

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СФЕРЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ДАВЛЕНИЯ, С УЧЕТОМ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА\*

Саганов Е.Б.<sup>1,2</sup>, Шарунов. А.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

<sup>2</sup>ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

В работе получено численное решение задачи о напряженно-деформируемом состоянии (НДС) толстостенной сферы из сплава с памятью формы (СПФ), находящейся под действием постоянного внутреннего или внешнего давления нагружаемой в режиме мартенситной неупругости (МН) с учетом упругих деформаций и свойства разносопротивляемости материала. Под разносопротивляемостью понимается зависимость материальных констант этих сплавов от параметра вида напряженного состояния. В качестве параметра вида напряженного состояния используется параметр, связанный с третьим инвариантом девиатора напряжений. Решение получено на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. При решении задачи без учета упругих деформаций используется положение об активных процессах пропорционального нагружения.

В рамках рассматриваемого процесса деформирования продемонстрировано влияние разносопротивляемости СПФ, а также упругих деформаций на распределение радиальных и кольцевых напряжений в сечении сферы. Установлено, что распределение радиальных и кольцевых напряжений по сечению сферы имеет нелинейный характер, а сами напряжения могут меняться немонотонно в процессе нагружения.

В ходе работы выполнена верификация модуля конечно-элементного комплекса Simulia Abaqus, разработанного для анализа НДС конструкций из СПФ в режиме МН. В качестве верификационного базиса использовано полученное численное решение трехмерной по пространству краевой задачи о НДС толстостенной сферической оболочки из СПФ, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления с учетом разносопротивляемости этих сплавов. Полученное численное решение сходится к аналитическому решению соответствующей задачи без учета упругих деформаций при увеличении модуля Юнга.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; мартенситная неупругость; разносопротивляемость; толстостенная сферическая оболочка; давление

## SOLUTION OF PROBLEM ON SPHERE OF ALLOY WITH MEMORY OF SHAPE UNDER ACTION OF CONSTANT PRESSURE, TAKING INTO ACCOUNT DIVERGENCE OF MATERIAL

Saganov E.B.<sup>1,2</sup>, Sharunov A.V.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Institute of applied mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow aviation institute (national research university), Moscow, Russia

\* Работа выполнена в рамках госбюджетной темы, номер гос. регистрации АААА-А19-119012290118-3 при частичной финансовой поддержке РФФИ проект № 20-01-00240.

## ABSTRACT

In the work, a numerical solution of the problem on the stress-strain state (SSS) of a thick-walled sphere made of a shape memory alloy (SMA), which is under the influence of constant internal or external pressure in the mode of martensitic inelasticity (MI) taking into account elastic deformations and the property of material tension-compression asymmetry. Under the property, tension-compression asymmetry refers to the dependence of the material constants of these alloys on the type parameter of the state of stress. The parameter associated with the third invariant of the stress deviator is used as a parameter of the type of stress state. The solution was obtained on the basis of the model of nonlinear deformation of SMA during phase and structural transformations. When solving the problem without taking into account elastic deformations, the provision on active processes of proportional loading is used.

In the framework of the deformation process under consideration, the influence of the SMA diversity resistance as well as elastic deformations on the distribution of radial and ring stresses in the sphere cross section is demonstrated. It has been established that the distribution of radial and circular stresses over the sphere cross section is nonlinear, and the stresses themselves can vary nonmonotonously during loading.

In the course of work, the module of the finite element complex Simulia Abaqus was verified, which was developed for the analysis of the SSS of structures from SMA in the MI mode. As a verification basis, the obtained numerical solution of the spatial three-dimensional boundary-value problem of SSS of a thick-walled spherical shell made of SMA under the loading of internal or external pressure, taking into account the different resistance of these alloys, was used. The obtained numerical solution converges to the analytical solution of the corresponding problem without taking into account elastic deformations with increasing of Young's modulus.

**Keywords:** shape memory alloys; martensitic transformation; tension-compression asymmetry; thick-walled spherical shell; pressure

## ВВЕДЕНИЕ

СПФ обладают уникальными термомеханическими свойствами [1], одним из которых является свойство разносопротивляемости, проявлением которого является значительное несопадении кривых деформирования при растяжении и сжатии образцов из этого материала [2,3]. Данное явление характерно и для режимов мартенситной неупругости [4-6] и для процесса прямого термоупругого мартенситного превращения [7-11].

