

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmc.ras.2020.26.03.327_340.03

ДВИЖЕНИЕ КОМПОЗИТНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПО ТВЁРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ С УЧЁТОМ КОМБИНИРОВАННОГО СУХОГО ТРЕНИЯ*

Киреенков А.А.¹, Федотенков Г.В.^{2,3}¹ *Институт проблем механики РАН им. А. Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия*² *НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*³ *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Предложена реализация теории многокомпонентного сухого трения в некоторых инженерных задачах контактного взаимодействия композитных оболочек с жесткими опорными поверхностями. Основное внимание уделено построению аналитических моделей комбинированного сухого трения с учетом анизотропии коэффициентов сухого трения и реального распределения нормальных и касательных контактных напряжений. Эти модели могут быть применены для более детального исследования нестационарных режимов качения пневматики, характеризующихся одновременным скольжением и вращением. Распределение квазистатического контактного давления определяется из решения контактной задачи для композитной сферической оболочки и недеформируемой плоской поверхности. Использовано разрешающее уравнение С.А.Амбарцумяна для трансверсально изотропной сферической оболочки. Подход к решению контактной задачи основан на принципе суперпозиции с применением функции влияния для оболочки. Функция влияния представляет собой нормальные перемещения как решение задачи о воздействии на оболочку единичной сосредоточенной нагрузки. Эта задача решена с применением разложений в ряды по полиномам Лежандра и по их производным. После определения функции влияния, с помощью принципа суперпозиции контактная задача сводится к разрешающему интегральному уравнению относительно искомого контактного давления. С использованием разложения в ряд по полиномам Лежандра, и свойства их ортогональности, интегральное уравнение приводится к алгебраическому уравнению, неизвестными в котором выступают все коэффициенты ряда разложения контактного давления. С применением принципа усечения и дискретизации по меридиональной координате задача сведена к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов ряда разложения для контактного давления.

Ключевые слова: сферическая оболочка; контактная задача; теории трения; комбинированное трение; качение с проскальзыванием; верчение

MOTION OF A COMPOSITE SPHERICAL SHELL ON A SOLID SURFACE UNDER CONDITIONS OF COMBINED DRY FRICTION

Kireenkov Alexei A., Fedotenkov Grigory V.

*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-08-01120 А).

ABSTRACT

The implementation of the theory of multicomponent dry friction in some engineering problems of the contact interaction of composite shells and rough rigid support planes is proposed. The main attention is paid to the construction of analytical models of combined dry friction, taking into account the anisotropy of the dry friction coefficients and the real distribution of normal and tangential contact stresses. These models can be used for a more detailed study of transient rolling modes of pneumatics, characterized by simultaneous sliding and rotation. The quasi-static distribution of the contact pressure is based on the solution of the contact problem for the spherical composite shell and the absolutely rigid plane. The governing equation of S.A.Ambartsumyan for a transversally isotropic elastic shell is used as a background, the superposition principle, and the transient function for a shell. Such a function is a normal translation as a solution of the problem for a shell loaded by the unit concentrated force. This problem is solved by expanding the unknowns in series with respect to Legendre polynomials and their derivatives. After construction of the transient function the contact problem is reduced to the integral equation for the contact pressure on the basis of the superposition principle. The integral equation is then reduced to the algebraic one for the expansion factors of the contact pressure using the orthogonality of Legendre polynomials. Finally, after the truncation of the series and by discretization along the meridian coordinate the obtained problem is reduced to the algebraic system for the expansion factors of the contact pressure.

Keywords: plates; higher-order theories; Lagrangian formalism; normal waves; phase frequencies; propagating modes; convergence

ВВЕДЕНИЕ

Теория многокомпонентного сухого трения [1-12] доказала свою эффективность при исследовании динамики твердых тел при различных типах кинематического взаимодействия между ними. Теория позволила корректно описать возникающие эффекты трения, а также помогла создать физически согласованные феноменологические модели трения. В соответствии с этой теорией при построении моделей трения используется локальная формулировка закона Кулона для каждого малого элемента пятна контакта, где соответствующая суммарная скорость скольжения обусловлена продольным скольжением и вращением. Поэтому результирующий вектор силы сухого трения и момент получаются в результате интегрирования по площади контакта. Оба зависят как от скорости скольжения, так и от угловой скорости вращения.

Точные интегральные представления для результирующего вектора силы и момента трения оказались слишком сложными, чтобы использовать их в инженерном анализе динамики систем с сухим трением. Избежать этого затруднения позволила методика прямого построения приближенных моделей, минуя вычисления кратных интегралов по пятну контакта, основанная на аналитических свойствах точных интегральных представлений. В начале эффективными оказались модели основанные на дробно-линейных аппроксимациях Паде. Эти модели также имели недостатки, связанные с нарушением качественного вида формы «зоны застоя» и необходимостью

использования негладких преобразований в случае, если один из кинематических параметров менял знак. Дальнейшее развитие теории привело к созданию приближенных моделей трения без использования негладких функций, полностью удовлетворяющих всем аналитическим свойствам точных интегральных представлений.

