

УДК 531.01

DOI 10.33113/mkmk.ras.2020.26.03.341_361.04

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ*

Шешенин С.В., Артамонова Н.Б.

*ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Ранее авторами была получена связанная физически и геометрически нелинейная формулировка краевой задачи консолидации при использовании подхода Лагранжа с адаптацией для твердой фазы и подхода ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) для жидкости в предположении квазистатического деформирования каркаса. Дифференциальная постановка в «скоростях» включает три уравнения: равновесия, фильтрации и изменения пористости, выведенные из законов сохранения механики сплошных сред с применением пространственного осреднения по объему представительной области.

В настоящей работе предлагается метод решения этой задачи и представлены некоторые результаты численного моделирования. Система уравнений равновесия и фильтрации решается в предположении постоянной пористости, которая пересчитывается на каждом шаге по времени. Для решения системы используется обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы. В работе проведен анализ устойчивости решения линейной задачи при аппроксимации элементами Q1-Q1 и Q2-Q1. Приводятся численные примеры расчета нелинейной связанной задачи консолидации для гиперупругого материала при аппроксимации потенциалами Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана-Кирхгофа, исследовано влияние учета геометрической нелинейности, решена задача с изменяющимися пористостью и коэффициентом фильтрации. Для моделирования определяющих соотношений для упруго-вязкопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках выбрана модель Григоряна-Рыкова, обобщенная на большие деформации. В этой теории ассоциированный закон течения рассматривается в пятимерном пространстве Ильюшина, а соотношение между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций определяется согласно теории вязкопластичности. Приведено сравнение результатов расчетов эффективных упругих модулей по методу осреднения на основе трехмерных и двухмерных моделей реальной структуры чистых известняков и экспериментальных исследований.

Ключевые слова: связанная задача консолидации; нелинейное деформирование; седловая система; итерационный решатель; метод Узавы; гиперупругий материал; модель упруго-вязкопластичности

MODELING OF A NONLINEAR COUPLED CONSOLIDATION PROBLEM

Sheshenin S.V., Artamonova N.B.

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №20-01-00431_a).

ABSTRACT

Previously by the authors, a coupled physically and geometrically nonlinear formulation of the boundary value problem was obtained using the Lagrange approach with adaptation for the solid phase and the ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) approach for the fluid under the assumption of quasistatic deformation of the rock skeleton. The differential formulation in “velocities” includes the equilibrium equation, the filtration equation and the porosity change equation derived from the laws of conservation of continuum mechanics using spatial averaging over the representative volume element.

In this paper, we propose a method for solving this problem and present the results of numerical simulation. The system of equilibrium and filtration equations is solved under the assumption of constant porosity, which is recalculated at each time step. To solve the system, a generalization of the implicit scheme with internal iterations at each time step is used according to the Uzawa method. The paper analyzes the stability of a linear problem when approximated by elements Q1-Q1 and Q2-Q1. Numerical examples are given of calculating a nonlinear coupled consolidation problem for a hyperelastic material when approximated by the Mooney, Mooney-Rivlin, Treloar, and Saint-Venant-Kirchhoff potentials, the influence of taking into account geometric nonlinearity is investigated, and the problem with varying porosity and filtration coefficient is solved. For modeling the constitutive relations for elastic-viscoplastic soil deformation under short-term loads, the Grigoryan-Rykov model generalized to large deformations is selected. In this theory, the associated flow law is considered in the five-dimensional Ilyushin space, and the relationship between the first invariants of the stress and strain tensors is determined according to the theory of viscoplasticity. Comparison of the results of calculations of effective elastic moduli by the averaging method based on three-dimensional and two-dimensional models of the real structure of pure limestones and experimental values is presented.

Keywords: coupled consolidation problem; nonlinear deformation; saddle system; iterative solver; Uzawa method; hyperelastic material; elastic-viscoplasticity model

ВВЕДЕНИЕ

Линейная теория совместного упругого деформирования грунта и фильтрации жидкости согласно закону Дарси впервые была сформулирована в работе [1]. Однако деформирование водонасыщенных дисперсных грунтов под нагрузкой, как правило, нелинейное и сопровождается большими пластическими деформациями. Возникла потребность в разработке строгой и эффективной нелинейной связанной модели совместного деформирования жидкой и твердой фаз грунта, учитывающей упруговязкопластическое поведение материала, сопровождающееся изменением пористости и проницаемости. К настоящему времени различными исследователями разработаны обобщения классических уравнений консолидации в бесконечно малых на конечные деформации, например в работах [2-4].

Данную статью можно рассматривать как продолжение нашей статьи [5], в которой были выведены уравнения полностью нелинейной задачи консолидации, сформулирована линеаризованная вариационная постановка и намечены пути численного решения задачи. Настоящая статья посвящена численному моделированию на основе предложенной математической модели.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Дифференциальная постановка в «скоростях» задачи консолидации включает три уравнения: равновесия, фильтрации и изменения пористости, выведенные из законов сохранения механики сплошных сред с применением пространственного осреднения по объему представительной области (RVE – representative volume element). В текущей области она имеет вид [5]

$$\begin{cases} \bar{\nabla} \cdot (\underline{C}^d(\bar{u}) : \bar{\nabla} d\bar{u}) + \bar{\nabla} \cdot (\underline{\sigma}^{eff}(\bar{u}) \cdot \bar{\nabla} d\bar{u}) - \alpha \bar{\nabla} dp - \\ - \alpha \bar{\nabla} p \bar{\nabla} \cdot d\bar{u} + \alpha \bar{\nabla} p \cdot \bar{\nabla} d\bar{u} + \rho d\bar{f} = 0 \\ n(\bar{u}) \bar{\nabla} \cdot \left(\frac{k_\phi(\bar{u})}{n(\bar{u}) \gamma_f} \bar{\nabla} p \right) = \bar{\nabla} \cdot \dot{\bar{u}} + n \beta_f \dot{p} \\ \dot{n} = (1-n) \bar{\nabla} \cdot \dot{\bar{u}} \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\dot{\bar{u}} = \partial \bar{u}(\bar{\xi}, t) / \partial t$, $\dot{p} = \partial p(\bar{\xi}, t) / \partial t$, $\dot{n} = \partial n(\bar{\xi}, t) / \partial t$, \bar{f} – массовая сила, $C_{ijkl}^d = J^{-1} F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E$ (F – деформационный градиент, $J = \det F$), C^E – касательный модуль ($C^E = \partial \underline{\Sigma}^{eff} / \partial \underline{E}$, $\underline{\Sigma}^{eff}$ – второй тензор эффективных напряжений Пиола-Кирхгофа, \underline{E} – тензор деформаций Грина-Лагранжа), $\underline{\sigma}^{eff}$ – эффективные напряжения Коши. Эффективные напряжения – это осредненные напряжения при нулевом поровом давлении.

Неизвестными переменными являются приращения перемещений $d\bar{u}(\bar{\xi}, t)$, давления жидкости $dp(\bar{\xi}, t)$ и пористости материала $dn(\bar{\xi}, t)$. Сжимаемость жидкости β_f , тензор $C^d(\bar{u})$, коэффициент фильтрации $k_\phi(\bar{u})$, удельный вес жидкости γ_f и коэффициент Био α – параметры грунта и содержащейся в порах жидкости. Предполагается, что грунт полностью насыщенный, жидкость – ньютоновская и однородная.

Уравнения фильтрации и пористости в (1.1) были переформулированы в движущейся системе координат, связанной с лагранжевыми координатами $\bar{\xi}$ твердого скелета согласно методу ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) [6] с использованием скорости жидкости относительно твердой фазы. Такое применение метода ALE для связывания лагранжева описания деформации скелета грунта и эйлерова описания движения жидкости авторам в литературе не известно.

В задаче консолидации типичные граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \bar{u} = 0; \quad \bar{\xi} \in \Sigma_u = \Sigma_1; \quad \underline{\sigma}^{eff} \cdot \bar{n} = \bar{S}; \quad \bar{\xi} \in \Sigma_\sigma = \Sigma_2 \\ \frac{\partial p}{\partial \bar{n}} = 0; \quad \bar{\xi} \in \Sigma_w = \Sigma_1; \quad p = 0; \quad \bar{\xi} \in \Sigma_p = \Sigma_2 \\ \Sigma_u \cup \Sigma_\sigma = \Sigma, \quad \Sigma_w \cup \Sigma_p = \Sigma, \quad \Sigma_u = \Sigma_w = \Sigma_1, \quad \Sigma_\sigma = \Sigma_p = \Sigma_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Согласно (1.2), часть границы ($\bar{\xi} \in \Sigma_1$) неподвижна и непроницаема. Остальная часть границы ($\bar{\xi} \in \Sigma_2$) – проницаема, и на ней действует поверхностная нагрузка.