Решению краевых задач [12], с учетом свойств разносопротивляемости СПФ, посвящен узкий круг работ ввиду сложности, а иногда и невозможности, получения аналитического решения. В трудах [13-14] рассмотрены задачи о чистом изгибе балки из СПФ на основе моделей [15-18]. Решению аналогичных краевых задач без учета свойства асимметрии кривых деформирования СПФ посвящены работы [19-23] также на основе модели [15-18].

Для корректного описания поведения СПФ с учетом их разносопротивляемости требуется определение зависимости материальных констант и функций сплава от параметра вида напряженного состояния, что требует проведения большого объема экспериментальных работ [4-5].

Для решения отмеченных проблем механики СПФ в последнее время все чаще применяются конечно-элементные комплексы. В работах [24-25] выполнено численное моделирование процесса деформирования СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии с учетом

разносопротивляемости этих сплавов. Решению краевых задач без учета свойства асимметрии кривых деформирования СПФ посвящены работы [26-29].

Данная работа посвящена решению краевой задачи о толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления с учетом разносопротивляемости этих сплавов. Учет свойства разносопротивляемости производится с помощью простейшей модификации модели [16-19]. Кроме этого, на основе полученного решения, выполнена верификация результатов, приведенных в труде [24].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричная задача для полого толстостенного шара из СПФ с внутренним радиусом  $a=5\text{мм}$  и внешним радиусом  $b=10\text{мм}$ , находящегося под действием одинакового для всех точек внутренней поверхности давления  $p_a$  и одинакового для всех точек внешней поверхности давления  $p_b$ . Материал сферической оболочки находится в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии. В силу симметрии геометрии тела и действующей нагрузки НДС тела является также сферически симметричным и в сферической системе координат  $(r, \varphi, \chi)$  выполняется

$$\sigma_\varphi = \sigma_\chi, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\chi} = \sigma_{\varphi\chi} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\chi} = \varepsilon_{\varphi\chi} = 0,$$

$$\sigma_i = |\sigma_\varphi - \sigma_r|, \quad \varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r|.$$

Здесь  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\chi$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений,  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – интенсивность напряжений и деформаций соответственно.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm 2 \frac{\sigma_i}{r} \quad \text{при} \quad \begin{cases} \sigma_\varphi \geq \sigma_r \\ \sigma_\varphi < \sigma_r \end{cases}. \quad (1.1)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует выполнению неравенства  $\sigma_\varphi \geq \sigma_r$  – (внешнее давление) а нижний – случаю  $\sigma_\varphi < \sigma_r$  – (внутреннее давление).

Из всех компонент смещений отлично от нуля только радиальное смещение  $w$ , причем компоненты деформации связаны с  $w$  следующим образом

$$\varepsilon_r = \frac{dw}{dr}, \quad \varepsilon_\chi = \varepsilon_\varphi = \frac{w}{r}.$$

Для описания процесса деформирования СПФ используется система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [16-19], в рамках которой предполагается аддитивное представление приращения тензора полных деформаций, при их малости. Для случая изотермического пропорционального нагружения образца из СПФ в низкотемпературном мартенситном фазовом состоянии полные деформации определяются следующим образом

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{st},$$

где  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^{st}$  – полная, упругая, и структурная деформации соответственно. Упругие деформации определяются как приведено ниже

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{e'} + \frac{1}{3} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}.$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{e'}$ ,  $\varepsilon_{kk}^e$  – девиатор и первый инвариант тензора упругих деформаций,  $\sigma'_{ij}$ ,  $\sigma_{kk}$  – девиатор и первый инвариант тензора напряжений,  $G$ ,  $K$  – модуль сдвига и утроенный объемный модуль СПФ.

В задачах о МН деформации отсчитываются от состояния хаотического мартенсита, поэтому объемная часть деформаций не учитывается, а структурные деформации состоят только из девиаторной части

$$\varepsilon_{ij}^{st} = \varepsilon_{ij}^{st'}.$$

Для получения аналитического решения задачи принимается положение об активных процессах пропорционального нагружения [15] Тогда формула для структурных деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_D (\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} F_2(\sigma_i). \quad (1.2)$$

Здесь  $\rho_D$  – интенсивность кристаллографической деформации,  $\mu_\sigma$  – параметр вида напряженного состояния,  $F_2(\sigma_i)$  – материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ в мартенситном фазовом состоянии.

На основе экспериментальных данных [6] установлено, что для аппроксимации диаграммы мартенситной неупругости наилучшим образом подходит  $\gamma$  распределение, такое, что функция  $F_2(\sigma_i)$  запишется следующим образом

$$F_2(\sigma_i) = \varphi\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \alpha\right) = \gamma\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \alpha\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(\mu_\sigma))} \int_0^{\frac{\sigma_i}{\sigma_0}} t^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp(-t) dt,$$

где  $\alpha$ ,  $\sigma_0$  – параметры материала,  $\Gamma$  – гамма функция.

