

ОСОБЕННОСТИ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЙ

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия
АО «Композит», г. Королев, Россия*

АННОТАЦИЯ

Построено и аналитически исследовано точное решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния полого цилиндра из физически нелинейного изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова с двумя произвольными материальными функциями, под действием постоянных внутреннего и внешнего давлений (в условиях ползучести). В частности, доказано, что деформации монотонно возрастают, а возникающая в поперечном сечении трубы продольная сила не зависит (в отличие от напряжений и деформаций) от времени и от материальных функций, и совпадает с силой, найденной из решения задачи для линейно упругого материала, хотя осевые напряжения не постоянны по сечению. Доказано, что построенные поля деформаций и напряжений совпадают в частных случаях (при специальном выборе одной из материальных функций) с известными классическими решениями в рамках теории линейной вязкоупругости, упругости и упругопластичности с произвольным упрочнением. Для степенной материальной функции нелинейности (с любым показателем) и произвольной функции сдвиговой ползучести вычислены все интегральные операторы, входящие в общее решение, и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы через функцию ползучести и доказано, что напряжения не зависят от времени (в отличие от деформаций) и совпадают с напряжениями в трубе из упругопластического материала со степенной функцией упрочнения. Найден критерии возрастания или убывания напряжений и деформаций по радиальной координате в виде неравенств для показателя функции нелинейности.

Ключевые слова: нелинейная вязкоупругость; упругопластичность; ползучесть; определяющее соотношение Работнова; несжимаемый материал; свойства поля напряжений; семейство кривых ползучести; продольная сила

CHARACTERISTIC FEATURES OF STRESS-STRAIN STATE EVOLUTION IN THICK-WALLED TUBES OF NON-LINEAR VISCOELASTIC MATERIAL SUBJECT TO CONSTANT PRESSURES

Khokhlov Andrew V.

*Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russia
JSC «Kompozit», Korolev, Russia*

ABSTRACT

We construct and study analytically the exact solution of the boundary value problem for a hollow cylinder (a tube) made of physically non-linear viscoelastic material obeying the Rabotnov constitutive equation with arbitrary material functions. We suppose that a material is homogeneous, isotropic and incompressible and that a tube is loaded with constant internal and external pressures and a plain strain state is realized, i.e. zero axial displacements are given on the edge cross sections of the tube. We obtain explicit closed form expressions for displacement, strain and stress fields via the single unknown function of time and integral operators involving this function, two material functions of the constitutive relation, preset pressure values and radii of the tube and derive functional equation to determine this unknown resolving function. Assuming material functions are arbitrary, we prove that strains (creep curves) increase with time but the axial force at cross section doesn't depend on time and material functions although stresses and strains do. The axial force proved to be equal to the one calculated for linear elastic tube although axial stress depends on radial coordinate in the case of non-linear viscoelastic material. We show that for special choices of material functions the strain and stress fields coincide with classical solutions in the frames of linear viscoelasticity, elasticity or elastoplasticity with hardening or without it.

Fixing the material function governing non-linearity to be power function with any positive exponent and assuming creep function is arbitrary, we construct exact solution of the resolving functional equation, calculate all the integrals involved in the general representation for strain and stress fields and reduce it to simple algebraic formulas convenient for analysis. The stresses in this case don't depend on time and creep function and coincide with classical solution for elastoplastic material with power hardening. We obtain criteria for increase, decrease or constancy of stresses with respect to radial coordinate in form of inequalities for the exponent value.

Keywords: non-linear viscoelasticity; elastoplasticity; creep; the Rabotnov constitutive equation; incompressible material; stress field properties; creep curves; axial force

ВВЕДЕНИЕ

Статические и динамические задачи определения напряженно-деформированного состояния (НДС) толстостенной трубы под действием внутреннего и внешнего давлений в рамках теории упругости (задача Ламе) и разных вариантов упругопластичности являются классическими из-за обилия приложений их результатов (расчет артиллерийских стволов, газопроводов, обделок туннелей, шлангов, скважин, шахт, процессов запрессовки и т.п.) и благодаря возможности построить точное решение (при тех или иных упрощающих предположениях) или хотя бы достаточно простой и эффективный аналитически проработанный алгоритм вычисления приближенного решения. Эти задачи хорошо исследованы в случае упругопластического материала без упрочнения и с линейным упрочнением [1-7] и в теории установившейся ползучести (как правило, для степенной зависимости скорости ползучести от напряжения) [6,8-10]. Строились и решения в рамках линейной вязкоупругости, но, как правило, не для произвольных функций релаксации (ползучести), а только для их конкретных классов, задаваемых конечным набором параметров (например, задаваемых конечными суммами экспонент, т.е. рядами Прони) и в пространстве преобразований Лапласа (Лапласа-Карсона) или Фурье [11-14]; качественные свойства построенных полей деформаций и напряжений не подвергались системному аналитическому исследованию в общем виде при произвольных материальных функциях, а, как правило, рассчитывались

на компьютерах для конкретных функций релаксации с несколькими параметрами.

В данной статье задача об определении и анализе НДС толстостенной трубы под действием постоянных давлений будет исследована для физически нелинейного изотропного несжимаемого материала, подчиняющегося определяющему соотношению (ОС) вязкоупругости Ю.Н. Работнова

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$L(t) := \Pi \sigma, \quad L_0(t) := \Pi_0 \sigma_0, \quad \Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

$$\Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau).$$

Оно содержит четыре произвольных материальных функции (МФ) $\Pi(t)$, $\Phi(x)$, $\Pi_0(t)$, $\Phi_0(x)$ (Π и Π_0 – функции сдвиговой и объемной ползучести, Φ и Φ_0 – функции нелинейности) и описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений $\sigma(t)$ и малых деформаций $\varepsilon(t)$ в произвольной точке тела; $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ – среднее напряжение (первый инвариант $\sigma(t)$), $\sigma = (1, 5s_{ij}s_{ij})^{0.5}$ – интенсивность напряжений (второй инвариант девиатора $\mathbf{s} = \sigma - \sigma_0 \mathbf{I}$). Напряжение и время предполагаются обезразмеренными.

ОС (1) – один из простейших вариантов обобщения одноосного соотношения Работнова [15-21,9,13] с двумя материальными функциями φ , Π ($\varphi = \Phi^{-1}$)

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t > 0, \quad (3)$$

на сложное напряженное состояние, получающийся в предположении изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемной деформации $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$ от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения σ_0) и пренебрежения влиянием их третьих инвариантов.

Данная статья продолжает цикл работ [22-27] по системному аналитическому исследованию ОС (1) с целью выявления комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработки способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (3) приведены в статьях [23-26]. Основные цели настоящей статьи: 1) получить общее выражение для полей деформаций и напряжений в полом цилиндре из несжимаемого наследственного материала, подчиняющегося ОС (1), при нагружении постоянными внутренним и внешним давлениями, аналитически изучить их качественные свойства при произвольных материальных функциях ОС, чтобы подготовить фундамент для анализа длительной прочности трубы при ползучести и ступенчатых нагружениях, для расчета НДС многослойных труб и для исследования

(и верификации) решений динамической задачи о нагружении переменными давлениями (в частности, в условиях циклического нагружения и виброползучести); 2) рассмотреть эту задачу для важных частных случаев ОС (1), в частности, для классических случаев линейно вязкоупругого несжимаемого материала с произвольной функцией сдвиговой ползучести и для упругопластического материала с (произвольным) упрочнением, чтобы верифицировать полученное общее решение задачи для ОС (1) и более детально исследовать характерные свойства НДС трубы и влияние на него принятых допущений, упрощающих построение решения.

1. ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОС РАБОТНОВА

Одномерное ОС (3) предложено Ю.Н. Работновым [15-18,9,13] для описания нелинейной ползучести как обобщение одноосного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{P}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t > 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ $\varphi(u)$. В (4) и (3) функции ползучести и релаксации $\Pi(t)$, $R(t)$, связаны интегральным уравнением [11]

$$\mathbf{R}\mathbf{P} = h(t) \quad \text{или} \quad \mathbf{P}\mathbf{R} = h(t), \quad t > 0 \quad (5)$$

($h(t)$ – функция Хевисайда), выражающим условие взаимной обратности операторов (4) и (3). В англоязычных работах ОС (3) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV), а его автором считается Y.C. Fung [28-37]. В работах [9,13,15-21] и др. ОС (3) применялось к описанию одномерного поведения графита, металлов и сплавов, композитов, а в [28-37] – связок, сухожилий и других биологических тканей.

В одномерном случае (3) обратное ОС имеет вид $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$ (композиция оператора действия функции φ и линейного оператора \mathbf{R} из (4)). Обращение трехмерного ОС (1) для любых возрастающих МФ Φ и Φ_0

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad (6)$$

где $\varphi = \Phi^{-1}$, $\varphi_0 = \Phi_0^{-1}$, $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0\mathbf{I}$ и $\varepsilon = \left(\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}\right)^{0.5}$ – девиатор и интенсивность деформаций, а функции релаксации $R(t)$, $R_0(t)$ связаны с Π и Π_0 уравнениями вида (5). Из трех МФ φ , Π , R в ОС (3) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ.