Основное достоинство разработанных приближенных моделей трения состоит в том, их коэффициенты представляют собой числа, которые возможно определить как на основе численного моделирования, так и из экспериментов. Однако, решение реальных инженерных проблем, таких как динамика авиационных пневматических шин в условиях комбинированной кинематики, показало, что предложенные ранее модели трения должны быть дополнительно улучшены с учетом упругих свойств взаимодействующих тел, которые, в свою очередь, серьезно влияют на значение используемых коэффициентов. Кроме того, возникает необходимость учитывать анизотропию коэффициента сухого трения [5-13] и сложную структуру движущегося тела.

В предлагаемом ниже исследовании рассматривается влияние ортотропности коэффициента трения на динамику композитной оболочки сферической формы, совершающей сложное движение: одновременное качение и верчение при наличии проскальзывания.

1. ЛОКАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ

В общем случае плоско-параллельного относительного движения упругих твердых тел при наличии одновременного скольжения и верчения с конечным пятном контакта требуется качественная переработка закона сухого трения Амонтона-Кулона.

Первая обобщенная формулировка, учитывающая спин в формулах для силы сухого трения, была предложена Эрисманом (Erisman) и Контенсу (Contensou). Ими было показано, что результирующий вектор сил сухого трения существенно зависит от верчения. В [14] было предложено дальнейшее усовершенствование этой концепции – многокомпонентная теория сухого трения была сформулирована для общего случая комбинированного скольжения, верчения и качения. В дальнейшем была предложена дифференциальная формулировка закона Кулона как локальной модели фрикционного взаимодействия в каждой точке зоны контакта S [5,13]

$$\forall M \in S \quad \mathbf{t} = -|\sigma_v| \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_\Sigma}{|\mathbf{v}_\Sigma|} \quad (\mathbf{v}_\Sigma \neq 0), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v}_\Sigma = \mathbf{v}_0 - R\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau. \quad (1.2)$$

Здесь через \mathbf{v}_Σ обозначена суммарная скорость относительного проскальзывания в произвольной точке $M \in S$; $\mathbf{v}_0(\mathbf{q})$ – продольная абсолютная скорость; $\mathbf{w}_\tau(\mathbf{q})$ – угловая скорость качения; $\mathbf{w}_v(\mathbf{q})$ – угловая скорость верчения; $R(M)$ – радиус кривизны катящегося тела, вычисленный в точке M ; $\mathbf{r}_\tau(M)$ – радиус вектор точки $M \in S$ в плоскости контакта; \mathbf{e}_3 – нормальный единичный вектор плоскости контакта; \mathbf{t} – тангенциальные контактные напряжения в пятне контакта S , а σ_v – нормальное контактное давление. Таким образом, условия

безотрывного движения могут быть локально сформулированы в точке $M \in S$ следующим образом [5,13]

$$I_2^{-2}(\mathbf{f}) \left\{ I_1^2(\mathbf{f}) |\mathbf{t}|^2 + [I_1(\mathbf{f}) \mathbf{f}_S + \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{f}] : \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \right\} \leq |\sigma_v|^2. \quad (1.3)$$

Рассмотрим комбинированную кинематику, т.е. одновременное скольжение, вращение и качение. Учитывая анизотропию сухого трения, получим следующую формулу для тангенциального напряжения [5,13]

$$\mathbf{t}_1 = -|\sigma_v| |\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|^{-1} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau), \quad (1.4)$$

где нормальное давление, учитывающее эффект качения, представлено линейным приближением [5,13]

$$\sigma_v = \sigma_0 \left[1 + (\mathbf{r}_\tau \times \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau / |\mathbf{w}_\tau|) \cdot \mathbf{e}_3 \right]. \quad (1.5)$$

Здесь $\sigma_0 = \sigma_v(\mathbf{w}_\tau = 0)$, а $\mathbf{h} = h_{\alpha\beta} \mathbf{e}^\alpha \mathbf{e}^\beta$ – "тензор трения качения" для анизотропного упругого тела. Предполагается, что они однородные и положительно орпделенные

$$\mathbf{h} \neq \mathbf{h}(M); \quad \forall \mathbf{w}_\tau = \mathbf{w}_\tau(\mathbf{q}) \quad \mathbf{w}_\tau^T \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau > 0. \quad (1.6)$$

Статические нормальные контактные наряжения σ_0 определяются из решения соответствующей контактной задачи теории упругости в квази-статической постановке. Таким образом, модель (1.4)-(1.6) позволяет использовать статическое решение в качестве первого приближения для моделирования комбинированного трения качения и скольжения, и сложное моделирование динамики контактного взаимодействия не требуется.