Сначала система уравнений равновесия и фильтрации (первые два уравнения (1.1)) решается методом Узавы в предположении постоянной пористости. Затем пористость пересчитывается из третьего уравнения (1.1).

Для пространственной дискретизации использовался метод конечных элементов (МКЭ): тринейные конечные элементы (Q1) для аппроксимации уравнения фильтрации и серендиповы квадратичные конечные элементы (Q2) для аппроксимации уравнений равновесия [5]. (Конечный элемент Q2-Q1 для $d\bar{u}$ имеет 20 узловых точек, а для p – 8 узловых точек.)

2. МЕТОД УЗАВЫ С ВНУТРЕННИМИ ИТЕРАЦИЯМИ

При численном моделировании задач о деформировании водонасыщенного грунта требуется решать сотни тысяч алгебраических уравнений. Поэтому использование итерационного метода Узавы вполне оправдано.

Опишем применение идеи метода Узавы [7] для решения линейного упругого варианта задачи консолидации, предложенного в [8]. Для удобства читателя описание дискретизации по времени запишем, используя символы дифференциальных операторов. Дискретизированная система линейных уравнений задачи консолидации имеет вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\underline{C} : \operatorname{grad} \Delta \hat{u}^m) + \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^m &= \hat{F} \\ -\operatorname{div} \Delta \hat{u}^m + \tau \frac{k_\phi}{\gamma_f} \operatorname{div} \operatorname{grad} \hat{p}^m &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где τ – величина шага по времени; m – номер шага по времени; $\Delta \hat{u}^m$, $\Delta \hat{p}^m$ и \hat{p}^m – узловые значения приращения перемещений, приращения давления воды и давления воды соответственно на временном шаге m . Запишем систему (2.1) в операторном виде

$$\begin{aligned} A \Delta \hat{u}^m + B^T \Delta \hat{p}^m &= \hat{F} \\ B \Delta \hat{u}^m - \tau C \hat{p}^m &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь A , B^T , B и C – конечно-элементные аналоги дифференциальных операторов из (2.1).

Из первого уравнения (2.1) выразим $\Delta \hat{u}^m$

$$\Delta \hat{u}^m = -A^{-1} B^T \Delta \hat{p}^m + A^{-1} \hat{F}. \quad (2.3)$$

Учтем, что $\hat{p} = \hat{p}^{m-1} + \Delta \hat{p}^m$, и подставим (2.3) во второе уравнение системы (2.2). Получим

$$S \Delta \hat{p}^m = B A^{-1} \hat{F} - \tau C \hat{p}^{m-1}, \quad (2.4)$$

где $S = B A^{-1} B^T + \tau C$ – матрица Шура. Матрицы A и C – симметричные и положительно определенные, поэтому матрица S – тоже симметричная и положительно определенная.

Самый простой итерационный процесс на шаге m для уравнения (2.4) записывается следующим образом

$$\mathbb{B} \frac{\Delta \hat{p}^{m,s+1} - \Delta \hat{p}^{m,s}}{\beta} + (B A^{-1} B^T + \tau C) \Delta \hat{p}^{m,s} = B A^{-1} \hat{F} - \tau C \hat{p}^{m-1}, \quad (2.5)$$

s – номер итерации, β – итерационный параметр. Переобуславливатель \mathbb{W} используется для ускорения сходимости и был выбран в виде $\mathbb{W} = C$. Из уравнения (2.3) следует

$$\Delta \hat{u}^{m,s+1} = A^{-1} (F - B^T \Delta \hat{p}^{m,s}).$$

Следует заметить, что при вычислении $\Delta \hat{u}^{m,s+1}$ (2.6) и $\hat{p}^{m,s+1}$ (2.5) символ A^{-1} обозначает решение соответствующей линейной системы. Для вычисления $\Delta \hat{u}^{m,s+1}$ и для расчета $\hat{p}^{m,s+1}$ использовался прямой метод из библиотеки MKL.

Недостатками метода простой итерации являются медленная сходимость и необходимость нахождения оптимального итерационного параметра β в ходе вычислительных экспериментов. Правда, нужно заметить, что в данном случае даже метод простой итерации требует небольшого числа итераций за счет переобуславливателя, эквивалентного по спектру оператору Шура S . Последний факт также означает, что число итераций не зависит от размера линейной системы. Понятно, что наиболее эффективными методами для решения (2.4) являются методы сопряженных направлений, в которых $\beta^{m,s}$ рассчитывается в ходе итераций в самом вычислительном процессе.

Двухслойная схема метода сопряженных градиентов имеет вид

$$\begin{aligned} r^{0,0} &= -f^0, \quad q^{0,0} = r^{0,0}, \quad \alpha^{m,s} = \frac{(r^{m,s}, r^{m,s})}{(Sq^{m,s}, q^{m,s})}, \\ p^{m,s+1} &= p^{m,s} - \alpha^{m,s} q^{m,s}, \quad r^{m,s+1} = Sp^{m,s+1} - f^{m-1}, \\ \beta^{m,s+1} &= \frac{(r^{m,s+1}, r^{m,s+1})}{(r^{m,s}, r^{m,s})}, \quad q^{m,s+1} = r^{m,s+1} + \beta^{m,s+1} q^{m,s}. \end{aligned}$$

При переходе на следующий временной шаг начальные приращения давления воды и перемещений берутся с последней итерации предыдущего шага.

3. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ

Решение системы (2.2) эквивалентно нахождению седловой точки некоторого функционала, поэтому эта система называется седловой. При численном решении дискретизированной системы уравнений (2.2) возникают проблемы, связанные с устойчивостью. Достаточными условиями существования и единственности решения седловой задачи (2.2) являются

- 1) Положительная определенность матриц A и C

$$(A\hat{u}, \hat{u}) > 0, \quad \forall \hat{u} \neq 0; \quad (C\hat{p}, \hat{p}) > 0, \quad \forall \hat{p} \neq 0. \tag{3.1}$$

- 2) LBB условие для матрицы B (условие Ладыженской-Бабушки-Брецци)

$$\inf_{\hat{p} \in H_p^N / \text{Ker} B^T} \sup_{\hat{u} \in H_u^N} \frac{(B^T \hat{p}, \hat{u})}{\|\hat{p}\| \|\hat{u}\|} \geq \varepsilon > 0, \tag{3.2}$$

где $H_u^N \in H_u$, $H_p^N \in H_p$, $H_u = \{\vec{w} \mid \vec{w} \in W_2^1, \vec{w}|_{\Sigma_1} = 0\}$, $H_p = \{q \mid q \in W_2^1, q|_{\Sigma_2} = 0\}$.

Свойства положительной определенности A и C (3.1) выполняются в бесконечномерных пространствах Соболева H_u и H_p соответственно и, как следствие, в их конечномерных подпространствах H_u^N и H_p^N . Подобное

следствие неверно для LBB условия (3.2). Следовательно, его нужно проверять для каждой конечно-элементной реализации седловой задачи. Известно [3], что аппроксимация седловой задачи квадратичными конечными элементами Q2 для перемещений скелета грунта и трilinearными КЭ Q1 для давления воды обеспечивает устойчивость задачи, а применение элементов Q1-Q1 приводит, вообще говоря, к неустойчивой системе уравнений. Также известно (см., например, [9]), что величина минимального шага по времени τ_{min} , при котором решение седловой задачи при аппроксимации конечными элементами Q1-Q1 становится устойчивым, пропорциональна квадрату шага сетки h^2 , т.е. для устойчивости достаточно выполнение условия $\tau/h^2 > const$.

Продемонстрируем численные примеры решения задачи консолидации, подтверждающие этот факт. Будем решать задачу о действии штампа. Расчетная область имеет форму куба со стороной 1 м. Боковые и нижняя границы области закреплены и непроницаемы. На верхней границе на первом шаге по времени задается перемещение штампа 0,1 м (деформация 10%). Остальная часть верхней границы свободна от напряжений. Вся верхняя граница проницаема, через штамп также может просачиваться жидкость. Штамп – квадратной формы со стороной 0,4 м, действует ровно посередине верхней грани.

Вся область сложена однородным материалом. Свойства грунта, задаваемые в расчетах: $E = 40$ МПа, $\nu = 0,4$, $\gamma_f = 10^4$ кг/(м²с²), $k_\phi = 5,5 \cdot 10^{-4}$ м/с. В задаче предполагается, что $n = const$, $k_\phi = const$. Общее время действия штампа – 1,3 с, количество шагов по времени – 10.

Для исследования устойчивости решения задачи расчеты проводились при аппроксимации конечными элементами Q2-Q1 и Q1-Q1 на различных сетках: 11x11x11, 21x21x21, 31x31x31 и 41x41x41 (указано количество узлов по трем направлениям сеток для давления воды).

