

ИЗГИБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СЖИМАЕМОМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ*

Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

АННОТАЦИЯ

Трехслойные элементы конструкций применяются в аэрокосмическом и транспортном машиностроении, строительстве, добыче и транспортировке углеводородов. Теория деформирования трехслойных пластин с несжимаемыми заполнителями при внешних силовых воздействиях в настоящее время разработана достаточно хорошо. Здесь приведена постановка краевой задачи об изгибе упругопластической круговой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем. Для тонких несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В относительно толстом лёгком заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией радиальных перемещений и прогиба по толщине слоя, работа сдвиговых напряжений и напряжений обжатия предполагается малой и не учитывается. На контуре принимается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Физические уравнения состояния в несущих слоях соответствуют теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Заполнитель нелинейно упругий. Неоднородная система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом Лагранжа. Сформулированы граничные условия. Решение краевой задачи сведено к нахождению четырех искомых функций – прогиба нижнего слоя; сдвига, радиального перемещения и функции обжатия в заполнителе. Для решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений. Получено общее итерационное аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя. Проведен его параметрический анализ при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины. Численно исследовано влияние сжимаемости заполнителя на напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины. Проведено сравнение расчетных значений прогибов, полученных по традиционной модели при несжимаемом заполнителе и в случае учета его обжатия.

Ключевые слова: трехслойная круговая пластина; деформирование; физическая нелинейность; сжимаемость заполнителя

THE PHYSICALLY NONLINEAR DEFORMATION OF CIRCULAR SANDWICH PLATES WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V.

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus

ABSTRACT

Three-layer structural elements are used in aerospace and transport engineering, construction, production and transportation of hydrocarbons. The theory of deformation

* Работа выполнена при финансовой поддержке БР ФФИ (проект № T18P-090).

of three-layer plates with incompressible fillers is currently developed under external force influences quite well. Here is the formulation of the boundary value problem on the bending of an elastoplastic circular three-layer plate with a compressible filler. For thin bearing layers, the Kirchhoff hypothesis is accepted. In a relatively thick lightweight filler, the hypothesis of Tymoshenko is performed with a linear approximation of radial displacements and deflection along the layer thickness. The work of shear stresses and compression stresses is assumed to be small and is not taken into account. The contour is assumed to have a rigid diaphragm that prevents the relative shift of the layers. The physical equations of state in the bearing layers correspond to the theory of small elastic-plastic deformations of Ilyushin. The filler is nonlinear elastic. The inhomogeneous system of ordinary nonlinear differential equations of equilibrium is obtained by the Lagrange variational method. Boundary conditions are formulated. The solution of the boundary value problem is reduced to finding the four desired functions – the deflection of the lower layer; shear, radial displacement and compression function in the filler. The method of successive approximations based on the method of elastic solutions is applied for the solution. The General iterative analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. Its parametric analysis is carried out at uniformly distributed load and rigid sealing of the plate contour. The influence of the compressibility of the filler on the stress-strain state of the plate is numerically investigated. The comparison of the calculated deflection values obtained by the traditional model with incompressible filler and in the case of its compression is given.

Keywords: three-layer circular plate; deformation; physical nonlinearity; compressibility filler

ВВЕДЕНИЕ

Использование трехслойных конструкций в технике потребовало создания соответствующих математических моделей деформирования и интенсивной разработки методов расчета. В результате за это время в механике деформируемого твердого тела появилось целое направление, связанное с исследованием НДС трехслойных пластин, стержней и оболочек.

В настоящее время разработка общей теории квазистатических деформаций трехслойных конструкций транспортной техники, в том числе и пластин, еще не завершена и интенсивно продолжается. Для них создаются математические модели деформирования при комплексных термосиловых, терморadiационных нагружениях. Рассматриваются задачи прочности, устойчивости, динамического поведения.

В монографиях [1,2] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования слоистых элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчёта. В статьях [3-11] исследовано динамическое деформирование композитных сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев и с использованием уравнений уточненной теории. Рассмотрено воздействие непрерывных, локальных и ударных нагрузок. Работы [12,13] посвящены изучению несущей способности кольцевой трехслойной пластины и продольно-поперечному изгибу анизотропных композитных плит. Циклическое квазистатическое деформирование упругопластических слоистых оболочек и пластин исследовалось в работах [14,15]. В публикациях [16-20] проведено исследование деформации изгиба сэндвич-пластин в зависимости от вида ячеистого заполнителя, наличия упругих опор либо упругого основания, функционально-градиентных свойств материалов. Результаты исследования термосилового деформирования трехслойных упругопластических стержней

и круговых пластин с несжимаемым наполнителем содержатся в статьях [21-23]. Механико-математическая модель деформирования упругих трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем предложена в статьях [24,25].

Предлагаемая работа распространяет эту модель на случай упругопластических трехслойных пластин со сжимаемым наполнителем, что позволяет учитывать влияние его обжатия на напряженно-деформированное состояние рассматриваемой конструкции.

1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается круговая трехслойная пластина со сжимаемым легким наполнителем (рис.1). Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат r, φ, z , связанной со срединной плоскостью наполнителя. В тонких несущих слоях с толщинами h_1, h_2 справедливы гипотезы Кирхгофа: нормаль остается несжимаемой, прямолинейной и перпендикулярной к деформированной срединной поверхности своего слоя. В наполнителе $h_3 = 2c$ нормаль остается прямолинейной, поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi(r)$.

