics. – 2011. – Vol.47. – No.3. – Pp.255-267.

47. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending* // Solids and Structures. – 2018. – Vol.137. – Pp.77-88.
48. Сафронов П.А. *Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.114-127.
49. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
50. Сафронов П.А. *Решение связанной задачи о прямом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.24. – №4. – С.597-615.
51. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2018. – Vol.9. – No.2. – Pp.119-139.
52. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending* // Solids and Structures. – 2018. – Vol.137. – Pp.77-88.
53. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-206.
54. Бобок Д.И. *Аналитическое решение задачи изгиба круглой пластины из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.74-97.
55. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. *Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении* // Прикл. матем. и механика. – 2006. – Т.70. – №5. – С.869-881.
56. Сильченко Л.Г., Мовчан А.А., Мовчан И.А. *Учет структурного превращения при анализе устойчивости круглой пластины из сплава с памятью формы* // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – №5. – С.57-65.
57. Мовчан А.А., Машихин А.Е. *Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
58. Мовчан А.А., Левин А.С. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.221-236.
59. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.

60. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
61. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure* // Archive of Applied Mechanics. – 2011. – Vol.81. – No.8. – Pp.1093-1116.
62. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
63. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.
64. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
65. Мовчан А.А. *Аналитическое решение задач о прямом и обратном превращении для сплавов с памятью формы* // Известия АН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.136-144.
66. Мовчан А.А. *Некоторые проявления способности к ориентированному превращению для сплавов с памятью формы* // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1996. – Т.37. – №6. – С.181-189.
67. Дубков А.А., Агудов Н.В. *Преобразование Лапласа: Учебно-методическое пособие*. – Нижний Новгород: Нижегородский гос.университет, 2016. – 36 с.
68. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / 10-е изд., перераб. и доп.* – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592с.
69. Балабух Л.И., Алфутов Н.А., Усюкин В.И. *Строительная механика ракет: Учебник для машиностроительных спец. вузов*. – М.: Высшая школа, 1984. – 391 с., ил.
70. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек*. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
71. Биргер И.А., Пановко Я.Г. *Прочность, устойчивость, колебания-/ Справочник в трех томах. Том I*. – М: Машиностроение, 1968. – 831 с.
72. Авдонин А.С., Фигуровский В.И. *Расчет на прочность летательных аппаратов. Учебное пособие для высших учебных заведений*. – М.: Машиностроение, 1985. – 440 с.
73. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела*. – М.: Наука, 1979. – 743 с.

## REFERENCES

1. Tanaka K. *A phenomenological description on thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Pressure Vessel Technology. Trans. ASME, 1990, Vol.112, No.2, Pp.158-163.
2. Liang C., Rogers C.A. *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials*. J. of Intell. Mater. Syst. and Struct., 1990, Vol.1, No.2, Pp.207-234.
3. Liang C., Rogers C.A. *A multi-dimensional constitutive model for shape memory alloys*. J. Eng. Math., 1992, Vol.26, Pp.429-443.

4. Brinson L.S. *One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1993, Vol.4, Pp.229-242.
5. Graesser E.J. and Cozzarelli F.A. *A proposed three-dimensional constitutive model for shape memory alloy*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1994, Vol.5, Pp.78-79.
6. Movchan A.A. *Mikromekhanicheskie opredelyayushhie uravneniya dlya splavov s pamyat'yu formy [Micromechanical constitutive equations for shape memory alloys]*. Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin (Mashinovedenie), 1994, No.6, Pp.47-53.
7. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape-memory alloys*. Mechanics of Solids, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
8. Movchan A.A. *The selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1995, Vol.36, No.2, Pp.300-306.
9. Brinson L.S., Huang M.S. *Simplification and comparisons of shape memory alloys constitutive models*. J. Intell. Mater. Syst. Struct., 1996, Vol.7, Pp.108-114.
10. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *A thermodynamic constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12, No.6, Pp.805-842.
11. Leclercq S., Lexcellent C. *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. J. Mech. Phys. Solids, 1996, Vol.44, No.6, Pp.953-980.
12. Movchan A.A., Shelymagin P.V., Kazarina S.A. *Constitutive equations for two-step thermoelastic phase transformations*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2001, Vol.42, No.5, Pp.864-871.
13. Peultier B., Ben Zineb T., Patoor E. *Macroscopic constitutive law of shape memory alloy thermomechanical behaviour. Application to structure computation by FEM*. Mechanics of materials, 2006, Vol.38, No.5-6, Pp.510-524.
14. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modeling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. Solids and Struct., 2006, Vol.43, No.3-4, Pp.613-626.
15. Sadjadpour A., Bhattacharya K. *A micromechanics inspired constitutive model for shape-memory alloys: the one-dimensional case*. Smart Mater. Struct., 2007, Vol.16, Pp.51-62.
16. Moumni Z., Zaki W. and Nguyen Q.S. *Theoretical and numerical modeling of solid/solid phase change: application to the description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2008, Vol.24, No.4, Pp.614-645.
17. Auricchio F., Reali A., Stefanelli U. *A macroscopic 1d model for shape memory alloys including asymmetric behavior and transformation-dependent elastic properties*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, Vol.198, No.17-20, Pp.1631-1637.
18. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D phenomenological constitutive model for shape memory alloys under multiaxial loadings*. Int. J. of Plasticity, 2010, Vol.26, Pp.976-991.
19. Arghavani J., Auricchio F., Naghdabadi R., Reali A., Sohrabpour S. *A 3-D finite strain phenomenological constitutive model for shape memory alloys considering*