Как видно на рис.3.1, при использовании элементов Q2-Q1 решение задачи устойчиво, давление воды в грунте под серединой штампа в зависимости от времени и от вертикальной координаты изменяется закономерно. А в случае аппроксимации уравнений элементами Q1-Q1 решение неустойчиво, уже на 4-м шаге по времени возникают «ложные» давления (рис.3.1б), а на 5-м (рис.3.1в) и особенно на 7-м (рис.3.1г) шагах по времени осцилляции давления воды очень сильные.

На рис.3.2 показано, что при аппроксимации элементами Q1-Q1 использование более мелких сеток приводит к более устойчивому решению задачи. Например, на 5-м шаге по времени (рис.3.2а) при расчетах на сетке 41x41x41 не наблюдается осцилляций давления воды, на сетке 21x21x21 возникает небольшой изгиб графика, а на сетке 11x11x11 – осцилляции ярко выражены. На 7-м шаге по времени (рис.3.2б) при расчетах на сетке 41x41x41 только начинается образование изгиба графика, а на сетках 21x21x21 и особенно 11x11x11 наблюдаются сильные осцилляции.

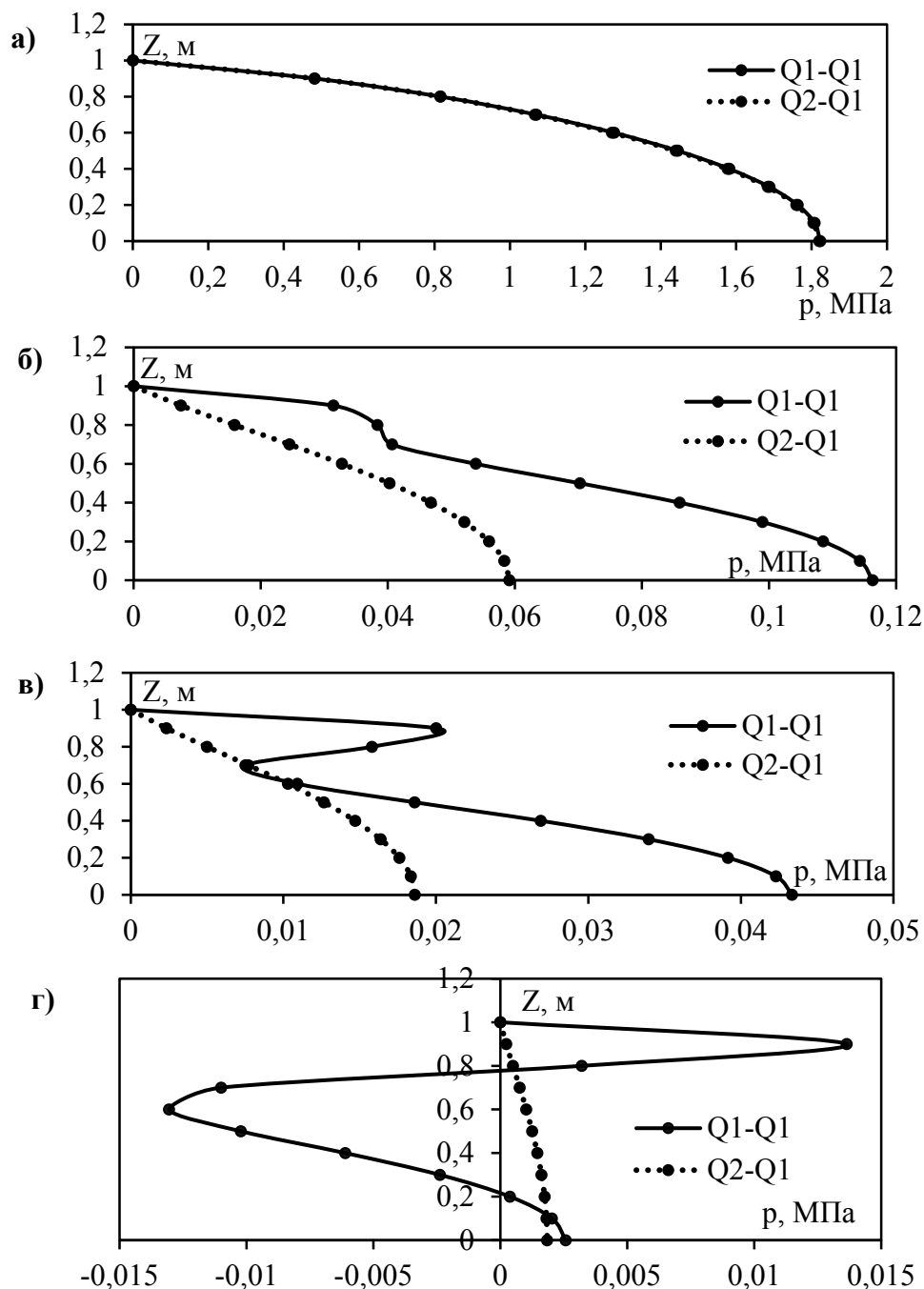


Рис.3.1. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м, б) на 4-м, в) на 5-м и г) на 7-м шагах по времени (сетка 11x11x11).

При аппроксимации седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 решение устойчиво на всех шагах по времени для всех сеток. На рис.3.3 показано сравнение решения задачи для разных сеток на 1-м и 10-м шагах по времени. Видно, что с измельчением сетки решение сходится. На 4-м, 5-м и 6-м шагах по времени решения на разных сетках практически совпадают.

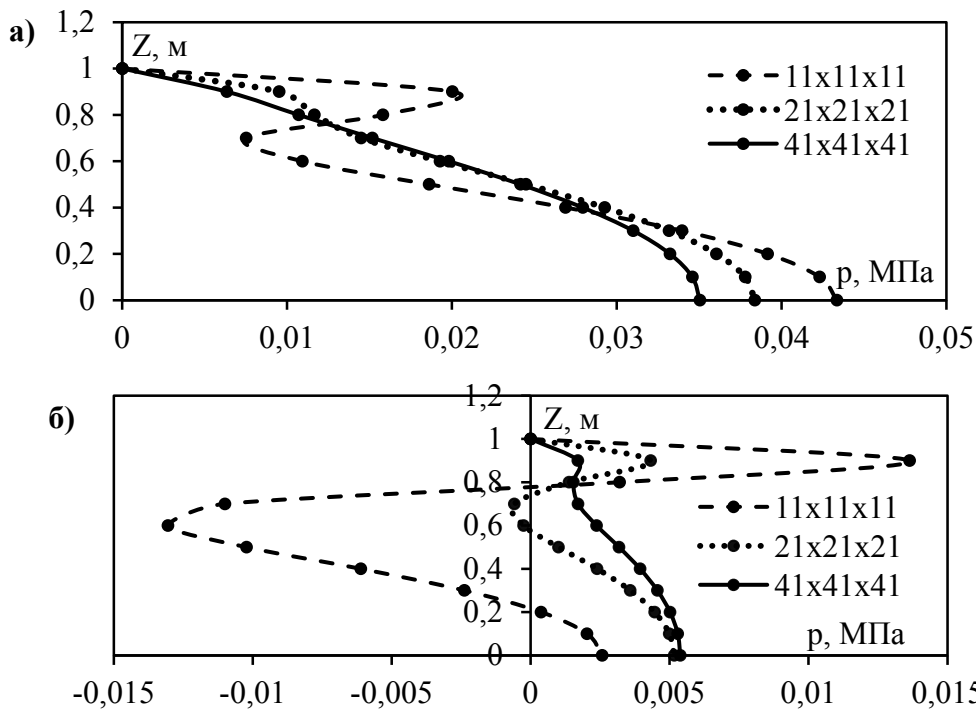


Рис.3.2. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 5-м и б) на 7-м шагах по времени (аппроксимация Q1-Q1).