Теперь, учитывая влияние качения на контактное давление на основе формулы (1.5) и используя формулу (1.4) для тангенциального контактного напряжения, учитывающего одновременно как скольжение (этот член обозначается как \mathbf{t}_1), так и вращение (этот член обозначается как \mathbf{t}_2), мы получаем локальную модель анизотропного сухого трения в случае комбинированной кинематики

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2; \\ \mathbf{t}_1 &= -|\sigma_0| \left[1 + \left(\mathbf{r}_\tau \times \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau}{|\mathbf{w}_\tau|} \right) \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3)}{|\mathbf{v}_0 - R\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|}; \\ \mathbf{t}_2 &= -|\sigma_0| \left[1 + \left(\mathbf{r}_\tau \times \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau}{|\mathbf{w}_\tau|} \right) \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{r}_\tau)}{|\mathbf{v}_0 - R\mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

2. ГЛОБАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ АНИЗОТРОПНОГО СУХОГО ТРЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КОМБИНИРОВАННОЙ КИНЕМАТИКИ

Динамическое взаимодействие слабдеформированного твердого тела с шероховатой опорной плоскостью определяется нормальной реакцией \mathbf{N} , результирующим вектором касательных сил \mathbf{T} , моментом сопротивления качению \mathbf{M}_τ и моментом сухого трения \mathbf{M}_v . Эти величины получены интегрированием нормального контактного напряжения (1.5), а также суммарного тангенциального напряжения (1.7) по площадке контакта S . Принимая во внимание анизотропию сухого трения, мы можем представить

соответствующие интегральные соотношения, сформулированные в [5,13] следующим образом

$$\mathbf{N} = \int_S \sigma_v \mathbf{e}_3 dS = \int_S \sigma_0 \left[\mathbf{e}_3 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \right] dS; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{M}_\tau = \int_S \sigma_v \mathbf{r}_\tau \times \mathbf{e}_3 dS = \int_S \sigma_0 \mathbf{r}_\tau \times \left[\mathbf{e}_3 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \right] dS; \quad (11)$$

$$\mathbf{T} = - \int_S \mathbf{t} dS = - \int_S \sigma_0 \left[1 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R \mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_v &= - \int_S \mathbf{r}_\tau \times \mathbf{t} dS = \\ &= - \int_S \sigma_0 \left[1 + \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} \cdot \mathbf{e}_3 \right] \frac{\mathbf{r}_\tau \times [\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_0 - R \mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau)]}{|\mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau|} dS \end{aligned} \quad (2.3)$$

В формуле (2.1) результирующая сила \mathbf{N}_0 статического контактного давления σ_0 и ее изменение \mathbf{N}_1 , вызванное эффектом качения, могут быть записаны следующим образом

$$\mathbf{N}_0 = N_0 \mathbf{e}_3, \quad N_0 = \int_S \sigma_0 dS; \quad (2.4)$$

$$\mathbf{N}_1 = \int_S \sigma_0 \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} dS = N_1 \mathbf{e}_3, \quad N_1 = - \mathbf{S}_\sigma \cdot \mathbf{h} \cdot \frac{\mathbf{w}_\tau}{|\mathbf{w}_\tau|} \quad (2.5)$$

Мы имеем аналогичные формулы для пары моментов сопротивления качению, где «статическая» составляющая, которая не исчезает в случае асимметрии тела качения, и «динамическая» определяются формулами (2.6) и (2.7) соответственно

$$\mathbf{M}_\tau^0 = \int_S \sigma_0 \mathbf{r}_\tau \times \mathbf{e}_3 dS = \mathbf{S}_\sigma; \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_\tau^1 = \int_S \sigma_0 \mathbf{r}_\tau \times \frac{\mathbf{r}_\tau \times (\mathbf{h} \cdot \mathbf{w}_\tau)}{|\mathbf{w}_\tau|} dS = - \mathbf{J}_\sigma \cdot \mathbf{h} \cdot \frac{\mathbf{w}_\tau}{|\mathbf{w}_\tau|}. \quad (2.7)$$

В формулах (2.6)-(2.7) через \mathbf{S}_σ обозначен вектор моментов, а через \mathbf{J}_σ – тензор инерции площадки контакта S в случае статического распределения контактного давления σ_0

$$\mathbf{S}_\sigma = \int_S \sigma_0 \mathbf{r}_\tau \times \mathbf{e}_3 dS = \int_S \sigma_0 \varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta \mathbf{e}^\alpha dS; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{J}_\sigma = \int_S (\wedge \mathbf{r}_\tau) \otimes (\mathbf{r}_\tau \wedge) dS = \int_S \varepsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta \varepsilon_{\gamma\delta} \xi^\delta \mathbf{e}^\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta dS, \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \varepsilon_{\alpha\beta 3} = (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{r}_\beta) \cdot \mathbf{e}_3, \quad \alpha\beta\gamma\delta = 1, 2.$$

Здесь символ " \wedge " обозначает внешнее произведение. Однородность тензора (2.8) и формулы (2.4)-(2.9) приводят к исчезновению в системе координат $O\xi^1\xi^2$, жестко связанной с центром пятна контакта S , как нормальной реакции \mathbf{N}_1 , так и начального момента \mathbf{M}_τ^0 , поэтому нормальная реакция и момент сопротивления качению выражается формулами

$$\mathbf{N} = N_0 \mathbf{e}_3; \quad \mathbf{M}_\tau = -\mathbf{J}_\sigma \cdot \mathbf{h} \cdot (\mathbf{w}_\tau / |\mathbf{w}_\tau|). \quad (2.10)$$