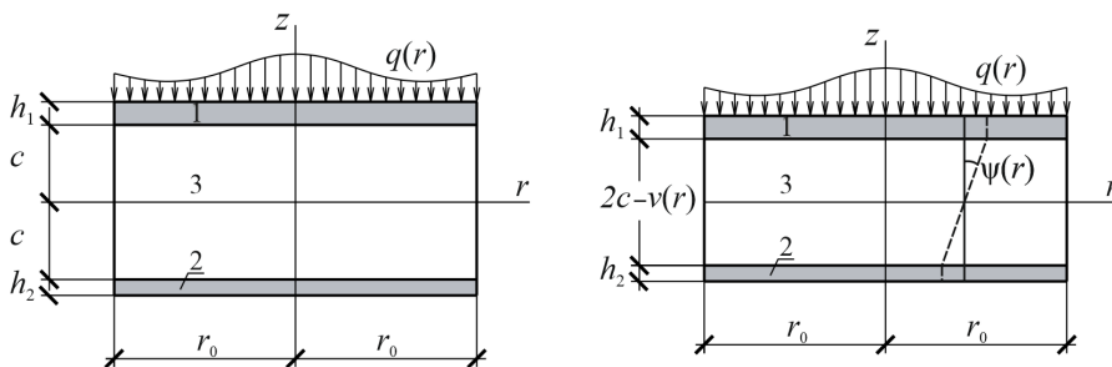


Рис.1. Расчетная схема трехслойной пластины.

На внешний слой пластины действует осесимметричная поверхностная нагрузка $q(r)$, перпендикулярная верхнему слою. На контуре пластины предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев и обжатию наполнителя ($\psi = 0, v = 0$ при $r = r_0$). Обозначения: $w(r)$ – прогиб нижнего слоя (2), $u(r)$ – продольное перемещение срединной плоскости наполнителя, $v(r)$ – функция обжатия наполнителя.

Радиальные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(r, z)$ и $w^{(k)}(r, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w(r), u(r), \psi(r)$ и $v(r)$ следующими соотношениями

- в несущих слоях 1, 2

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - z(w_r + v_r), & w^{(1)}(r, z) &= w(r) + v(r) & (c \leq z \leq c+h) \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_r, & w^{(2)}(r, z) &= w(r) & (-c-h \leq z \leq -c) \end{aligned} \quad (1)$$

- в наполнителе 3 ($-c \leq z \leq c$)

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - cz \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2c}(z +) \right], \quad \varepsilon_r^{(3)}(c,) = () + \frac{v(r)}{2c}(+),$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций в слоях получим из перемещений (1), используя соотношения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = 0 \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - z(w_{,rr} + v_{,rr}), \quad \varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - z(w_{,r} + v_{,r})), \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0 \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - z \left[w_{,rr} + \frac{v_{,r}}{2c}(z +) \right], \\ \varepsilon_\varphi^{(3)} &= \frac{1}{rc} \left\{ u + z\psi - z \left[w_{,r} + \frac{v_{,r}}{2}(z +) \right] \right\} \\ \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2} \left(w_{,r} + \frac{z+c}{2c} v_{,r} + \psi - w_{,r} - \frac{z}{c} v_{,r} - \frac{v_{,r}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\psi - \frac{z}{2c} v_{,r} \right), \quad \varepsilon_z^{(3)} = \frac{v}{2c} \end{aligned} \quad (2)$$

Для связи напряжений и деформаций в слоях пластины используются нелинейные физические уравнения состояния типа теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [2]

$$\begin{aligned} s_\alpha^{(k)} &= 2G_k \left(1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}) \right) \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3 K_k \varepsilon^{(k)} \quad (k=1, 2, 3; \alpha=r, \varphi), \\ s_z^{(3)} &= 2G_3 \left(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) \right) \varepsilon_z^{(3)}, \quad s_{rz}^{(3)} = 2 K_3 \left(1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}) \right) \varepsilon_{rz}^{(3)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где k – номер слоя; $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ – девиаторная и шаровая части тензоров напряжений и деформаций; G_k , K_k – модули сдвиговой и объемной деформации; $\omega_k(\varepsilon_u^{(k)})$ – функции пластичности Ильюшина материалов несущих слоев ($k=1, 2$) [10], которые при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_y^{(k)}$ равны нулю; $\varepsilon_y^{(k)}$ – деформационные пределы текучести материалов; $\omega_3(\varepsilon_u^{(3)})$ – универсальная функция, описывающая физическую нелинейность сжимаемого заполнителя, причем $\omega^{(3)} \equiv 0$ при $\varepsilon_u^{(k)} \leq \varepsilon_s^{(k)}$, $\varepsilon_s^{(3)}$ – предел физической нелинейности материала; $s_z^{(3)}$, $s_{rz}^{(3)}$, $\varepsilon_z^{(3)}$, $\varepsilon_{rz}^{(3)}$ – девиаторы тензоров в заполнителе; $\varepsilon_u^{(k)}$ – интенсивность деформаций

$$\varepsilon_u^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + (\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{rr})^2 + 6(\varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{rz}^2)}.$$