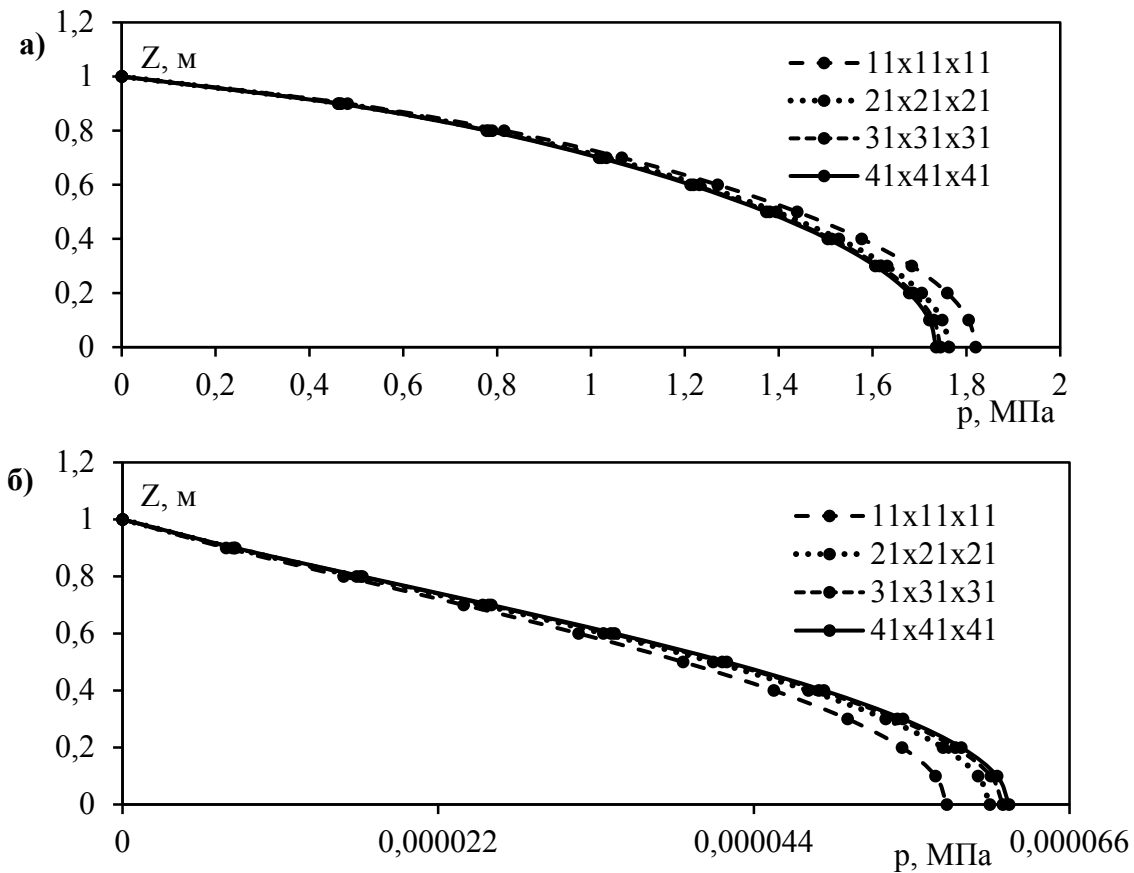


Рис.3.3. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа: а) на 1-м и б) 10-м шагах по времени (аппроксимация Q2-Q1).

4. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Для решения системы (1.1) будем использовать обобщение неявной схемы с внутренними итерациями на каждом шаге по времени по методу Узавы, предложенной еще в работе [8] (см. также [10]). Предлагаются следующие схемы интегрирования нелинейной задачи консолидации. Схема типа явного метода Эйлера

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}\left(\zeta^d\left(\hat{u}^{m-1}\right): \operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s}\right)-\alpha \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^{m, s-1}= \\ & =\alpha\left(\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}\right)\left(\operatorname{div} \Delta \hat{u}^{m, s-1}\right)-\operatorname{div}\left(\zeta^{\text{eff}}\left(\hat{u}^{m-1}\right) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s-1}\right)+ \\ & +\alpha\left(\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}\right) \cdot\left(\operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s-1}\right)-\rho d f \\ & -\operatorname{div} \Delta \hat{u}^{m, s}+\tau n^{m-1} \operatorname{div}\left(\frac{k_{\phi}\left(\hat{u}^{m-1}\right)}{n^{m-1} \gamma_f} \operatorname{grad} \hat{p}^{m, s}\right)- \\ & -n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m, s-1}=-n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m-1} . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь τ – величина шага по времени, m – номер шага по времени, s – номер итерации. Приращения перемещений и давления воды выражаются формулами

$$\Delta \hat{u}^{m, s}=\hat{u}^{m, s}-\hat{u}^{m-1}, \quad \Delta \hat{p}^{m, s-1}=\hat{p}^{m, s-1}-\hat{p}^{m-1} .$$

На каждом шаге по времени после решения системы (4.1) интегрируется уравнение пористости

$$\frac{\partial n}{\partial t}=(1-n) \operatorname{div} \dot{\hat{u}}, \quad (4.2)$$

$\dot{\hat{u}}$ – скорость перемещения твердой фазы скелета. Для решения уравнения (4.2) предлагается следующая разностная схема

$$\frac{\hat{n}^m-\hat{n}^{m-1}}{\tau}=(1-\hat{n}^{m-1}) \operatorname{div} \frac{\hat{u}^m}{\tau}$$

где \hat{u}^m и \hat{u}^{m-1} – решение задачи (4.1) на последней итерации m -го и $(m-1)$ -го шагов по времени, \hat{n}^m – значение пористости на шаге m в гауссовых точках лагранжевой сетки твердого каркаса.

Предлагается также неявная по приращениям перемещений схема для уравнения равновесия типа неявного метода Эйлера

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}\left(\zeta^d\left(\hat{u}^{m, s_1-1}\right): \operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s_1}\right)+\operatorname{div}\left(\zeta^{\text{eff}}\left(\hat{u}^{m, s_1-1}\right) \cdot \operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s_1-1}\right)- \\ & -\alpha \operatorname{grad} \Delta \hat{p}^{m, s-1}-\alpha\left(\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}\right)\left(\operatorname{div} \Delta \hat{u}^{m, s_1-1}\right)+ \\ & +\alpha\left(\operatorname{grad} \hat{p}^{m-1}\right) \cdot\left(\operatorname{grad} \Delta \hat{u}^{m, s_1-1}\right)=-\rho d f \\ & -\operatorname{div} \Delta \hat{u}^{m, s}+\tau n^{m-1} \operatorname{div}\left(\frac{k_{\phi}\left(\hat{u}^{m-1}\right)}{n^{m-1} \gamma_f} \operatorname{grad} \hat{p}^{m, s}\right)- \\ & -n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m, s-1}=-n^{m-1} \beta_f \hat{p}^{m-1} . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для достаточно малого шага по времени обычно требуется не больше трех внутренних итераций по индексу $s_1=1, \dots, S_1$. Итерационный процесс (4.3) является внутренним по отношению к процессу (4.1) по индексу s . С его помощью получаем $\Delta \hat{u}^{m, s}=\Delta \hat{u}^{m, S_1}$.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ ДЛЯ ПОРИСТОГО ГИПЕРУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Использование гиперупругой модели позволяет описать механическое поведение насыщенного жидкостью упругого материала, который может испытывать большие упругие деформации (т.е. полностью обратимые).

Одно из применений гиперупругой модели – это губчатые резиновые материалы с большим количеством сообщающихся пор. Губчатая резина с крупными сообщающимися порами легко деформируется под нагрузкой, причем скорость деформирования зависит от того, насколько быстро отжимается из пор вода. При снятии нагрузки материал быстро восстанавливает прежнюю форму.

Другой пример флюидонасыщенного пористого гиперупругого материала – это мягкие биологические ткани, содержащие кровь и плазму [11,12]. Упругое деформирование тканей мозга с большими деформациями может возникнуть, например, в результате удара головы тупым предметом, вызвавшего образование экстрадуральной гематомы головного мозга.

Гиперупругая модель может также корректно описывать деформирование под нагрузкой (в ограниченном диапазоне давлений) водонасыщенных органических геологических пород (например, органогенных известняков) [11].

Определяющие соотношения для деформирования гиперупругого материала записываются в стандартной форме

$$\underline{\underline{S}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{C}}}, \quad \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}}). \quad (5.1)$$

где $\underline{\underline{S}}$ – второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, $\underline{\underline{E}}$ – тензор деформаций Грина-Лагранжа, $\underline{\underline{C}}$ – мера деформаций Коши-Грина. Упругий потенциал W в случае изотропного материала имеет вид

$$W = W(I_1(\underline{\underline{C}}), I_2(\underline{\underline{C}}), I_3(\underline{\underline{C}})),$$

где $I_1(\underline{\underline{C}}) = \text{tr} \underline{\underline{C}}$, $I_2(\underline{\underline{C}}) = \frac{1}{2}[I_1^2 - I_1(\underline{\underline{C}}^2)]$, $I_3(\underline{\underline{C}}) = \det \underline{\underline{C}}$.

Для расчетов использовались следующие потенциалы:

1) Потенциал Сен-Венана-Кирхгофа (W_{sv})

$$W_{sv}(\underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \lambda (I_1(\underline{\underline{E}}))^2 + \mu \underline{\underline{E}} : \underline{\underline{E}},$$

λ – первый модуль Ляме, μ – модуль сдвига, $I_1(\underline{\underline{E}}) = \text{tr} \underline{\underline{E}}$. Этот потенциал является прямым обобщением квадратичного потенциала линейной теории упругости и для резиноподобных материалов годится только для деформаций меньших 5-10%, сопровождающихся большими поворотами. Он приводит к определяющему соотношению вида

$$\underline{\underline{S}} = \lambda I_1(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{E}}.$$

2) Сдвиговой потенциал Муни (W_M)

$$W_M(\underline{\underline{E}}) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3),$$

где \bar{I}_1 и \bar{I}_2 – инварианты девиатора деформационного градиента $\underline{\underline{F}}$

$$\bar{I}_1 = I_1(\underline{\underline{C}}), \quad \bar{I}_2 = I_2(\underline{\underline{C}}), \quad \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}, \quad \underline{\underline{F}} = \frac{\underline{\underline{E}}}{J^{1/3}}, \quad J = \det \underline{\underline{F}}.$$

Для этого потенциала модуль сдвига в недеформированном состоянии ($\zeta = \underline{I}$) равен: $\mu = 2(C_{10} + C_{01})$.