Вектор \mathbf{v}_S обозначает суммарную скорость в точке $M \in S$

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_0 - R \mathbf{w}_\tau \times \mathbf{e}_3; \quad |\mathbf{v}_\Sigma|^2 = v_S^2 + 2\mathbf{v}_S \cdot (\mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau) + (\mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau) \cdot (\mathbf{w}_v \times \mathbf{r}_\tau). \quad (2.11)$$

Таким образом, соотношения (2.1)-(2.11) представляют инвариантную формулировку теории комбинированного сухого трения. Построенная модель описывает эффекты сцепления при комбинированном скольжении, вращении и качении деформированного твердого тела с конечной площадью контакта с плоскостью опоры. Инвариантные соотношения (2.1)-(2.3) могут быть переписаны в координатной форме с помощью соответствующего выбора основной системы координат.

3. ПРИБЛИЖЕННАЯ МОДЕЛЬ ОРТРОПНОГО ТРЕНИЯ

Рассматривается ортропное сухое трение, определяемое следующим тензором трения [5,13]

$$\mathbf{f} = f \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad f \neq 0, \quad k \neq 0. \quad (3.1)$$

Здесь f и kf – главные компоненты тензора трения. Рассматривается система координат Oxy с началом в центре пятна контакта такая, что соответствующие базовые векторы \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 коллинеарны главным направлениям тензора трения \mathbf{f} . Кроме того, предполагается, что статическое контактное давление обладает свойством осевой симметрии: $\sigma_0(x, y) = \sigma_0(\pm x, \pm y)$, а также изотропией трения качения.

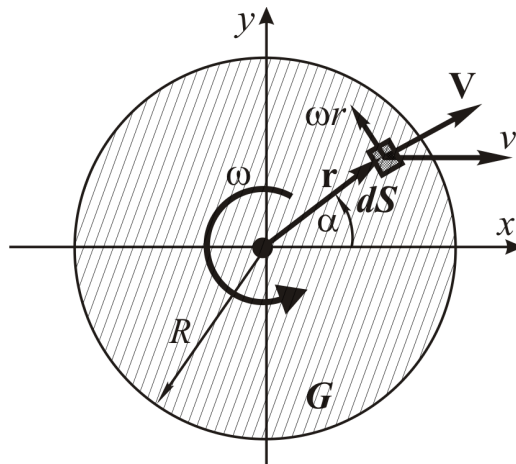


Рис.1. Кинематика внутри пятна контакта.

Рассматривается движение, определяемое продольной скоростью $\mathbf{v}_0 = v\mathbf{e}'_1$, вдоль оси глобальной неподвижной системы координат (подробнее см. [9-11]) с угловой скоростью качения $\mathbf{w}_\tau = -\Omega_r \mathbf{e}_2$ и угловой скоростью верчения ω . Такая ситуация имеет место, например, при качении колеса с продольным протектором, характеризующемся коэффициентами трения f вдоль протектора и kf поперек него. Предполагается, что площадка контакта обладает осевой симметрией

с характерным размером пятна контакта R (например, диаметр соответствующего множества на плоскости $\{x, y\}$ (рис.1)).

При наличии движения возникают касательные напряжения, приводящие к искажению симметричной диаграммы распределения нормальных контактных напряжений.

Предполагается, что смещение центра тяжести пятна контакта относительно геометрического центра описывается вектором \mathbf{d} , модуль которого был рассчитан в [2-4].

Формула (1.5) в этом случае может быть переписана в простейшей форме

$$\sigma(x, y) = \sigma_0(x, y)(1 + d_x x + d_y y) \quad (3.2)$$

где d_x и d_y – проекции вектора \mathbf{d} на оси x и y , соответственно.

Результирующий вектор силы трения может быть представлен в виде суммы двух компонент $\mathbf{T} = T_{\parallel} \mathbf{e}_1 + T_{\perp} \mathbf{e}_2$, T_{\parallel} – продольная, T_{\perp} – поперечная составляющие силы трения. Как было показано в [3-7,13] последняя из них возникает благодаря взаимосвязи эффектов трения.

Величины (2.1)-(2.8) теперь могут быть упрощены, как это было реализовано в [2-4]. В результате они приводятся к виду

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &\equiv f \iint_G \frac{\sigma_0(1 + d_x x + d_y y)(v - \omega(x \sin \varphi + y \cos \varphi)) dx dy}{\sqrt{v^2 - 2v\omega(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \omega^2(x^2 + y^2)}} \\ M_v &= f \iint_G \frac{\sigma_0 \omega(x^2 + y^2) - v(x \sin \varphi + y \cos \varphi) dx dy}{\sqrt{v^2 - 2v\omega(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \omega^2(x^2 + y^2)}} \\ F_{\perp} &= f \iint_G \frac{\sigma_0 \omega(x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy}{\sqrt{v^2 - 2v\omega(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \omega^2(x^2 + y^2)}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эти функции были подробно исследованы для эллиптических пятен контакта в случае Герцевого распределения нормальных контактных напряжений в [15-16] и для симметричных форм пятен контакта в случае симметрии статического распределения нормальных контактных напряжений в [4,10,12].

Однако интегральные соотношения (3.3) слишком сложны, чтобы применить их к анализу динамики реальных систем, в то время как их аппроксимации аналитическими функциями достаточно точны и просты одновременно. Ниже приводятся только основные результаты. Более подробно о построении приближенных формул см. [4,10,11-12]. В результате мы имеем следующие формулы

$$F_{\parallel} = \frac{F_0 v}{\sqrt{v^2 + au^2}}, \quad F_{\perp} = \frac{\mu_0 k F_0 v u^2}{\sqrt{(v^6 + b\omega^6)}}, \quad M_v = \frac{M_0 u}{\sqrt{u^2 + mv^2}} \quad (3.4)$$

Здесь $u = \omega_v R$, F_0 – продольная компонента силы трогания, а M_0 – момент силы трогания. Если распределение нормальных контактных напряжений в случае покоя возможно определить аналитически или численно [5-6,9], то коэффициенты модели (3.4) вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned}
F_0 &= f \iint_G \sigma_0(x, y) dx dy, \quad M_0 = f(1+k) \iint_G \sigma_0(x, y) \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \\
\sqrt{m} &= \frac{1}{M_0} \iint_G \sigma_0(x, y) (x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dx dy \\
\sqrt{a} &= \frac{1}{F_0} \iint_G \frac{\sigma_0(x, y) (x^2 \cos^2 \varphi + y^2 \sin^2 \varphi)}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy, \\
\sqrt{b} &= \iint_G \frac{\sigma_0(x, y) (x^2 - y^2) \sin 2\varphi}{2\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx dy
\end{aligned} \tag{3.5}$$

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ И ЗОНЫ КОНТАКТА

Как показано в предыдущих разделах, для решения задачи необходимо определить распределение статического контактного давления σ_0 , а также область контакта. Для этого рассмотрим статическую контактную задачу для тонкой упругой композитной сферической оболочки массой m , радиуса R и толщины h и неподвижной плоскости Π (рис.1).

Контакт между оболочкой и опорной плоскостью Π происходит по плоской круговой области (пятну контакта) Ω некоторого радиуса r , принадлежащей плоскости Π : $\Omega \in \Pi$ (рис.1). Радиус пятна контакта заранее неизвестен и должен быть определён в процессе решения задачи. Срединная поверхность оболочки задается в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ так

$$\begin{aligned}
\Pi: \quad x &= R \sin \beta \cos \alpha, \quad y = R \sin \beta \sin \alpha, \quad z = R \cos \beta, \\
0 &\leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.
\end{aligned}$$

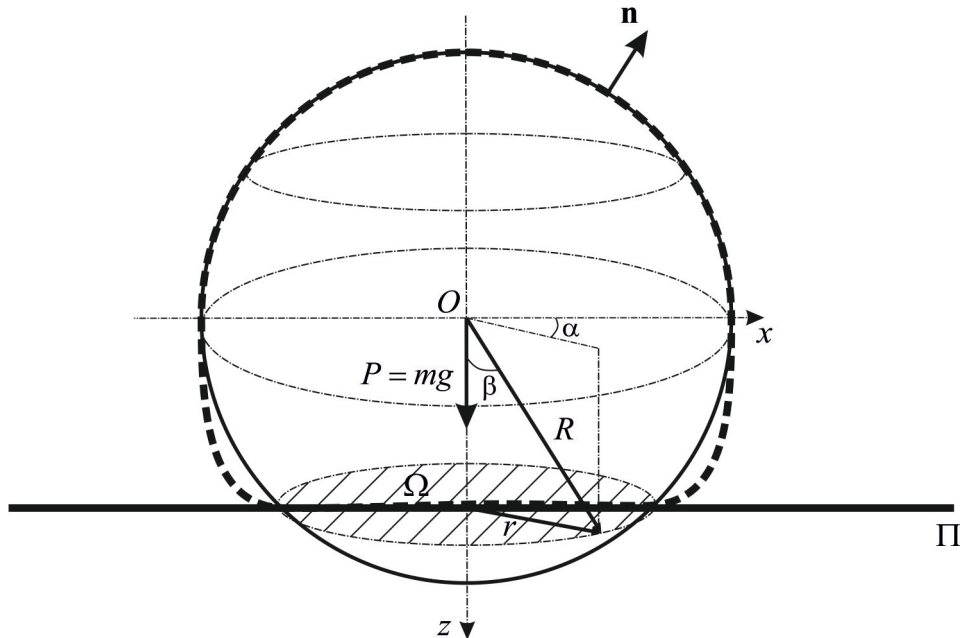


Рис.2. Постановка контактной задачи.

Будем полагать, что оболочка изготовлена из трансверсально изотропного материала так, что в каждой точке оболочки плоскость изотропии параллельна срединной поверхности оболочки, т.е. главное направление упругости,

перпендикулярное к плоскости изотропии, в каждой точке оболочки совпадает с соответствующей нормалью \mathbf{n} .