Интенсивности обобщенных внутренних силовых факторов в пластине вводятся с помощью компонентов тензора напряжений $\sigma_\alpha^{(k)}$ ($\alpha=r, \varphi$)

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, \quad M_\alpha \equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}), \quad D_\alpha = S_\alpha^{(3)} + c(M_\alpha^{(1)} + M_\alpha^{(2)}), \quad S_\alpha^{(3)} = \int_{h_3} \sigma_\alpha^{(3)} z^2 dz, \end{aligned} \quad (4)$$

где интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Компоненты тензора напряжений в слоях выражаются через девиаторную и шаровую части тензора деформаций из соотношений (3)

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= 2G_{\mathcal{R}}^{(k)} + K_k \theta^{(k)} - \mathcal{G}_k \omega_{\mathcal{R}}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3) \\ \sigma_z^{(3)} &= 2G_{\mathcal{Z}}^{(3)} + K_3 \theta^{(3)} - \mathcal{G}_3 \omega_{\mathcal{Z}}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \mathcal{G}_{\mathcal{Z}}^{(3)} - \mathcal{G}_3 \omega_{\mathcal{Z}}^{(3)}.\end{aligned}\quad (5)$$

Упругие (индекс «е») и неупругие (индекс «ω») составляющие в тензоре напряжений (5) будут

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha}^{(k)} &= \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi; k = 1, 2, 3), \\ \sigma_z^{(3)} &= \sigma_{ze}^{(3)} - \sigma_{z\omega}^{(3)}, \quad \sigma_{rz}^{(3)} = \sigma_{rze}^{(3)} - \sigma_{rz\omega}^{(3)},\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha e}^{(k)} &= 2G_{\mathcal{R}}^{(k)} + K_k \theta^{(k)}, \quad \sigma_{\alpha \omega}^{(k)} = \mathcal{G}_k \omega_{\mathcal{R}}^{(k)}, \\ \sigma_{ze}^{(3)} &= 2G_{\mathcal{Z}}^{(3)} + K_3 \theta^{(3)}, \quad \sigma_{z\omega}^{(3)} = \mathcal{G}_3 \omega_{\mathcal{Z}}^{(3)}, \\ \sigma_{rze}^{(3)} &= 2G_{\mathcal{Z}}^{(3)}, \quad \sigma_{rz\omega}^{(3)} = \mathcal{G}_3 \omega_{\mathcal{Z}}^{(3)}.\end{aligned}$$

Внутренние усилия и моменты в слоях пластины также раскладываются на линейную (индекс «е») и нелинейную (индекс «ω») части

$$T_{\alpha}^{(k)} = T_{\alpha e}^{(k)} - T_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad M_{\alpha}^{(k)} = M_{\alpha e}^{(k)} - M_{\alpha \omega}^{(k)}, \quad S_{\alpha}^{(3)} = S_{\alpha e}^{(3)} - S_{\alpha \omega}^{(3)} \quad (\alpha = r, \varphi), \quad (7)$$

где упругие и нелинейные составляющие вычисляются по формулам (4), в которых напряжения $\sigma_{\alpha}^{(k)}$ нужно заменить соответственно на $\sigma_{\alpha e}^{(k)}$ и $\sigma_{\alpha \omega}^{(k)}$ ($\alpha = r, \varphi$) из соотношений (6).

После этого обобщенные внутренние усилия будут

$$\begin{aligned}T_{\alpha} &= T_{\alpha e} - T_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 T_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 T_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ M_{\alpha} &= M_{\alpha e} - M_{\alpha \omega} = \sum_{k=1}^3 M_{\alpha e}^{(k)} - \sum_{k=1}^3 M_{\alpha \omega}^{(k)}, \\ H_{\alpha} &= H_{\alpha e} - H_{\alpha \omega}, \quad H_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(3)} + c(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)}), \\ H_{\alpha \omega} &= M_{\alpha \omega}^{(3)} + c(T_{\alpha \omega}^{(1)} - T_{\alpha \omega}^{(2)}), \\ D_{\alpha} &= D_{\alpha e} - D_{\alpha \omega}, \quad D_{\alpha e} = M_{\alpha e}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha e}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha e}^{(3)}, \\ D_{\alpha \omega} &= M_{\alpha \omega}^{(1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha \omega}^{(3)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha \omega}^{(3)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия в обобщенных усилиях, описывающая деформирование круговой *упругой* трехслойной пластины с легким сжимаемым заполнителем, была получена с помощью вариационного принципа Лагранжа в [24,25] без применения уравнений связи напряжений и деформаций. Поэтому ее можно использовать здесь как исходную. Выделив в обобщенных внутренних усилиях, входящих в нее, линейные и нелинейные составляющие в соответствии с формулами (8), получим

$$\begin{cases} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) = p_\omega, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) = h_\omega, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) = -q + q_\omega, \\ D_{r,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r,r} - D_{\varphi,r}) = -q + g_\omega. \end{cases} \quad (9)$$

На границе $r = r_0$ должны выполняться силовые условия

$$\begin{aligned} T_r &= T_r^0 + T_\omega, \quad H_r = H_r^0 + H_\omega, \quad M_r = M_r^0 + M_\omega, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) &= M_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(M_{r\omega} - M_{\varphi\omega}), \\ D_r &= D_r^0 + D_{r\omega}, \quad D_{r,r} + \frac{1}{r}(D_r - D_\varphi) = D_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(D_{r\omega} - D_{\varphi\omega}). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь нижний индекс « ω » для простоты опущен.

Нелинейные добавки, сосредоточенные в правой части уравнений (9), (10) и включенные в слагаемые с нижним индексом « ω », будут вычисляться по формулам

$$\begin{aligned} p_\omega &= T_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(T_{r\omega} - T_{\varphi\omega}), \quad h_\omega = H_{r\omega,r} + \frac{1}{r}(H_{r\omega} - H_{\varphi\omega}), \\ q_\omega &= M_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r\omega,r} - M_{\varphi\omega,r}), \quad g_\omega = D_{r\omega,rr} + \frac{1}{r}(2D_{r\omega,r} - D_{\varphi\omega,r}), \end{aligned} \quad (11)$$

с учетом соотношений (4), (6), (8).

2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Линейные (упругие) составляющие обобщенных внутренних усилий по-прежнему выражаются через искомые функции формулами, приведенными в [25], поэтому система уравнений равновесия в перемещениях, соответствующая (9), приводится к виду

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r} - a_4 v_{,r}) + K_3^- v_{,r} &= p_\omega, \\ L_2(a_2 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r} - a_7 v_{,r}) &= h_\omega, \\ L_3(a_3 u + a_6 \psi - a_8 w_{,r} - a_9 v_{,r}) &= -q + q_\omega, \\ L_3(a_4 u + a_7 \psi - a_9 w_{,r} - a_{10} v_{,r}) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v_{,rr} + \frac{v_{,r}}{r} \right) &= -q + g_\omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь коэффициенты a_i и линейные дифференциальные операторы L_2, L_3 определяются соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \quad a_3 = h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ - h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+, \\ a_4 &= h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+, \quad a_5 = c^2 (h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \quad a_7 = c \left[h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) K_1^+ + \frac{c^2}{3} K_3^+ \right], \\
a_8 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\
a_9 &= h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{c^3}{3} K_3^+, \quad a_{10} = h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) K_1^+ + \frac{4}{15} c^3 K_3^+, \\
K_k^+ &= K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k, \quad L_2(g) = \frac{1}{r} ((rg)_{,r})_{,r}, \quad L_3(g) = \frac{1}{r} (rL_2(g))_{,r}.
\end{aligned}$$

Система уравнений (12) отличается от соответствующих уравнений для упругой пластины только нелинейными (индекс « ω ») добавками в правой части.

Краевая задача замыкается добавлением к дифференциальным уравнениям (12), силовых (11) или кинематических граничных условий на контуре. Например, при жесткой заделке на контуре пластины ($r = r_0$) должны выполняться требования

$$u^{(n)}|_{r=r_0} = \psi^{(n)}|_{r=r_0} = w^{(n)}|_{r=r_0} = v^{(n)}|_{r=r_0} = 0,$$

а при шарнирном опирании –

$$u^{(n)}|_{r=r_0} = \psi^{(n)}|_{r=r_0} = w^{(n)}|_{r=r_0} = v^{(n)}|_{r=r_0} = 0. \quad (13)$$

В связи с тем, что система уравнений (12) является нелинейной, то для ее решения применен метод последовательных приближений, основанный на методе упругих решений Ильюшина. В результате система приводится к итерационному виду

$$\begin{aligned}
L_2 \left(a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w^{(n)}_{,r} - a_4 v^{(n)}_{,r} \right) + K_3^- v^{(n)}_{,r} &= p_{\omega}^{(n-1)}, \\
L_2 \left(a_2 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w^{(n)}_{,r} - a_7 v^{(n)}_{,r} \right) &= h_{\omega}^{(n-1)}, \\
L_3 \left(a_3 u^{(n)} + a_6 \psi^{(n)} - a_8 w^{(n)}_{,r} - a_9 v^{(n)}_{,r} \right) &= -q + q_{\omega}^{(n-1)} \quad (14) \\
L_3 \left(a_4 u^{(n)} + a_7 \psi^{(n)} - a_9 w^{(n)}_{,r} - a_{10} v^{(n)}_{,r} \right) + \frac{c}{6} K_3^- \left(v^{(n)}_{,rr} + \frac{v^{(n)}_{,r}}{r} \right) &= \\
= -q + g_{\omega}^{(n-1)}, &
\end{aligned}$$

где n – номер приближения.

Нелинейные добавки в (14) вычисляются по результатам предыдущего приближения. Они определяются соотношениями ($\alpha = r, \psi$)

$$\begin{aligned}
p_{\omega}^{(n-1)} &= T_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} \left(T_{r\omega}^{(n-1)} - T_{\varphi\omega}^{(n-1)} \right), \quad h_{\omega}^{(n-1)} = H_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} + \frac{1}{r} \left(H_{r\omega}^{(n-1)} - H_{\varphi\omega}^{(n-1)} \right), \\
q_{\omega}^{(n-1)} &= M_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r} \left(2M_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - M_{\varphi\omega}^{(n-1)}_{,r} \right), \\
g_{\omega}^{(n-1)} &= D_{r\omega}^{(n-1)}_{,rr} + \frac{1}{r} \left(2D_{r\omega}^{(n-1)}_{,r} - D_{\varphi\omega}^{(n-1)}_{,r} \right), \\
T_{\alpha\omega}^{(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 2G_k \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) G_{\alpha}^{(k,n-1)} d, \quad \left(\frac{n-1}{\alpha\omega} \right) = \sum_{k=1}^3 2 \int_{h_k} \omega_k(\varepsilon_u^{(k,n-1)}) \left(\frac{k,n-1}{\alpha} \right) z dz,
\end{aligned}$$

$$S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} = 2G_3 \int_{-c}^c \omega_3 \left(\epsilon_u^{(3,n-1)} \right) M_{\alpha}^{(3,n-1)} \cdot 2 \cdot T_{\alpha\omega}^{(n-1)} \cdot F_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \left(\frac{(1,n-1)}{\alpha\omega} - \frac{(2,n-1)}{\alpha\omega} \right),$$

$$D_{\alpha\omega}^{(n-1)} = M_{\alpha\omega}^{(1,n-1)} + \frac{1}{2} M_{\alpha\omega}^{(3,n-1)} + \frac{1}{2c} S_{\alpha\omega}^{(3,n-1)}.$$

Итерационное решение системы дифференциальных уравнений (14) будет

$$\begin{aligned} \psi^{(n)} = & -\frac{1}{a_6} L_3^{-1} \left(q - q_{\omega}^{(n-1)} \right) + \frac{C_1^{(n)} r}{4a_6} (2 \ln r - 1) - \\ & - \frac{1}{a_6} \left(a_3 u^{(n)} - a_8 w^{(n)},_r - a_9 v^{(n)},_r \right) + C_3^{(n)} \frac{r}{2} + C_4^{(n)} \frac{1}{r}, \\ u^{(n)} = & b_1 v^{(n)},_r + b_2 L_3^{-1} \left(q - q_{\omega}^{(n-1)} \right) + b_3 L_3^{-1} \left(q - g_{\omega}^{(n-1)} \right) - \\ & - b_2 C_1^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) - b_3 C_2^{(n)} \frac{r}{4} (2 \ln r - 1) + \\ & + b_4 L_2^{-1} \left(h_{\omega}^{(n-1)} \right) + b_5 L_2^{-1} \left(p_{\omega}^{(n-1)} \right) + C_5^{(n)} \frac{r}{2} + C_6^{(n)} \frac{1}{r}, \\ v^{(n)} = & -\frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r) - \frac{C_8^{(n)}}{\beta} Y_0(\beta r) + \\ & + \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr - \right. \\ & \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \right) + C_9^{(n)}, \\ w^{(n)} = & b_6 \int u^{(n)} dr - \frac{a_6 a_7 - a_5 a_9}{a_6^2 - a_5 a_8} v^{(n)} - \\ & - \frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} \int L_3^{-1} \left(q - q_{\omega}^{(n-1)} \right) dr - \\ & - \frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \int L_2^{-1} \left(h_{\omega}^{(n-1)} \right) dr + \frac{C_1^{(n)} a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8)} \frac{r^2}{4} (\ln r - 1) + \\ & + C_{10}^{(n)} \frac{r^2}{4} + C_{11}^{(n)} \ln r + C_{12}^{(n)}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $q_1^{(n-1)}(r)$ – функция, зависящая от вида нагрузки и нелинейных добавок

$$q_1^{(n-1)} = p_1 \frac{1}{r} \int \left(q - q_{\omega}^{(n-1)} \right) r dr + p_2 \frac{1}{r} \int \left(q - g_{\omega}^{(n-1)} \right) r dr,$$

p_1, p_2 – константы, выражающиеся через параметры a_i , введенные в (12).

Для сплошных круглых пластин, исходя из условия ограниченности решения в начале координат, следует положить

$$C_1^{(n)} = C_2^{(n)} = C_4^{(n)} = C_6^{(n)} = C_8^{(n)} = C_{11}^{(n)} = 0. \tag{16}$$

Если контур заделан, то из принятых граничных условий типа (13) получим

$$C_3^{(n)} = \frac{2}{a_6 r_0} L_3^{-1} \left(q - q_{\omega}^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0},$$

$$\begin{aligned}
C_5^{(n)} &= -\frac{2b_2}{r_0} L_3^{-1} \left(q - q_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_3}{r_0} L_3^{-1} \left(q - g_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0} - \\
&\quad - \frac{2b_4}{r_0} L_2^{-1} \left(h_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0} - \frac{2b_5}{r_0} L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0}, \\
C_7^{(n)} &= -\frac{\pi}{2J_1(\beta r_0)} \left(Y_1(\beta r_0) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
&\quad \left. - J_1(\beta r_0) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
C_9^{(n)} &= \frac{C_7^{(n)}}{\beta} J_0(\beta r_0) - \frac{\pi}{2} \left(\int Y_1(\beta r) \int J_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} - \right. \\
&\quad \left. - \int J_1(\beta r) \int Y_1(\beta r) q_1^{(n-1)}(r) r dr dr \Big|_{r=r_0} \right), \\
C_{10}^{(n)} &= \frac{2a_5}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} L_3^{-1} \left(q - q_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0} + \frac{2a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0^2} L_2^{-1} \left(h_\omega^{(n-1)} \right) \Big|_{r=r_0}, \\
C_{12}^{(n)} &= \left(\frac{a_5}{a_6^2 - a_5 a_8} - b_2 b_6 \right) \int L_3^{-1} \left(q - q_\omega^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=r_0} + \\
&\quad + \left(\frac{a_6}{(a_6^2 - a_5 a_8) r_0} - b_4 b_6 \right) \int L_2^{-1} \left(h_\omega^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=r_0} - \\
&\quad - b_5 b_6 \int L_2^{-1} \left(p_\omega^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=r_0} - b_3 b_6 \int L_3^{-1} \left(q - g_\omega^{(n-1)} \right) dr \Big|_{r=r_0} - \\
&\quad - b_6 C_5^{(n)} \frac{r_0^2}{4} - C_{10}^{(n)} \frac{r_0^2}{4}.
\end{aligned} \tag{17}$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Функции пластичности и нелинейности, введенные в соотношениях (3), удобно принимать в виде

$$\omega_k(\varepsilon_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y, \\ A_k \left(1 - \varepsilon_y^{(k)} / \varepsilon_u \right)^{\alpha_k}, & \varepsilon_u > \varepsilon_y, \end{cases} \tag{18}$$

где A_k, α_k – константы нелинейности материалов.

В качестве материала несущих слоев пластины при числовых расчетах принят алюминиевый сплав Д16Т, заполнителя – фторопласт-4 (ПТФЭ). Параметры упругости и нелинейности этих материалов, включенные в формулу (18), приведены в [26]: для Д16Т $A_1=0,96$; $\alpha_1=2,34$; $\varepsilon_y^{(1)}=0,735\%$; для фторопласта $A_3=0,905$; $\alpha_3=1,8$; $\varepsilon_s=\varepsilon_y^{(3)}=3,3\%$.

Следует отметить, что при принятии этих материалов в качестве слоев пластины метод упругих решений сходится, т.к. выполняется достаточное условие сходимости [2]

$$1 > \omega + \varepsilon_u \frac{d\omega}{d\varepsilon_u} \geq \omega \geq 0. \quad (19)$$

В нашем случае, при интенсивности деформаций до шести деформационных пределов текучести или физической нелинейности, имеем

- для сплава Д16Т $\varepsilon_u = 6\varepsilon_y \Rightarrow 1 > 0,627 + 0,293 > 0,627 > 0$;
- для фторопласта $\varepsilon_u = 6\varepsilon_s \Rightarrow 1 > 0,691 + 0,204 > 0,691 > 0$,

следовательно, условия (19) выполняются.

При численной реализации итерационного решения (15)-(17) предполагалось, что пластина жестко заделана по контуру, ее радиус $r_0 = 1$ м. Все геометрические параметры пластины и линейные перемещения отнесены к ее радиусу. Величина нагрузки и толщины слоев подбирались так, чтобы нелинейные свойства материалов слоев проявились в достаточной степени: $q = -3$ МПа, $h_1 = h_2 = 0,03$, $c = 0,23$.

Рис.2 подтвердил практическую сходимость принятого итерационного метода, основанного на методе «упругих» решений. Номер кривой соответствует номеру итерации, 1 – для упругой пластины. Здесь второе приближение функции обжатия отличается от предыдущего примерно на 11%. За искомое решение принято 4-е приближение, которое отличается от 3-го менее чем на 1%. Общее отличие максимального значения функции обжатия в упругопластической пластине от упругой – до 16%.

На рис.3-5 показаны графики изменения соответственно прогиба нижнего слоя, относительного сдвига и радиального перемещения в заполнителе: 1 – упругая пластина, 2 – физически нелинейная. Здесь учет физической нелинейности материалов слоев приводит к увеличению рассматриваемых параметров на 18,1%; 19,4%; 16,9%, соответственно.

Сравнение прогибов пластины с учетом (1, 2) и без учета (3) сжимаемости заполнителя показано на рис.6: 1 – верхний слой; 2 – нижний слой; 3 – несжимаемый заполнитель ($q = -0,5$ МПа). Максимальное отличие прогибов составляет около 42%.

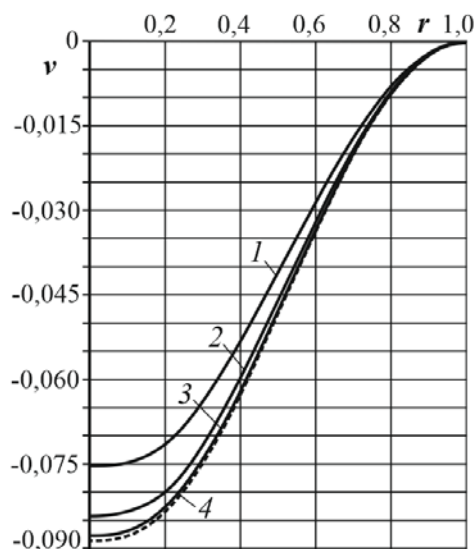


Рис.2. Функции обжатия.

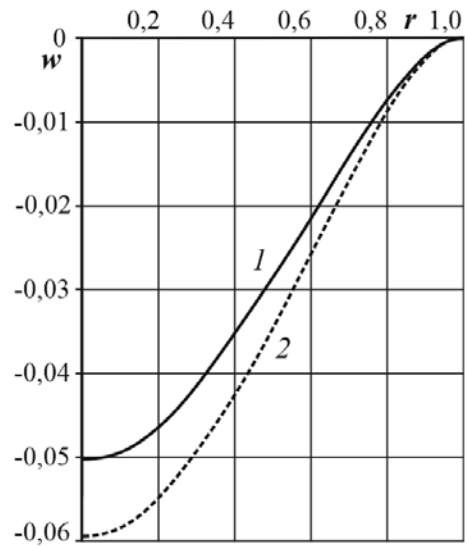


Рис.3. Прогиб нижнего слоя.

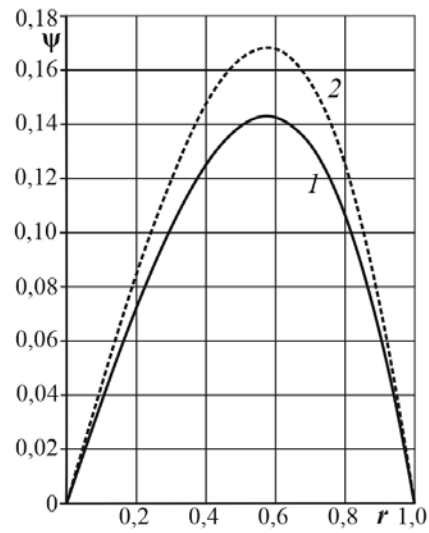


Рис.4. Сдвиг в заполнителе.

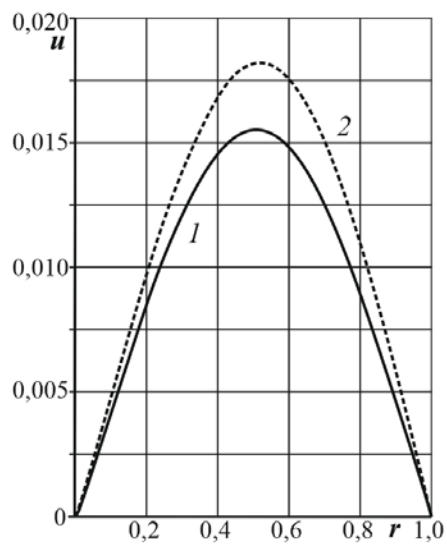


Рис.5. Радиальное перемещение.

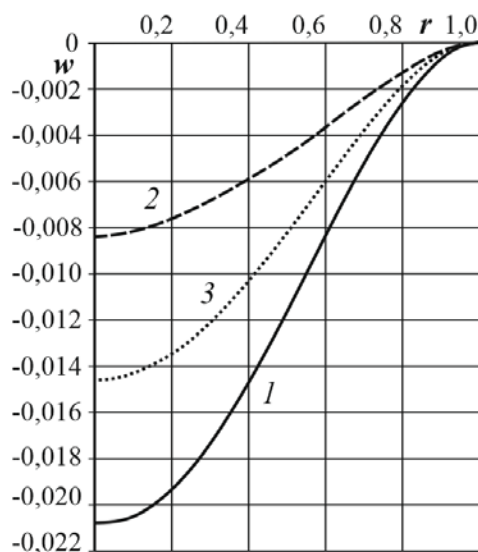


Рис.6. Прогибы пластин с учетом и без учета сжимаемости заполнителя.

Следует отметить, что прогиб пластины с несжимаемым наполнителем практически совпадает с прогибом срединной плоскости заполнителя при учете его сжимаемости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель деформирования трехслойных круговых пластин со сжимаемым наполнителем позволяет исследовать НДС при осесимметричных нагрузках с учетом нелинейного деформирования материалов слоев. Полученное аналитическое решение позволяет проводить алгоритмизацию итерационного процесса и проводить численные расчеты. Учет сжимаемости заполнителя и физической нелинейности материалов слоев приводит к существенному уточнению НДС рассматриваемой трехслойной пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 576 с.
3. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // *Composite Structures*. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
4. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates* // *Aerospace Science and Technology*. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
5. Леоненко Д.В. *Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек* // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2010. – №3(12). – С.53-56.

6. Леоненко Д.В. *Свободные колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – №3. – С.42-47.
7. Леоненко Д.В. *Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака* // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2014. – №1. – С.59-63.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
9. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* // Strength of Materials. – 2003. – Vol.35. – No.4. – Pp.346-352.
11. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
12. Джагангиров А.А. *Несущая способность кольцевой трехслойной волокнистой композитной пластинки, свободно опертой по внутренней и защемленной по внешней кромкам* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.35-43.
13. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Метод асимптотического расщепления в задачах продольно-поперечного изгиба анизотропных слоистых плит* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.13. – №4. – С.548-580.
14. Старовойтов Э.И. *О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – №2. – С.92-96.
15. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. *К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №1. – С.116-121.
16. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
17. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels* // Mater. Sci. Appl. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
18. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates* // AIAA J. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
19. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
20. Старовойтов Э.И., Козел А.Г. *Изгиб упругой круговой трехслойной пластины на основании Пастернака* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.392-406.

21. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании* // Прикладная механика. – 2008. – Т.44. – №9. – С.94-103.
22. Плещачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В. *Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – №2(17). – С.209-219.
23. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
24. Захарчук Ю.В. *Деформирование круговой трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем* // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – Т.33. – №4. – С.53-57.
25. Старовойтов Э.И., Захарчук Ю.В. *Изгиб круговой трехслойной пластины с легким сжимаемым наполнителем* // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2018. – Т.37. – №4. – С.88-97.
26. Старовойтов Э.И. *К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов* // Проблемы прочности. – 1988. – №4. – С.11-15.

REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslojnykh konstruksij [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplasticheskikh ehlementov konstruksij [Mechanics of layered viscoelastic structural elements]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 576 p.
3. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
4. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
5. Leonenko D.V. *Radial'nye sobstvennye kolebaniya uprugikh trekhslojnykh tsilindricheskikh obolochek [Radial natural vibration of the elastic three-layered cylindrical shells]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2010, No.3(12), Pp.53-56.
6. Leonenko D.V. *Svobodnye kolebaniya krugovykh trekhslojnykh plastin na uprugom osnovanii [Free vibrations of circular three-layer plates on an elastic foundation]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2008, No.3, Pp.42-47.
7. Leonenko D.V. *Kolebaniya krugovykh trekhslojnykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Vibrations of circular three-layer plates on an Pasternak elastic foundation]*. Ehkologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ehkonomicheskogo sotrudnichestva, 2014, No.1, Pp.59-63.
8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhslojnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.

9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniya trekhslojnoj tsilindricheskoj obolochki s uprugim napolnitelem [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
10. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads*. Strength of Materials, 2003, Vol.35, No.4, Pp.346-352.
11. Paimushin V. N., Ivanov V.I., Khusainov V.R *Analiz svobodnykh i sobstvennykh kolebanij trekhslojnoj plastiny na osnove uravnenij utochnennoj teorii [Analysis of free and natural oscillations of a three-layer plate on the basis of the equations of the refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2002, Vol.8, No.4, Pp. 543-554.
12. Jahangirov A.A. *Nesushhaya sposobnost' kol'tsevoj trekhslojnoj voloknistoj kompozitnoj plastinki, svobodno opertoj po vnutrennej i zashhemlennoj po vneshnej kromkam [Load-carrying capacity of a fiber-reinforced annular tree layer composite plate, free supported on internal and clamped on external contours]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.35-43.
13. Gorynin G.L., Nemirovskii Iu.V. *Metod asimptoticheskogo rasshepleniya v zadachakh prodol'no-poperechnogo izgiba anizotropnykh sloistyx plit [Method of asymptotic splitting in problems of longitudinal-transverse bending of anisotropic layered plates]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2007, Vol.13, No.4, Pp.548-580.
14. Starovoitov E.I. *O peremennom nagruzhenii vyazkoplasticheskikh trekhslojnykh pologikh obolochek [On variable loading of viscoplastic three-layered shallow shells]*. Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika. Mekhanika, 1980, No.2, Pp.92-96.
15. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. *K issledovaniyu napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya dvukhslojnykh metalopolimernykh plastin pri tsiklicheskikh nagruzheniyakh [To the study of the stress-strain state of two-layer metal-polymer plates under cyclic loading]*. Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1986, No.1, Pp.116-121.
16. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
17. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. Mater. Sci. Appl., 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.
18. Lee C.R., Sun S.J., Kam T.Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. AIAA J., 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
19. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. Mech. Adv. Mater. Struct., 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
20. Starovoitov E.I., Kozel A.G. *Izgib uprugoj krugovoj trekhslojnoj plastiny na osnovanii Pasternaka [The bending of an elastic circular sandwich plate on the Pasternak foundation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No3, Pp.392-406.
21. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Thermoelastic bending of a sandwich ring plate on an elastic foundation*. International Applied Mechanics, 2008, Vol.44, No.9, Pp.1032-1040.

22. Pleskachevskii Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Panin S.V. *Termoplasticheskiy izgib krugovykh kompozitnykh plastin na osnovanii Vinklera [Thermoplastic bending of circular composite plates based on Winkler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.209-219.
23. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhslojnogo sterzhnya so szhimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
24. Zakharchuk Yu.V. *Deformirovanie krugovoy trekhslojnoj plastiny so szhimaemym zapolnitelem [Deformation of the circular three-layer plate with a compressible filler]*. Problemy fiziki, matematiki i tekhniki, 2017, Vol.33, No.4, Pp.53-57.
25. Starovoitov E.I., Zakharchuk Yu.V. *Izgib krugovoy trekhslojnoj plastiny s legkim szhimaemym zapolnitelem [Bending of circular three-layer plate with easy compressible filler]*. Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii, 2018, No.4, Pp.88-97.
26. Starovoitov E.I. *K opisaniyu termomekhanicheskikh svojstv nekotorykh konstruksionnykh materialov [To the description of thermomechanical properties of some structural materials]*. Problemy prochnosti, 1988, No.4, Pp.11-15.

Поступила в редакцию 05 марта 2019 года.

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., Кафедра «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: edstar0@yandex.by

Захарчук Юлия Викторовна – ст. преподаватель, Кафедра «Строительные технологии и конструкции», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: zakharchuk.julia2@mail.ru