3) Сдвиговой потенциал Муни-Ривлина (W_{MR}) (обобщение потенциала Муни)

$$W_{MR}(\underline{E}) = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3).$$

Параметры C_{10} , C_{01} , C_{30} , входящие в упругие потенциалы, определяются в опытах на одноосное растяжение.

4) Сдвиговой потенциал Трелоара (W_{TR})

$$W_{TR} = \frac{\mu}{2}(I_1(\zeta) - 3).$$

Потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара применяются при больших деформациях (>10%). Рассмотрим некоторые численные примеры расчета нелинейной связанной задачи консолидации для гиперупругого материала при использовании элементов Q2-Q1.

5.1. Сравнение результатов расчета геометрически линейной и нелинейной задач.

Следующие примеры показывают влияние учета геометрической нелинейности при деформировании гиперупругого материала.

Будем решать задачу со штампом, описанную в разделе 3. Примем допущение, что $n = const$, $k_\phi = const$. Свойства материала и граничные условия те же самые, за исключением того, что на верхней границе задаются перемещения штампа по 2,5 см на первых четырех шагах по времени (общее перемещение штампа 10 см, общая деформация 10%). В определяющих соотношениях для гиперупругого материала использовался стандартный потенциал W_{sv} .

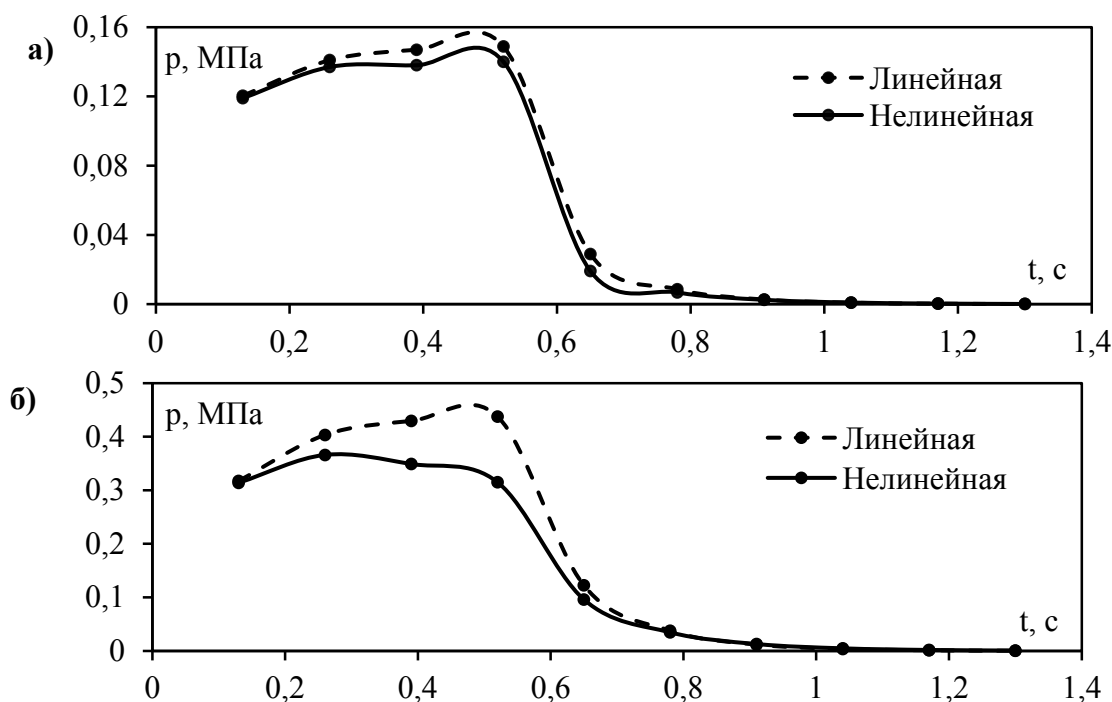


Рис.5.1. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине а) 0,1 м и б) 0,4 м.

На рис.5.1 показано сравнение результатов расчетов для геометрически линейной и нелинейной задач. Как видно, в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м (рис.5.1а) на 2-м – 4-м шагах по времени значения давления воды для линейной задачи выше, чем для нелинейной примерно на 5%, а на глубине 0,4 м (рис.5.1б) – на 10-30%.

5.2. Моделирование нелинейной задачи консолидации для различных упругих потенциалов.

На примере задачи со штампом исследуем решение задачи консолидации при аппроксимации гиперупругого материала различными потенциалами: Муни, Муни-Ривлина, Трелоара и Сен-Венана-Кирхгофа.

Штамп (квадратной формы со стороной 0,4 м) действует на верхнюю грань области в форме куба со стороной 1 м. Перемещение штампа задавалось равными ступенями на первых четырех шагах по времени, общая деформация 10%. Общее время 300 с, количество шагов по времени 10, величина шага по времени 30 с. Материал области – пористая резина. В расчетах задавались следующие свойства материала и жидкости: $E = 4,425$ МПа, $\nu = 0,475$, $\gamma_f = 10^4$ кг/(м²с²), $k_\phi = 3,58 \cdot 10^{-6}$ м/с. Расчеты выполнялись для постоянных пористости и коэффициента фильтрации.

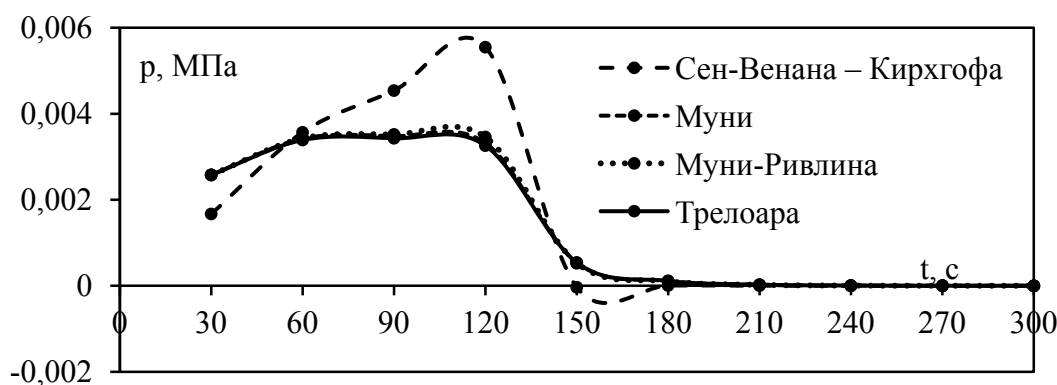


Рис.5.2. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м.

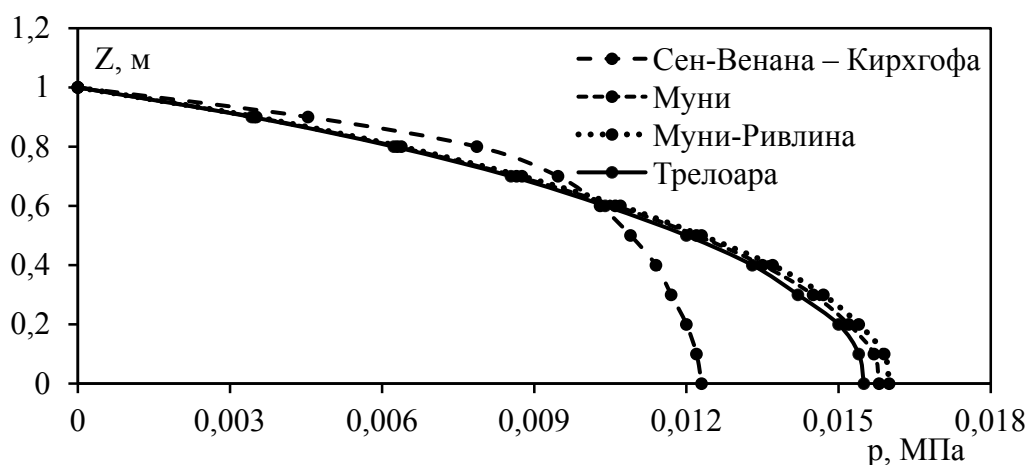


Рис.5.3. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа на 3-м шаге по времени (90 с).

Сравнение численных результатов для разных потенциалов показано на рис.5.2 и 5.3. На рис.5.2 изображено изменение давления воды во времени в точке под серединой штампа на глубине 0,1 м. А на рис.5.3 показано изменение давления воды на вертикальной линии под серединой штампа на 3-м шаге по времени. Как видно, значения давления воды при использовании потенциалов Муни, Муни-Ривлина и Трелоара почти совпадают, но они сильно отличаются от давлений, рассчитанных для потенциала Сен-Венана-Кирхгофа. Было также обнаружено (рис.5.2), что использование потенциала Сен-Венана-Кирхгофа приводит к некоторой неустойчивости решения.

5.3. Моделирование нелинейной задачи консолидации при учете изменения пористости и коэффициента фильтрации.

При решении нелинейной задачи консолидации важно учитывать изменения пористости и коэффициента фильтрации. Решалась задача о действии штампа. Область имела форму куба со стороной 1 м, штамп – квадратный со стороной 0,4 м. В расчетах задавалось перемещение штампа по 5 см на первых четырех шагах по времени (общая деформация 20%). Общее время – 128 с, число шагов по времени – 20, величина шага по времени – 6,4 с.

Зависимость коэффициента фильтрации от изменяющейся пористости задавалась по формуле Козени [13]

$$k_{\phi}(n) = \frac{dn}{1-n}.$$

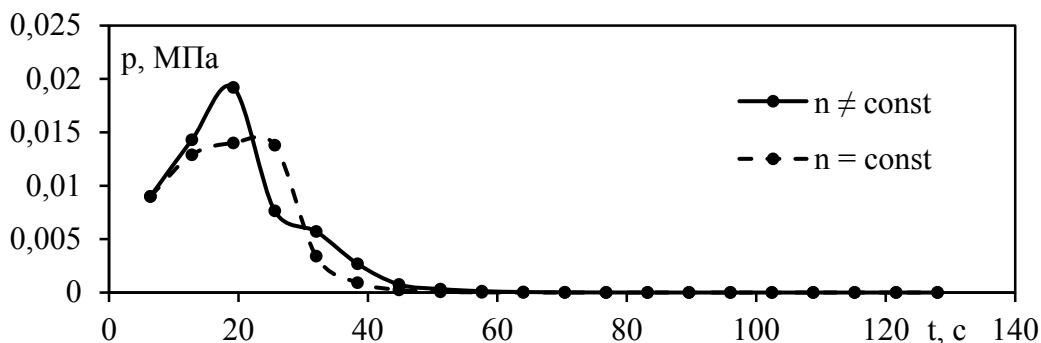


Рис.5.4. Зависимость давления воды от времени в точке под серединой штампа на глубине 0,4 м.

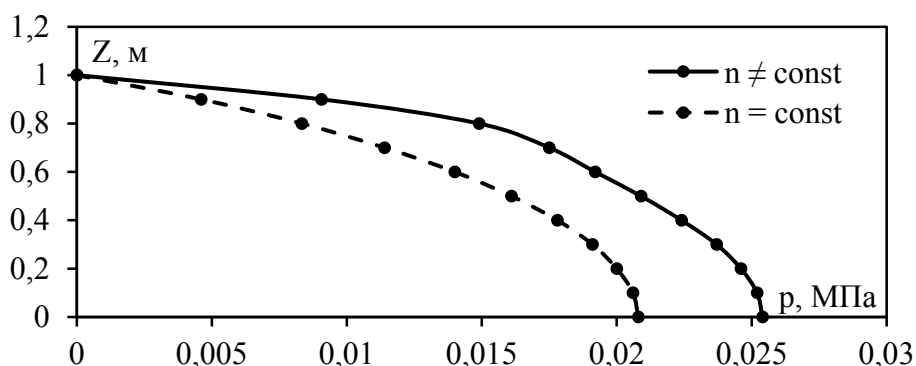


Рис.5.5. Зависимость давления воды от координаты Z под серединой штампа на 3-м шаге по времени (19 с).

В расчетах было принято $d = 4,72 \cdot 10^{-5}$ м/с, $E = 40$ МПа, $\nu = 0,4$, $k_{\phi}^0 = 8,33 \cdot 10^{-6}$ м/с (начальный коэффициент фильтрации до деформирования), $\gamma_f = 10^4$ кг/(м²с²), $n_0 = 15\%$ (начальная пористость). Сравнение решений задачи консолидации для постоянных и непостоянных n и k_{ϕ} показано на рис.5.4 и рис.5.5.

6. УРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГРУНТОВ

Как показали многочисленные экспериментальные исследования [14], большинство материалов ведет себя по-разному в условиях статического и динамического нагружений. Следовательно, важно учитывать чувствительность сред к скорости деформаций. Исследованием поведения материалов, которые проявляют вязкость только в пластической области, а до пластического состояния являются упругими, занимались еще Гогенемзер и Прагер в 1932 году [14]. Затем эти исследования были продолжены в работах В.В. Соколовского и Малверна, которые исследовали распространение волн при одноосном напряженном состоянии. Теория Гогенемзера и Прагера для сред, чувствительных к скорости деформации, была обобщена Пэжиной на случай распространения волн в сложном напряженном состоянии [14].

Уравнения, описывающие поведение грунтов в случае действия динамических нагрузок, предложены С.С. Григоряном [15]. Согласно С.С. Григоряну, необратимое изменение объема материала в процессе нагрузки выражается формулой: $\sigma = f_1(\rho)$. Для процесса разгрузки справедливо соотношение: $\sigma = f_2(\rho, \sigma^*)$, где σ^* – максимальное давление, до которого нагружен материал в процессе предшествующего необратимого изменения объема. В качестве условия текучести в теории Григоряна принята зависимость второго инварианта девиатора напряжений от давления σ

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = F(\sigma), \quad (6.1)$$

где $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}$, а $F(\sigma)$ – неубывающая функция своего аргумента. Соотношение (6.1) является условием типа идеальной пластичности, в котором предел текучести зависит от первого инварианта тензора напряжений (давления σ).

Экспериментальные исследования песчаных грунтов подтвердили справедливость условия пластичности (6.1), а также позволили установить, что для песчаных грунтов в реальных условиях при $\sigma < 1,5$ МПа функция $F(\sigma)$ имеет вид: $F(\sigma) = (\alpha\sigma + \beta)$, где α и β – постоянные [14].

В работе Ольшака и Пэжины предложены определяющие уравнения для грунтов, учитывающие их реологические свойства и чувствительность к изменению скорости деформаций [14].

Одна из актуальных проблем, связанных с деформированием водонасыщенного грунта под нагрузкой, – это ухудшение ровности нежестких дорожных покрытий в процессе эксплуатации дороги. Для моделирования определяющих соотношений для упруго-вязкопластического деформирования грунта при кратковременных нагрузках предлагается использовать модель

Григоряна-Рыкова [15,16], обобщенную на большие деформации. В этой теории ассоциированный закон течения рассматривается в пятимерном пространстве Ильюшина, а соотношение между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций определяется согласно теории вязкопластичности.

Уравнение равновесия в вариационном виде следует переписать в виде

$$\int_V (\underline{d}(\bar{w}) : \underline{\sigma}^{TR}(d\bar{u})) dV + \int_V \underline{\sigma}^{eff}(\bar{u}) : \left[(\bar{\nabla} \bar{w})^T \cdot \bar{\nabla} d\bar{u} \right] dV -$$

$$- \int_V \alpha dp \bar{\nabla} \cdot \bar{w} dV - \int_V \alpha p (\bar{\nabla} \cdot d\bar{u}) (\bar{\nabla} \cdot \bar{w}) dV -$$

$$- \int_V \alpha p \bar{\nabla} \bar{w} : \bar{\nabla} d\bar{u} dV - \int_V \rho d\bar{f} \cdot \bar{w} dV - \int_{\Sigma_2} d\bar{S} \cdot \bar{w} d\Sigma = 0$$

Здесь $\underline{\sigma}^{TR}$ – производная Трусделла [17] тензора напряжений Коши. Один из вариантов формулировки соотношений теории пластичности состоит в использовании тензора Кирхгофа $\underline{\tau}$ [18]

$$\underline{\tau} = J \underline{\sigma}.$$

Этот тензор имеет те же компоненты, что и второй тензор Пиолы-Кирхгофа \underline{S} , но в текущем локальном базисе, а не в начальном

$$\underline{\tau} = J \sigma^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad \underline{S} = J \sigma^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j.$$

Производные Трусделла тензора Коши и тензора Кирхгофа связаны соотношением [17]

$$J \underline{\sigma}^{TR} = \underline{\tau}^{TR},$$

где для гипотупругого материала:

$$\dot{\underline{S}} = \underline{C}^E(\underline{E}) : \dot{\underline{E}}, \quad \underline{\tau}^{TR}(d\bar{u}) = \underline{C}^*(\underline{E}) : \underline{d}(d\bar{u}), \quad C_{ijkl}^* = F_{ip} F_{jq} F_{kr} F_{ls} C_{pqrs}^E,$$

\underline{d} – тензор скоростей деформации.