- martensite reorientation*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2010, Vol.25, Pp.345-362.
20. Hartl D.J., Lagoudas D.C., Calcins F.T. *Advanced methods for the analysis, design and optimization of SMA-based aerostructures*. Smart Materials and Structure, 2011, Vol.20, 094006 (20pp).
  21. Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. *Thermoinduced plastic flow and shape memory effects*. Theoret. Appl. Mech., 2011, Vol.38, No.2, Pp.155-207.
  22. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. and Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
  23. Auricchio F. and Bonetti E. *A new exible 3D macroscopic model for shape memory alloys*. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2013, Vol.6, Pp.277-291.
  24. Auricchio F., Bonetti E., Scalet G., Uberitini F. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation*. International Journal of Plasticity, 2014, Vol.59, Pp.30-54.
  25. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
  26. Gu X., Zaki W., Morin C., Moumni Z. and Zhang W. *Time integration and assessment of a model for shape memory alloys considering multiaxial nonproportional loading cases*. International Journal of Solids and Structures, 2015, Vol.54, Pp.82-99.
  27. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
  28. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284. DOI: 10.1016/j.ijplas.2015.08.006.
  29. Xiaojun Gu, Weihong Zhang, Wael Zaki and Ziad Moumni. *An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading*. Smart Mater. Struct., 2017, Vol.26, 095047 (16pp)
  30. Movchan A.A. *Model for the Effect of the Phase Mechanism of Deformation on the Structural Mechanism in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2020, Vol.2020, No.4, Pp.282-290.
  31. Movchan A.A., Mishustin Ilya V. *Nanostructural prediction of shape memory alloys resistance asymmetry*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2019, Vol.10, No.3, Pp.233-245.
  32. Movchan A.A. *Torsion of prismatic beams from shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2000, No.6, Pp.119-128.
  33. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *A combined analytical, numerical, and experimental study of shape-memory-alloy helical springs*. International Journal of Solids and Structures, 2011, Vol.48, Pp.611-624.
  34. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash, Gall Ken. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, Vol.47, Pp.118-128.
  35. Jong-Ha Chung, Jin-Seok Heo and Jung-Ju Lee. *Modeling and numerical simulation of the pseudoelastic behavior of shape memory alloy circular rods under*

- tension–torsion combined loading*. Smart Mater. Struct., 2006, Vol.15, Pp.1651-1660.
36. Hyoung Seop Kim. *Finite element analysis of torsional deformation*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.A299, Pp.305-308.
  37. Mirzaeifar Reza, DesRoches Reginald, Yavari Arash. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars*. Mechanics of Materials, 2010, Vol.42, Pp.797-806.
  38. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o pryamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
  39. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution of the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
  40. Saganov E.B. *Analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya torsionnogo aktuatora iz splava s pamyat'yu formy pri rabochem khode v usloviyakh stesnennogo deformirovaniya [Analysis of the stress-strain state of a torsion actuator made of an alloy with shape memory during a working stroke under constrained deformation]*. Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2015, Vol.22, No.1, Pp.109-116.
  41. Saganov E.B. *Reshenie dvazhdy svyazannoj zadachi krucheniya tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy v rezhime sverkhuprugosti [Solving the twofold related problem of torsion of thin-walled tubes from an alloy with shape memory in the superelastic mode]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.4, Pp.549-563.
  42. Saganov E.B. *Modelirovanie protsessov fazovykh i strukturnykh perekhodov pri kruchenii tonkostennykh trubok iz splava s pamyat'yu formy [Modeling of processes of phase and structural transitions during torsion of thin-walled tubes made of shape memory alloys]*. Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie, 2016, No.1, Pp.2-9.
  43. Plietsch R., Bourauel C., Drescher D., Nellen B. *Analytical description of the bending behavior of NiTi shape-memory alloys*. Journal of Materials Science, 1994, Vol.29, No.22, Pp.5892-5902.
  44. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
  45. Movchan A.A., Danilin A.N. *Solution the geometry non linear shape memory alloys beam bending problems at direct transformation*. Machinery Manufacture and Reliability, 2002, No. 4, Pp. 83-90.
  46. Flor D.L.S., Urbina C., Ferrando F. *Asymmetrical bending model for NiTi shape memory wires: Numerical simulations and experimental analysis*. Strain. An International journal for Experimental Mechanics, 2011, Vol.47, No.3, Pp.255-267.
  47. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending*. Solids and Structures, 2018, Vol.137, Pp.77-88.
  48. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivlyaemosti splavov s pamyat'yu formy pri reshenii zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom prevrashhenii v balke,*



- nakhodyashhejsya pod dejstviem izgibayushhego momenta [Taking into account the different resistance of shape-memory alloys in solving problems of martensitic inelasticity and direct transformation in a beam under the action of a bending moment].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.
49. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugikh deformatsij i raznosoprotivlyaemosti ehtikh splavov [Solving the problems of martensitic inelasticity and direct phase transformation in a beam made of shape memory alloy, taking into account the elastic deformations and the different resistance of these alloys].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.
  50. Safronov P.A. *Reshenie svyaznoj zadachi o pryamom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti materiala [Solving the connected problem of direct transformation in a beam of a shape memory alloy, taking into account the material's SD effect].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2019, Vol.24, No.4, Pp.597-615.
  51. Safronov P.A. *Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating into the solution of the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from a shape memory alloy undergoing bending.* Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2018, Vol.9, No.2, Pp.119-139.
  52. Young-Jin K., Chang-Ho L., Joung-Hun K., Jae H.L. *Numerical modelling of shape memory alloy plates considering tension/compression asymmetry and its verification under pure bending.* Solids and Structures, 2018, Vol.137, Pp.77-88.
  53. Safronov P.A. *Tsilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti ehtogo materiala [Cylindrical bending of plates made of shape memory alloy, taking into account the SD effect of this material].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
  54. Bobok D.I. *Analiticheskoe reshenie zadachi izgiba krugloj plastiny iz splava s pamyat'yu formy [Analytical solution of the problem of bending of a round plate made of shape memory alloy].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.74-97.
  55. Movchan A.A., Sil'chenko L.G. *The stability of a circular plate of shape memory alloy during a direct martensite transformation.* Applied Mathematics and Mechanics, 2006, Vol.70, Pp.785-795.
  56. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Movchan I.A. *Structural transformation taken into account during the analysis of the stability of a round plate with shape memory.* Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2010, Vol.39, No.5, Pp.452-460.
  57. Movchan A.A., Mashikhin A.E. *Deformatsii krugovogo tsilindra iz splava s pamyat'yu formy pri strukturnom perekhode ili pryamom fazovom prevrashhenii [Deformations of a circular cylinder made of shape memory alloy during a structural transition or direct phase transformation].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.2, Pp.235-247.
  58. Movchan A.A., Levin A.S. *Zadacha o pryamom martensitnom prevrashhenii v tolstostennoj sfere iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhejsya pod dejstviem postoyannogo davleniya [The problem of direct martensitic transformation*

*in a thick-walled sphere of a shape memory alloy that is subjected to a constant pressure*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2015, Vol.21, No.2, Pp.221-236.

59. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. *Mechanics of Solids*, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333. DOI 10.3103/S0025654416030092.
60. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Thermomechanical Boundary Problems for a Cylinder and Sphere Made of Shape Memory Alloy*. *PNIPU Mechanics Bulletin*, 2017, No.3, Pp.113-128.
61. Mirzaeifar R., Shakeri M., DesRoches R., Yavari A. *A semi-analytic analysis of shape memory alloy thick-walled cylinders under internal pressure*. *Archive of Applied Mechanics*, 2011, Vol.81, No.8, Pp.1093-1116.
62. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosprotivlyaemosti [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymmetry]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
63. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymmetry]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
64. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
65. Movchan A.A. *Analytical solution of problems on the direct and inverse transformations in shape memory alloys*. *Mechanics of Solids*, 1996, Vol.31, No.4, Pp.116-123.
66. Movchan A.A. *Some manifestation of the capability to oriented transformation for shape memory alloys*. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 1996, Vol.37, No.6, Pp.926-933.
67. Dubkov A.A., Agudov N.V. *Preobrazovanie Laplasa: Uchebno-metodicheskoe posobie. [Laplace transformation: Uchebno-metodicheskoe posobie]*. Nizhnij Novgorod, Nizhegorodskij gosudarstvennyj universitet, 2016, 36 p.
68. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov: Uchebnik dlya vuzov / 10-e izdanie, pererabotannoe i dopolnennoe [Strength of material]*. Moskva, Izdatel'stvo MGTU imeni N.Eh. Baumana, 1999, 592 p.
69. Balabukh L.I., Alfutov N.A., Usyukin V.I. *Stroitel'naya mekhanika raket: Uchebnik dlya mashinostroitel'nykh spetsial'nykh vuzov [Construction mechanics of rockets]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1984, 391 p.
70. Gol'denvejzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek [Theory of thin elastic shells]*. Moskva, Nauka, 1976, 512 p.
71. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost', ustojchivost', kolebaniya-/ Spravochnik v trekh tomakh. Tom I. [Strength, stability, vibrations. Vol.1.]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 831 p.
72. Avdonin A.S., Figurovskij V.I. *Raschet na prochnost' letatel'nykh apparatov. Uchebnoe posobie dlya vysshikh uchebnykh zavedenij [Strength calculation of aircraft]*. Moskva, Mashinostroenie, 1985, 440 p.

73. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of a solids]*. Moskva, Nauka, 1979, 743 p.

*Поступила в редакцию 09 июня 2020 года.*

---

Сведения об авторе:

Бобок Денис Игоревич. – асп., кафедра 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [denis199750@gmail.com](mailto:denis199750@gmail.com)