Распределение контактного давления по области Ω определяется из решения статической контактной задачи для оболочки и плоскости Π . Следуя [17], запишем основное разрешающее дифференциальное уравнение для трансверсально изотропной сферической оболочки, связывающее нормальные перемещения оболочки w с действующим на неё давлением σ_0

$$\begin{aligned} \left[c^2 (\Delta + 1)^2 + 1 - h^* \Delta \right] (\Delta + 2) w &= \frac{R^2}{Eh} (1 - h^* \Delta) (\Delta + 1 - \nu) \sigma_0, \\ \Delta &= \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right], \\ c^2 &= \frac{h^2}{12(1 - \nu^2)R^2}, \quad h^* = \frac{Eh^2}{10(1 - \nu^2)R^2 G'}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где Δ – оператор Лапласа на сфере, E – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии, ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости изотропии при растяжении в той же плоскости, G' – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии.

В случае контактной задачи $\sigma_0 = \sigma_0 H(\Omega)$, где $H(\Omega)$ – характеристическая функция области Ω

$$H(\Omega) = \begin{cases} 1, & (\alpha, \beta) \in \Omega \\ 0, & (\alpha, \beta) \notin \Omega \end{cases}$$

Пусть оболочка находится под действием силы собственного веса $P = mg$. Поскольку оболочка нагружена осесимметрично, положим в дальнейшем, что

$$\sigma_0 = \sigma_0(\beta), \quad w = w(\beta), \quad \Delta = \Delta_2 = \frac{1}{\sin \beta} \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right].$$

Для построения разрешающего интегрального уравнения относительно контактного давления поставим вспомогательную задачу о функции влияния для сферической оболочки. Эта функция представляет собой нормальные перемещения оболочки $W(\beta; \xi)$ как решение уравнения (4.1) при $\sigma_0 = \delta(\beta - \xi)$.

Разложим искомую функцию влияния и давление в ряды по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} W(\beta; \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} W_n(\xi) P_n(\cos \beta), \quad \delta(\beta - \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\xi) P_n(\cos \beta), \\ \delta_n(\xi) &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \delta(\beta - \xi) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Подстановка (4.2) в (4.1) с учётом известного уравнения для полиномов Лежандра [18] $\Delta_2 [P_n(\cos \beta)] = -n(n+1)P_n(\cos \beta)$, приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \left[c^2 (1 - m)^2 + 1 - h^* m \right] (m + 2) W_n(\xi) &= \frac{R^2}{Eh} (1 + h^* m) (1 - m - \nu) \delta_n(\xi), \\ m &= n(n + 1). \end{aligned}$$

Откуда находим

$$W_n(\xi) = A_n P_n(\cos \xi) \sin \xi,$$

$$A_n = R^2 \frac{2n+1}{2Eh(m+2)} \frac{(1+h^*m)(1-m-\nu)}{c^2(1-m)^2 + 1 - h^*m}. \quad (4.3)$$

Используя функцию влияния и принцип суперпозиции [19-22], получаем интегральное соотношение связи нормальных перемещений оболочки с воздействующем на неё внешним давлением

$$w(\beta) = \int_0^\pi W(\beta, \xi) p(\xi) d\xi. \quad (4.4)$$

Теперь разложим искомое контактное давление в ряд по полиномам Лежандра

$$\sigma_0(\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k P_k(\cos \beta). \quad (4.5)$$

Тогда контактная задача сводится к нахождению коэффициентов p_k разложения (4.5). Для этого используем интегральное представление (4.4). Подставляя (4.2), (4.3) и (4.5) в (4.4), получаем

$$w(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_n p_k P_n(\cos \beta) \int_0^\pi P_n(\cos \xi) P_k(\cos \xi) \sin \xi d\xi. \quad (4.6)$$

Поскольку $\int_0^\pi P_n(\cos \xi) P_k(\cos \xi) \sin \xi d\xi = \frac{2}{2n+1} \delta_{kn}$, где δ_{kn} – символ

Кронекера, соотношение (4.6) принимает вид

$$w(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n p_n P_n(\cos \beta), \quad (4.7)$$

$$B_n = \frac{R^2}{Eh(m+2)} \frac{(1+h^*m)(1-m-\nu)}{c^2(1-m)^2 + 1 - h^*m}.$$

Из соотношения (4.7) можно построить систему алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов p_n . Действительно, положим, как обычно в случае контактных задач, что перемещения $w(\beta)$ заданы в области контакта

$$\Omega = \{\beta : \beta \in [0, \beta^*]\}, \quad \beta^* = \arcsin \frac{r}{R}.$$

В правой части (4.7) ограничимся учётом первых $N+1$ слагаемых

$$w(\beta) \approx \sum_{n=0}^N B_n p_n P_n(\cos \beta). \quad (4.8)$$

Выберем в области контакта $N+1$ точек с координатами $\beta_k \in \Omega$, $k = 0, 1, 2, \dots, N$. Тогда для каждой k -той точки из (4.8), заменяя приближенное равенство точным, получаем алгебраическое уравнение, содержащее $N+1$ неизвестных p_n . Таким образом, т.к. число таких уравнений $N+1$, мы получаем систему из $N+1$ уравнений относительно $N+1$ неизвестных

$$\mathbf{Bp} = \mathbf{w},$$

$$\mathbf{B} = (b_{nk})_{N+1 \times N+1}, \quad \mathbf{p} = (p_n)_{N+1 \times 1}, \quad \mathbf{w} = (w_k)_{N+1 \times 1} \quad (4.9)$$

$$b_{nk} = B_n P_n(\cos \beta_k), \quad w_k = w(\beta_k),$$

решением которой является вектор \mathbf{p} коэффициентов разложения (4.5).

Таким образом, из решения (4.9) и разложения (4.5) можно определить распределение статического контактного давления σ_0 .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена постановка и разработан метод решения задачи о движении композитной сферической оболочки по твёрдой поверхности с учётом комбинированного сухого трения. Для описания условий контакта оболочки с поверхностью предложена и реализована теория многокомпонентного анизотропного сухого трения с учётом наличия комбинированной кинематики движения оболочки (одновременное скольжение, вращение и качение). Предложена постановка и метод решения контактной задачи для тонкой упругой композитной сферической оболочки и твёрдой плоской поверхности. В качестве модели оболочки приняты уравнения С.А.Амбарцумяна. Метод решения основан на принципе суперпозиции с использованием функции влияния. При этом применяются разложения в ряды по полиномам Лежандра. Получено разрешающее интегральное уравнение относительно искомого контактного давления, предложен метод его решения, сводящий задачу к системе алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов разложения контактного давления в ряд по полиномам Лежандра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киреевков А.А. *Новые тенденции развития теории и практики исследования динамики систем твердых тел с трением* // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2013. - Т.19. - №1(39). - С.163-171.
2. Kireenkov A. *New models of the combined dry friction and connected with them mechanical effects* / 5th Asian Conference on Multibody Dynamics 2010, ACMD 2010. – 2014. – Vol.2. - Pp.501-505.
3. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / COUPLED PROBLEMS 2015 / 6th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. - 2015. - Pp. 203-209.
4. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* / 7th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. - Rhodes Island, Greece, 2017. - Pp.1293-1298.
5. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics* // J. of Vibrational Engineering and Technologies. - 2020. - Vol.8(2). - Pp.365-372.
6. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Numeric-Analytical Methods of the Coefficients Definition of the Rolling Friction Model of the Pneumatic Aviation Tire* / 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. - 2019. - Pp.204-212.
7. Kireenkov A.A., Ramodanov S.M. *Combined Dry Friction Models in the Case of Random Distribution of the Normal Contact Stresses Inside of Contact Patches* / 8th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. – 2019. - Pp. 176-182.
8. Kireenkov A.A., Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *A new approximate model of tyre accounting for both deformed state and dry friction forces in the contact spot on the*

- background of the coupled model* / MATEC Web of Conferences. - 2018. - (211), 08003.
9. Kireenkov A., Zhavoronok S. *Implementation of analytical models of the anisotropic combined dry friction in problems of pneumatics' dynamics* / MATEC Web of Conferences. -2018. - (211), 08004.
 10. Kireenkov A.A. *Improved Friction Model of the Aviation Tyre Contact with the Landing Strip* // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). – 2018. - No(51)2. – Pp.890-894.
 11. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics* // Intern. J. of Mechanical Sciences. - 2017. - Vol.127. - Pp.198-203.
 12. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* / 7th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. - Rhodes Islad, Greece, 2017. - Pp.1293-1298.
 13. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / 7th Intern. Conf. on Coupled Problems in Science and Engineering, Proceedings. - Rhodes Islad, Greece, 2017. - Pp.216-226.
 14. Журавлев В.Ф., Киреевков А.А. *О разложениях Паде в задаче о двумерном Кулоновом трении* // Известия РАН. МТТ. - 2005. - №2. - С.3-13.
 15. Киреевков А.А. *Связанные модели трения скольжения и качения* // ДАН. - 2008. - Т.419. - №6. - С.79-762
 16. Киреевков А.А. *Связанная модель трения скольжения и качения в динамике тел на шероховатой плоскости* // Известия РАН. МТТ. - 2008. - №3. - с. 116-131.
 17. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек.* – М.: Наука, 1974. – 448 с.
 18. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)* // Mechanics of Solids. - 2011. - Vol. 46. - No.2. - Pp.239-247.
 19. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells* // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. - Vol.43. – No.2. - Pp.145-152.
 20. Fedotenkov G.V., Mikhailova E.Yu., Kuznetsova E.L., Rabinskiy L.N. *Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp* // Intern. J. of Pure and Applied Mathematics. – 2016. – Vol.111. - No.2. - Pp.331-342.
 21. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space* // Shell Structures: Theory and Applications. - 2017. - Vol.4. - Pp.301-304.
 22. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell* // Mechanics of Solids. - 2015. - Vol.46. - No.5. - Pp.779-787.

REFERENCES

1. Kireenkov A.A. *Novye tendentsii razvitiya teorii i praktiki issledovaniya dinamiki system tverdykh tel s treniem [New tendencies in development of theory and practice of study of the dynamics of solids with friction]* // Mezhdunarodnyi zhurnal

- “Problemy nelineinogo analiza v inzhenernykh sistemakh”. – 2013. - Vol.19. – No.1(39), - Pp. 163-171.
2. Kireenkov A. *New models of the combined dry friction and connected with them mechanical effects* / 5th Asian Conference on Multibody Dynamics 2010, ACMD 2010. – 2014. - 2, - Pp. 501-505.
 3. Kireenkov A.A. *Further development of the theory of multicomponent dry friction* / COUPLED PROBLEMS 2015 - Proceedings of the 6th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, Pp. 203-209.
 4. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* / Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, June 12-14, 2017, Rhodes Islad, Greece, Pp. 1293-1298.
 5. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Anisotropic Combined Dry Friction in Problems of Pneumatics' Dynamics* / Journal of Vibrational Engineering and Technologies. – 2020. - V.8(2). - Pp.365-372.
 6. A.A. Kireenkov and S.I. Zhavoronok, “Numeric-Analytical Methods of the Coefficients Definition of the Rolling Friction Model of the Pneumatic Aviation Tire”, Proceedings of the 8th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, COUPLED PROBLEMS 2019 (2019), pp. 204-212.
 7. A.A. Kireenkov and S.M. Ramodanov, “Combined Dry Friction Models in the Case of Random Distribution of the Normal Contact Stresses Inside of Contact Patches” Proceedings of the 8th International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, COUPLED PROBLEMS 2019 (2019), pp. 176-182.
 8. Kireenkov A.A., Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. A new approximate model of tyre accounting for both deformed state and dry friction forces in the contact spot on the background of the coupled model // MATEC Web of Conferences. - 2018. - (211), 08003.
 9. Kireenkov A., Zhavoronok S. Implementation of analytical models of the anisotropic combined dry friction in problems of pneumatics' dynamics // MATEC Web of Conferences. -2018. - (211), 08004.
 10. Kireenkov A.A. *Improved Friction Model of the Aviation Tyre Contact with the Landing Strip* // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). – 2018. - (51)2. – Pp. 890-894.
 11. Kireenkov A.A., Zhavoronok S.I. *Coupled dry friction models in problems of aviation pneumatics' dynamics* // International Journal of Mechanical Sciences – 2017. - V.127. - Pp. 198-203.
 12. Kireenkov A.A. *Improved Theory of the Combined Dry Friction in Problems of Aviation Pneumatics' Dynamics* / Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, June 12-14, 2017, Rhodes Islad, Greece, Pp. 1293-1298,
 13. Zhavoronok S.I., Kireenkov A.A. *On the effect of the anisotropic dry friction and the deformed state of tires on the shimmy initiation* / Proceedings of the VII International Conference on Coupled Problems in Science and Engineering, June 12-14, 2017, Rhodes Islad, Greece, Pp. 216-226,
 14. Zhuravlev V. Ph., Kireenkov A. A. *Pade expansions in the two-dimensional model of Coulomb friction* // Mech. Solids. – 2005. – Vol. 40, No.2. – Pp.1-10.
 15. Kireenkov A. A. *Coupled Models of Sliding and Rolling Friction* // Doklady Physics. – 2008. – Vol. 419, No. 6. – Pp. 233-236.

16. Kireenkov A.A. *Combined model of sliding and rolling friction in dynamics of bodies on a rough plane* // Mech. Solids. – 2008. – Vol. 43, No. 3. – Pp.412-425.
17. Ambartsumyan S.A. *Theory of Anisotropic Shells*. – Moscow, Nauka, 1974. – 448 pp.
18. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. *Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction)* // Mechanics of Solids, 2011, Vol. 46, № 2, pp. 239–247. DOI: 10.3103/S0025654411020129.
19. Tarlakovskii and G.V. Fedotenkov *Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells* // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2014, Vol. 43, № 2, pp. 145–152. DOI: 10.3103/S1052618814010178.
20. Gregory V. Fedotenkov, Elena Yu. Mikhailova, Elena L. Kuznetsova, Lev N. Rabinskiy *Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp* // International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 111, No. 2, 2016, pp. 331-342. DOI: 10.12732/ijpam.v111i2.16.
21. E.Yu. Mikhailova, D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov *Transient contact problem for spherical shell and elastic half-space* // Shell Structures: Theory and Applications. 2017. V. 4. P. 301-304.
22. D.V. Tarlakovskii, G.V. Fedotenkov *Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell* // Mechanics of Solids, 2015, Vol. 46, № 5, pp. 779-787.

Поступила в редакцию 24 сентября 2019 года.

Сведения об авторах:

Киреевков Алексей Альбертович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт проблем механики РАН им. А.Ю. Ишлинского, г. Москва, Россия; e-mail: kireenk@ipmnet.ru
Федотенков Григорий Валерьевич – к.ф.-м.н., с.н.с. НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: greghome@mail.ru