В описании модели используется аддитивное разложение девиатора скоростей деформаций $\bar{\underline{d}}$ и скорости объемной деформации $\overset{\circ}{d}$

$$\underline{d} = \bar{\underline{d}} + \frac{1}{3} \overset{\circ}{d} \underline{I}, \quad \bar{\underline{d}} = \bar{\underline{d}}^e + \bar{\underline{d}}^p, \quad \overset{\circ}{d} = \overset{\circ}{d}^e + \overset{\circ}{d}^{vp},$$

где $\bar{\underline{d}}^e$ и $\bar{\underline{d}}^p$ – девиаторы скоростей упругой и пластической деформации, $\overset{\circ}{d}^e$ и $\overset{\circ}{d}^{vp}$ – скорости объемной упругой и вязкопластической деформации.

С учетом малости упругих деформаций принимается употребляемая в литературе [18] гипотеза, что в области упругости

$$\underline{\tau}^{TR} = \underline{C} : [\underline{d} - \bar{\underline{d}}^p],$$

где \underline{C} – постоянный тензор модулей упругости.

Функция нагружения имеет вид

$$f = \frac{1}{2} \bar{\underline{\tau}} : \bar{\underline{\tau}} - \frac{1}{2} F^2, \quad F(\overset{\circ}{\tau}, \chi) = A + M \overset{\circ}{\tau} + \chi. \tag{6.2}$$

В работе [15] для сдвиговых свойств выбрана модель идеальной пластичности, но удобно использовать малое изотропное упрочнение χ

для устойчивости вычислений. Здесь $\bar{\underline{\tau}} = \underline{\tau} - \tau \delta_{ij}$ – девиатор тензора напряжений;

$\overset{\circ}{\tau} = \frac{1}{3} \tau_{ij} \delta_{ij}$; M – параметр, рассчитываемый через угол внутреннего трения грунта; A – параметр, рассчитываемый через угол внутреннего трения и сцепление грунта.

В пятимерном пространстве Ильюшина при активном нагружении ($f = 0$) выполняется ассоциированный закон пластического течения, упругая часть деформации подчиняется закону Гука в скоростях для девиаторов, а соотношение между $\left(\overset{\circ}{\tau}\right)$ и $\dot{\theta}$ согласуется с теорией вязкопластичности [16]

$$\bar{d}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \bar{\tau}}, \quad \bar{d}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\bar{\tau}}, \quad \dot{d} = \frac{\left(\overset{\circ}{\tau}\right)}{\left(f^d(\theta)\right)' } + g\left(\overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta)\right), \quad (6.3)$$

$$\theta = I_3(\underline{C}) - 1.$$

Здесь $g\left(\overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta)\right)$ – функция, характеризующая вязкость, \underline{C} – мера деформаций Коши-Грина. При быстром деформировании отношение между шаровыми тензорами напряжений и деформаций описывается функцией f^{st} , а при медленном – функцией f^d .

Если скорость объемной деформации близка к постоянной, то третье соотношение в (6.2) удобно заменить на следующие зависимости [15]: $\overset{\circ}{\tau} = f_1(\theta)$ при нагрузке и $\overset{\circ}{\tau} = f_2\left(\theta, \overset{\circ}{\tau}^*\right)$ при разгрузке ($\overset{\circ}{\tau}^*$ – максимальное давление, до которого нагружен материал в процессе предшествующего необратимого изменения объема).

В качестве параметра упрочнения на сдвиг предлагается принять величину эффективной пластической деформации, или эквивалентную по Мизесу деформацию $\varepsilon_{eqv}^p = \int_0^t \sqrt{\bar{d}_{ij}^p \bar{d}_{ij}^p} dt$. Функцию изотропного χ упрочнения выбираем

в виде

$$\chi = \varphi\left(\varepsilon_{eqv}^p\right). \quad (6.4)$$

Из условия непрерывности поверхности нагружения (6.2) с учетом (6.4) получаем

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\tau}_{ij} \dot{\tau}_{ij} - MF \left(\overset{\circ}{\tau}\right)}{F^2 \varphi'(\varepsilon_{eqv}^p)}. \quad (6.5)$$

Из (6.3) и (6.5) выводятся определяющие соотношения в виде [16]

$$\underline{\tau}^{TR} = \underline{C}^* : \underline{d}(d\bar{u}) + \underline{\tau}^* dt,$$

где компоненты тензоров \underline{C}^* и $\underline{\tau}^*$ в декартовой системе координат имеют вид

$$C_{ijkl}^* = 2\mu \left(I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} - \frac{\bar{\tau}_{ij} \bar{\tau}_{kl}}{B} \right) + \left(f^d(\theta) \right)' \left(\delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{MF \bar{\tau}_{ij} \delta_{kl}}{B} \right),$$

$$\tau_{ij}^* = -\left(f^d(\theta)\right)' g\left(\overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta)\right) \left(\delta_{ij} + \frac{MF\bar{\tau}_{ij}}{B}\right), \quad B = F^2 \left(1 + \frac{\varphi'(\varepsilon_{eqv}^p)}{2\mu}\right),$$

μ – модуль на сдвиг в упругой области.

Сделаем предположение, что упрочнение происходит по линейному закону [16]. Тогда функции модели будут иметь вид

$$\varphi(\varepsilon_{eqv}^p) = 2\mu_{sec}\varepsilon_{eqv}^p, \quad \varphi'(\varepsilon_{eqv}^p) = 2\mu_{sec}, \quad \mu_{sec} = \frac{\mu\mu_p}{\mu - \mu_p}.$$

Здесь μ_{sec} – секущий модуль сдвига, который выражается через μ и модуль сдвига в области пластических деформаций μ_p .

$$\dot{\chi} = 2\mu_{sec}\sqrt{\bar{d}_{ij}^p \bar{d}_{ij}^p},$$

$$f^{st}(\theta) = \begin{cases} K\theta, & \theta \leq \theta^{st} \\ (K - K_t^{st})\theta^{st} + K_t^{st}\theta, & \theta > \theta^{st} \end{cases}$$

$$f^d(\theta) = \begin{cases} K\theta, & \theta \leq \theta^d \\ (K - K_t^d)\theta^d + K_t^d\theta, & \theta > \theta^d \end{cases}$$

K_t^{st} , K_t^d – статический и динамический тангенциальные модули объемного сжатия в области пластических деформаций, θ^{st} , θ^d – пределы упругости по объемному сжатию для статической и динамической диаграмм. Функция g , согласно [16], имеет вид

$$g\left(\overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta)\right) = \frac{1}{\gamma} \left\langle \overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta) \right\rangle,$$

$$\left\langle \overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta) \right\rangle = \begin{cases} 0, & \overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta) < 0 \\ \overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta), & \overset{\circ}{\tau} - f^{st}(\theta) > 0 \end{cases}$$

γ – вязкость грунта.

7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ ГРУНТОВ ПО 2D И 3D МОДЕЛЯМ РЕАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В математическую модель деформирования грунта в качестве параметров входят эффективные свойства грунта, поэтому их определение является одним из этапов моделирования. Для определения эффективных свойств возможен подход, основанный на решении локальных задач в представительной области [19,20].

Для примера проанализируем результаты расчетов эффективных упругих модулей по методу осреднения на основе трехмерных и двухмерных моделей реальной структуры чистых известняков (содержание кальцита >95%). Плоские модели были созданы в результате оцифровки фотографий сечений композитов, полученных с помощью растрового электронного микроскопа. Трехмерные модели были построены по изображениям, полученным с помощью

рентгеновского томографа. В расчетах задавались следующие свойства материала скелета известняка: $E = 50$ ГПа, $\nu = 0,33$. Расчеты проводились в конечно-элементной программе.

На рис.7.1 показана зависимость эффективных модулей Юнга от пористости, построенная по результатам 2D и 3D расчетов и экспериментальным данным. Как видно, 3D моделирование дает значения модулей Юнга, близкие к экспериментальным. Модули упругости, рассчитанные по 2D и 3D моделям, совпадают при малых значениях пористости (<5%), а при пористости от 7 до 20% значения 2D модулей ниже на 10-20%, чем значения 3D модулей и экспериментальные. При больших пористостях (>20%) значения модулей Юнга по 2D расчетам и экспериментальные данные становятся близкими.

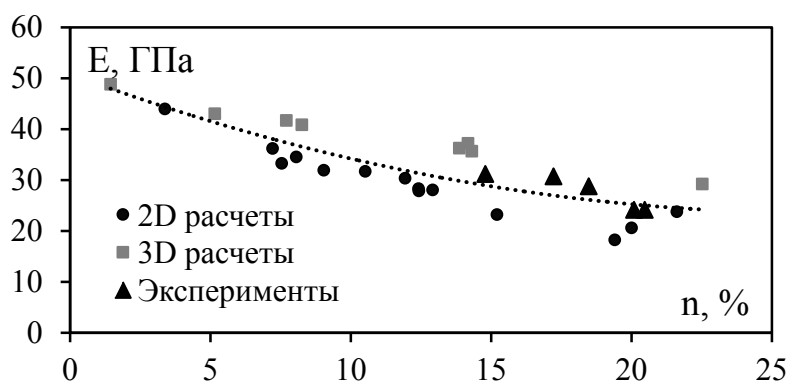


Рис.7.1. Зависимость эффективных упругих модулей чистых известняков от пористости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты численного моделирования, использующего предложенную математическую модель консолидации.

Как показали численные эксперименты, при аппроксимации линейной седловой задачи консолидации конечными элементами Q2-Q1 решение задачи устойчиво. А при аппроксимации конечными элементами Q1-Q1 возникают осцилляции давления воды. В этом случае может помочь стабилизация задачи с помощью регулирования отношения τ/h^2 , определяющего устойчивость решения.

При расчетах нелинейной задачи для гиперупругого материала было обнаружено, что использование квадратичного потенциала приводит к некоторой неустойчивости решения, а потенциалы Муни, Муни-Ривлина и Трелоара дают корректные результаты при деформациях пористой водонасыщенной резины $\geq 10\%$. Выявлено существенное влияние изменения пористости на давление жидкости. Приведен пример вычисления зависимости эффективных свойств пористого материала от пористости вычислительным методом. Предложена геометрически нелинейная модель деформирования водонасыщенного вязкоупругопластического грунта, которая может использоваться для расчета деформирования дорожного полотна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation* // J. Appl. Phys. – 1941. – Vol.12. – No.2. – Pp.155-164.
2. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1995. – Vol.122. – Pp.145-171.
3. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1998. – Vol.159. – Pp.103-122.
4. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part I: Theory and formulation* // Comput. Geosci. – 2018. – Vol.22. – Iss.3. – Pp.623-637.
5. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В. *Связанная задача консолидации в нелинейной постановке. Теория и метод решения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2020. – Т.26. – №1. – С.122-138.
6. Donea J., Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems*. – Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2003. – 358 p.
7. Быченков Ю.В., Чижонков Е.В. *Итерационные методы решения седловых задач*. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 349 с.
8. Киселев Ф.Б., Шешенин С.В. *Разностная схема для задачи нестационарной фильтрации в слоистых грунтах* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1996. – №4. – С.129-135.
9. Какушев Э.Р. *Численное решение связанных трехмерных краевых задач упругой пористой среды* // Дисс. соиск. уч. ст. канд. физ.-мат. наук. – Москва, 2013. – 111 с.
10. Шешенин С.В., Киселев Ф.Б., Артамонова Н.Б. *Неявные численные схемы в задачах фильтрации в пористых средах* // Вестник МГСУ. – 2011. – №6. – С.312-317.
11. Selvadurai A.P.S., Suvorov A.P. *Coupled hydro-mechanical effects in a poro-hyperelastic material* // J. Mech. Phys. Solids. – 2016. – Vol.91. – Pp.311-333.
12. Suvorov A.P., Selvadurai A.P.S. *On poro-hyperelastic shear* // J. Mech. Phys. Solids. – 2016. – Vol.96. – Pp.445-459.
13. Гаев А.Я. и др. *Гидрогеология. Часть 1*. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 75 с.
14. Новацкий В.К. *Волновые задачи теории пластичности*. – М.: Мир, 1978. – 307 с.
15. Григорян С.С. *Об основных представлениях динамики грунтов* // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т.24. – С.1057-1072.
16. Киселев Ф.Б., Шешенин С.В. *Моделирование контакта подземных сооружений с упруговязкопластическим грунтом* // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 2006. – №3. – С.61-65.
17. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. – New York: Cambridge University Press, 2008. – 340 p.
18. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 392 p.
19. Артамонова Н.Б., Шешенин С.В., Фролова Ю.В., Бессонова О.Ю., Новиков П.В. *Вычисление компонент эффективных тензоров упругих модулей и параметра Био пористых геокомполитов* // Механика композитных материалов. – 2019. – Т.55. – №6. – С.1043-1058.

20. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород.* – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 208 с.

REFERENCES

1. Biot M.A. *General theory of three-dimensional consolidation.* J. Appl. Phys., 1941, Vol.12, No.2, Pp.155-164.
2. Borja R.I., Alarcón E. *A mathematical framework for finite strain elastoplastic consolidation. Part 1: Balance laws, variational formulation, and linearization.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1995. Vol.122, Pp.145-171.
3. Borja R.I., Tamagnini C., Alarcón E. *Elastoplastic consolidation at finite strain. Part 2: Finite element implementation and numerical examples.* Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1998, Vol.159, Pp.103-122.
4. Liu Z., Liu R. *A fully implicit and consistent finite element framework for modeling reservoir compaction with large deformation and nonlinear flow model. Part 1: theory and formulation.* Comput. Geosci., 2018, Vol.22, Iss.3, Pp.623-637.
5. Artamonova N.B., Sheshenin S.V. *Svyazannaya zadacha konsolidatsii v nelinejnoj postanovke. Teoriya i metod resheniya [A coupled consolidation problem in a nonlinear formulation. Theory and method of solution].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2020, Vol.26, No.1, Pp.122-138.
6. Donea J., Huerta A. *Finite Element Methods for Flow Problems.* Chichester, John Wiley & Sons Ltd, 2003, 358 p.
7. Bychenkov YU.V., Chizhonkov Ye.V. *Iteratsionnye metody resheniya sedlovykh zadach [Iterative methods for solving saddle problems].* Moskva, BINOM, Laboratoriya znaniy, 2014, 349 p.
8. Kiselev F.B., Sheshenin S.V. *The difference scheme for the problem of non-stationary filtration in layered soils.* Mech. Solids, 1996, Vol.31, No.4.
9. Kakushev E.R. *Chislennoe reshenie svyazannykh trekhmernykh kraevykh zadach uprugoj poristoj sredy [Numerical solution of coupled three-dimensional boundary value problems of an elastic porous medium].* Dissertatsiya soiskatelya uchenoj stepeni kandidata fiziko-matematicheskikh nauk. Moskva, 2013, 111 p.
10. Sheshenin S.V., Kiselev F.B., Artamonova N.B. *Neyavnye chislennye skhemy v zadachakh fil'tratsii v poristykh sredakh [Implicit numerical schemes in filtration problems in porous media].* Vestnik MGSU, 2011, No.6, Pp.312-317.
11. Selvadurai A.P.S., Suvorov A.P. *Coupled hydro-mechanical effects in a poro-hyperelastic material.* J. Mech. Phys. Solids, 2016, Vol.91, Pp.311-333.
12. Suvorov A.P., Selvadurai A.P.S. *On poro-hyperelastic shear.* J. Mech. Phys. Solids, 2016, Vol.96, Pp.445-459.
13. Gayev A.Ya. and etc. *Gidrogeologiya. Chast' 1 [Hydrogeology. Part 1].* Orenburg, OGU, 2010, 75 p.
14. Novatskiy V.K. *Volnovye zadachi teorii plastichnosti [Wave problems of plasticity theory].* Moskva, Mir, 1978, 307 p.
15. Grigoryan S.S. *Ob osnovnykh predstavleniyakh dinamiki gruntov [On the basic concepts of soil dynamics].* Prikladnaya matematika i mekhanika, 1960, Vol.24. Pp.1057-1072.
16. Kiselev F.B., Sheshenin S.V. *Modelirovanie kontakta podzemnykh sooruzhenij s uprugovyazkoplasticheskim gruntom [Modelling of a contact of underground constructions with viscoelastoplastic soil].* Vestnik MGU. Seriya 1. Matematika. Mekhanika, 2006, No.3, Pp.61-65.

17. Bonet J., Wood R.D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. New York, Cambridge University Press, 2008, 340 p.
18. Simo J.C., Hughes T.J.R. *Computational inelasticity*. New York, Springer-Verlag, 1998, 392 p.
19. Artamonova N.B., Sheshenin S.V., Frolova Yu V., Bessonova O.Yu, Novikov P.V. *Calculating components of the effective tensors of elastic moduli and Biot's parameter of porous geocomposites*. Mechanics of Composite Materials, 2020, Vol.55, No.6, Pp.715-726.
20. Vlasov A.N., Merzlyakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoystv v mekhanike skal'nykh porod [Averaging deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.

Поступила в редакцию 02 августа 2020 года.

Сведения об авторах:

Шешенин Сергей Владимирович – д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: sergey.sheshenin@mail.ru

Артамонова Нина Брониславовна – к.г.-м.н., с.н.с., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва, Россия; e-mail: artamonovanb@mail.ru