На функции ползучести ($\Phi\Pi$) и релаксации в ОС (3) и (1) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости: $\Pi(t)$, $\Pi_0(t)$, $R(t)$, $R_0(t)$ считаются положительными и дифференцируемыми на $(0; \infty)$, функции Π и Π_0 – возрастающими и выпуклыми вверх [38,39], а R и R_0 – убывающими и выпуклыми вниз на $(0; \infty)$, $R(t)$ и $R_0(t)$ могут иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t=0$ (слагаемое $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$, $\delta(t)$ – дельта-функция). Из этих условий следует существование предела $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$ ($y(0) := y(0+)$ – обозначение предела функции $y(t)$)

справа в т. $t = 0$). На МФ φ и φ_0 в ОС (3) и (6) и на МФ $\Phi(x)$ и $\Phi_0(x)$ в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [23-26]: функция $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(0; \omega)$, $\omega > 0$, а $\varphi_0(u)$ – на множестве $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (где $\omega_- \omega_+ < 0$), причем $\varphi(0+) = 0$ и $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Из возрастания $\varphi(u)$ и $\varphi_0(u)$ следует существование и возрастание обратных функций $\Phi(x) = \varphi^{-1}$, $x \in (0; X)$, $X := \sup \varphi(u)$ и $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$, $x \in (\underline{x}; \bar{x})$, где $\underline{x} = \varphi_0(\omega_- + 0)$, $\bar{x} = \varphi_0(\omega_+ - 0)$, и обратимость ОС (1). Аналогично, обратимость ОС (1) следует из возрастания Φ и Φ_0 . Примеры семейств функций, которые можно (и удобно) использовать для задания МФ Φ , Φ_0 или φ , φ_0 , приведены в [23-26].

2. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРУБЫ

Определим поля напряжений и деформаций в полом цилиндре из несжимаемого материала, подчиняющегося нелинейному ОС (1), под действием давлений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, заданных на внутренней и внешней поверхности цилиндра при $t > 0$. Считаем, что давления постоянны или зависят от времени, но меняются медленно: так, чтобы влиянием инерционных членов в уравнениях движения можно было пренебречь (квазистатическая постановка). Будем использовать цилиндрическую систему координат. Пусть r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндра (при $t = 0$). Тогда краевые условия имеют вид

$$\sigma_r|_{r_1} = -p_1(t), \quad \sigma_r|_{r_2} = -p_2(t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r_1} = \sigma_{rz}|_{r_1} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{r_2} = \sigma_{rz}|_{r_2} = 0. \quad (7)$$

Задача осесимметрична, и потому в любой точке (r, θ, z) в любой момент времени все перемещения, деформации и напряжения не зависят от угла θ и

$$\sigma_{r\theta} \equiv 0, \quad \sigma_{\theta z} \equiv 0, \quad u_\theta(t) \equiv 0, \quad (8)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = r^{-1}(u_{\theta,\theta} + u_r) = u/r, \quad \varepsilon_r(r, t) = u_{r,r} = \partial u / \partial r, \quad \varepsilon_z(r, t) = u_{z,z}, \quad (9)$$

где введено обозначение $u := u_r(r, t)$ для радиального перемещения.

Будем считать трубу закрепленной на торцах так, что осевое перемещение $u_z = 0$ и касательные напряжения на торцах отсутствуют: $\sigma_{z\theta} = 0$ и $\sigma_{rz} = 0$. Тогда труба находится в состоянии плоской деформации, u_r и σ_z не зависят от z и (помимо (8)) справедливы равенства

$$\sigma_{rz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{z\theta} \equiv 0, \quad \varepsilon_{r\theta} \equiv 0, \quad \varepsilon_z \equiv 0, \quad u_z \equiv 0, \quad \varepsilon_{rz} \equiv 0, \quad \varepsilon_{\theta z} \equiv 0. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что тензоры деформаций и напряжений диагональны: $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, $\boldsymbol{\sigma} := \text{diag}\{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z\}$, а зависимости ненулевых компонент от координат имеют вид: $u_r(r, t)$, $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$, $\sigma_r(r, t)$, $\sigma_\theta(r, t)$, $\sigma_z(t)$.

Система уравнений равновесия среды в силу (8) и (10) эквивалентна лишь одному уравнению в проекции на радиус

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0. \quad (11)$$

Будем считать материал несжимаемым: $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$, поскольку $\varepsilon_z \equiv 0$. По (9) получим уравнение $\partial u / \partial r + u/r = 0$ для $u(r, t)$, откуда

$$u = C(t)r^{-1}, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad t > 0. \quad (12)$$

Из (12) и (9) все ненулевые деформации выражаются через функцию $C(t)$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = u/r = C(t)r^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = \partial u / \partial r = -C(t)r^{-2}. \quad (13)$$

Воспользуемся ОС Работнова (1). В силу несжимаемости материала девиатор тензора деформации совпадает с ним, а ОС Работнова (1) редуцируется к одномерному ОС $\varepsilon = \Phi(\Pi\sigma)$ с двумя произвольными МФ (Φ и Π или φ и R), связывающему интенсивности напряжений и деформаций, и условию пропорциональности девиаторов (6)

$$s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon). \quad (14)$$

Первое уравнение ОС (6) не используется, и среднее напряжение будет найдено из решения задачи, как обычно при использовании условия несжимаемости.

Т.к. в любой точке $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, то девиатор тензора деформаций имеет вид $\mathbf{e} = \mathbf{diag}\{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, 0\}$, а интенсивность деформаций –

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|r^{-2}. \quad (15)$$

(в зависимости от соотношения предысторий давлений $p_1(\tau)$ и $p_2(\tau)$ возможен любой знак $C(t)$). Девиатор тензора напряжений в любой точке тоже диагонален в силу тензорной линейности ОС

$$\boldsymbol{\sigma} := \mathbf{diag}\{\sigma_r - \sigma_0, \sigma_\theta - \sigma_0, \sigma_z - \sigma_0\}, \quad \sigma_0(r, t) = (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z)/3.$$

Т.к. по (14) девиаторы пропорциональны, то из $e_z \equiv 0$ следует $\sigma_z - \sigma_0 \equiv 0$ (при тех t , когда $\varepsilon(t) \neq 0$, т.е. $C(t) \neq 0$), т.е.

$$\sigma_z = \sigma_0 \quad \text{или} \quad \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2. \quad (16)$$

Тогда $|\sigma_r - \sigma_0| = |\sigma_\theta - \sigma_0|$, $|\sigma_r - \sigma_z| = |\sigma_\theta - \sigma_z| = 0.5|\sigma_r - \sigma_\theta|$ и потому

$$\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right]^{0.5} = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta|.$$

Из условия (14) $\sigma_r - \sigma_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_r\sigma/\varepsilon$, $\sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{2}{3}\varepsilon_\theta\sigma/\varepsilon$, а по (13) и (15) находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_r/\varepsilon &= -\frac{\sqrt{3}}{2}C(t)/|C(t)| = -\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sgn}C(t), \quad \varepsilon_\theta/\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}C(t)/|C(t)| = \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sgn}C(t). \\ \sigma_r - \sigma_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{3}\text{sgn}C(t)\sigma, \quad \sigma_\theta - \sigma_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\text{sgn}C(t)\sigma, \end{aligned} \quad (17)$$

где в силу (14) и (15) интенсивность напряжений равна

$$\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon) = \mathbf{R}\varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|r^{-2}\right). \quad (18)$$

Вычитая формулы (17) друг из друга, найдём $\sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}\text{sgn}C(t)\sigma$ и подставим это выражение в уравнение равновесия (11): $\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sgn}C(t)\sigma r^{-1}$, т.е.

$$\sigma_{r,r} = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{sgn}C(t)\mathbf{R}\left[r^{-1}\varphi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|r^{-2}\right)\right]. \quad (19)$$

Проинтегрируем (19) от r_1 до r , пользуясь перестановочностью операторов интегрирования по r и по τ , и сделаем замену переменной $x = \frac{2}{\sqrt{3}}|C(t)|\rho^{-2}$

$$\sigma_r(r) - \sigma_r(r_1) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} C(t) \mathbf{R} \left[\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}|C|r_1^{-2}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}|C|r^{-2}} \varphi(x) x^{-1} dx \right].$$

Введём обозначения $\bar{r} := r/r_1$, $q := (r_1/r_2)^2 \in (0;1)$,

$$y(t) := \frac{2}{\sqrt{3}} C(t) r_1^{-2}, \quad F(s) := \int_0^s \varphi(x) x^{-1} dx, \quad s > 0 \quad (20)$$

(по (15) $|y(t)| = \varepsilon(r_1)$ и $|y(t)| = \varepsilon(r_2)/q$), тогда $C(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2$ и

$$\sigma_r(\bar{r}) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} y(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) \right], \quad (21)$$

$$\bar{r} \in [1, r_2/r_1], \quad t \geq 0.$$

Полагая $r = r_2$ в (21), из второго краевого условия (7), получим интегральное уравнение для определения $y(t)$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sgn} y(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) \right], \quad t > 0.$$

Из возрастания $\varphi(x)$ и условия $\varphi(0) = 0$ (тогда $\varphi(x) > 0$) следует *возрастание* $F(s)$ (20) на интервале $s > 0$. Поэтому всегда справедливо неравенство $F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) > 0$ (т.к. $q \in (0;1)$). Поскольку функция релаксации положительна, то в любой момент времени функция $f(t) = \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) \right]$ положительна и потому знак $\operatorname{sgn} y(t)$ совпадает с $z(t) := \operatorname{sgn}(p(t))$, где $p(t) := p_1(t) - p_2(t)$. Таким образом

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(q|y(t)|) \right], \quad (22)$$

$$q := (r_1/r_2)^2 \in (0;1), \quad t > 0.$$

Применив к (22) обратный к \mathbf{R} линейный оператор $\mathbf{\Pi}$, получим функциональное уравнение для $Y := |y(t)|$ [27]

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = P(t), \quad (23)$$

$$P(t) := \sqrt{3} \mathbf{\Pi} [zp(t)] = \sqrt{3} \mathbf{\Pi} |p(t)|, \quad t > 0.$$

Здесь $P(t)$ – известная функция, если задана функция ползучести и нагрузка $p(t)$.

3. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ОС (1) С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Решение уравнения (23) $Y(t)$ существует в окрестности любой точки (t, Y) , $t, Y > 0$, по теореме о неявной функции, ибо производная по Y функции $f(t, Y) := F(Y) - F(qY) - P(t)$ существует и отлична от нуля для любых $t, Y > 0$: $\partial f / \partial Y = F'(Y) - qF'(qY) = [\varphi(Y) - \varphi(qY)] Y^{-1} > 0$ (из возрастания $\varphi(x)$ следует,

что $\varphi(Y) - \varphi(qY) > 0$). Функция $Y(t, q)$ дифференцируема по t и по q (см. п.4).

После определения $y(t)$ и $C = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1^2$ из уравнения (23) (в общем случае приближённого, хотя ниже будут получено и аналитическое решение для важного класса МФ) находим поля перемещений, деформаций и напряжений по (12), (13) и (21) в трубе из материала, подчиняющегося ОС (1) (и обратному ему ОС (6)) с двумя произвольными МФ $\Pi(t)$ и $\Phi(x)$ (или $R(t)$ и $\varphi(x)$)

$$u_r(r, t) = C(t) r^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1 / \bar{r}, \quad u_\theta \equiv 0, \quad u_z \equiv 0, \quad (24)$$

$$\varepsilon_\theta(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t), \quad \varepsilon_z \equiv 0, \quad (25)$$

$$\sigma_r(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) \right], \quad (26)$$

где $\bar{r} := r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$, $z(t) = \text{sgn}(p_1 - p_2)$. Напряжения σ_θ , $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ и $\sigma_0 = \sigma_z$ можно выразить из (17), (18): $\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{sgn} C(t) \sigma$, т.е.

$$\sigma_\theta(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y(t)|/\bar{r}^2) \right], \quad (27)$$

$$\sigma_z(r, t) = -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2) \right]. \quad (28)$$

Интенсивности деформаций и напряжений вычисляется по (15) и (18)

$$\varepsilon(r, t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_\theta = |y(t)|/\bar{r}^2, \quad \sigma(r, t) = \frac{\sqrt{3}}{2} |\sigma_r - \sigma_\theta| = \mathbf{R} \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2). \quad (29)$$

Вычислив интеграл от напряжения (27) по отрезку $[r_1, r_2]$ с учетом (23) (см. п.7, где проведены аналогичные выкладки для продольной силы) можно убедиться, что в любой момент времени он равен $p_1 r_1 - p_2 r_2$, т.е. выполнено условие равновесия половины трубы в проекции на ось, ортогональную оси z .

При динамической постановке задачи (при учете инерционных членов в уравнениях равновесия) формулы для напряжений отличаются от формул (26)-(28) лишь одинаковым слагаемым $\frac{\sqrt{3}}{2} \rho r_1^2 \ddot{y}(t) \ln \bar{r}$, где ρ – плотность, формулы для деформаций (24)-(25) и для интенсивностей деформаций и напряжений сохраняются, но функция $Y(t)$ (входящая и в интегральные слагаемые формул (26)-(28)) будет другой, поскольку изменится уравнение (23) для нее (оно станет интегро-дифференциальным и будет содержать $\ddot{y}(t)$).

4. МОНОТОННОСТЬ ПО ВРЕМЕНИ ДЕФОРМАЦИЙ В ЛЮБОЙ ТОЧКЕ ТРУБЫ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЯХ

Рассмотрим задачу о ползучести трубы под действием постоянной разности давлений $p(t) = ph(t)$, т.е. $p(t) = \text{const}$ при $t > 0$. Тогда функция $P(t)$ в (23) легко вычисляется и уравнение (23) принимает вид

$$F(Y(t)) - F(qY(t)) = \sqrt{3} |p| \Pi(t), \quad q := (r_1/r_2)^2, \quad (30)$$

$$P(t) = \sqrt{3} |p| \Pi(t). \quad (31)$$

Продифференцируем (30) по времени и докажем, что $Y(t)$ возрастает

$$F'(Y(t))\dot{Y} - qF'(qY(t))\dot{Y} = \sqrt{3}|p|\dot{\Pi}(t), \quad \dot{Y} = \sqrt{3}|p|\dot{\Pi}(t)Y[\varphi(Y) - \varphi(qY)]^{-1},$$

так как $\varphi(x)$ возрастает, то $\varphi(Y(t)) - \varphi(qY(t)) > 0$, и из $\dot{\Pi}(t) > 0$ следует, что $\dot{Y} > 0$. Поэтому в силу формул (24)-(25) и (15) возрастают по t абсолютные величины перемещения $u_r(r, t)$, деформаций $\varepsilon_r(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $\varepsilon(r, t)$. Поскольку $y(t) = Y(t)\operatorname{sgn} p$, то при $p > 0$ функция $y(t)$ положительна и возрастает, а при $p < 0$ $y(t)$ отрицательна и убывает.

Аналогично можно доказать возрастание решения $Y(t, q)$ по параметру q . Дифференцируем (30) по q (используем обозначение $Y' := \partial Y / \partial q$)

$$F'(Y)Y' - F'(qY)(Y + qY') = 0, \quad Y' = q^{-1}Y\varphi(qY)[\varphi(Y) - \varphi(qY)]^{-1} > 0,$$

так как $\varphi(x)$ возрастает и $Y(t, q) > 0$. Полученное дифференциальное уравнение можно использовать для построения приближенного решения $Y(t, q)$ уравнения (30) методом продолжения по параметру.

Рассмотрим важные частные случаи выбора МФ ОС (1), найдем $y(t)$ и докажем, что поля деформаций и напряжений (24)-(28) совпадают с известными классическими решениями для несжимаемого материала в рамках теории линейной вязкоупругости, упругости и упругопластичности (с упрочнением).

5. НДС ТРУБЫ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНО ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Если задать линейную МФ $\varphi(x) = Ax$, то получим из формул (24)-(28) НДС трубы из *линейно* вязкоупругого несжимаемого материала с произвольной функцией сдвиговой ползучести $\Pi(t)$. По (23) $F(s) = As$, (23) принимает вид $A(1-q)|y(t)| = P(t)$, и для произвольной ФП $\Pi(t)$ и любых $p_i(t)$ имеем $y(t) = z(t)A^{-1}(1-q)^{-1}P(t)$, $p = p_1(t) - p_2(t)$, $z(t) = \operatorname{sgn} p$. По формулам (24), (25) вычисляются поля перемещений и деформаций

$$u_r = 0.5\sqrt{3}(1-q)^{-1}z(t)P(t)r_1/\bar{r}, \quad \varepsilon_r = -0.5\sqrt{3}(1-q)^{-1}z(t)P(t)\bar{r}^{-2}, \\ \varepsilon_\theta(r, t) = -\varepsilon_r(r, t).$$

Для мгновенного нагружения $p(t) = ph(t)$ постоянной разностью давлений p функция $P(t)$ вычисляется по (31) и из уравнения (30) находится

$$y(t) = \sqrt{3}A^{-1}(1-q)^{-1}p\Pi(t), \quad t \geq 0. \quad (32)$$

Подстановка (32) в формулы (24), (25) и (26)-(28) дает выражения для полей перемещений, деформаций и напряжений в условиях ползучести при постоянной разности давлений. Перемещений и деформации (24), (25) (кривые ползучести) пропорциональны $y(t)$, возрастают по времени (т.к. ФП $\Pi(t)$ возрастает) и линейно зависят от p . Для вычисления напряжений (26)-(28) необходимо сначала вычислить функции, на которые действует интегральный оператор \mathbf{R}

$$F(|y|) = \sqrt{3}(1-q)^{-1}|p|\Pi(t), \quad F(|y|/\bar{r}^2) = \varphi(|y|/\bar{r}^2) = \sqrt{3}(1-q)^{-1}|p|\bar{r}^{-2}\Pi(t),$$

$$\begin{aligned}
 F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) &= \sqrt{3}(1-q)^{-1}|p|(1-\bar{r}^{-2})\Pi(t), \\
 F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) + \varphi(|y|/\bar{r}^2) &= F(|y|), \\
 F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y|/\bar{r}^2) &= \sqrt{3}(1-q)^{-1}|p|(1+\bar{r}^{-2})\Pi(t).
 \end{aligned}$$

Все эти функции пропорциональны ФП $\Pi(t)$, и потому при вычислении оператора \mathbf{R} в (26)-(28), *время исчезнет из формул для напряжений* в силу (5)

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -p_1 + z(t)(1-q)^{-1}|p|(1-\bar{r}^{-2}) = -p_1 + p(1-q)^{-1}(1-\bar{r}^{-2}), \\
 \sigma_\theta &= -p_1 + p(1-q)^{-1}(1+\bar{r}^{-2}), \quad \sigma_z = -p_1 + p(1-q)^{-1} = (1-q)^{-1}(qp_1 - p_2)
 \end{aligned}$$

(учтено, что $z(t)|p|=p$). Все компоненты тензора напряжений совпадают с классическим решением задачи Ламе для линейно упругого несжимаемого материала. В частности, σ_z не зависит от r и одинаково во всех точках трубы в любой момент времени. Продольная сила

$$N = \pi(r_2^2 - r_1^2)(1-q)^{-1}(qp_1 - p_2) = \pi r_2^2(qp_1 - p_2) \tag{33}$$

равна нулю лишь в случае $p_2 = qp_1$.

Отметим, что ОС (1) с $\Phi(x)=x$, $\Phi_0(x)=x$ в трехмерном случае не совпадает с линейным ОС вязкоупругости для изотропных сред, так как последнее не обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров деформаций и напряжений в случае сложных нагружений. Эти два ОС совпадают только на множестве простых процессов нагружения $\sigma_{ij}(t) = \lambda(t)\bar{\sigma}_{ij}$ при любых i, j (или деформирования $\varepsilon_{ij} = \lambda(t)\bar{\varepsilon}_{ij}$), где $\dot{\lambda} > 0$ и $\bar{\sigma}$ – произвольный постоянный тензор, когда линейное ОС вязкоупругости обеспечивает пропорциональность девиаторов тензоров. В самом деле, если $\sigma_{ij}(t) = \lambda(t)\bar{\sigma}_{ij}$, то $\sigma_0(t) = \lambda(t)\bar{\sigma}_0$, $s_{ij}(t) = \lambda(t)\bar{s}_{ij}$ и

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) ds_{ij}(\tau) = s_{ij}(t) \left(\int_0^t \Pi(t-\tau) \dot{s}_{ij}(\tau) s_{ij}^{-1}(t) d\tau + s_{ij}(0) \Pi(t) s_{ij}^{-1}(t) \right),$$

т.е.

$$e_{ij}(t) = I(t)s_{ij}(t), \quad I(t) := \int_0^t \Pi(t-\tau)\dot{\lambda}(\tau)\lambda(t)^{-1} d\tau + \lambda(0)\lambda(t)^{-1}\Pi(t), \tag{34}$$

где функция $I(t)$ одинакова для всех пар индексов и не зависит от направляющего тензора программы нагружения $\bar{\sigma}$. В частности, при $i \neq j$ имеем $\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) = I(t)s_{ij}(t) = I(t)\lambda(t)\bar{s}_{ij}$, интенсивности напряжений и деформаций связаны формулой $\varepsilon(t) = \frac{2}{3}|I(t)|\sigma(t)$, а объемные деформации и среднее напряжение – зависимостью $\theta(t) = I_0(t)\sigma_0(t) = I_0(t)\lambda(t)\bar{\sigma}_0$, где $I_0(t)$ выражается через $\lambda(t)$ такой же формулой, что и $I(t)$, но с заменой ФП Π на Π_0 . Из формулы (34) также следует, что в рамках линейной вязкоупругости (как и для любого ОС обладающего свойством однородности произвольной степени) простое нагружение порождает простое деформирование, если

пренебречь сжимаемостью материала или считать, что коэффициент поперечной деформации не зависит от времени (т.е. $\Pi_0(t) = k\Pi(t)$).

Из формул (24),(25) следует, что в исследуемой задаче об НДС трубы в любой точке имеет место процесс простого деформирования, и потому решение задачи для ОС (6) с МФ $\varphi(x) = Ax$ действительно совпадает с решением для линейно вязкоупругого несжимаемого материала.

6. НДС ТРУБЫ В СЛУЧАЕ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ИЛИ УПРУГОПЛАСТИЧНОСТИ С УПРОЧНЕНИЕМ

Рассмотрим ОС (1) со степенной функцией нелинейности

$$\varphi(x) = Ax^\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (35)$$

произвольной функцией ползучести. Эта модель обеспечивает классическую степенную зависимость кривых ползучести и скорости ползучести от уровня напряжения (от его интенсивности при трехосном нагружении) [23,25] и степенную аппроксимацию диаграммы деформирования [26]. Для МФ (35) по (20) $F(s) = As^{-1}s^\alpha$, и решение $y(t)$ уравнения (30) находится аналитически

$$y(t) = z \left[\sqrt{3}A^{-1}\alpha(1-q^\alpha)^{-1}|p|\Pi(t) \right]^{1/\alpha}, \quad t \geq 0. \quad (36)$$

Подстановка (36) в формулы (24)-(25) дает выражения для полей перемещений и деформаций в условиях ползучести при постоянных давлениях. В силу (36) кривые ползучести $\varepsilon(r_1, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $\varepsilon_r(r, t)$ пропорциональны $p^{1/\alpha}(1-q^\alpha)^{-1/\alpha}$ и возрастают по времени, т.к. ФП возрастает.

Рассмотрим теперь случай нелинейной упругости (или упруго-пластичности при активном нагружении), т.е. случай ОС (1) с вырожденной ФП $\Pi(t) = c = \text{const}$ (из (5) $R(t) = 1/c$) и произвольной МФ φ , связывающей интенсивности деформаций и напряжений в точности так, как в деформационной теории пластичности, и задающей упрочнение материала. Тогда $P(t) = \sqrt{3}c|p(t)|$.

Для мгновенного нагружения $p(t) = ph(t)$, имеем $P = \sqrt{3}c|p|$, уравнение (23) не содержит времени, и его решение не зависит от времени: $y(t) = y_0$, $t > 0$, где $y_0 = y_0(|p|, q)$ – решение уравнения $F(|y_0|) - F(q|y_0|) = \sqrt{3}c|p|$. Все напряжения также не зависят от времени, поскольку все интегральные операторы в (26)-(28) действуют на постоянные при $t > 0$ функции (точнее, на функции вида $ah(t)$), а $\mathbf{R}ah(t) = aR(t) = a/c$. Обозначив $|y_0| = Y_0 = Y_0(|p|, q)$ и $E = 1/c$, получим из (24)-(28) поля деформаций и напряжений при постоянной разности давлений

$$\begin{aligned} u_r(r) &= \frac{\sqrt{3}}{2} y_0 r \bar{r}^{-1}, \quad \varepsilon_\theta(r) = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0 \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r) = -\varepsilon_\theta(r), \quad \varepsilon = |y_0|/\bar{r}^2, \\ \sigma_r(r) &= -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z E \left[F(Y_0) - F(Y_0/\bar{r}^2) \right], \\ \sigma_\theta(r) &= -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z E \left[F(Y_0) - F(Y_0/\bar{r}^2) + 2\varphi(Y_0/\bar{r}^2) \right], \\ \sigma_z(r) &= -p_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} z E \left[F(Y_0) - F(Y_0/\bar{r}^2) + \varphi(Y_0/\bar{r}^2) \right]. \end{aligned}$$

Все компоненты тензора напряжений совпадают с классическим решением для упругопластического несжимаемого материала с упрочнением [5], $\sigma = E\varphi(\varepsilon)$.

В частности, для степенной МФ (35) в силу (36) (отметим, что именно модель с МФ (35) и $\Pi(t) = \text{const}$ фигурирует в теореме Ильюшина о простом нагружении несжимаемого упругопластического тела)

$$y_0 = z(t) \left[\sqrt{3} A^{-1} \alpha (1 - q^\alpha)^{-1} c |p| \right]^{1/\alpha},$$

$$F(Y_0) = A \alpha^{-1} Y_0^\alpha = \sqrt{3} (1 - q^\alpha)^{-1} c |p|, \quad F(Y_0/\bar{r}^2) = \sqrt{3} (1 - q^\alpha)^{-1} c |p| \bar{r}^{-2\alpha},$$

$$\varphi(Y_0/\bar{r}^2) = \alpha F(Y_0/\bar{r}^2)$$

и потому поле напряжений (с учетом $Ec = 1$ и $z(t)|p| = p$) принимает вид

$$\sigma_r = -p_1 + (1 - q^\alpha)^{-1} (1 - \bar{r}^{-2\alpha}) p, \quad \sigma_\theta = -p_1 + (1 - q^\alpha)^{-1} [1 + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}] p,$$

$$\sigma_z = -p_1 + (1 - q^\alpha)^{-1} [1 + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}] p, \quad \sigma = \sqrt{3} \alpha (1 - q^\alpha)^{-1} |p| \bar{r}^{-2\alpha}.$$

Поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $(1 - \bar{r}^{-2\alpha}) / (1 - q^\alpha) \rightarrow -2 \ln \bar{r} / \ln q = \ln \bar{r} / \ln(r_2/r_1)$ и $\alpha / (1 - q^\alpha) \rightarrow -1 / \ln q$, то при $\alpha \rightarrow 0$ это поле напряжений стремится к классическому предельному распределению напряжений для идеально пластического (жестко-пластического) материала [1-3], характеризующемуся постоянством интенсивности напряжений $\sigma(r) \equiv \sigma_T$

$$\sigma_r = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} \ln \bar{r}, \quad \sigma_\theta = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} (\ln \bar{r} + 1),$$

$$\sigma_z = -p_1 - \frac{2p_*}{\ln q} (\ln \bar{r} + 0.5), \quad \sigma = -\sqrt{3} \frac{|p_*|}{\ln q},$$

где предельная разность давлений p_* находится из условия $\sigma = \sigma_T$

$$|p_*| = -\sigma_T (\ln q) / \sqrt{3} = (2/\sqrt{3}) \sigma_T \ln(r_2/r_1).$$

7. НЕЗАВИСИМОСТЬ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ ОТ ПРЕДЫСТОРИИ ИЗМЕНЕНИЯ НАГРУЗКИ И ОТ МАТЕРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОС

Чтобы найти продольную силу, надо проинтегрировать по сечению трубы напряжение (28), учитывая перестановочность оператора интегрирования по сечению с оператором интегрирования по времени \mathbf{R} и формулы (23)

$$N = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \sigma_z(r, t) r dr =$$

$$= 2\pi \int_{r_1}^{r_2} \left(-rp_1 + r \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \mathbf{R} \left[F(|y(t)|) - F(|y(t)|/\bar{r}^2) + \varphi(|y(t)|/\bar{r}^2) \right] \right) dr,$$

$$N = -\pi (r_2^2 - r_1^2) p_1 +$$

$$+ \pi \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \left[(r_2^2 - r_1^2) \mathbf{R} F(Y(t)) - r_1^2 \mathbf{R} \int_1^{1/q} (F(Y(t)/x) - \varphi(Y(t)/x)) dx \right]$$

(сделана замена $x = r^2/r_1^2$ и введено обозначение $Y := |y(t)|$).

Дифференцированием по частям преобразуем интеграл с учетом (20)

$$\int_1^{1/q} F(Y(t)/x) dx = q^{-1} F(qY(t)) - F(Y(t)) + \int_1^{1/q} \varphi(Y(t)/x) dx.$$

В силу (23) $F(qY(t)) = F(Y(t)) - P(t)$ и потому

$$\int_1^{1/q} F(Y(t)/x) dx = (q^{-1} - 1) F(Y(t)) - q^{-1} P(t) + \int_1^{1/q} \varphi(Y(t)/x) dx,$$

$$\begin{aligned} N &= -\pi(r_2^2 - r_1^2) p_1 + \\ &\quad + \pi \frac{1}{\sqrt{3}} z(t) \left[(r_2^2 - r_1^2) \mathbf{R} F(Y(t)) - r_1^2 (q^{-1} - 1) \mathbf{R} F(Y(t)) + r_1^2 q^{-1} \mathbf{R} P(t) \right], \\ N &= -\pi(r_2^2 - r_1^2) p_1 + \pi r_2^2 (p_1 - p_2) = \pi r_2^2 (q p_1 - p_2), \end{aligned} \quad (37)$$

т.к. $r_2^2 - r_1^2 q^{-1} = 0$, а $z|p| = p$. Знак продольной силы (37) совпадает со знаком величины $q p_1 - p_2$, она равна нулю лишь в случае $p_2 = q p_1$. Примечательно, что продольная сила (в отличие от напряжений) не зависит от предыстории изменения нагрузки и от МФ ОС (1), а только от мгновенных значений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, и совпадает с силой (33), найденной из решения линейной задачи (хотя осевые напряжения не постоянны по сечению).

При динамической постановке задачи это уже не так: продольная сила отличается от статической силы (37) слагаемым с $\ddot{y}(t)$

$$N = \pi r_2^2 (q p_1 - p_2) + \pi r_2^2 \mu \ddot{y}(t), \quad \mu := \frac{\sqrt{3}}{4} \rho r_1^2 (q - \ln q - 1).$$

Очевидно, $\mu > 0$ при любых $\rho, r_1, r_2 > 0$, поскольку $\ln x + 1 < x$ при $x > 0$, и потому знак второго слагаемого совпадает со знаком $\ddot{y}(t)$ в любой момент времени. Динамическая продольная сила зависит не только от мгновенных значений $p_1(t)$ и $p_2(t)$, и радиусов цилиндра, но и от предыстории изменения нагрузки и от МФ, так как она содержит слагаемое с $\ddot{y}(t)$, а $y(t)$ зависит от предыстории изменения нагрузки и от МФ в силу динамического аналога уравнения (23).

8. СПЕЦИФИКА НДС ТРУБЫ ПРИ ПОСТОЯННЫХ ДАВЛЕНИЯХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ СО СТЕПЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Исследуем свойства НДС трубы для ОС (1) с произвольной функцией ползучести (ФП) $\Pi(t)$ и функцией нелинейности вида (35) с $\alpha > 0$.

Решение $y(t)$ уравнения (30) для модели (35) находится аналитически: оно имеет вид (36) и возрастает по времени (в случае $p > 0$), т.к. $\Pi(t)$ возрастает. Подстановка (36) в формулы (24)-(25) дает выражения для полей перемещений и деформаций в условиях ползучести при постоянных давлениях

$$u_r = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) r_1 \bar{r}^{-1}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} y(t) \bar{r}^{-2}, \quad \varepsilon_r(r, t) = -\varepsilon_\theta(r, t), \quad \varepsilon = |y(t)| / \bar{r}^2, \quad (38)$$

где $q := (r_1/r_2)^2 \in (0; 1)$, $\bar{r} := r/r_1 \in [1, r_2/r_1]$. В силу (38) и (36) кривые ползучести $\varepsilon(r, t)$, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и $|\varepsilon_r(r, t)|$ возрастают по времени при любом r и ограничены на полуоси $t \geq 0$ тогда и только тогда, когда ограничена $\Pi(t)$; при $\alpha \geq 1$ все они выпуклы вверх, так как $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ и $\ddot{y}(t) \leq 0$

$$\ddot{y}(t) = Q\ddot{\Pi}(t)\Pi(t)^{-1+1/\alpha} + Q\dot{\Pi}(t)^2(1-\alpha)\alpha^{-1}\Pi(t)^{-2+1/\alpha},$$

$$Q = \alpha^{-1} \left[\sqrt{3}A^{-1}\alpha(1-q^\alpha)^{-1}|p| \right]^{1/\alpha}.$$

Зависимость кривых ползучести от давления и относительной толщины трубы характеризуется множителем $\alpha(1-q^\alpha)^{-1/\alpha}|p|^{1/\alpha}$, возрастающим по p и q . При фиксированном t модули всех деформаций (38) – убывающие функции r . При $\alpha=1$ НДС для модели (35) вырождается в решение для трубы из линейно вязкоупругого несжимаемого материала с произвольной сдвиговой ФП (см. п.5).

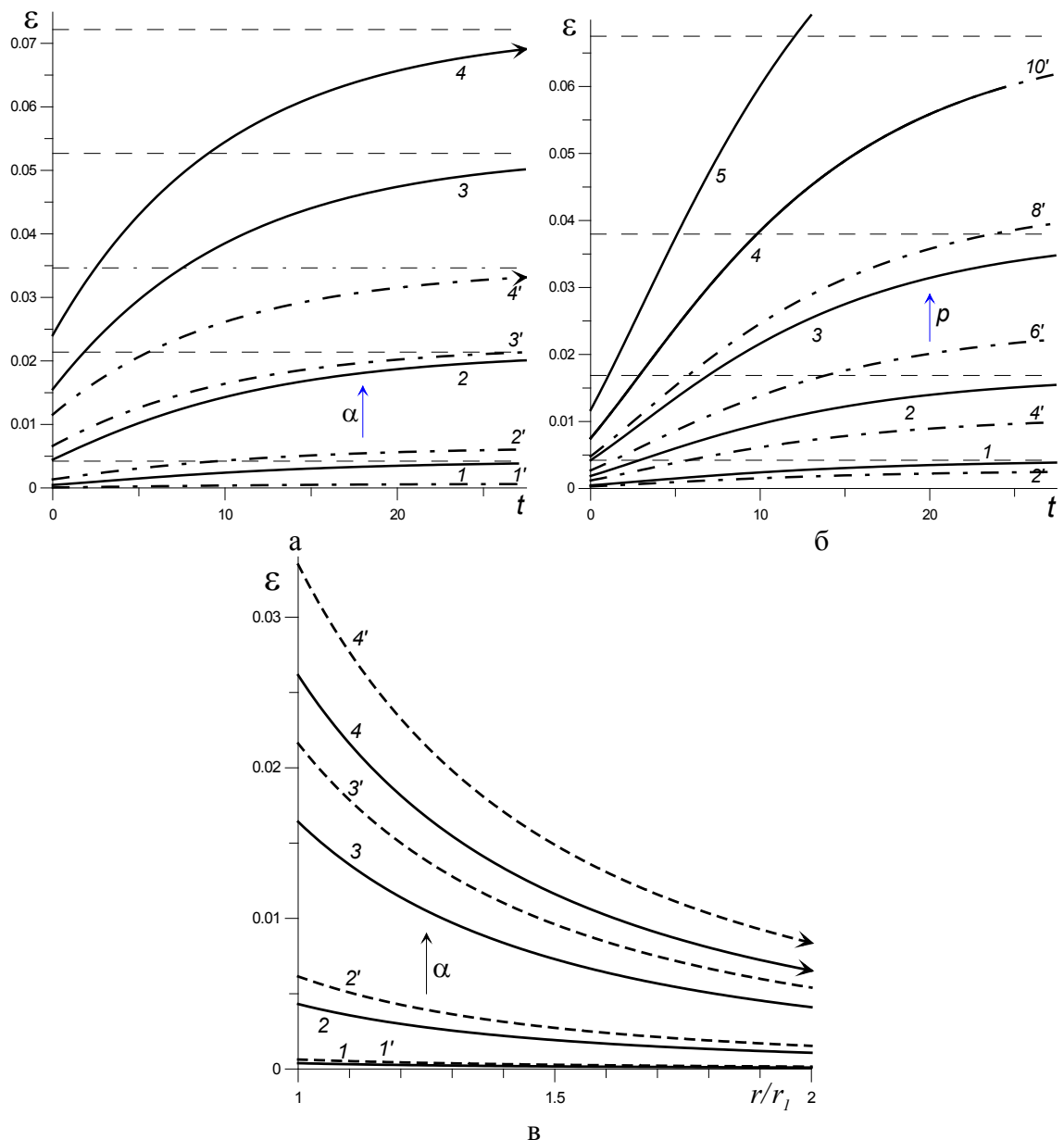


Рис.1.

На рис.1а приведены графики интенсивности деформаций (38) на внутренней поверхности трубы $\epsilon(r_1, t) = |y(t)|$ в зависимости от времени

(кривые ползучести) для трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ ($q = 0.64$), нагруженной разностью давлений $p = 1$, в предположении, что материал описывается ОС (1) со степенной МФ (35) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0,5; 0,7; 0,9; 1,0$ (кривые 1–4) и с ФП

$$\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \beta = 0,015, \quad \gamma = 0,01, \quad \lambda = 0,1 \quad (39)$$

(ФП как у модели Кельвина, время ретардации $1/\lambda = 10$, а время релаксации $\tau = (\beta - \gamma)/(\beta\lambda) = 10/3$). Эти кривые совпадают с графиками функций (36), а графики деформаций $\varepsilon_\theta(r_1, t)$ и $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ отличаются от них лишь множителем $\pm\sqrt{3}/2$. Штриховые прямые – их горизонтальные асимптоты при $t \rightarrow \infty$ (ФП (39) имеет предел $\Pi(\infty) = \beta$). Штрихпунктирные кривые 1'–4' – кривые ползучести $\varepsilon(r_1, t)$ для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ ($q = 0.25$) при той же нагрузке и для тех же моделей; деформации заметно меньше, т.к. площадь поперечного сечения увеличилась в 2 раза: отношение площадей равно $(1 - q_2)/(1 - q_1) = 0,75/0,36$. Кривые 4 и 4' соответствуют $\alpha = 1$, т.е. случаю линейно вязкоупругого материала.

На рис.1б приведены графики интенсивность деформаций (38) $\varepsilon(r_1, t) = |y(t)|$ на внутренней поверхности трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ при разных величинах давления $p = 1; 2; 3; 4; 5$ для модели с $\alpha = 0,5$ и той же ФП (39), что и на рис.1а. Кривые 2', 4', 6', 8', 10' – кривые ползучести для трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ при $p = 2; 4; 6; 8; 10$.

На рис.1в приведены графики интенсивности деформаций (38) в зависимости от \bar{r} при нагружении трубы с $r_1/r_2 = 1/2$ разностью давлений $p = 1$ для тех же четырех моделей с МФ (39) и (35) с показателями $\alpha = 0,5; 0,7; 0,9; 1,0$ (кривые 1–4) и, что и на рис.1а. Кривые 1–4 соответствуют моменту $t = 10$, а кривые 1'–4' – моменту $t = 30$, т.е. достаточно большому времени для выхода на горизонтальную асимптоту при $t \rightarrow \infty$, имеющуюся у ФП (39), у функции (36) и деформаций (38).

Вычислим поля напряжений, соответствующие степенной МФ (35), учитывая однородность функций $\varphi = Ax^\alpha$ и $F = \varphi(x)/\alpha$. Сначала надо вычислить функции, на которые действует интегральный оператор \mathbf{R} в формулах (26), (27), (28)

$$\begin{aligned} F(|y|) &= A\alpha^{-1} \left[\sqrt{3}A^{-1}\alpha(1 - q^\alpha)^{-1} |p|\Pi(t) \right] = \sqrt{3}(1 - q^\alpha)^{-1} |p|\Pi(t), \\ F(|y|/\bar{r}^2) &= \sqrt{3}(1 - q^\alpha)^{-1} |p|\bar{r}^{-2\alpha}\Pi(t), \quad \varphi(|y|/\bar{r}^2) = \sqrt{3}\alpha(1 - q^\alpha)^{-1} |p|\bar{r}^{-2\alpha}\Pi(t), \\ F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) &= \sqrt{3}(1 - q^\alpha)^{-1} |p|(1 - \bar{r}^{-2\alpha})\Pi(t), \\ F(|y|) - F(|y|/\bar{r}^2) + 2\varphi(|y|/\bar{r}^2) &= \sqrt{3}(1 - q^\alpha)^{-1} |p|(1 - \bar{r}^{-2\alpha} + 2\alpha\bar{r}^{-2\alpha})\Pi(t). \end{aligned}$$

Все эти функции пропорциональны $\Pi(t)$, и потому при вычислении оператора \mathbf{R} время исчезнет из формул для напряжений в силу (5). В самом деле, по (26)-(28)

$$\begin{aligned} \sigma_r(r,t) &= -p_1 + z(t)(1-q^\alpha)^{-1} |p| [1 - \bar{r}^{-2\alpha}] = \\ &= -p_1 + p(1-q^\alpha)^{-1} [1 - \bar{r}^{-2\alpha}], \end{aligned} \tag{40}$$

$$\sigma_\theta(r,t) = -p_1 + p(1-q^\alpha)^{-1} [1 + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}], \tag{41}$$

$$\sigma_z(r,t) = -p_1 + p(1-q^\alpha)^{-1} [1 + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha}], \tag{42}$$

где $\bar{r}^{-2\alpha} \in [q^\alpha, 1] \subset (0; 1]$ и $1 - q^\alpha \in (0; 1)$ при всех $\alpha > 0$.

Все напряжения (40)-(42) не зависят от времени, а их зависимость от r определяется знаком p и величиной α . Если $p_1 > p_2$, второе слагаемое в формулах (40)-(42) положительно (т.к. $1 + (2\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha} > 1 + (\alpha - 1)\bar{r}^{-2\alpha} > 1 - \bar{r}^{-2\alpha} > 0$), $\sigma_\theta(r,t) > \sigma_z(r,t) > \sigma_r(r,t)$ при $r \in [r_1, r_2]$, $\sigma_r(r)$ возрастает при всех $\alpha > 0$, $-p_1 \leq \sigma_r(r) \leq -p_2$ (и потому $|\sigma_r(r)|$ убывает), окружное напряжение $\sigma_\theta(r)$ возрастает при $\alpha \in (0; 0.5)$, убывает при $\alpha > 0.5$ и не зависит от координат при $\alpha = 0.5$, а осевое напряжение $\sigma_z(r)$ возрастает при $\alpha \in (0; 1)$, убывает при $\alpha > 1$ и постоянно по сечению при $\alpha = 1$ (в случае линейно вязкоупругого материала).

Если $p_2 = 0$, то $\sigma_\theta > 0$ и $\sigma_z > 0$ при всех $r \in [r_1, r_2]$. При $p_2 > 0$ окружное напряжение (41) (как и осевое) не обязательно положительно: при малом $p = p_1 - p_2$ второе слагаемое в каждой из формул (40)-(42) мало и $\sigma_\theta(r) < 0$ и $\sigma_z(r) < 0$. Знак продольной силы (37) совпадает со знаком величины $qp_1 - p_2$.

Так как при любом $\alpha > 0$ $\sigma_\theta(r)$ и $\sigma_z(r)$ монотонны, то наибольшее значение они принимают при $r = r_1$ или $r = r_2$, т.е. при $\bar{r}^{-2} = 1$ или $\bar{r}^{-2} = q$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta(r_1) &= -p_1 + 2\alpha(1-q^\alpha)^{-1} (p_1 - p_2), \\ \sigma_\theta(r_2) &= -p_1 + (p_1 - p_2) [1 + 2\alpha q^\alpha (1-q^\alpha)^{-1}]. \end{aligned}$$

$\sigma_\theta(r_1) > 0$ равносильно $p_2/p_1 < 1 - 0.5(1-q^\alpha)\alpha^{-1}$, или $p_1 > \alpha [\alpha - 0.5(1-q^\alpha)]^{-1} p_2$;

$\sigma_\theta(r_2) > 0$ равносильно $p_2/p < 2\alpha q^\alpha (1-q^\alpha)^{-1}$, т.е. $p_1 > \alpha^{-1} [\alpha + 0.5(q^{-\alpha} - 1)] p_2$.

Из оценки $q^\alpha \leq \bar{r}^{-2\alpha} \leq 1$ следует, что $1 - \bar{r}^{-2\alpha} \leq 1 - q^\alpha$ и по (40) и (41) имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\max}(r) &= |\sigma_\theta - \sigma_r|/2 = \alpha \bar{r}^{-2\alpha} (1-q^\alpha)^{-1} |p|, \\ \alpha q^\alpha (1-q^\alpha)^{-1} |p| &\leq \tau_{\max} \leq \alpha (1-q^\alpha)^{-1} |p|. \end{aligned}$$

Интенсивность напряжений вычисляется по (29)

$$\sigma(r,t) = \sqrt{3} \tau_{\max}(r) = \sqrt{3} \alpha (1-q^\alpha)^{-1} |p| \bar{r}^{-2\alpha}. \tag{43}$$

Интенсивность напряжений (как и $\tau_{\max}(r)$) убывает по r любом $\alpha > 0$ (и любом знаке $p_1 - p_2$) и максимальна на внутренней границе трубы: $\sigma_{\max} = \sigma(r_1) = \sqrt{3} \alpha (1-q^\alpha)^{-1} |p|$. Поэтому наблюдаемое в опытах для многих (вязкоупругих) материалов разрушение на внешней поверхности трубы нельзя

объяснить (описать) с помощью критериев прочности Хубера-Мизеса или Треска-Сен-Венана, но можно, если принять в качестве эквивалентного напряжения максимальное растягивающее напряжение $\sigma_1 = \sigma_\theta(r)$, принимающее максимальное значение при $r = r_2$, если $\alpha \in (0; 0.5)$. Отметим, что $\sigma_\theta(r)$ может быть больше, чем $\sigma(r)$, вблизи внешней границы трубы при любом $\alpha > 0$.

При $\alpha = 1$ (т.е. в случае линейно вязкоупругого материала) все компоненты тензора напряжений совпадают с решением линейно упругой задачи Ламе для несжимаемого материала (см. п.5), в частности σ_z не зависит от r . При $\alpha \rightarrow 0$ поле напряжений (40)-(42) стремится к классическому предельному распределению напряжений для идеально пластического материала [1-3] (см. п.6).

На рис.2а приведены графики напряжений (40)-(43) в зависимости от координаты $\bar{r} = r/r_1$ при нагружении трубы с $r_1/r_2 = 4/5$ (т.е. $q = 0.64$, $\bar{r} \in [1; 5/4]$) давлениями $p_1 = 2$ и $p_2 = 1$ ($p = 1$) в предположении, что материал описывается ОС Работнова (1) со степенной МФ (35) с $A = 1$ и разными показателями $\alpha = 0, 2; 0, 5; 0, 8; 1, 0; 1, 5; 2$ (кривые 1-6). Эпюры $\sigma_\theta(\bar{r})$ и $-\sigma_r(\bar{r})$ изображены сплошными линиями, эпюры $\sigma_z = \sigma_0$ – штрихпунктирными, интенсивности напряжений (43) – штриховыми линиями. Эпюры для $\alpha = 1$ помечены стрелками на концах (кривые 4). Отметим, что напряжения σ_θ и σ в несколько раз превышают приложенные давления и их разность.

На рис.2б приведены графики напряжений (40)-(43) в зависимости от $\bar{r} = r/r_1$ для более толстой трубы с $r_1/r_2 = 0,5$ (т.е. $q = 0.25$, $\bar{r} \in [1; 2]$) при той же нагрузке и для тех же моделей (35) с показателями $\alpha = 0, 2; 0, 5; 0, 8; 1, 0; 1, 5; 2$ (кривые 1-6). Существенное отличие от рис.2а – смещение эпюр $\sigma_\theta(\bar{r})$ и $\sigma_z = \sigma_0$ в зону отрицательных напряжений и уменьшение модулей σ_θ , σ и σ_z (т.к. площадь поперечного сечения увеличилась в 2 раза).

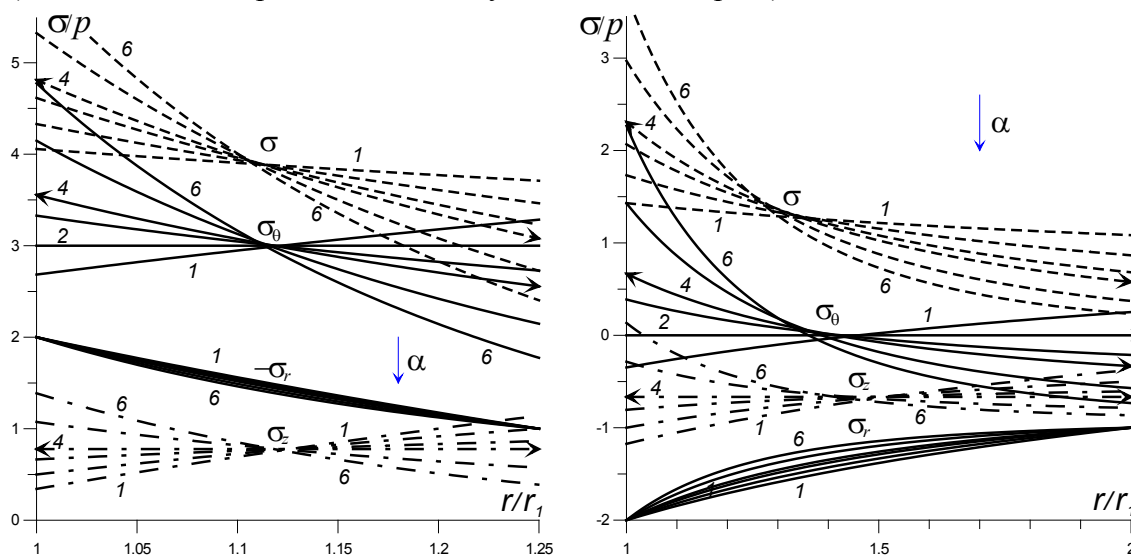


Рис.2.

Отметим, что для произвольной МФ (не степенной) интенсивность напряжений и все компоненты тензора напряжений зависят от времени, а их зависимость от радиальной координаты может быть немонотонной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье построено и аналитически исследовано точное решение задачи об определении напряженно-деформированного состояния полого цилиндра из физически нелинейного несжимаемого однородного изотропного материала, подчиняющегося определяющему соотношению вязкоупругости Работнова (1) с двумя произвольными материальными функциями, под действием постоянных внутреннего и внешнего давлений (в условиях ползучести) и задании нулевого осевого перемещения на основаниях цилиндра. Поля перемещений, деформаций и напряжений в любой момент времени выражены по формулам (24)-(28) через одну функцию времени, которая находится в результате решения нелинейного функционального уравнения (23), содержащего материальные функции ОС и заданную нагрузку. В частности, доказано, что деформации монотонно возрастают, а возникающая в поперечном сечении трубы продольная сила (37) не зависит от времени и от материальных функций (в отличие от напряжений и деформаций), а зависит только от давлений и радиусов трубы, и совпадает с силой, найденной из решения задачи для линейно упругого материала. Показано, что построенные поля деформаций и напряжений совпадают в частных случаях (при специальном выборе одной из материальных функций) с известными классическими решениями для несжимаемого материала в рамках линейной теории вязкоупругости, упругости и упругопластичности с произвольным упрочнением. Для степенной материальной функции нелинейности (с любым показателем) и произвольной функции сдвиговой ползучести вычислены все интегральные операторы, входящие в общее решение, и выведены простые алгебраические формулы для деформаций и напряжений в любой точке трубы через функцию ползучести и доказано, что напряжения в любой точке трубы не зависят от времени (в отличие от деформаций) и совпадают с решением для упругопластического материала со степенной функцией упрочнения. Исследованы условия возрастания или убывания напряжений и деформаций по радиальной координате в зависимости от отношения радиусов трубы, величин давлений и показателя функции нелинейности.

Полученные точные решения будут использованы для анализа длительной прочности труб, для верификации процедуры численной реализации решения уравнения (23) и расчетов НДС труб при произвольных материальных функциях и решений, построенных при отказе от некоторых упрощающих допущений (однородность материала, плоская деформация, несжимаемость) и для исследования (и верификации) решений динамической задачи о нагружении (многослойных) труб переменными давлениями и тепловыми воздействиями (в частности, в условиях циклического нагружения и виброползучести).

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – 306 с.

2. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids. Vol.1.* – N.-Y.: McGraw-Hill, 1950. – 572 p.
3. Prager W., Hodge P.G. *Theory of perfectly plastic solids.* – N.-Y.: John Wiley and Sons, 1951. – 328 p.
4. Bland D.R. *Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient* // *J. Mech. Phys. Solids.* – 1956. – Vol.4. – No.4. – Pp.209-229.
5. Ильюшин А.А., Огибалов П.М. *Упруго-пластические деформации полых цилиндров.* – М.: Изд-во МГУ, 1960. – 227 с.
6. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести.* – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
7. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности.* – М.: Физматлит, 2001. – 704 с.
8. Качанов Л.М. *Теория ползучести.* – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
9. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций.* – М.: Наука, 1966. – 752 с.
10. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов.* – М.: Физматлит, 2016. – 504 с
11. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction.* – N.-Y., L.: Acad. Press, 1971. – 256 p.
12. Москвитин В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе).* – М.: Наука, 1972. – 328 с.
13. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел.* – М.: Наука, 1977. – 384 с.
14. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior.* – Heidelberg: Springer, 1989. – 769 p.
15. Работнов Ю.Н. *Равновесие упругой среды с последствием* // *ПММ.* – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
16. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. *Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории* // *ПМТФ.* – 1971. – №2. – С.76-82.
17. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. *Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах* // *Механика полимеров.* – 1971. – №1. – С.74-87.
18. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. *Описание ползучести композиционных материалов при растяжении и сжатии* // *Механика полимеров.* – 1973. – №5. – С.779-785.
19. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. *Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния* // *Механика композитных материалов.* – 1993. – №5. – С.602-607.
20. Суворова Ю.В. *О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях* // *Известия АН СССР. МТТ.* – 2004. – №1. – С.174-181.
21. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. *Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями* // *Композиты и наноструктуры.* – 2011. – №2. – С.28-39.
22. Khokhlov A.V. *Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions* // *Moscow Univ. Mech. Bulletin.* – 2017. – Vol.72. – No.5. – Pp.103-107.
23. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова*

- для вязкоупругопластичных материалов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – №3. – С.93-123.
24. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory* // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – Vol.54. – No.4. – Pp.473-486.
 25. Хохлов А.В. *Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.407-436.
 26. Хохлов А.В. *Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Изв. РАН. МТТ. – 2019. – №2. – С.29-47.
 27. Хохлов А.В. *Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии полого цилиндра из нелинейно наследственного материала под действием внутреннего и внешнего давлений* // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т.12. – №1. – С.44-54.
 28. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation*. In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by Fung Y.C. et al.). – New Jersey: Prentice-Hall, 1972. – Pp.181-208.
 29. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. – N.-Y.: Springer, 1993. – 568 p.
 30. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. *Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments* // J. Biomech. Eng. – 2000. – Vol.122. – Pp.15-22.
 31. Sarver J.J., Robinson P.S., Elliott D.M. *Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments* // J. Biomech. Eng. – 2003. – Vol.125. – No.5. – Pp.754-758.
 32. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. *An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory* // J. Biomech. Eng. – 2004. – Vol.126. – Pp.92-97.
 33. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. *A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling* // J. of Biomechanics. – 2007. – Vol.40. – No.14. – Pp.3070-3078.
 34. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model* // Biomechanics and Modeling in Mechanobiology. – 2007. – Vol.6. – No.4. – Pp.245-251.
 35. Duenwald S.E, Vanderby R., Lakes R.S. *Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment* // Acta Mechanica. – 2009. – Vol.205. – Pp.23-33.
 36. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 461 p.
 37. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model* // Proc. R. Soc. A. – 2014. – Vol.470. – No.2166. – Pp.1-18.
 38. Хохлов А.В. *Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики её идентификации* // Изв. РАН. МТТ. – 2018. – №3. – С.81-104.

39. Хохлов А.В. Анализ влияния объемной ползучести на кривые нагружения с постоянной скоростью и эволюцию коэффициента Пуассона в рамках линейной теории вязкоупругости // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2019. – Т.23. – №4. – С.671-704.

REFERENCES

1. Sokolovskii V.V. *Teoriya plastichnosti. [Theory of plasticity]*. Moskva-Leningrad, Izdatel'stvo akademii nauk SSSR, 1946, 306 p.
2. Nadai A.L. *Theory of flow and fracture of solids. Vol.1.* N.-Y, McGraw-Hill, 1950, 572 p.
3. Prager W., Hodge P.G. *Theory of perfectly plastic solids.* N.-Y., John Wiley and Sons, 1951, 328 p.
4. Bland D.R. *Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradient.* J. Mech. Phys. Solids, 1956, Vol.4, No.4, Pp.209-229.
5. Il'yushin A.A., Ogibalov P.M. *Uprugo-plasticheskie deformatsii polykh tsilindrov [Elastoplastic deformations of hollow cylinders]*. Moskva, Izdatel'stvo MGU, 1960, 227 p.
6. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [Applied theory of plasticity and creep]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 400 p.
7. Ishlinskii A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematic theory of plasticity]*. Moskva, Fizmatlit, 2001, 704 p.
8. Kachanov L.M. *Teoriya polzuchesti [Creep theory]*. Moskva, Fizmatgiz, 1960, 456 p.
9. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruksij [Creep problems in structural members]*, Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
10. Lokoshchenko A.M. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallov [Creep and long-lasting strength of metals]*. Moskva, Fizmatlit, 2016, 504 p.
11. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction.* N.-Y., L., Acad. Press, 1971, 256 p.
12. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie vyazkouprugikh materialov (primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigatelej na tverdom toplive) [Strength of viscoelastic materials]*. Moskva, Nauka, 1972, 328 p.
13. Rabotnov Yu.N. *Ehlementy nasledstvennoj mekhaniki tverdykh tel [Introduction to hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
14. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior.* Heidelberg, Springer, 1989, 769 p.
15. Rabotnov Yu.N. *Ravnovesie uprugoj sredy s posledejstviem [Equilibrium of elastic medium with heredity]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1948, Vol.12, No.1, Pp.53-62.
16. Dergunov N.N, Papernik L.H., Rabotnov Yu.N. *Analiz povedeniya grafita na osnove nelinejnoj nasledstvennoj teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the non-linear hereditary theory]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1971, No.2, Pp.76-82.
17. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev Y.I. *Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material.* Polymer mechanics, 1971, Vol.7, No.1, Pp.63-73.

18. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev E.I. *Description of creep of composition materials under tension and compression*. Polymer Mechanics, 1973, Vol.9, No.5, Pp.690-695.
19. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. *Nonlinear model of an isotropic hereditary medium in state of complex stress*. Mech Compos Mater., 1994, Vol.29, No.5, Pp.443-447.
20. Suvorova Y.V. *O nelinejno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i ego prilozheniyakh [On the Yu. N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]*. Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.1, Pp.174-181.
21. Alekseyeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. *Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of the viscoelastic properties of polymer composites with carbon fillers]*. Kompozity i nanostruktury, 2011, No.2, Pp.28-39.
22. Khokhlov A.V. *Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions*. Moscow Univ. Mech. Bulletin, 2017, Vol.72, No.5, Pp.103-107.
23. Khokhlov A.V. *Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings*. Vestnik MGTU im. N.Eh. Baumana. Seriya Estestvennye nauki, 2017, No.3, Pp.93-123.
24. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory*. Mechanics of Composite Materials, 2018, Vol.54, No.4, Pp.473-486.
25. Khokhlov A.V. *Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koehffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshh'yu nelinejno-nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.407-436.
26. Khokhlov A.V. *Properties of the set of strain diagrams produced by Rabotnov nonlinear equation for rheonomous materials*. Mechanics of Solids, 2019, Vol.54, No.3, Pp.384-399.
27. Khokhlov A.V. *Exact solution of the boundary value problem for strain and stress fields in a thick tube made of physically non-linear elasto-viscoplastic material under given internal and external pressures*. Vestnik Yuzhnouralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika", 2020, Vol.12, No.1, Pp.44-54.
28. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation*. In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by Fung Y.C. et al.). New Jersey, Prentice-Hall, 1972, Pp.181-208.
29. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. N.-Y., Springer, 1993, 568 p.
30. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. *Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments*. J. Biomech. Eng., 2000, Vol.122, Pp.15-22.
31. Sarver J.J., Robinson P.S, Elliott D.M. *Methods for quasi-linear viscoelastic modeling of soft tissue: application to incremental stress-relaxation experiments*. J. Biomech. Eng., 2003, Vol.125, No.5, Pp.754-758.

32. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. *An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory*. J. Biomech. Eng., 2004, Vol.126, Pp.92-97.
33. Nekouzadeh A., Pryse K.M., Elson E.L., Genin G.M. *A simplified approach to quasi-linear viscoelastic modeling*. J. of Biomechanics, 2007, Vol.40, No.14, Pp.3070-3078.
34. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2007, Vol.6, No.4, Pp.245-251.
35. Duenwald S.E, Vanderby R., Lakes R.S. *Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment*. Acta Mechanica, 2009, Vol.205, Pp.23-33.
36. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, 461 p.
37. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model*. Proc. R. Soc. A., 2014, Vol.470, No.2166, Pp.1-18.
38. Khokhlov A.V. *Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.3, Pp.307-328.
39. Khokhlov A.V. *Analiz vliyaniya ob'emnoj polzuchesti na krivye nagruzheniya s postoyannoj skorost'yu i ehvolyutsiyu koehffitsienta Puassona v ramkakh linejnoj teorii vyazkouprugosti [Analysis of the bulk creep influence on stress-strain curves under tensile loadings at constant rates and on Poisson's ratio evolution based on the linear viscoelasticity theory]*. Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki", 2019, Vol.23, No.4, Pp.671-704.

Поступила в редакцию 14 апреля 2020 года.

Сведения об авторе:

Хохлов Андрей Владимирович – к.т.н., в.н.с., Лаборатория упругости и пластичности, доц. Кафедры механики композитов механико-математического факультета МГУ, НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru