

УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГИБКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Разработана модель вязкоупругопластического деформирования пространственно-армированных гибких пологих оболочек. Мгновенное упругопластическое поведение компонентов композиции определяется теорией пластического течения с изотропным упрочнением. Вязкоупругое деформирование этих материалов описывается уравнениями модели Максвелла – Больцмана. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Полученные соотношения позволяют с разной степенью точности определять перемещения точек оболочки и напряженно-деформированное состояние в компонентах композиции (в том числе и остаточные). При этом моделируется ослабленное сопротивление композитной конструкции поперечным сдвигам. В первом приближении из полученных уравнений и граничных условий вытекают соотношения традиционной неклассической теории Редди. Решение сформулированной задачи строится численно с использованием явной схемы типа «крест». Исследовано вязкоупругопластическое динамическое поведение композитных цилиндрических прямоугольных панелей под действием нагрузки, порожденной воздушной взрывной волной. Конструкции имеют «плоско»-перекрестную или пространственную структуру армирования. Продемонстрировано, что в ряде случаев даже для относительно тонких композитных искривленных панелей теория Редди неприемлема для проведения адекватных расчетов их динамического вязкоупругопластического деформирования. Показано, что величина и форма остаточных прогибов армированных пологих оболочек существенно зависят от того, на какую из их лицевых поверхностей (вогнутую или выпуклую) действует внешняя нагрузка. Обнаружено, что в обоих случаях нагружения образуются остаточные продольные складки в тонкой цилиндрической полой композитной оболочке. Продемонстрировано, что даже для относительно тонкой панели замена «плоско»-перекрестной структуры армирования на пространственную структуру армирования позволяет существенно уменьшить величину остаточного прогиба и интенсивность остаточных деформаций в связующем. В случае относительно толстых пологих оболочек эффект от такой замены структур армирования проявляется в еще большей степени.

Ключевые слова: пологая оболочка; пространственное армирование; «плоско»-перекрестное армирование; вязкоупругопластическое деформирование; динамическое нагружение; теория Редди; уточненные теории изгиба; геометрическая нелинейность; схема типа «крест»

* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2017-2020 годы (проект 23.4.1 – Механика деформирования и разрушения материалов, сред при механических нагрузках, воздействии физических полей и химически активных сред).

REFINED MODEL OF VISCOELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF FLEXIBLE SHALLOW SHELLS WITH SPATIAL REINFORCEMENT STRUCTURES

Yankovskii A.P.

*Khrstianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

ABSTRACT

A model of viscoelastic-plastic deformation of spatially reinforced flexible shallow shells is developed. The instant elastoplastic behavior of the components of the composition is determined by the theory of plastic flow with isotropic hardening. The viscoelastic deformation of these materials is described by the equations of the Maxwell – Boltzmann model. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The obtained relations make it possible to determine with varying degrees of accuracy the displacements of shell points and the stress-strain state in the components of the composition (including residual ones). In this case, the weakened resistance of the composite structure to transverse shear is modeled. In a first approximation, the obtained equations and boundary conditions correspond to the traditional non-classical Reddy theory. The solution of the formulated problem is constructed numerically using an explicit «cross» type scheme. The viscoelastic-plastic dynamic behavior of composite cylindrical rectangular panels under the action of a load generated by an air blast wave is investigated. Designs have a «flat»-cross or spatial reinforcement structure. It has been demonstrated that in some cases, even for relatively thin composite curved panels, the Reddy theory is unacceptable for adequate calculations of their dynamic viscoelastic-plastic deformation. It is shown that the size and shape of the residual deflections of the reinforced gently shallow shells substantially depend on which of their front surfaces (concave or convex) is subjected to an external load. It was found that in both cases of loading residual longitudinal folds are formed in a thin cylindrical shallow composite shell. It has been demonstrated that even for a relatively thin panel, replacing a «flat»-cross reinforcement structure with a spatial reinforcement structure can significantly reduce the amount of residual deflection and the intensity of residual strain in the binder. In the case of relatively thick shallow shells, the effect of such a replacement of the reinforcement structures is manifested even more.

Keywords: shallow shell; spatial reinforcement; “flat”-cross reinforcement; viscoelastic-plastic deformation; dynamic loading; Reddy's theory; refined bending theories; geometric nonlinearity; “cross” type scheme

ВВЕДЕНИЕ

В современной инженерной практике активно используются композиционные материалы (КМ) с пространственными структурами армирования [1-3]. Линейно-упругое поведение таких КМ моделировалось в [4,5]. Однако КМ-изделия могут подвергаться высокоинтенсивному внешнему нагружению [1,6], при котором компоненты композиции деформируются неупруго. В работах [7,8] была разработана уточненная модель упругопластического деформирования гибких пологих оболочек с «плоско»-перекрестными и пространственными структурами армирования. Используемые в [7,8] определяющие соотношения для компонентов композиции соответствуют теории Прандтля – Рейсса – Хилла (ТПРХ), т.е. они не учитывают реальных

демпфирующих свойств материалов при циклическом деформировании. Поэтому модели, разработанные в [7,8], не позволяют определять остаточные перемещения и деформации компонентов КМ-оболочек. Демпфирующие свойства материалов композиции можно учесть, используя вязкоупругие соотношения [9], т.е. моделируя вязкоупругопластическое поведение КМ. Для плоско-перекрестно армированных пластин, изгибное поведение которых описывается традиционной неклассической теорией Редди [10,11], такая модель разработана в [12]. Однако для тонкостенных элементов конструкций с пространственными структурами армирования такая модель еще не построена.

В работе [8] было показано, что даже при пространственных структурах армирования необходимо учитывать возможное слабое сопротивление пологих оболочек поперечным сдвигам, причем для адекватного описания их упругопластического изгибного деформирования необходимо использовать уточненные (по сравнению с теорией Редди) кинематические гипотезы.

В связи с вышеизложенным настоящая работа посвящена моделированию вязкоупругопластического поведения пространственно-армированных пологих оболочек в рамках уточненной теории изгиба. Численное решение начально-краевых задач при этом предполагается получать по явной схеме типа «крест».

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ АРМИРОВАНИЯ

Рассмотрим пологую оболочку толщиной $2h$, с которой связана криволинейная ортогональная система координат x_i , причем отсчетная поверхность x_1x_2 – срединная поверхность конструкции ($|x_3| \leq h$), координатные линии x_1 и x_2 – линии главной кривизны этой поверхности. Оболочка усилена «плоско»-перекрестно или пространственно-перекрестно N семействами волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq N$). Относительное объемное содержание связующего материала в репрезентативной ячейке – ω_0 .

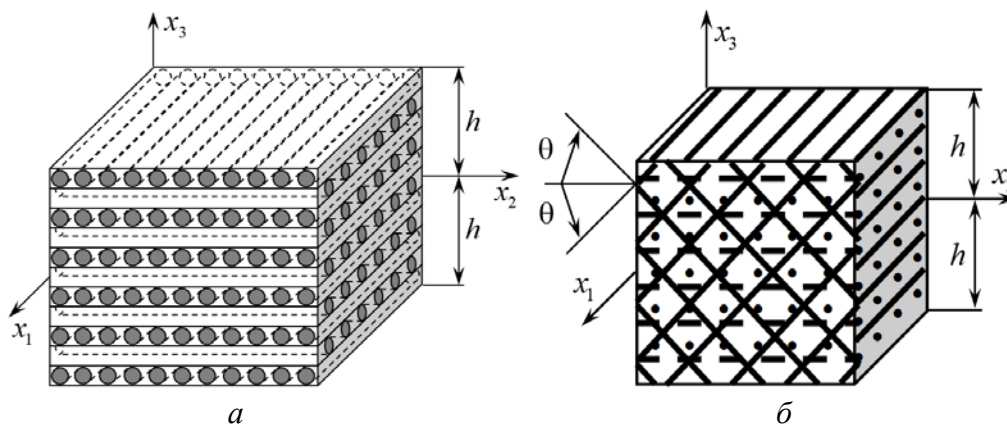


Рис.1. Элемент пологой оболочки: а) с «плоской» ортогональной структурой 2D-армирования; б) с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования

На рис.1 представлены малые элементы такой конструкции, причем их искривленность в силу ее малости не изображена. На рис.1а приведена «плоско»-ортогональная 2D-структура армирования при $N = 2$, а на рис.1б – неортогональная пространственная 4D-структура армирования при $N = 4$ [1].

Для моделирования вязкоупругопластического поведения рассматриваемой композиции используем те же исходные допущения, что и в [8,12]. При этом предполагаем, что мгновенное пластическое деформирование материалов композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением [13], а их вязкоупругое деформирование – соотношениями модели Максвелла – Больцмана [9]. Тогда определяющие уравнения для k -го компонента композиции можно записать в компактной матричной форме (ср. с (41) в [12])

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_k = \mathbf{Z}_k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k + \mathbf{V}_k \boldsymbol{\sigma}_k \quad (\mathbf{Z}_k = \bar{\mathbf{Z}}_k - \bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (1)$$

Здесь и далее принято

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_k &= \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)}\}^T \equiv \{\sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}\}^T, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_k &= \{\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)}\}^T \equiv \{\varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, 2\varepsilon_{23}^{(k)}, 2\varepsilon_{31}^{(k)}, 2\varepsilon_{12}^{(k)}\}^T, \\ \mathbf{s}_k &= \{s_1^{(k)}, s_2^{(k)}, s_3^{(k)}, s_4^{(k)}, s_5^{(k)}, s_6^{(k)}\}^T \equiv \{s_{11}^{(k)}, s_{22}^{(k)}, s_{33}^{(k)}, s_{23}^{(k)}, s_{31}^{(k)}, s_{12}^{(k)}\}^T, \\ s_{ij}^{(k)} &= \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3}(\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{33}^{(k)}); \end{aligned} \quad (2)$$

$\mathbf{Z}_k = (z_{ij}^{(k)})$, $\bar{\mathbf{Z}}_k = (\bar{z}_{ij}^{(k)})$, $\bar{\bar{\mathbf{Z}}}_k = (\bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)})$, $\mathbf{V}_k = (v_{ij}^{(k)})$ – симметричные 6×6 -матрицы с ненулевыми элементами

$$\begin{aligned} v_{ij}^{(k)} &= D^{(k)} - \delta_{ij} B^{(k)}, \quad v_{ll}^{(k)} = -B^{(k)}, \quad \bar{z}_{ij}^{(k)} = 2\delta_{ij} G^{(k)} + \lambda^{(k)}, \\ \bar{\bar{z}}_{ll}^{(k)} &= G^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,3}, \quad l = \overline{4,6}), \quad \bar{\bar{z}}_{ij}^{(k)} = A^{(k)} s_i^{(k)} s_j^{(k)} \quad (i, j = \overline{1,6}), \\ A^{(k)} &= \frac{G^{(k)} \kappa^{(k)}}{T_k^2}, \quad B^{(k)} = \frac{G^{(k)}}{\eta^{(k)}} (1 - \kappa^{(k)}), \\ D^{(k)} &= \frac{1}{3} \left(B^{(k)} - \frac{K^{(k)}}{\mu^{(k)}} \right), \quad \kappa^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{1 + g^{(k)}}, \\ g^{(k)} &= \frac{\bar{G}^{(k)}}{G^{(k)}}, \quad \lambda^{(k)} = \frac{v^{(k)} E^{(k)}}{(1 + v^{(k)})(1 - 2v^{(k)})}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$G^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{2(1 + v^{(k)})}, \quad K^{(k)} = \frac{E^{(k)}}{3(1 - 2v^{(k)})},$$

$$c^{(k)} = \begin{cases} 0, & T_k < \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}) \text{ или } T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k \leq (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \\ 1, & T_k = \tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}), \quad \mathbf{s}_k^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k > (\tau_s^{(k)}(\chi^{(k)}))^2 (\eta^{(k)})^{-1}, \end{cases}$$

$$T_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (s_i^{(k)})^2 + \sum_{i=4}^6 (s_i^{(k)})^2, \quad \chi^{(k)} = \int_{t_0}^t \sqrt{2 \dot{p}_{ij}^{(k)} \dot{p}_{ij}^{(k)}} dt;$$

$\sigma_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций; $p_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора пластических деформаций; $E^{(k)}$, $\nu^{(k)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; $\eta^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ – коэффициенты линейной вязкости при сдвиге и объемном расширении-сжатии в соотношениях Максвелла – Больцмана (см. (2) в [12]); $\tau_s^{(k)}$ – функция мгновенного упрочнения при чистом сдвиге, зависящая от параметра упрочнения $\chi^{(k)}$ (параметра Одквиста [13]); $\bar{G}^{(k)}$ – касательный модуль на мгновенной диаграмме чистого сдвига $\tau^{(k)} \sim \gamma_p^{(k)}$; $\gamma_p^{(k)}$ – пластическая составляющая полной угловой деформации при чистом сдвиге; $\tau^{(k)}$ – касательное напряжение при чистом сдвиге; t_0 – начальный момент времени t ; δ_{ij} – символ Кронекера; индекс k – номер компонента композиции ($k=0$ – связующий материал, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства); индекс T – операция транспонирования; точка – дифференцирование по времени.

Как и в рбаах [6-8,12-14], для численного интегрирования рассматриваемой задачи используем метод шагов по времени, определяя значения неизвестных функций в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \Delta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где Δ – шаг по времени. При этом считаем, что в предыдущий момент времени t_{n-1} уже определены значения следующих векторных функций

$$\sigma_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad \dot{\sigma}_k^{n-1}(\mathbf{r}) \equiv \dot{\sigma}_k(t_{n-1}, \mathbf{r}), \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}. \quad (4)$$

Как и в [12], далее предполагается разрабатывать явную схему типа «крест» на трехточечном шаблоне по времени $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, поэтому для обеспечения ее устойчивости преобразуем второе слагаемое в правой части соотношения (1), применяя формулу трапеций с шагом назад (см. (48) в [12]). Тогда в текущий момент времени t_n из (1) получим следующее матричное соотношение

$$\dot{\sigma}_k^n = \mathbf{B}_k^n \dot{\varepsilon}_k^n + \mathbf{p}_k^n, \quad 0 \leq k \leq N, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{B}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{Z}_k^n, \quad \mathbf{p}_k^n \equiv \bar{\mathbf{V}}_k^{n-1} \mathbf{V}_k^n \sigma_k^{n-1/2}, \quad \bar{\mathbf{V}}_k^n \equiv \mathbf{I} - \frac{\Delta}{2} \mathbf{V}_k^n, \quad \sigma_k^{n-1/2} \equiv \sigma_k^{n-1} + \frac{\Delta}{2} \dot{\sigma}_k^{n-1}; \quad (6)$$

\mathbf{I} – единичная 6×6 -матрица; $\bar{\mathbf{V}}_k^{n-1}$ – матрица, обратная 6×6 -матрице $\bar{\mathbf{V}}_k^{n-1}$.

Согласно (6) с учетом (4), вектор-столбец $\sigma_k^{n-1/2}$ в (5) известен.

Компоненты матриц \mathbf{Z}_k , \mathbf{V}_k зависят от текущего механического состояния k -го компонента композиции (см. (1), (3)), поэтому при $t = t_n$ эти матрицы, а также в силу (6) 6×6 -матрица \mathbf{B}_k^n и шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p}_k^n предполагаются линеаризованными по методу, аналогичному методу переменных параметров упругости. Следовательно, на каждой итерации этого метода в момент времени t_n вектор \mathbf{p}_k^n в равенстве (5) с учетом (6) известен.

Линеаризованное уравнение (5) формально совпадает с соотношениями Дюамеля – Неймана для анизотропной среды [5,15], в которых элементы вектора \mathbf{p}_k^n можно условно трактовать как скорости температурных напряжений, известные

на текущей итерации. Повторяя рассуждения из [5,8] с учетом соотношений (5), в момент времени t_n на каждой итерации будем получать линейризованное матричное уравнение, характеризующее вязкоупругопластическое поведение КМ

$$\overset{n}{\sigma} = \mathbf{B} \overset{n}{\dot{\varepsilon}} + \mathbf{p}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{B} \equiv (\omega_0 \mathbf{B}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{B}_k \mathbf{E}_k) \mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{g}, \quad \mathbf{f} \equiv \omega_0 \mathbf{p}_0 + \sum_{k=1}^N \omega_k (\mathbf{p}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{r}_k), \quad (8)$$

$$\mathbf{H} \equiv \omega_0 \mathbf{I} + \mathbf{g} \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{g} \equiv \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{g}_k, \quad \mathbf{E}_k \equiv \mathbf{D}_k^{-1} \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{r}_k \equiv \mathbf{r}_k^{-1}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$\overset{n}{\sigma}$, $\overset{n}{\dot{\varepsilon}}$ – шестикомпонентные векторы-столбцы скоростей усредненных напряжений $\overset{n}{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ в композиции, по структуре аналогичные (2); \mathbf{B} , \mathbf{E}_k , \mathbf{C}_k – 6×6 -матрицы; \mathbf{D}_k^{-1} , \mathbf{H}^{-1} – матрицы, обратные 6×6 -матрицам \mathbf{D}_k и \mathbf{H} ; \mathbf{p} , \mathbf{f} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k , \mathbf{g}_k – шестикомпонентные векторы-столбцы. Элементы $c_{ij}^{(k)}$, $d_{ij}^{(k)}$ матриц \mathbf{C}_k , \mathbf{D}_k и компоненты $\zeta_i^{(k)}$ векторов \mathbf{g}_k вычисляются по формулам

$$c_{1j}^{(k)} = d_{1j}^{(k)} = q_{1j}^{(k)}, \quad c_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(0)}, \quad d_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} b_{lj}^{(k)}, \quad \zeta_1^{(k)} = 0, \quad (9)$$

$$\zeta_i^{(k)} = \sum_{l=1}^6 g_{il}^{(k)} (p_l^{(0)} - p_l^{(k)}), \quad i = \overline{2,6}, \quad j = \overline{1,6}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$g_{11}^{(k)} = q_{11}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad g_{12}^{(k)} = q_{12}^{(k)} = l_{12}^{(k)} l_{12}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{16}^{(k)} = 2q_{16}^{(k)} = 2l_{12}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad (10)$$

$$2g_{61}^{(k)} = q_{61}^{(k)} = 2l_{21}^{(k)} l_{11}^{(k)}, \quad \dots, \quad g_{66}^{(k)} = q_{66}^{(k)} = l_{11}^{(k)} l_{22}^{(k)} + l_{12}^{(k)} l_{21}^{(k)}, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$$l_{11}^{(k)} = \sin \theta_k \cos \varphi_k, \quad l_{12}^{(k)} = \sin \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{13}^{(k)} = \cos \theta_k,$$

$$l_{21}^{(k)} = -\sin \varphi_k, \quad l_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad l_{23}^{(k)} = 0, \quad l_{31}^{(k)} = -\cos \theta_k \cos \varphi_k, \quad (11)$$

$$l_{32}^{(k)} = -\cos \theta_k \sin \varphi_k, \quad l_{33}^{(k)} = \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq N;$$

$p_l^{(k)}$ – элементы вектора \mathbf{p}_k (см. (5)). Невыписанные в (10) компоненты $g_{ij}^{(k)}$, $q_{ij}^{(k)}$ 6×6 -матриц \mathbf{G}_k и \mathbf{Q}_k приведены в табл. (21.40) и (21.44) в [15]. Матрицы \mathbf{G}_k , \mathbf{Q}_k определяют преобразование (см. (10) в [8]) векторов-столбцов σ_k и ε_k (см. (2)) при переходе от глобальной системы координат x_j к локальной системе $x_i^{(k)}$, связанной с арматурой k -го семейства. При этом ось $x_1^{(k)}$ направлена вдоль волокна и задается двумя углами сферической системы координат θ_k и φ_k (рис.2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $x_i^{(k)}$ и x_j ($i, j = \overline{1,3}$) вычисляются согласно (11). (В соотношениях (8), (9) для упрощения опущен верхний индекс n).

Как и в [5,8], при выводе равенств (7) и (8) попутно получают линейризованные матричные соотношения

$$\overset{n}{\dot{\varepsilon}}_0 = \mathbf{H}^{-1} \overset{n}{\dot{\varepsilon}} - \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_k = \mathbf{E}_k \overset{n}{\dot{\varepsilon}}_0 + \mathbf{r}_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (12)$$

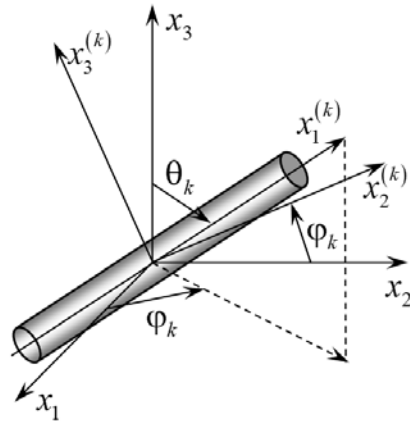


Рис.2. Локальная система координат, связанная с волокном k -го семейства.

На текущей итерации при $t = t_n$ первое равенство (12) выражает скорости деформаций связующего $\dot{\epsilon}_0$ через скорости осредненных деформаций $\dot{\epsilon}$. Второе равенство (12) определяет скорости деформаций волокон k -го семейства $\dot{\epsilon}_k$ через скорости деформаций связующего $\dot{\epsilon}_0$.

Согласно соотношениям (3), (8)-(11) в текущий момент времени t_n на данной итерации матрицы \mathbf{B} , \mathbf{H}^{-1} , \mathbf{E}_k и векторы \mathbf{p} , \mathbf{g} , \mathbf{r}_k в равенствах (7), (12) известны. Если вязкие свойства компонентов композиции не учитываются ($\eta^{(k)} \rightarrow \infty$, $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$, $0 \leq k \leq N$), то на основании (3), (8) и (9) в уравнении (7) $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ и оно вырождается в матричное определяющее соотношение для армированного КМ, полученное ранее в рамках ТПРХ (см. (13) в [8]), т.е. соотношение (7) обобщает структурные уравнения, построенные в [8].

Как и в р 6о 8 [8], для описания возможного (например, в случае пространственного ортогонального 3D-армирования [3]) слабого сопротивления полой КМ-оболочки поперечным сдвигам используем более точные (чем в рамках теории Редди [10-12]) кинематические гипотезы, а геометрическую нелинейность задачи учтем в приближении Кармана. В [8] показано, что при упругопластическом деформировании компонентов композиции явную схему типа «крест» можно разработать только в частных, но практически важных случаях пространственного армирования и нагружения тонкостенной конструкции. А именно: структура армирования должна быть такова, что если волокна некоторого k -го семейства уложены наклонно, т.е. $0 < \theta_k < \pi/2$, $1 \leq k \leq N$ (см. рис.2), то обязательно найдется l -ое семейство наклонной арматуры с параметрами укладки $\theta_l = \pi - \theta_k$, $\varphi_l = \varphi_k$, $\omega_l = \omega_k$ ($1 \leq l \leq N$, $l \neq k$); на лицевых поверхностях полой оболочки должны отсутствовать касательные внешние силы. (Указанные структуры пространственного армирования часто встречаются на практике [1,3]. Так, к ним относится структура, изображенная на рис.1б, а также ортогональная структура 3D-армирования [3].) Очевидно, что все сказанное относится и к более общему случаю – вязкоупругопластическому деформированию компонентов композиции. Поэтому далее предполагаем, что касательные силы на лицевых поверхностях оболочки пренебрежимо малы, а структура пространственного армирования обладает описанным выше

свойством. Тогда согласно [8] осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения точек U_i полой КМ-оболочки в рамках уточненной теории изгиба аппроксимируем так

$$\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \left(\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)} \right) + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{m=0}^M x_3^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2;$$

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}) \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\},$$

где u_i – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности в направлениях x_i ; w – прогиб; R_i – главные радиусы кривизны отсчетной поверхности; ∂_i – оператор частного дифференцирования по x_i ($i = 1, 2$); G – область, занимаемая конструкцией в плане. При $M = 0$ из (13), (14) вытекают кинематические гипотезы Редди [10-12].

В равенствах (13), (14) неизвестны функции w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), зависящие от времени t и только двух пространственных переменных x_1 и x_2 .

Изучается деформирование полой оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для приложений точностью можно линейно аппроксимировать по переменной x_3 [16]

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \equiv \sigma_3(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad (15)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Линеаризованное матричное равенство (7) – это система шести алгебраических уравнений. На основании соотношений соответствия, аналогичных (2), из третьего уравнения системы (7) при $t = t_n$ определяем

$$\dot{\varepsilon}_{33}^n \equiv \dot{\varepsilon}_3^n = \frac{1}{b_{33}^n} \left(\dot{\sigma}_3^n - \sum_{i=1}^6 (1 - \delta_{3i}) b_{3i}^n \dot{\varepsilon}_i^n - p_3^n \right), \quad (16)$$

где b_{3i} , p_3 ($i = \overline{1, 6}$) – элементы матрицы \mathbf{B} и вектора-столбца \mathbf{p} в (7); функция $\dot{\sigma}_3$ известна из (15) после дифференцирования по t . Скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_i$ в правой части равенства (16) получаются дифференцированием по времени выражений (13), т.е. определяются через функции w , \dot{w} , \dot{u}_l , $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) и их частные производные по x_l ($l = 1, 2$).

Для окончательной постановки рассматриваемой начально-краевой задачи к кинематическим соотношениям (13), (14) необходимо присоединить двумерные уравнения динамического равновесия элемента искривленной панели (см. (20) в [8]) и соответствующие начальные (см. (25) в [8]) и граничные условия в силовых факторах (см. (22) в [8]) или кинематических переменных (см. (23) в [8]), заданные на контуре Γ , ограничивающем область G .

2. МЕТОД РАСЧЕТА

Как отмечалось в разделе 1, для численного решения исследуемой задачи предполагаем использовать алгоритм шагов по времени. Поэтому считаем, что в моменты времени t_m помимо (4) уже определены значения следующих функций

$$\begin{aligned} w^m(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & u_i^{(l)}(\mathbf{x}) &\equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), & \sigma_k^m(\mathbf{r}) &\equiv \sigma_k(t_m, \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (17)$$

$$i=1,2, \quad j=\overline{1,3}, \quad m=n-1, n, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad 0 \leq k \leq N, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

где [8]

$$u_i^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1. \quad (18)$$

Как и в [8], производные по времени далее аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечном шаблоне. После замены вторых производных по t в уравнениях движения их конечно-разностными аналогами с учетом (18) и обозначений, подобных (17), получим уравнения [8]

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\Delta^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \frac{\rho}{\Delta^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n - l M_{i3}^{(l-1)} + \\ &\quad + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i=1,2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n=1,2,\dots,$$

где

$$\rho \equiv \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^N \rho_k \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3,$$

$$l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) \equiv l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 - (-1)^l \right) + \right.$$

$$+ \frac{l}{l+1} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 + (-1)^l \right) \Big], \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 0 \leq l \leq M+1; \quad (20)$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность связующего и волокон k -го семейства. Массовые нагрузки в (19) не учитываются.