В работе полагается, что параметры материала  $\alpha$ ,  $\sigma_0$ ,  $\rho_D$  линейно зависят от  $\mu_\sigma$ .

В [28] в качестве параметра вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$  предлагается использовать параметр, связанный со 2-м и 3-м инвариантом девиатора напряжений

$$\sigma'_r = \frac{2}{3}(\sigma_r - \sigma_\varphi), \quad \sigma'_\varphi = \sigma'_z = \frac{1}{3}(\sigma_\varphi - \sigma_r), \quad \det(\sigma'_{ij}) = -\frac{2}{27}(\sigma_\varphi - \sigma_r),$$

$$\mu_\sigma = \frac{27 J_3}{2 \sigma_i^3} = \frac{27 \det(\sigma'_{ij})}{2 \sigma_i^3} = -\text{sign}(\sigma_\varphi - \sigma_r).$$

Здесь  $J_3$  – третий инвариант девиатора напряжений. Параметр  $\mu_\sigma$  может принимать значение от 1 (одноосное растяжение) до -1 (одноосное сжатие). Случай, когда  $\mu_\sigma = 0$  соответствует чистому сдвигу.

В работе [24] было установлено, что в случае действия внутреннего давления, в любой точке сечения сферы параметр  $\mu_\sigma = -1$ , то есть такой же, как при одноосном сжатии. В случае действия внешнего давления, напротив,

для всего материала сферы  $\mu_\sigma = 1$ , то есть такой же, как и при одноосном растяжении.

Таким образом,  $\mu_\sigma$  в данной задаче может принимать только 2 значения

$$\mu_\sigma = \begin{cases} +1, & \text{если } \sigma_\varphi < \sigma_r \\ -1, & \text{если } \sigma_\varphi > \sigma_r \end{cases}.$$

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЕ ИЗ СПФ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДАВЛЕНИЕМ

Умножая соотношение (1.2) само на себя и сворачивая по обоим индексам, можно получить связь между интенсивностями структурных деформаций и напряжений

$$\varepsilon_i^{st} = \rho_D(\mu_\sigma) F(\sigma_i).$$

Аналогично можно получить связь между интенсивностями упругих деформаций и напряжений. Шаровая часть тензора деформаций не учитывается

$$\varepsilon_i^{e'} = \frac{\sigma_i'}{3G}.$$

Согласно предположению о аддитивном представлении тензора полных деформаций, при их малости, получаем

$$\varepsilon_i = \rho_D(\mu_\sigma) F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i'}{3G}. \quad (2.1)$$

Общее решение условия несжимаемости для  $w = w(r)$  записывается в виде

$$w = \frac{C}{r^2}, \quad \varepsilon_r' = -\frac{2C}{r^3}, \quad \varepsilon_\varphi' = \varepsilon_\chi' = \frac{C}{r^3}, \quad \varepsilon_i = \frac{2|C|}{r^3}. \quad (2.2)$$

Здесь  $C$  – произвольная константа, подлежащая определению из других условий.

Подставляя в (2.1) последнее соотношение (2.2) получаем

$$\frac{2|C|}{r^3} = \Phi(\sigma_i), \quad \Phi(\sigma_i) = \rho_D q F(\sigma_i) + \frac{\sigma_i'}{3G_m}. \quad (2.3)$$

Функция  $\Phi(\sigma_i)$  является монотонно возрастающей. Следовательно, существует монотонно возрастающая обратная функция, которая далее обозначается как  $\Phi^{-1}(\sigma_i)$ . Однако функцию  $\Phi$  в явном виде обратить не удастся.

Тогда из 1-го соотношение (2.3) следует

$$\sigma_i = \Phi^{-1}\left(\frac{2|C|}{r^3}\right). \quad (2.4)$$

Функция  $\Phi^{-1}$  определена только для неотрицательных значений аргумента и принимает только неотрицательные значения. Подстановка (2.4) в (1.1) позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\sigma_r$ ,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm \frac{2}{r} \Phi^{-1}\left(\frac{2|C|}{r^3}\right). \quad (2.5)$$

Интегрируя уравнения (2.5) при начальном условии  $\sigma_r(a) = -p_a$ , получаем

$$\sigma_r = -p_a \pm 2 \int_a^r \Phi^{-1} \left( \frac{2|C|}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (2.6)$$

Здесь предполагается, что соотношение между величинами  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_r$  на отрезке  $r \in [a, b]$  не меняется, что далее будет проверено по готовому решению.

Удовлетворяя с помощью (2.6) граничному условию  $\sigma_r(b) = -p_b$ , получаем

$$\int_a^b \Phi^{-1} \left( \frac{2|C|}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \pm \frac{p_a - p_b}{2}. \quad (2.7)$$

Поскольку значения функции  $\Phi^{-1}$  неотрицательны, то в формуле (2.7) следует выбирать знак плюс, если  $p_a > p_b$  и знак минус при  $p_a < p_b$ .

Таким образом, должны быть справедливы неравенства

$$\begin{cases} \sigma_\varphi > \sigma_r & \text{при } p_a > p_b \\ \sigma_\varphi < \sigma_r & \text{при } p_a < p_b \end{cases}. \quad (2.8)$$

Выполнение неравенств (2.8) будет проверяться по готовому решению.

Тогда уравнение (2.7) принимает вид

$$\int_a^b \Phi^{-1} \left( \frac{2|C|}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{|p_a - p_b|}{2}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) служит для определения константы  $C$ , однако т.к. функция  $\Phi^{-1}$  задана неявно, то дальнейшее решение необходимо проводить численно.

Для получения аналитического решения необходимо пренебречь упругими деформациями. Тогда 1-е соотношение (2.3) примет вид

$$\frac{2|C|}{r^3} = \rho_D(\mu_\sigma) F(\sigma_i). \quad (2.10)$$

Функция  $F$ , как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений, равна нулю для отрицательных значений аргумента и является неотрицательной и неубывающей. Считая ее монотонно возрастающей и непрерывной, можно утверждать, что у нее есть монотонно возрастающая и непрерывная обратная функция, обозначаемая как  $F^{-1}$ . Тогда из (2.10) следует

$$\sigma_i = F^{-1} \left( \frac{2|C|}{\rho_D(\mu_\sigma) r^3} \right).$$

В данном случае разрешающее уравнение (2.9) принимает вид

$$\int_a^b F^{-1} \left( \frac{2|C|}{\rho_D(y_\sigma) \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{|p_a - p_b|}{2}. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) служит для определения константы  $C$ . Т.к.  $F^{-1}$  является возрастающей функцией, то и вся левая часть (2.11) монотонно возрастает. Правая часть (2.11) по условию задачи является постоянной величиной. Следовательно, уравнение (2.11) имеет единственное решение для величины  $C$ , которое далее обозначается как  $C^*$ .

После определения величины  $C^*$  из (2.11) интенсивность напряжений определяется по формуле, следующей из (2.10)

$$\sigma_i = F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) r^3} \right).$$

При  $p_a > p_b$  распределение напряжений определяется по формулам

$$\begin{cases} \sigma_r = -p_a + 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \\ \sigma_\varphi = -p_a + 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} + F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) r^3} \right) \end{cases} \quad (2.12)$$

При  $p_a < p_b$  аналогично получается

$$\begin{cases} \sigma_r = -p_a - 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \\ \sigma_\varphi = -p_a - 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} - F^{-1} \left( \frac{2C^*}{\rho_D(\mu_\sigma) r^3} \right) \end{cases} \quad (2.13)$$

Согласно (2.12), (2.13) условия (2.8) выполняются.

### 3. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

При решении задачи о МН в толстостенной сфере из СПФ под действием постоянного внутреннего или внешнего давления приняты следующие значения материальных констант:  $\alpha^c = 16.08$ ;  $\rho_d^c = 0.02$ ;  $\sigma_0^c = 18$  – при сжатии и  $\alpha^t = 6.45$ ;  $\rho_d^t = 0.0608$ ;  $\sigma_0^t = 27.4$  – при растяжении. Установленные значения параметров материала отвечают результатам, представленным в экспериментальной работе [6].

Рассматриваются две постановки задачи: без учета упругих деформаций – модель 1 и с учетом – модель 2. В обеих постановках задачи принимается во внимание свойство разносопротивляемости СПФ.

Ниже представлены эпюры радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\varphi$  напряжений по сечению сферы для случая действия внутреннего и внешнего давления. Эпюры построены для различных этапов нагружения и соответствует величине давления  $p$  следующим образом, кривая 1 –  $p = 50$  МПа, 2 –  $p = 100$  МПа, 3 –  $p = 150$  МПа, 4 –  $p = 175$  МПа, 5 –  $p = 200$  МПа. Правило расположения кривых совпадает для рис.1-6. Пунктирные линии на рис.1а,б соответствуют модели 1, сплошные линии – модели 2. Здесь  $\eta = r/b$  – безразмерная радиальная координата, где  $r$  – текущий радиус.

На основании рис.1а,б можно заключить, что распределение  $\sigma_r$  по сечению сферы является нелинейным. Сравнивая эпюры для моделей 1 и 2 рис.1а,б видно, что влияние упругости существенно влияет на степень нелинейности, полученных кривых.

На рис.2а,б показаны эпюры окружных напряжений  $\sigma_\varphi$  для моделей 1,2 для случая действия внутреннего давления. Сравнивая эпюры, полученные для первой и второй модели, можно установить, что учет влияния упругих деформаций меняет характер кривых. В рамках модели 2 кривые имеют не только знакопеременный характер, как в первой модели, но и немонотонно изменяются

по сечению сферы. Так при уровне внутреннего давления порядка  $p = 150\text{МПа}$ , рис.2б, происходит разгрузка на внутренней поверхности сферы и смещение зоны максимума  $\sigma_\phi$  вглубь сечения.

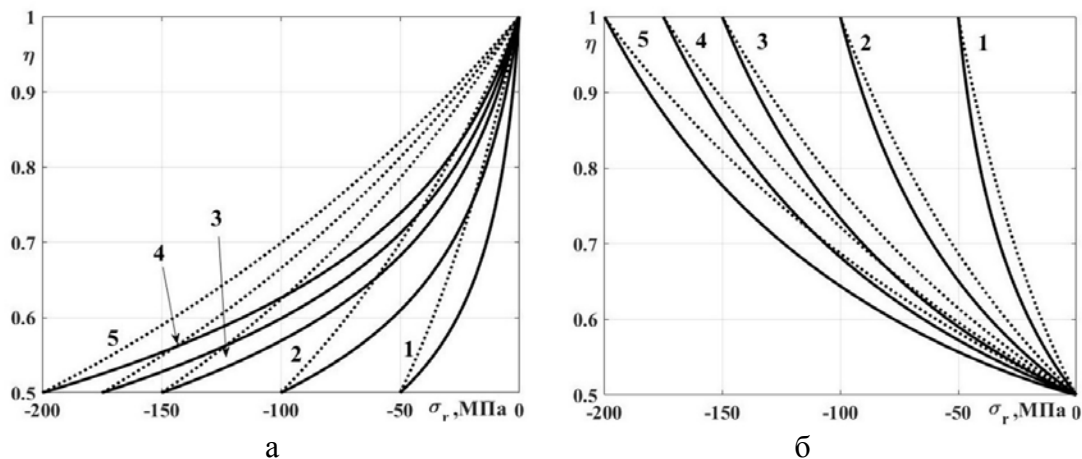


Рис.1. Эпюры  $\sigma_r - \eta$ . а – внутреннее давление; б – внешнее давление.

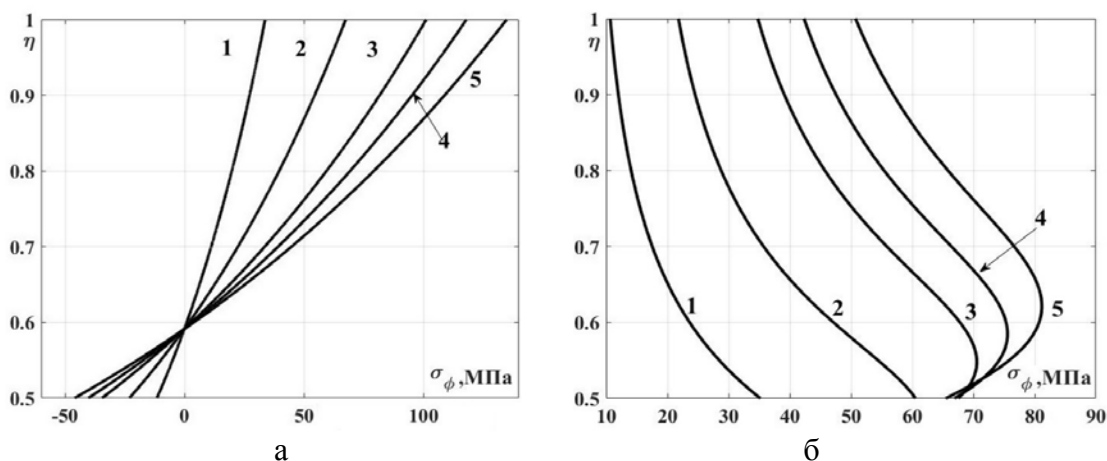


Рис.2. Эпюры  $\sigma_\phi - \eta$ . а – модель 1, внутреннее давление; б – модель 2, внутреннее давление.

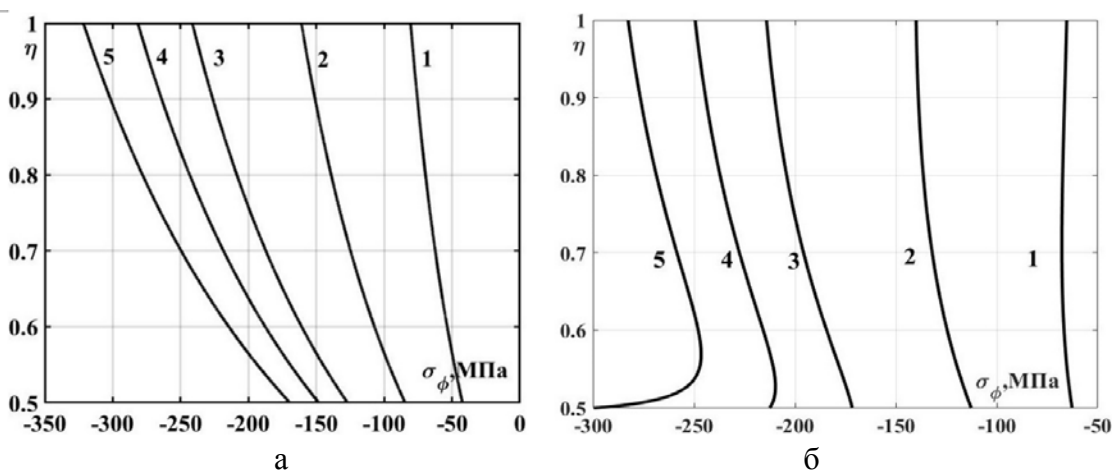


Рис.3. Эпюры  $\sigma_\phi - \eta$ . а – модель 1, внутреннее давление; б – модель 2, внешнее давление.



На рис.3а,б приведены эпюры  $\sigma_\phi$  на случай действия внешнего давления. Исходя из приведенных данных, можно отметить, что для малых напряжений, при величине давления до  $p=100$ МПа, результаты, полученные для 1 и 2 моделей совпадают, а распределение  $\sigma_\theta$  по сечению сферы из СПФ близко к однородному. На рис.2б можно отметить зону разгрузки вблизи внутренней поверхности, которая начинает проявляться при величине давления порядка  $p=175$  МПа.

В ходе работы выполнено сравнение полученных результатов с решением, приведенным в [24], полученным при конечно-элементном анализе соответствующей задачи. Ниже приведены эпюры радиальных и кольцевых напряжений на случай действия внутреннего и внешнего давления.

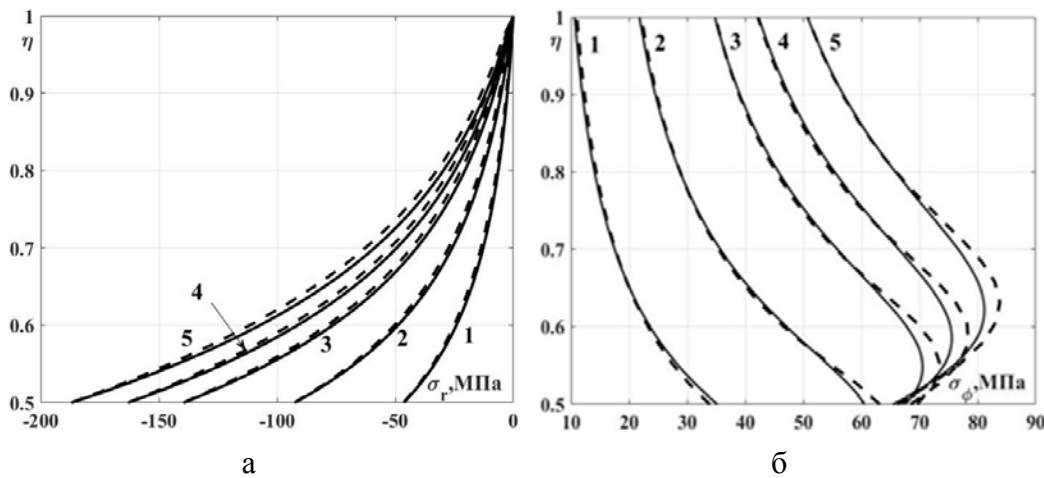


Рис.4. а – эпюры  $\sigma_r - \eta$ , внутреннее давление; б – эпюры  $\sigma_\phi - \eta$ , внутреннее давление.

Ниже приведено сравнение на случай внешнего давления.

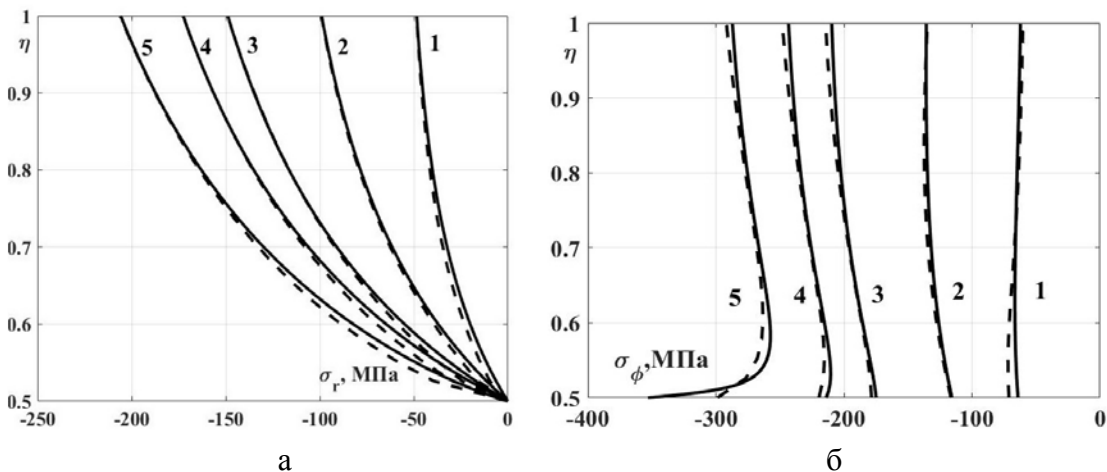


Рис.5. а – эпюры  $\sigma_r - \eta$ , внешнее давление; б – эпюры  $\sigma_\phi - \eta$ , внешнее давление.

Из рис.4,5 видно, что полученное аналитическое решение хорошо согласуется с численным решением, полученным в работе [24].

## ВЫВОДЫ

В ходе работы получено решение задачи о сфере из СПФ, находящейся под действием монотонно возрастающего внутреннего или внешнего давления. Отмечено, что учет упругих деформаций существенно меняет решение задачи. Подтверждено, что в процессе нагружения параметр вида девиатора напряжений имеет однородное распределение по сечению сферы из СПФ и не меняется в процессе нагружения. Показано, что распределение напряжений по сечению сферы является нелинейным.

Также в рамках работы произведена верификация модуля комплекса Simulia Abaqus, разработанного для конечно-элементного анализа НДС конструкций, содержащих СПФ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
2. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
3. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties* // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – Pp.339-350.
4. Yong Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeckd L. Delaey. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta mater. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.83-93.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
7. Gall Ken, Sehitoglu Huseyin, Anderson Rob, Karaman Ibrahim, Chumlyakov Yuriy I., Kireeva Irina V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – Pp.85-92.
8. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Int. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43 – Pp.613-626.
9. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.48-55.
10. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Выбор аппроксимаций диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии* // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2018. – Т.23. – №123-1. – С.459-463.
11. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression* // Construction and Building Materials. – 2017. – Vol.155 – Pp.348-362.

12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А. *Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы* // Ученые записки Казанского университета. – 2015. – Т.157. – С.97-110.
13. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
14. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-206.
15. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №3. – С.118-130.
16. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
17. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
18. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
19. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
20. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
21. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
22. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
23. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. *Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
24. Саганов Е.Б. *Численное моделирование явления мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы с учетом их разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.281-294.
25. Саганов Е.Б. *Решение задачи о толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы, находящемся под давлением, с учетом разнсопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №4. – С.563-573.

26. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. *Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии* // Труды МАИ. – 2015. – №82. – С.27.
27. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions* // IFAC Papers OnLine. – 2018. – Vol.51. – No.2. – Pp.873-878.
28. Banderia E., Savi M., Monteiro P.Jr. *Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities* // Archive of Applied Mechanics. – 2006. – Vol.76. – Pp.133-144.
29. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. *Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2015. – Vol.26. – №5. – Pp.1-19.

## REFERENCES

1. Likhachev V.A., Kuz'min S.L., Kamentseva Z.P. *Ehffekt pamyati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izdatel'stvo Leningradskogo universiteta, 1987, 216 p.
2. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
3. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties*. Adv. Structur. Materials, 2011, Vol.7, Pp.339-350.
4. Yong Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeck And L. Delaey. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta mater, 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Diagrammy martensitnoj neuprugosti nikelida titana pri rastyazhenii, szhatii i szhatii posle rastyazheniya [Nitinol's martensite inelasticity diagramm for tension, compression and tension after compression]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.83-93.
6. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Ehksperimental'naya identifikatsiya modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Experimental identification of model of nonlinear deformation of shape memory alloys during phase transitions and structural transformations]*. Deformatsiya i razrushenie materialov, 2018, No.12, Pp.2-11.
7. Gall Ken, Sehitoglu Huseyin, Anderson Rob, Karaman Ibrahim, Chumlyakov Yuriy I., Kireeva Irina V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.317, Pp.85-92.
8. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Int. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.
9. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol, 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.
10. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vybor approksimatsij diagrammy pryamogo prevrashheniya nikelida titana pri rastyazhenii i szhatii [Choice*

*of approximations of direct transformation diagrams of nickel-titanium under tension and compression*]. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki, 2018, Vol.23, No.123-1, Pp.459-463.

11. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression*. Construction and Building Materials, 2017, Vol.155, Pp.348-362.
12. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mashihin A.E., Mishustin I.V., Saganov E.B., Safronov P.A. *Kraevye zadachi mekhaniki dlya splavov s pamyat'yu formy [Boundary-value problems of mechanics for shape memory alloys]*. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta, 2015, Vol.157, No.3, Pp.97-110.
13. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashhenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugikh deformatsij i raznosoprotivlyaemosti ehtikh splavov [Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating in solution the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under beand]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.
14. Safronov P.A. *Tsilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti ehtogo materiala [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of cylindrical bend of the plate from shape memory alloy]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
15. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
16. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
17. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
18. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
19. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o pryamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
20. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod dejstviem postoyannogo krutyashhego momenta [Solution the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
21. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
22. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Kraevye zadachi termomekhaniki dlya tsilindra i sfery iz splava s pamyat'yu formy [Thermomechanical Boundary Problems for a Cylinder and Sphere Made of Shape Memory Alloy]*. Vestnik PNIPU. Mekhanika, 2017, No.3, Pp.113-128.

23. Movchan A.A., Tant Zin Aung, Movchan I.A. *Reshenie zadach izgiba balok iz splavov s pamyat'yu formy v ramkakh modeli nelinejnogo deformirovaniya ehtikh materialov pri fazovykh i strukturnykh prevrashheniyakh [Solution of beam bending problems for shape memory alloys in framework of non-linear straining model of this material in phase and structure transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2009, Vol.15, No.3, Pp.422-436.
24. Saganov E.B. *Chislennoe modelirovanie yavleniya martensitnoj neuprugosti v splavakh s pamyat'yu formy s uchetom ikh raznosoprotivlyaemosti [Numerical modeling of the phenomena of martensite inelasticity in shape memory alloys with account of their tension-compression asymetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.2, Pp.281-294.
25. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o tolstostennom tsilindre iz splava s pamyat'yu formy, nakhodyashhemsya pod davleniem, s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Solution of the problem of a thick – walled cylinder under pressure from shape memory taking into account of tension – compression asymetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2019, Vol.25, No.4, Pp.563-573.
26. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. *Chislenno-eksperimental'noe issledovanie deformirovaniya i ustojchivosti tsilindricheskoj obolochki yacheistoj struktury pri osevom szhatii [Numerical and experimental study of the deformation and stability of a cylindrical shell of a cellular structure under axial compression]*. Trudy MAI, 2015, No.82, Pp.27.
27. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I. *Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions*. IFAC Papers OnLine, 2018, Vol.51, No.2, Pp.873-878.
28. Banderia E., Savi M., Monteiro P.Jr. *Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities*. Archive of Applied Mechanics, 2006, Vol.76, Pp.133-144.
29. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. *Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2015, Vol.26, No.5, Pp.1-19.

Поступила в редакцию 26 февраля 2020 года.

---

Сведения об авторах:

Саганов Евгений Борисович – с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [saganoff@yandex.ru](mailto:saganoff@yandex.ru)

Шарунов Алексей Валерьевич – магистр, ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: [aleksej-sharunov@yandex.ru](mailto:aleksej-sharunov@yandex.ru)