Согласно (17) в текущий момент времени t_n по формулам (20) можно вычислить все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$, входящие в правые части уравнений (19), поэтому, используя необходимые граничные условия (см. (22), (23) в [8]), из (19) определяем по явной схеме значения функций w, u_i^{n+1} в следующий момент времени t_{n+1} . Кинематические переменные u_i^{n+1} (см. (18)) связаны линейно с функциями $\partial_i w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ (см. (13), (14)) матричным соотношением (30) из [8]. Поэтому при известных w, u_i^{n+1} ($0 \leq l \leq M+1$) по этой формуле вычисляем функции u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), после чего на основании (13) определяем осредненные деформации ε_{ij}^{n+1} . Далее решение рассматриваемой задачи с учетом (5)-(8), (12) строится так же, как и в [8].

Для проведения расчетов по построенной численной схеме предварительно нужно знать функции w^0 и u_i^0 , которые известны из начальных условий (см. (25) в [8]), а также функции w^1 и u_i^1 (см. (19) при $n=1$). Значения последних функций определяем по формуле Тейлора при использовании начальных условий и уравнений движения в момент времени t_0 (см. формулу (40) в [7]).

Необходимые условия устойчивости разработанной явной численной схемы типа «крест» получаются из условия Куранта-Фридрихса-Леви применительно для каждого компонента композиции [7,8].

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Исследуем динамическое поведение цилиндрических удлиненных панелей прямоугольной в плане формы ($G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b, b = 50 \text{ см}$). Толщина конструкций $2h \text{ см}$. Оболочки искривлены в направлении x_2 ($1/R_1 = 0, R_2 \equiv R = \text{const}$), причем величина стрелы подъема f срединной поверхности над продольными кромками $|x_2| = b$ равна 12 см и радиус кривизны имеет выражение $R = (b^2 + f^2)/(2f)$. По всему контуру Γ панели жестко закреплены и в начальном состоянии (при $t = t_0 = 0$) покоятся. Пологие оболочки нагружаются давлением, вызванным приходом воздушной взрывной волны [14]

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (22)$$

которое может быть приложено к нижней ($x_3 = -h$) или верхней ($x_3 = h$) их лицевой поверхности (см. (15) и (19)), причем

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (23)$$

Здесь t_{\max} – момент времени, в который нагрузка $p(t)$ достигает по модулю наибольшего значения $|p_{\max}|$; t_{\min} – момент времени, при превышении которого можно пренебрегать значениями $|p(t)|$ по сравнению с $|p_{\max}|$ (согласно (22), $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). На основании экспериментальных данных [14] в расчетах принято $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс. Кроме того, учитываем (см. (23)), что при нагрузке (21) прикладывается к нижней (вогнутой) лицевой поверхности, а при $p_{\max} < 0$ – к верхней (выпуклой) поверхности.

Конструкции изготовлены из эпоксидной смолы и армированы стеклянными волокнами марки S-994 [17,18]. Мгновенное упругопластическое деформирование компонентов композиции на стадии их активного нагружения определяется диаграммой растяжения–сжатия с линейным упрочнением

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_s^{(k)} + E_s^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_s^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq N, \end{cases}$$

где σ , ε – осевое напряжение и деформация; $E_s^{(k)}$ – модуль упрочнения материала k -го компонента; $\sigma_s^{(k)}$ – условный предел текучести. Физико-механические характеристики компонентов композиции приведены в таблице 1, согласно которой $\mu^{(k)} \rightarrow \infty$, т.е. объемная вязкость материалов не учитывается (см. (3)).

Таблица 1.

Физико-механические характеристики компонентов композиции [17,18].

Материал	ρ , кг / м ³	ν	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа	η , МПа·с	μ , МПа·с
Эпоксисвязующее Волокно S-994	1210	0,33	20	2,8	1,114	50	∞
	2520	0,25	4500	86,8	6,230	200	∞

Рассматриваются две квазиоднородные структуры армирования: 1) «плоская» ортогональная 2D-структура (рис.1а), когда два ($N = 2$) семейства арматуры укладываются в направлениях x_1 , x_2 с интенсивностями $\omega_1 = 0,266$ и $\omega_2 = 0,324$; 2) пространственная 4D-структура (рис.1б), когда первые два семейства арматуры укладываются вдоль направлений x_1 и x_2 , а третье и четвертое семейства – вдоль наклонных направлений, задаваемых углами (см. (11) и рис.2): $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = \pi/2$ (т.е. на рис.1б угол $\theta = \pi/4$).

В последнем случае интенсивности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0,126$, $\omega_2 = 0,324$ и $\omega_3 = \omega_4 = 0,07$. В обеих структурах общий расход волокон одинаков.

На рис.3 изображены осцилляции прогиба центральных точек армированных оболочек ($w_0(t) \equiv w(t, 0, 0)$), определенные при $p_{\max} = 9\text{МПа}$ (рис.3а) и при $p_{\max} = -9\text{МПа}$ (рис.3б). Все кривые на рис.3 получены по уточненной теории при $M = 7$ (см. (13), (14)). Расчеты, выполненные по традиционной неклассической теории Редди ($M = 0$), приводят к зависимостям $w_0(t)$, визуально практически не отличающимся от кривых на рис.3, поэтому не изображены. Пунктирные кривые 1 и 3 рассчитаны при «плоской» 2D-структуре армирования, а сплошные кривые 2 и 4 – при пространственной 4D-структуре.

Поведение зависимостей $w_0(t)$ на рис.3 показывает, что с течением времени осцилляции пологих оболочек затухают и уже к моменту времени $t = 80\text{мс}$ почти полностью прекращаются. Это позволяет оценить величину остаточных прогибов центральных точек КМ-конструкций.

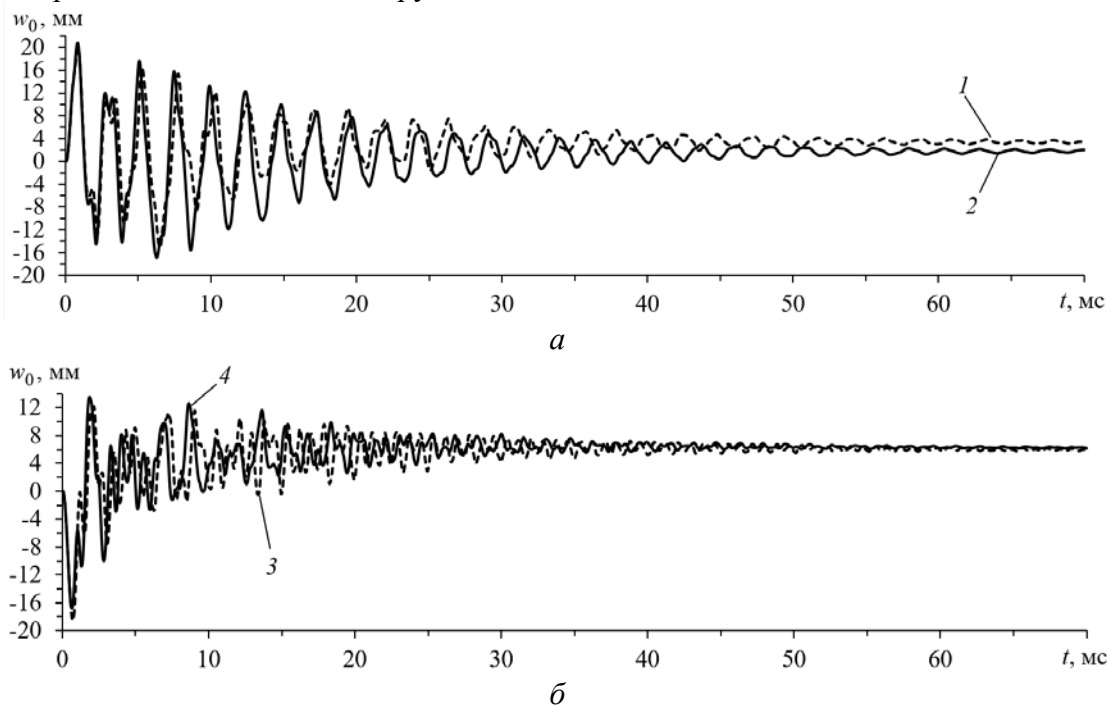


Рис.3. Поперечные колебания центральных точек цилиндрических КМ-панелей при нагружении снизу (а) и сверху (б).

Сравнение кривых 1 и 2 свидетельствует о том, что при обеих структурах армирования максимальный прогиб конструкции примерно один и тот же (см. первые локальные максимумы на этих кривых). Однако сравнение правых участков кривых 1 и 2 на рис.3а показывает, что ординаты точек кривой 2 примерно на 40% меньше ординат точек кривой 1. Следовательно, при нагружении КМ-панели снизу остаточный прогиб центральной точки конструкции с 4D-структурой армирования примерно на 40% меньше, чем в пологой оболочке с 2D-структурой.

Сравнение же кривых 3 и 4 на рис.3б, наоборот, свидетельствует о том, что при нагружении конструкции сверху остаточные прогибы центральной точки

панели при обеих структурах армирования примерно одинаковы (см. правые участки этих кривых), но максимальный по модулю прогиб (см. первые локальные минимумы на кривых 3 и 4) этой точки при 4D-структуре армирования на 9,4 % меньше, чем в случае 2D-структуры.

Ординаты точек правых участков кривых 3 и 4 на рис.3б больше ординат точек правых участков кривых 1 и 2 на рис.3а, т.е. при нагружении цилиндрических КМ-панелей со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности остаточные прогибы центральных точек имеют тот же знак, что и в случаях их нагружения со стороны нижней (вогнутой) поверхности и при этом имеют большие по модулю значения. Так как этот результат кажется парадоксальным, рассмотрим эпюры остаточных прогибов.

На рис. 4 изображены зависимости w от x_2 , определенные в сечении $x_1 = 0$ при $t = 150\text{мс}$, когда колебания КМ-панели практически полностью прекращаются. Кривые на рис.4 рассчитаны при тех же условиях, что и кривые на рис.3 с теми же номерами. Решения рассматриваемых задач обладают симметрией ($w(t, x_1, x_2) = w(t, x_1, -x_2)$, $|x_2| \leq b$), поэтому на рис.4 изображены только правые части зависимостей $w(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq b$. Из рис.4 видно, что все кривые ведут себя немонотонно, причем кривые 1, 3 и 4 знакопеременны, но изменяемость кривых 3 и 4 значительно больше изменяемости кривых 1 и 2. Объясняется последнее тем, что при нагружении КМ-панели со стороны выпуклой лицевой поверхности (кривые 3 и 4) она теряет устойчивость с образованием четко выраженных продольных складок. Поведение же кривых 1 и 2 свидетельствует о том, что при нагружении оболочки со стороны вогнутой поверхности также формируются продольные остаточные складки, но не столь четко выраженные, особенно при 4D-структуре армирования (см. кривую 2). Именно формирование четко выраженных остаточных складок при нагружении конструкции сверху приводит к тому, что в центральной точке панели прогиб имеет тот же знак, что и при нагружении снизу, причем по величине этот прогиб имеет даже большее значение (ср. ординаты точек кривых 1, 2 и 3, 4 на рис.4 при $x_2 = 0$).

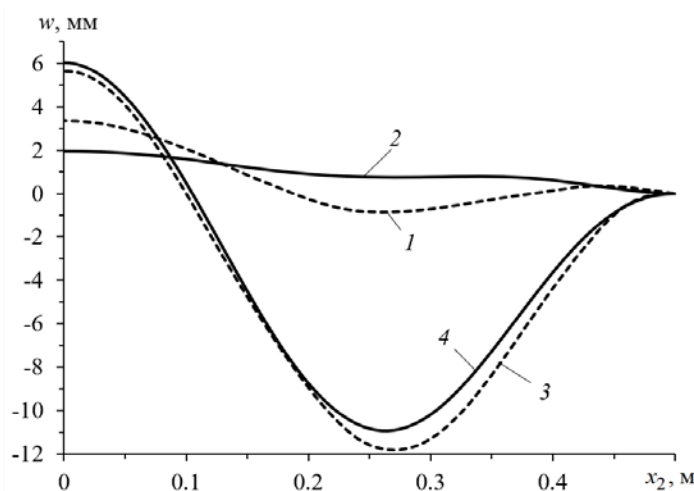


Рис.4. Зависимости остаточных прогибов от координаты x_2 в поперечных сечениях КМ-панелей $x_1 = 0$.

Сопоставление кривых 1 и 2 на рис.4 показывает, что при нагружении КМ-оболочки снизу замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру с тем же расходом волокон позволяет уменьшить максимальную по модулю величину остаточного прогиба на 42,3%. Сравнение же кривых 3 и 4 свидетельствует о том, что и при нагружении этой конструкции сверху такая замена структуры армирования также приводит к уменьшению максимальной по модулю величины остаточного прогиба, но всего на 7,5 %.

На рис.5 изображены полученные для тех же случаев кривые осцилляции максимальных значений интенсивности деформаций связующей матрицы $\varepsilon_*^{(0)}$ ($\varepsilon_m^{(0)}(t) = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r}), |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, |x_3| \leq h$). Кривые на рис.5а,г рассчитаны при $p_{\max} = 9\text{МПа}$, на рис.5б – при $p_{\max} = -9\text{МПа}$, а на рис.5в – для обоих вариантов нагружения. Кривые, номера которых помечены одним штрихом, определены при тех же условиях, что и кривые с номерами без штрихов, но по традиционной неклассической теории Редди ($M = 0$). Поведение всех кривых на рис.5в свидетельствует о том, что, согласно расчетам, выполненным по обеим обсуждаемым теориям, к моменту времени $t = 150\text{мс}$ осцилляции КМ-панели действительно практически полностью прекращаются.

Сравнение ординат точек на кривых 2 и 2' рис.5а при $t \approx 3\text{мс}$ показывает, что при нагружении снизу КМ-оболочки с 4D-структурой армирования расчет по теории Редди (кривая 2') занижает максимальное значение $\varepsilon_m^{(0)}$ на 12,2% в сравнении с расчетом по уточненной теории (кривая 2). Сопоставление же кривых 1 и 2 на рис.5а свидетельствует о том, что, согласно уточненной теории, замена в конструкции 2D-структуры армирования на 4D-структуру позволяет уменьшить наибольшее значение $\varepsilon_m^{(0)}$ на 11%. Сравнение же кривых 4 и 4' на рис.5б при $t \approx 1,1\text{мс}$ демонстрирует, что при нагружении сверху панели с 4D-структурой армирования теория Редди завышает $\max \varepsilon_m^{(0)}$, но всего на 3,1%. Сопоставление же кривых 3 и 4 при $t \approx 1,2\text{мс}$ свидетельствует о том, что при таком нагружении КМ-панели, согласно уточненной теории, замена 2D-структуры армирования на 4D-структуру позволят уменьшить величину $\max \varepsilon_m^{(0)}$ на 24,1%.

Сравнение кривых на рис.5в, номера которых помечены штрихом, с кривыми, имеющими номера без штрихов, показывает, что теория Редди может как завышать, так и занижать величину остаточных деформаций связующего. Так, кривая 3' лежит ниже кривой 3, а кривые 1', 2' и 4', наоборот, лежат выше линий 1, 2 и 4. Сопоставление кривых 1 и 1' свидетельствует о том, что при нагружении снизу КМ-панели с 2D-структурой армирования теория Редди завышает величину остаточных деформаций связующего на 9,9% по сравнению с уточненным расчетом, а в конструкции с 4D-структурой (см. линии 2 и 2') – всего на 4,9%.

Кривая 1'' на рис.5г приведена для сравнения и рассчитана при тех же условиях, что и линия 1, но в рамках ТПРХ [7,8]: $\eta \rightarrow \infty$ (см. таблицу). Поведение кривой 1'' демонстрирует, что в рамках расчетов по ТПРХ полагая КМ-оболочка неограниченно долго осциллирует. Это обстоятельство не позволяет определять величины остаточных перемещений и остаточных деформаций материалов

композиции. Сравнение кривых I и I'' , полученных по разным теориям деформирования компонентов композиции, свидетельствует о том, что при проведении расчетов по ТПРХ нельзя даже приблизительно определить величину остаточных деформаций связующей матрицы. Действительно, если осреднить значения локальных экстремумов на кривой I'' , то рассчитанная таким образом зависимость $\varepsilon_m^{(0)}(t)$ будет лежать существенно выше линии I . Аналогичные результаты получаются и для волюн как при 2D-структуре армирования, так и при 4D-структуре.

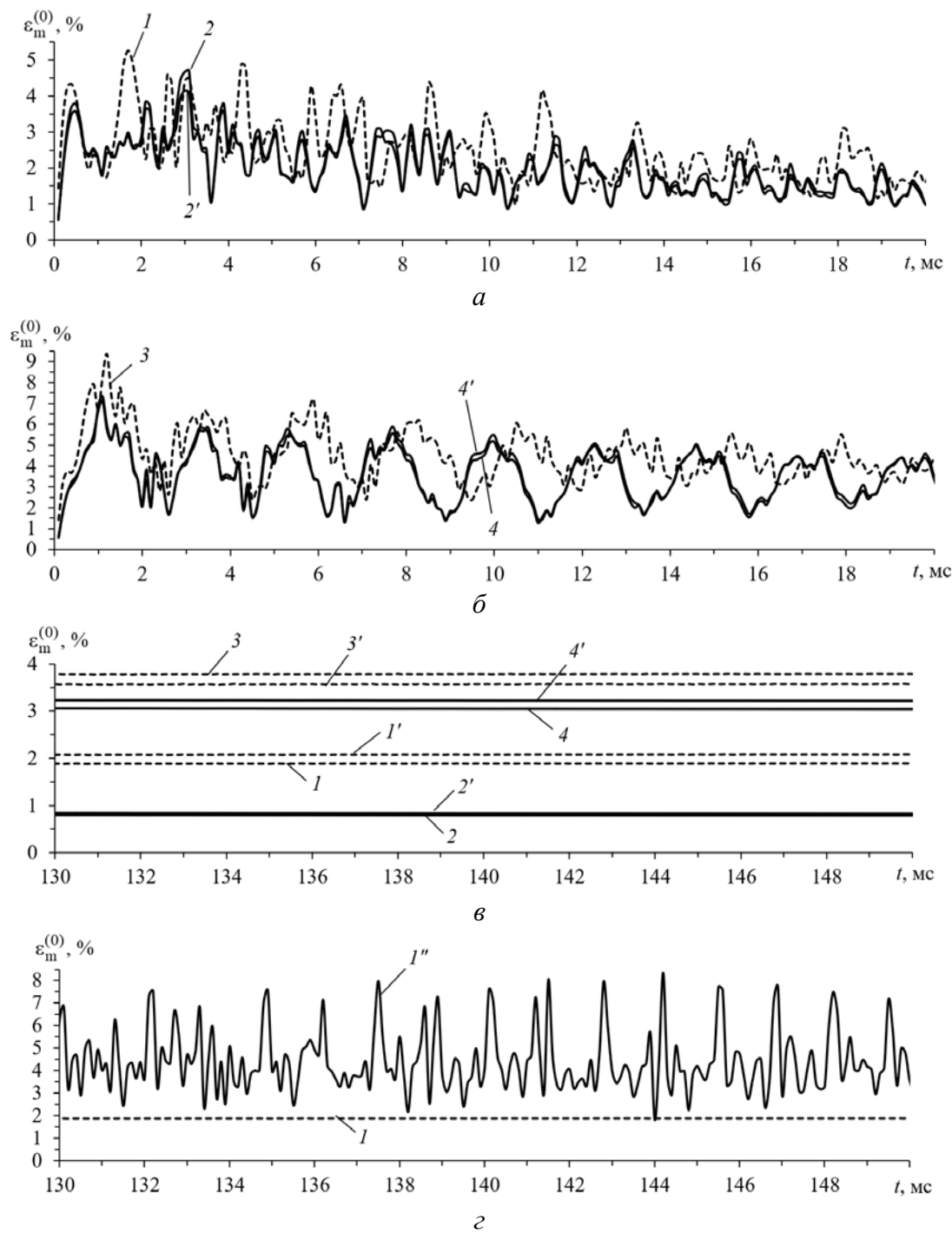


Рис.5. Зависимости от времени максимальных значений интенсивностей деформаций связующей матрицы КМ-панелей в окрестности начального

момента времени при нагружении снизу (*a*) и сверху (*b*), в окрестности момента времени $t = 150\text{мс}$ при обоих вариантах нагружения (*в*) и при нагружении снизу (*з*) – сравнение с расчетом по ТПРХ.

Выше рассматривались относительно тонкие цилиндрические КМ-оболочки ($h/\min(a, b) = h/b = 1/50$). Дополнительные расчеты показывают, что с увеличением относительной толщины панели возрастает различие между решениями, полученными по теории Редди и уточненной теории. При этом разность максимальных по модулю значений остаточных прогибов может превосходить 5%, а разность между максимальными значениями интенсивности остаточных деформаций материалов композиции может достигать нескольких десятков процентов. Кроме того, в относительно толстых КМ-панелях в большей степени проявляются положительные эффекты при замене в них «плоско»-перекрестных структур армирования на пространственные структуры.

ВЫВОДЫ

Разработанная уточненная модель вязкоупругопластического поведения пологих КМ-оболочек с пространственными структурами армирования позволяет более точно, чем в рамках традиционной неклассической теории Редди, определять остаточные прогибы и деформации материалов композиции при кратковременном интенсивном нагружении.

Проведенные расчеты продемонстрировали, что даже для относительно тонких КМ-оболочек расчет по теории Редди не обеспечивает определения величины остаточных деформаций компонентов композиции с точностью 10%. Для относительно толстых КМ-конструкций разность решений, полученных по теории Редди и уточненной теории, становится значительно больше, и для остаточных прогибов может превышать 5 %, а для остаточных деформаций может составлять несколько десятков процентов. Показано, что форма и величина остаточных прогибов, и интенсивность остаточных деформаций компонентов композиции существенно зависят от структуры армирования и от того, к какой лицевой поверхности (вогнутой или выпуклой) прикладывается внешняя нагрузка.

Продемонстрировано, что даже в случае относительно тонкой стеклопластиковой оболочки замена «плоской» 2D-структуры армирования (рис.1*a*) на пространственную 4D-структуру (рис.1*б*) позволяет уменьшить по модулю максимум остаточного прогиба и максимальное значение интенсивности остаточных деформаций связующего (причем даже в разы). Последнее можно трактовать как уменьшение поврежденности связующей матрицы.

Армирующие волокна имеют большие пределы текучести, поэтому при деформировании они в большом количестве запасают упругую энергию, в результате чего амплитуды поперечных осцилляций КМ-оболочек в окрестности начального момента времени оказываются значительно больше абсолютных значений остаточных прогибов. Аналогично ведут себя и зависимости от времени максимальных значений интенсивностей деформаций материалов композиции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
2. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites // SAMPE J.* – 2001. – Vol.37. – No.3. – Pp.3-17.
3. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mechanics of Composite Materials.* – 2009. – Vol.45. – No.2. – Pp.241-254.
4. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. *Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов // Механика композитных материалов.* – 1982. – №1. – С.14-22.
5. Янковский А.П. *Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. I. Структурная модель // Механика композитных материалов.* – 2010. – Т.46. – №5. – С.663-678.
6. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses // Intern. J. of Non-Linear Mechanics.* – 2011. – Vol.46. – Pp. 807-817.
7. Янковский А.П. *Уточненная модель упругопластического изгибного деформирования гибких армированных пологих оболочек, построенная на основе явной схемы типа «крест» // Вычислительная механика сплошных сред.* – 2017. – Т.10. – №3. – С.276-292.
8. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования // Вычислительная механика сплошных сред.* – 2018. – Т.11. – №3. – С.335-354.
9. Фрейденталь А., Гейрингер Х. *Математические теории неупругой сплошной среды.* – М.: Физматгиз, 1962. – 432 с.
10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed.* – Boca Raton: CRC Press, 2004.
11. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа.* – Saarbrucken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.
12. Янковский А.П. *Моделирование вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пластин с учетом слабого сопротивления поперечному сдвигу // Вычислительная механика сплошных сред.* – 2019. – Т.12. – №1. – С.80-97.
13. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. *Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел.* – Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. – 352 с.
14. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // Computers & Structures.* – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.
15. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление жестких полимерных материалов.* – Рига: Зинатне, 1972. – 500 с.
16. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек.* – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

17. *Композиционные материалы: Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
18. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Книга 1*. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.

REFERENCES

1. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannyye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
2. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites*. SAMPE J., 2001, Vol.37, No.3, Pp.3-17.
3. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites*. Mechanics of Composite Materials, 2009, Vol.45, No.2, Pp.241-254.
4. Kregers A.F., Teters G.A. *Strukturnaya model' deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]*. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1982, No.1, Pp.14-22.
5. Yankovskii A.P. *Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model*. Mechanics of Composite Materials, 2010, Vol.46, No.5, Pp.451-460.
6. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. Intern. J. of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp. 807-817.
7. Yankovskii A.P. *Utochnennaya model' uprugoplasticheskogo izgibnogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek, postroennaya na osnove yavnoj skhemy tipa "krest" [A refined model of elastic-plastic bending deformation of flexible reinforced shallow shells based on explicit "cross" scheme]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2017, Vol.10, No.3. Pp.276-292.
8. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh pologikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of elastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial reinforcement structures]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2018, Vol.11, No.3, Pp.335-354.
9. Freudental A.M., Geiringer H. *The mathematical theories of the inelastic continuum*. Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.
10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis / 2nd ed.* Boca Raton, CRC Press, 2004.
11. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis]*. Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
12. Yankovskii A.P. *Modelirovanie vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh plastin s uchetom slabogo soprotivleniya poperechnomu*

sdvigu [Modelling the viscoelastic-plastic deformation of flexible reinforced plates with account of weak resistance to transverse shear]. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2019, Vol.12, No.1. Pp.80-97.

13. Ivanov G.V., Volchkov Yu.M., Bogul'skii I.O., Anisimov S.A., Kurguzov V.D. *Chislennoe reshenie dinamicheskikh zadach uprugoplasticheskogo deformirovaniya tverdykh tel [The numerical solution of dynamic problems elastic-plastic deformations of solids].* Novosibirsk, Sibirskoe universitetskoe izdatel'stvo, 2002, 352 p.
14. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading.* Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.
15. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie zhestkikh polimernykh materialov [Resistance of rigid polymeric materials].* Riga, Zinatne, 1972, 500 p.
16. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells].* Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
17. Karpinos D.M. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials. Reference Book].* Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
18. Lubin G. *Handbook of composites.* New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.

Поступила в редакцию 13 сентября 2019 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru