

**СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА  
ФАЗОВО-СТРУКТУРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ИЗДЕЛИЯХ  
ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ  
ОБ ИЗГИБЕ БАЛКИ\***

Тихомирова К.А.

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия*

**АННОТАЦИЯ**

В работе рассмотрены три метода расчета фазово-структурной деформации в изделиях из сплавов с памятью формы и приведено их сопоставление на примере решения задачи об изгибе консольной балки. Во всех методах используется гипотеза об эквивалентности фазовой и структурной деформаций с точки зрения дальнейшего деформационного поведения материала на макроуровне. Под фазовой деформацией понимается деформация ориентированного мартенсита, полученного охлаждением аустенитной фазы под нагрузкой, под структурной – деформация ориентированного мартенсита, полученного путем изотермической переориентации хаотического мартенсита. Первый метод состоит в построении трехмерных определяющих соотношений механики сплошной среды и их последующей реализации методом конечных элементов. Определяющие соотношения включают две материальные функции: диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости – зависимости фазовой и структурной деформаций от формирующего их напряжения. Второй метод может применяться для конструкций, деформирование которых характеризуется одним кинематическим и одним силовым параметром: например, прогиб балки под действием усилия. Этот метод использует конструкционные диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости – зависимости фазовой и структурной составляющих кинематического параметра от силового, что позволяет проводить расчет в одномерной постановке. Третий метод применим только для расчета изгиба балок и пластин. Он предполагает разбиение балки на слои, в каждом из которых действует только нормальное напряжение, при этом поперечными и касательными усилиями пренебрегается. Фазово-структурная деформация в каждом слое вычисляется с помощью определяющих соотношений первого метода, но в одномерной постановке. На примере задачи об изгибе балки показано, что все методы дают сходные результаты. Сделан вывод о вычислительной эффективности каждого метода.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; фазово-структурная деформация; мартенситное превращение; диаграмма прямого превращения; диаграмма мартенситной неупругости; изгиб балки

**COMPARISON OF METHODS FOR CALCULATING PHASE  
AND STRUCTURAL TRANSFORMATION STRAINS IN SMA  
STRUCTURES ON EXAMPLE OF A BEAM BENDING PROBLEM**

Tikhomirova K.A.

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края (грант №19-41-590008 p\_a).

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of Russian Academy  
of Science, Perm, Russia*

### ABSTRACT

In this article, three methods for calculating the phase and structural transformation strains of shape memory alloy structures are considered and their performance is compared using as an example the problem of cantilever beam deflection. All methods are based on the hypothesis of equivalence of phase and structural transformation strains as regards the further deformation behavior of a material at the macroscopic level. Phase deformation is understood to be the deformation of oriented martensite caused by cooling the austenitic phase under load, and structural deformation is the deformation of oriented martensite caused by the isothermal reorientation of chaotic martensite. The first method involves the construction of three-dimensional constitutive equations of continuous medium mechanics and their implementation by the finite element method. The constitutive equations include two material functions: the direct transformation and martensitic inelasticity diagrams – the dependence of phase and structural transformation strains on the stress responsible for their initiation. The second method is applicable to structures whose deformation is characterized by one kinematic and one force parameter: for example, beam deflection under the action of the applied force. This method uses the structural diagrams of direct transformation and martensitic inelasticity – the dependences of phase and structural components of the kinematic parameter on the force parameter, which allows making calculations in the one-dimensional formulation. The third method can be applied only for calculating the bending of beams and plates. It involves breaking the beam into several layers, each of them experiencing only normal forces, while transverse and shear forces being neglected. The phase and structural transformation strain in each layer is calculated using the constitutive equations of the first method, but in the one-dimensional case. In the context of the beam bending problem, it has been shown that all methods give similar results. The computational efficiency of each method is estimated.

**Keywords:** shape memory alloys; phase and structural transformation strains; martensitic transformation; direct transformation diagram; martensitic inelasticity diagram; beam bending

### ВВЕДЕНИЕ

Эффект памяти формы в металлических сплавах связан с перестройкой кристаллической решетки при фазовых и структурных превращениях. Особенности феноменологии этих материалов изложены в таких фундаментальных трудах, как [1-3], а также в сборнике докладов [4]. В высокотемпературном состоянии сплавы с памятью формы (СПФ) имеют высокосимметричную аустенитную кристаллическую решетку, которая при охлаждении через интервал температур  $M_s - M_f$  (начала и окончания прямого фазового превращения) переходит в низкосимметричную мартенситную фазу. Объемная доля мартенситной фазы  $q$  при этом возрастает от 0 до 1. Если охлаждение проводится без нагрузки и в материале отсутствуют поля ориентированных внутренних напряжений, то ячейки мартенситной кристаллической решетки выстраиваются произвольным образом, образуя структуру хаотического (неориентированного) мартенсита. Фазовая деформация такого мартенсита определяется шаровым тензором с осевыми компонентами  $\varepsilon_v$ , причем величина  $\varepsilon_v$ , являющаяся константой материала, для многих сплавов незначительна. (Здесь и далее под фазовой деформацией будет пониматься

макроскопическая деформация представительного объема материала в мартенситном состоянии по сравнению с исходным аустенитным.) Если же охлаждение проводить под нагрузкой, то из всех возможных ориентаций низкосимметричной ячейки мартенсита реализуется такая, для которой работа действующих напряжений на деформации, возникающей при преобразовании аустенитной ячейки в мартенситную, будет наибольшей. Получаемая таким образом структура ориентированного мартенсита обладает существенной фазовой деформацией по сравнению с исходным аустенитным состоянием (для ряда материалов фазовая деформация может достигать 10%). Образование такой структуры и является причиной проявления эффекта памяти формы в металлических сплавах, поскольку при разгрузке при температуре ниже  $M_f$  структура ориентированного мартенсита и соответствующая ему фазовая деформация сохраняются, и восстановление деформации происходит только в процессе обратного фазового перехода, вызванного нагревом в интервале температур  $A_s - A_f$  (начала и окончания обратного фазового превращения).

С другой стороны, структура ориентированного мартенсита может быть получена еще одним способом: если приложить нагрузку достаточной величины к материалу, находящемуся в состоянии хаотического мартенсита, то кристаллические ячейки мартенситной фазы претерпевают переориентацию и выстраиваются по направлению действующего усилия, то есть происходит структурное превращение. В этом случае деформацию ориентированного мартенсита принято называть не фазовой, а структурной. Однако, несмотря на различие способов формирования, дальнейшее деформационное поведение ориентированного мартенсита обоих типов на макромеханическом уровне одинаково. Это позволяет ввести Гипотезу 1 об эквивалентности фазовой и структурной деформаций: дальнейшее деформационное поведение представительного объема материала определяется только его фазово-структурной деформацией и не зависит от способа ее формирования – в результате фазового или структурного превращения. Под фазово-структурной деформацией здесь и далее будет пониматься деформация ориентированного мартенсита относительно исходной аустенитной фазы. Для случая одноосного напряженного состояния данная гипотеза подтверждена экспериментально в работе [5].

На основании Гипотезы 1 в [6] была предложена одномерная феноменологическая модель деформационного поведения СПФ, позволяющая в рамках единого подхода описать основные макромеханические явления, обусловленные фазовыми и структурными превращениями в СПФ: эффекты монотонной и реверсивной памяти формы, мартенситной неупругости и сверхупругости, перекрестного упрочнения, случаи неоднородного фазового деформирования. В настоящей работе предложено обобщение этой модели на случай сложного напряженного состояния. Сравнительная простота данной модели наряду с хорошей описательной способностью делают возможным ее применение для решения прикладных задач. Модель содержит две материальные функции, определяемые из стандартных экспериментов.

На сегодняшний день большинство работ, посвященных анализу деформационного поведения СПФ, также используют феноменологические модели (см., например, работы [7-9] и литературу к ним). Вместе с тем, чувствительность механических свойств сплавов с памятью формы к ряду

факторов (размеру зерна, наличию текстуры, полей внутренних ориентированных микронапряжений и др.) делает затруднительным применение феноменологических моделей механики сплошной среды к описанию деформационного поведения изделий из этих материалов. Так, материальные функции моделей, определенные на стандартных образцах, могут оказаться неприменимы для конструкций, изготовленных из того же материала, вследствие изменения свойств материала в процессе технологической обработки. Для учета изменения свойств можно использовать либо микроструктурные модели (см., например, работы [10-12]), реализация которых достаточно сложна, либо более простые методы строительной механики, подразумевающие определение материальных функций непосредственно на конструкции.

К методам строительной механики, или к инженерным методам, может быть отнесен подход, изложенный в [13]. Данный подход требует экспериментального определения материальных параметров непосредственно на рассчитываемой детали в условиях нагружения, воспроизводящих условия ее последующей эксплуатации. Такой способ позволяет учесть влияние масштабного фактора и формы изделия, а также изменение свойств материала вследствие технологической обработки. Сам метод расчета основан на анализе экспериментальных термомеханических диаграмм образцов из СПФ – зависимостей максимального реактивного напряжения, развиваемого при нагреве образцов с фиксированной деформацией недовосстановления, от величины этой деформации. Рассматриваемый в настоящей работе конструкционный метод расчета также предполагает определение материальных функций непосредственно из испытаний конструкции. В этом методе используется обобщение определяющих соотношений одномерной модели [6] на кинематические и силовые параметры всей конструкции, в связи с чем он также относится к методам строительной механики. Помимо предлагаемого в данной работе конструкционного метода и подхода, изложенного в [13], к методам строительной механики можно отнести подходы, используемые в следующих работах: [14,15] – расчет изгиба балки, [16] – расчет изгиба пластины, [17] – расчет устойчивости центрально сжатого стержня, [18] – расчет винтовой пружины из СПФ.

## 1. ТРЕХМЕРНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

В работе [6] была предложена модель для описания фазово-структурной деформации в СПФ. Определяющее соотношение этой модели имеет вид

$$\varepsilon_{phst} = \int_0^{q_0} F_1(\sigma^*(q)) dq + q_0 \varepsilon_v. \quad (1)$$

Здесь  $\varepsilon_{phst}$  – фазово-структурная деформация,  $q_0$  – текущая объемная доля мартенситной фазы,  $\varepsilon_v$  – осевая компонента шаровой части тензора фазово-структурной деформации, которая не зависит от напряжения и может считаться константой материала.  $\sigma^*(q)$  – управляющее напряжение – напряжение, действующее в момент образования мартенситного элемента  $dq$ . Под мартенситным элементом здесь понимается совокупность кристаллических ячеек мартенситной фазы, равномерно распределенных по представительному объему материала, образовавшихся одновременно в процессе прямого фазового перехода

и сообщивших элементарное приращение  $dq$  объемной доле мартенсита. Полагая величину элементарного приращения бесконечно малой, любые значения физических величин, которые ставятся в соответствие каждому мартенситному элементу, можно считать непрерывными функциями аргумента  $q$ . Так, управляющее напряжение  $\sigma^*(q)$  является непрерывной функцией  $q$ , причем каждому значению  $q$  соответствует один мартенситный элемент. Материальная функция  $F_1$  – диаграмма прямого превращения, представляющая собой зависимость фазовой деформации полного прямого превращения, накапливаемой после охлаждения под постоянным напряжением, от величины этого напряжения. Для экспериментального получения этой диаграммы необходимо провести несколько испытаний на охлаждение образцов через интервал температур прямого фазового перехода  $(M_s - M_f)$  под действием постоянного растягивающего (сжимающего) напряжения, варьируя в каждом испытании величину напряжения. Деформация, сохраняющаяся в образце после упругой разгрузки при температуре ниже  $M_f$ , в зависимости от действующего при переходе напряжения, составляет одну точку на экспериментальной диаграмме  $F_1$ . Аппроксимация нескольких таких точек, например, соотношением вида

$$F_1(\sigma) = (1 - \exp(-\sigma / \sigma_0)) e_{phst}^{\max}, \quad (2)$$

предложенным в [19], позволяет получить материальную функцию  $F_1$ . Здесь  $\sigma_0$  и  $e_{phst}^{\max}$  – параметры материала.

Для учета структурной деформации вводится понятие предела структурного превращения  $\sigma_{st}$  – минимального напряжения, необходимого для изменения текущей степени ориентированности мартенситного элемента. В свою очередь, степень ориентированности, характеризующая меру сонаправленности вариантов мартенсита в мартенситном элементе с линией действия внешней нагрузки, определяется величиной управляющего напряжения  $\sigma^*$ , поэтому предел структурного превращения связан функциональной зависимостью с  $\sigma^*$ . В том случае, если внешняя нагрузка сохраняет свое направление (в данной работе будет рассматриваться только такой случай), эта зависимость имеет вид

$$\sigma_{st} = F_2^{-1}(F_1(\sigma^*(q))), \quad (3)$$

согласно [20]. Индексом "-1" здесь и далее обозначается обратная функция. Входящая в (3) диаграмма мартенситной неупругости  $F_2$ , в отличие от диаграммы прямого превращения  $F_1$ , представляет собой зависимость не фазовой, а структурной деформации от напряжения, прикладываемого к ранее образовавшейся мартенситной фазе. Для ее экспериментального определения необходимо произвести изотермическое одноосное растяжение (сжатие) образца из материала, имеющего структуру неориентированного мартенсита, а затем из полученной диаграммы деформирования вычесть упругую составляющую деформации. В том случае, если перед началом деформирования мартенсит уже обладает некоторой степенью ориентированности, приобретенной в результате прямого фазового перехода под напряжением либо в результате структурного превращения ( $\sigma^* \neq 0$ ), то диаграмма изотермического деформирования образца из такого материала разделяется напряжением  $\sigma_{st}$  на два участка: упругий – при

напряжении ниже  $\sigma_{st}$ , и совпадающий с верхней частью диаграммы  $F_2$  с добавлением к ней упругой составляющей деформации – при напряжении выше  $\sigma_{st}$ . Это явление называется эффектом перекрестного упрочнения, оно было продемонстрировано в экспериментах на растяжение никелида титана в работе [21] и на сжатие в работе [22]. Вид диаграммы  $F_2$  в общем случае зависит от температуры деформирования.

Для того, чтобы корректно сформировать функцию управляющего напряжения  $\sigma^*(q)$ , отсчет истории деформирования в (1) должен начинаться от полностью аустенитного состояния ( $q=0$ ). Если в процессе деформирования текущее напряжение  $\sigma$  в материале превысит предел структурного превращения  $\sigma_{st}$  какого-либо мартенситного элемента, определяемый выражением (3), то управляющее напряжение для значения  $q$ , соответствующего данному элементу, принимает новое значение, равное  $F_1^{-1}(F_2(\sigma))$ . Тогда условие структурного превращения можно записать в виде

$$\text{если } \sigma^*(q) < \sigma_{st}, \text{ то новое значение } \sigma^*(q) = F_1^{-1}(F_2(\sigma)). \quad (4)$$

После осуществления структурного превращения интеграл (1) необходимо пересчитать с учетом изменившейся функции  $\sigma^*(q)$ . Запись (4), вытекающую из гипотезы об эквивалентности фазовой и структурной деформаций, можно интерпретировать так: образец, получивший в результате структурного превращения под напряжением  $\sigma$  структурную деформацию  $F_2(\sigma) + \varepsilon_v$  (согласно (1)), далее будет деформироваться также, как образец, получивший в результате прямого фазового превращения под действием напряжения  $\sigma^*$  такую же

по величине фазовую деформацию  $F_1(\sigma^*) + \varepsilon_v$ . Тогда из равенства  $F_2(\sigma) + \varepsilon_v = F_1(\sigma^*) + \varepsilon_v$  вытекает соотношение (4). Подтверждением данной гипотезе служит, во-первых, эффект перекрестного упрочнения, а во-вторых, экспериментально установленный факт, что характерные температуры обратного фазового перехода для таких образцов близки [5]. Использование в качестве управляющего напряжения не константы, а функции аргумента  $q$ , позволяет обобщить данную гипотезу на случай, когда мартенситные элементы в процессе прямого фазового перехода образуются при разных значениях напряжения  $\sigma^*$  (неоднородное фазовое деформирование).

Для описания обратного фазового перехода вводится еще одна гипотеза, используемая многими авторами и имеющая экспериментальное подтверждение [4]: исчезновение мартенситных элементов при обратном фазовом переходе происходит в порядке, противоположном порядку их возникновения при прямом фазовом переходе. В соотношении (1) при уменьшении доли мартенситной фазы, происходящем при обратном фазовом переходе, интеграл получает отрицательное приращение и функция  $\sigma^*(q)$  "воспроизводится" в обратной последовательности, тем самым данная гипотеза выполняется автоматически.

Вариант обобщения соотношения (1) на случай сложного напряженного состояния можно предложить в виде

$$\varepsilon_{phst} = \frac{3}{2} \int_0^{q_0} \frac{F_1(\sigma_i^*)}{\sigma_i^*} \mathbf{S}^* dq + \mathbf{g}q_0 \varepsilon_v. \quad (5)$$

Здесь  $\boldsymbol{\varepsilon}_{phst}$  и  $\mathbf{S}^*$  – тензоры фазово-структурной деформации и девиатора управляющего напряжения,  $\sigma_i^*$  – интенсивность управляющего напряжения,  $\mathbf{g}$  – единичный тензор. Управляющее напряжение, представляющее собой тензорную функцию скалярного аргумента  $\boldsymbol{\sigma}^*(q)$ , формируется таким же образом, как в описанном выше случае одноосного напряженного состояния, а функция  $F_1(\sigma_i^*)$  по-прежнему может быть аппроксимирована соотношением (2). Свойство разносопротивляемости учитывается способом, изложенным в [23-25]: вводится параметр вида напряженного состояния  $\mu_\sigma = \frac{27 I_3(\mathbf{S}^*)}{2 (\sigma_i^*)^3}$ , где  $I_3(\mathbf{S}^*)$  – третий

инвариант девиатора тензора управляющего напряжения. Параметр  $\mu_\sigma$  изменяется в пределах от  $-1$  до  $+1$  и принимает значения  $+1$  для одноосного растяжения,  $-1$  для одноосного сжатия и  $0$  для чистого сдвига. Вводится функциональная зависимость материальных констант  $\sigma_0$  и  $e_{phst}^{max}$  для функции  $F_1(\sigma_i^*)$  от параметра  $\mu_\sigma$ , в настоящей работе принята линейная зависимость

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_0^+ + \sigma_0^-}{2} + \mu_\sigma \cdot \frac{\sigma_0^+ - \sigma_0^-}{2}; \quad e_{phst}^{max} = \frac{e_{phst}^{max+} + e_{phst}^{max-}}{2} + \mu_\sigma \cdot \frac{e_{phst}^{max+} - e_{phst}^{max-}}{2},$$

где индексами "+" обозначены параметры для растяжения, "-" – для сжатия.

Для учета структурной деформации в условиях сложного напряженного состояния введем два упрощающих предположения: 1) диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости совпадают; 2) изменение главных направлений тензора напряжений в процессе деформирования незначительно и не может вызвать переориентацию мартенситных элементов, а структурное превращение может быть инициировано только возрастанием интенсивности нагрузки. Второе предположение выполняется приближенно в случае, если внешняя нагрузка не меняет направление в процессе деформирования. С учетом данных предположений условие структурного превращения можно записать следующим образом:

$$\text{если } \sigma_i^*(q) < \sigma_i, \text{ то новое значение } \boldsymbol{\sigma}^*(q) = \boldsymbol{\sigma},$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\sigma_i$  – тензор и интенсивность текущего напряжения.

Надо отметить, что соотношение, аналогичное (5), но в дифференциальной постановке и с использованием в подынтегральном выражении не управляющего, а текущего напряжения, вводится в работе [26] для описания фазовой деформации прямого превращения. Для описания структурной деформации, а также деформации обратного фазового перехода в [26] используются соотношения другого вида.

Для получения полной деформации системы используется суммирование упругой  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  и фазово-структурной  $\boldsymbol{\varepsilon}_{phst}$  составляющих

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{phst} \quad (6)$$

Упругая деформация вычисляется по закону Гука, причем модули упругости аустенитной  $E_A$  и мартенситной  $E_M$  фаз различны, а коэффициент Пуассона  $\nu$  считается одинаковым. При этом зависимость модуля упругости от объемной доли мартенсита определяется путем осреднения по Рейссу

$$E(q) = \frac{E_A \cdot E_M}{q \cdot E_A + (1-q) \cdot E_M}.$$

Температурная деформация в данной работе не учитывается, поскольку в задаче об изгибе ее влияние несущественно.

Для описания зависимости объемной доли мартенсита от температуры используется тригонометрическая аппроксимация, представленная в [27]. Сдвиг характерных температур фазовых переходов от действия напряжения в настоящей работе учитываться не будет.

## 2. КОНСТРУКЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ФАЗОВО-СТРУКТУРНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Конструкционный метод расчета фазово-структурной деформации использует подход, аналогичный определяющему соотношению (1), и позволяет рассчитать НДС конструкции, не прибегая к трехмерным определяющим соотношениям. Метод может быть использован для расчета конструкций, НДС которых определяется только одним кинематическим и одним силовым параметром (например, прогиб балки в зависимости от приложенной сосредоточенной силы, изменение диаметра трубы в зависимости от действующего внутреннего давления и т.д.). Для этого вводятся понятия конструкционных диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости  $F_1^k$  и  $F_2^k$ , смысл которых аналогичен материальным диаграммам  $F_1$  и  $F_2$ , но, в отличие от последних, они представляют собой зависимости не фазово-структурной деформации от напряжения, а фазово-структурной составляющей кинематического параметра от соответствующего силового (зависимость фазово-структурной составляющей прогиба от усилия, изменения диаметра от давления и т.д.). Так, в задаче об изгибе балки, нагруженной сосредоточенной силой, для экспериментального построения конструкционной диаграммы прямого превращения требуется провести ряд экспериментов по охлаждению балки через температурный интервал прямого превращения под действием постоянной силы, измеряя величину прогиба после упругой разгрузки при конечной температуре. После выполнения нескольких экспериментов при различных значениях силы по полученным точкам строится аппроксимирующая диаграмма  $F_1^k$ , причем вид аппроксимации может быть выбран аналогичным (2)

$$F_1^k(P) = (1 - \exp(-P/P_0)) w_{phst}^{\max}. \quad (7)$$

Здесь величины  $P_0$  и  $w_{phst}^{\max}$  являются параметрами не только материала, но и конструкции. В свою очередь, конструкционная диаграмма мартенситной неупругости  $F_2^k$  строится как зависимость прогиба от приложенной силы при изотермическом нагружении балки, находящейся в состоянии неориентированного (хаотического) мартенсита, за вычетом упругой составляющей прогиба.

Как и в соотношении (6), в настоящем подходе предполагается, что полное значение кинематического параметра  $w$  складывается из упругой  $w_e$  и фазово-структурной  $w_{phst}$  составляющих

$$w = w_e + w_{phst}. \quad (8)$$



При этом задача нахождения фазово-структурной составляющей кинематического параметра остается одномерной, тогда как его упругая составляющая может быть найдена любым доступным способом: методами сопротивления материалов, методом конечных элементов и др.

Одномерное определяющее соотношение (1) в конструкционном подходе трансформируется в следующее выражение для нахождения фазово-структурной составляющей кинематического параметра

$$w_{phst} = \int_0^{q_0} F_1^{\kappa} (P^* (q)) dq. \quad (9)$$

Здесь  $P^* (q)$  – функция управляющего силового параметра. Так же, как  $\sigma^* (q)$ , она содержит значения силового параметра, действующего в момент возникновения каждого мартенситного элемента. Под мартенситным элементом здесь, как и прежде, понимается совокупность кристаллических ячеек мартенситной фазы, зародившихся одновременно и сообщивших элементарное приращение  $dq$  интегралу (9), однако распределенных равномерно не по представительному объему материала, как предполагалось ранее, а по всей конструкции. Таким образом, необходимым условием применения соотношения (9) является равномерный прогрев конструкции, обеспечивающий однородность доли мартенситной фазы по всему объему материала. Кроме того, данное соотношение не позволяет учесть влияние напряжений на сдвиг характерных температур превращений, что делает невозможным решение задач конструкционным методом в связанной постановке.

Деформация структурного превращения учитывается по аналогии с (3)-(4): если текущее значение силового параметра превысит предел структурного превращения какого-либо мартенситного элемента, равный  $P_{st} = (F_2^{\kappa})^{-1} (F_1^{\kappa} (P^* (q)))$ , то управляющий силовой параметр для значения  $q$ , соответствующего данному элементу, принимает новое значение

$$P^* (q) = (F_1^{\kappa})^{-1} (F_2^{\kappa} (P))$$

если  $P > (F_2^{\kappa})^{-1} (F_1^{\kappa} (P^* (q)))$ , то

$$\text{новое значение } P^* (q) = (F_1^{\kappa})^{-1} (F_2^{\kappa} (P)). \quad (10)$$

Заметим, что условие (10) соответствует типу нагружения, при котором силовой параметр сохраняет знак. Случай знакопеременного нагружения здесь рассматриваться не будет.

Основное преимущество конструкционного метода по сравнению с трехмерными определяющими соотношениями (5), для численной реализации которых требуется использовать, например, метод конечных элементов, состоит в существенной экономии вычислительного ресурса при сохранении точности расчета. Второе преимущество заключается в следующем. Поскольку материальные функции для соотношений (5) определяются на образцах стандартной формы, то они могут оказаться неприменимы для расчета конструкции, изготовленной из того же материала, вследствие изменения свойств этого материала в процессе технологической обработки: изменения текстуры и размера зерна, возникновения внутренних ориентированных микронапряжений и ряда других факторов, оказывающих существенное влияние на характеристики фазовых и структурных превращений. В то же время, экспериментальное

определение функций конструкционного метода  $F_1^k$  и  $F_2^k$  непосредственно на конструкции позволяет учесть особенности материала, возникшие при технологической обработке. Однако необходимость проводить самостоятельное экспериментальное исследование для каждого типа конструкции является недостатком данного метода. С другой стороны, если нет возможности провести эксперимент на рассчитываемой конструкции, функции  $F_1^k$  и  $F_2^k$  можно определить численно с использованием соотношений (5), а для дальнейших расчетов использовать соотношения (7)-(10) конструкционного метода. Именно такой способ будет реализован в настоящей работе в разделе 6. Другим недостатком конструкционного метода является отмеченное выше требование однородности объемной доли мартенсита  $q$  для всей конструкции, что может быть обеспечено только за счет ее равномерного прогрева при осуществлении мартенситных превращений. Кроме того, невозможно учесть влияние напряжений на фазовые переходы, поскольку тензоры напряжений и деформаций в конструкционном подходе не вычисляются. Также соотношение (8), использующее суммирование кинематических параметров, справедливо только при умеренных значениях этих параметров. Несмотря на это, данный подход может успешно применяться для расчета конструкций небольшой толщины, для которых возможно обеспечить равномерный прогрев, для задач с невысоким уровнем напряжений, не оказывающих существенного влияния на сдвиг характерных температур превращений, а также для расчета НДС конструкций из СПФ в изотермических условиях нагружения.

### 3. МЕТОД ПОСЛОЙНОГО РАСЧЕТА БАЛКИ ПРИ ИЗГИБЕ

В работе [14] задача изгиба балки решается в рамках гипотез Бернулли-Эйлера, при этом поперечные нормальные напряжения в сечении балки, а также продольные касательные напряжения в определяющих соотношениях не учитываются. В настоящей работе для реализации данных гипотез используется метод послойного расчета изгибающейся балки, суть которого состоит в следующем. На первом этапе с учетом статических и кинематических граничных условий находится зависимость изгибающего момента от продольной координаты  $M(z)$ , обеспечивающая выполнение условий равновесия для балки в целом. Далее проводится дискретизация данной зависимости: балка разбивается на участки малой длины  $\Delta z$ , на каждом из которых изгибающий момент считается постоянным. Каждый участок  $\Delta z$ , в свою очередь, представляется в виде пакета тонких пластин, в каждой из которых действует только продольное нормальное напряжение, при этом поперечные нормальные напряжения (изгибающие усилия для пластин) и касательные напряжения (трение между пластинами) считаются пренебрежимо малыми. Поскольку после проведения процедуры дискретизации зависимости  $M(z)$  изгибающий момент на каждом малом участке постоянен и известен, то значение кривизны на участке также является постоянным и может быть найдено из решения краевой задачи для пакета пластин независимо для каждого участка. Таким образом, задача нахождения перемещений в изгибающейся балке сводится к независимому определению кривизны каждого участка и последующего представления ее как дискретной функции координаты  $z$ , интегрирование которой с учетом граничных

условий для балки в целом позволит найти перемещения каждого сечения балки при изгибе.

Расчетная схема пакета пластин, используемая для нахождения кривизны на каждом участке балки малой длины  $\Delta z$ , изображена на рис.1. Сплошные горизонтальные линии на рисунке соответствуют срединным плоскостям пластин,  $z$  и  $x$  – продольная и поперечная координаты,  $H$  – высота балки. Пластины с одного конца имеют жесткое защемление, с другого – шарнирно присоединены к жесткой оправке, имеющей возможность горизонтального перемещения и поворота относительно центра на угол  $\varphi$  и воспринимающей действие изгибающего момента  $M$ . При этом взаимодействие между пластинами (силы трения и взаимное давление) отсутствует. Такими условиями закрепления обеспечивается то, что каждая пластина находится в состоянии одноосного растяжения или сжатия, поэтому фазово-структурная деформация пластин может быть вычислена с помощью одномерного определяющего соотношения (1).

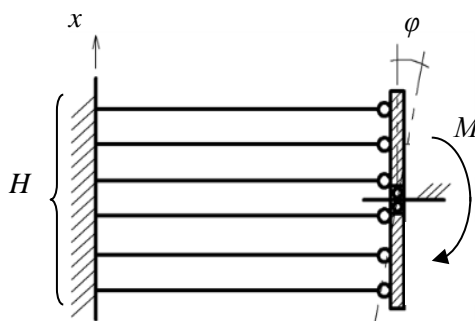


Рис.1. Расчетная схема пакета пластин.

Для пакета пластин справедливо условие совместности деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \Delta z = \varphi, \quad (11)$$

где  $\varepsilon(x)$  – полная осевая деформация пластины с координатой срединной плоскости  $x$ , складывающаяся из упругой и фазово-структурной составляющих, согласно (6). Граничные условия для пакета соответствуют нагрузке на его торце – приложенному изгибающему моменту  $M$  и отсутствию продольного усилия

$$b \int_{-H/2}^{H/2} x \cdot \sigma(x) dx = M; \quad b \int_{-H/2}^{H/2} \sigma(x) dx = 0, \quad (12)$$

где  $b$  – ширина балки.

Зная распределение изгибающего момента по длине балки  $M(z)$  и задавая соответствующие значения моментов на каждом участке  $\Delta z$ , с помощью соотношений (1)-(4), (6), (11)-(12) можно вычислить угол поворота  $\varphi$  правого торца пакета для каждого участка. Если длина  $\Delta z$  достаточно мала, то величина

$\kappa = \frac{\varphi}{\Delta z}$  представляет собой кривизну балки на данном участке, и ее можно

считать функцией координаты  $z$ . Согласно дифференциальному уравнению изогнутой оси балки [28], интеграл от  $\kappa(z)$  по продольной координате равен функции угла поворота поперечного сечения балки  $\Theta(z)$ , а интеграл от  $\Theta(z)$  – функции прогиба балки  $w(z)$

$$\begin{aligned}\Theta(z) &= \int \kappa(z) dz; \\ w(z) &= \int \Theta(z) dz.\end{aligned}\tag{13}$$

Константы интегрирования в (13) определяются из граничных условий, соответствующих условиям закрепления балки.

#### 4. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДОВ

Поскольку все три рассмотренных метода используют идеологию одной и той же модели [6], то алгоритмы их численной реализации также имеют общие черты. Вводится три типа дискретизации: по пространству, времени и по объемной доле мартенсита. В том случае, если трехмерные определяющие соотношения (5) реализуются с помощью метода конечных элементов, как будет сделано в разделе 6 настоящей работы, то пространственная дискретизация представлена сеткой конечных элементов общим количеством  $N_{el}$ . В методе послойного расчета пространственную дискретизацию составляет число слоев  $N_{layer}$  и число разбиений по длине балки  $N_L$ , тогда общее количество пространственных элементов составляет  $N_{layer} \cdot N_L$ . Для конструкционного метода расчет выполняется для всей конструкции в целом, поэтому имеется только один пространственный элемент. Дискретизация по времени используется лишь для характеристики изменения параметров нагружения, поэтому вместо нее может быть введен шаг по температуре и/или внешней нагрузке. Дискретизация по объемной доле мартенсита вводится следующим образом: предельно возможное значение объемной доли мартенсита  $q=1$  разбивается на  $N_q$  равных шагов, каждому из которых соответствует приращение объемной доли мартенсита на величину  $\Delta q = \frac{1}{N_q}$ , являющуюся дискретным аналогом мартенситного элемента. При этом шаг  $\Delta q$  должен быть достаточно маленьким, так чтобы в процессе прямого и обратного фазовых переходов на каждом шаге по времени (температуре, нагрузке) происходило превращение целого числа мартенситных элементов.

В каждом методе используется массив с управляющими силовыми характеристиками, который сохраняется в памяти на протяжении всего расчета и по которому вычисляется фазово-структурная деформация всей конструкции. Этот массив содержит значения управляющих силовых характеристик каждого мартенситного элемента для всех пространственных элементов. Управляющей силовой характеристикой в методе конечных элементов является тензор управляющего напряжения, содержащий в общем случае 6 независимых компонент, в методе послойного расчета – нормальное напряжение в каждом слое (одна компонента), в конструкционном методе – управляющий силовой параметр (одна компонента). Таким образом, размерность массива управляющих силовых характеристик составляет  $N_q \cdot N_{el} \cdot 6$  для метода конечных элементов,  $N_q \cdot (N_{layer} \cdot N_L) \cdot 1$  для метода послойного расчета и  $N_q \cdot 1 \cdot 1$  для конструкционного метода.

Поскольку при реализации численного алгоритма силовые характеристики на текущем расчетном шаге являются неизвестными, а от них зависит

преобразование массива управляющих силовых характеристик и вычисляемая фазово-структурная деформация, то для их определения используется итерационная процедура. В первом приближении фазово-структурные деформации вычисляются по напряжениям с предыдущего расчетного шага, а затем решение итерационно уточняется. Критерием завершения итерационной процедуры может служить, например, разность прогибов балки, вычисленная на текущей и предыдущей итерациях.

## 5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ИЗ СПФ

Для апробации и сопоставления трех изложенных выше методов расчета решена задача об изгибе консольной балки из СПФ. Один конец балки жестко заземлен, на другой действует вертикальная сила со стороны сжатой пружины жесткостью  $k$  (см. рис. 2). На первом этапе осуществляется охлаждение балки через температурный интервал прямого фазового перехода, причем при начальной температуре пружина сжата на некоторую величину  $\Delta$ . По мере снижения температуры развивается фазовая деформация, и прогиб балки увеличивается,

что приводит к уменьшению реактивного усилия со стороны пружины. После завершения охлаждения пружина извлекается, в результате чего происходит упругая разгрузка, однако прогиб балки, вызванный фазовой деформацией, сохраняется. На втором этапе производится нагрев балки через температурный интервал обратного фазового перехода, причем рассматривается два случая: 1) нагрев осуществляется без силового воздействия; 2) внутри температурного интервала обратного превращения при температуре  $T_1 (A_s < T_1 < A_f)$  к концу балки прикладывается сила  $P_1$ , направленная вниз, которая продолжает действовать до окончания нагрева. В первом случае снятие фазово-структурной деформации и уменьшение прогиба балки происходит монотонно. Во втором случае приложение нагрузки при температуре  $T_1$  вызывает структурное превращение оставшихся мартенситных элементов, что приводит к приращению фазово-структурной деформации и резкому возрастанию прогиба, однако последующий нагрев также способствует монотонному уменьшению деформации.



Рис.2. Расчетная схема изгибаемой балки.

В решении используются материальные параметры для никелида титана [29]: модули упругости в мартенситном и аустенитном состоянии  $E_M = 28$  ГПа и  $E_A = 84$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , температуры фазовых переходов  $M_s = 40$  °С,  $M_f = 20$  °С,  $A_s = 50$  °С,  $A_f = 70$  °С. Поскольку объемная составляющая фазовой деформации  $\varepsilon_v$  в никелиде титана мала, то она полагалась равной нулю. Параметры материальной функции  $F_1$  для случая растяжения при ее аппроксимации соотношением (2) были экспериментально определены в работе [5]:  $\sigma_0^+ = 150$  МПа,  $e_{phst}^{\max+} = 4,7\%$ . Соответствующие параметры для сжатия

были получены масштабированием в [6] и составили  $\sigma_0^- = 300$  МПа,  $e_{phst}^{\max-} = 2,8\%$ . В расчете используется предположение о равенстве диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости. Размеры балки следующие: длина  $L = 1$  м, поперечное сечение квадратное со стороной  $H = 0,1$  м. Жесткость пружины составляет  $k = 100$  кН/м, величина ее начального сжатия  $\Delta = 1$  м. Сила, прикладываемая на этапе нагрева, равна  $P_1 = 100$  кН, а температура ее приложения  $T_1 = 57$  °С.

Поскольку один из рассмотренных методов решения – конструкционный – не позволяет решать задачу в связанной постановке, то есть учитывать сдвиг характерных температур превращений от действия напряжений, то для того, чтобы можно было сопоставить результаты, все три метода решения были реализованы в несвязанной постановке. Задача решалась с использованием предположения о плоском напряженном состоянии, для реализации метода конечных элементов был выбран плоский симплекс-элемент с линейной аппроксимацией перемещений. При реализации конструкционного метода расчета в качестве конструкционных диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости в данной задаче удобно принять зависимость фазово-структурной составляющей прогиба (вертикального перемещения конца консоли) от прикладываемой силы в условиях прямого фазового перехода и структурного превращения соответственно. За неимением соответствующих экспериментальных данных эти диаграммы были получены численно методом конечных элементов с использованием трехмерных определяющих соотношений (5), куда входит материальная диаграмма  $F_1$ . Результат представлен на рис.3: звездочки соответствуют диаграмме  $F_1^k$ , кружки – диаграмме  $F_2^k$ , сплошная и пунктирная линии – их аппроксимации соотношением (7) с параметрами  $P_0 = 80,45$  кН,  $w_{phst}^{\max} = 0,51$  м для диаграммы  $F_1^k$  и  $P_0 = 75,13$  кН,  $w_{phst}^{\max} = 0,52$  м для диаграммы  $F_2^k$ . Из введенного предположения о равенстве диаграмм  $F_1$  и  $F_2$  следует, что соответствующие конструкционные диаграммы также должны быть равны. Это подтверждается выполненным расчетом: приведенные на рис.3 диаграммы  $F_1^k$  и  $F_2^k$  различаются незначительно. Далее будем полагать, что они совпадают, и использовать для расчетов осредненные параметры аппроксимации  $P_0 = 77,8$  кН и  $w_{phst}^{\max} = 0,51$  м.

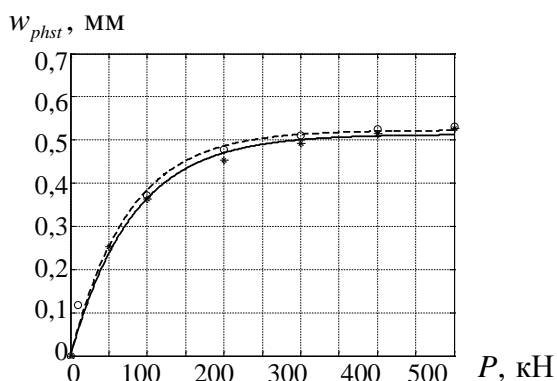


Рис.3. Конструкционные диаграммы прямого превращения и мартенситной неупругости для изгибающейся консольной балки.

Упругая составляющая прогиба  $w_e$  в конструкционном методе вычисляется по формуле сопротивления материалов [28]

$$w_e = \frac{PL^3}{3EI},$$

где  $P$  – приложенная на конце консоли сила,  $I$  – момент инерции поперечного сечения, равный  $H^4/12$ .

Результаты расчета задачи, выполненного тремя методами, приведены на рис.4а – изменение прогиба балки в зависимости от температуры, на рис.4б представлено также изменение реактивного усилия пружины при охлаждении. Сплошной линией обозначены результаты, полученные методом конечных элементов, пунктирной – методом послойного расчета, точками – конструкционным методом. Монотонное уменьшение прогиба при возрастании температуры соответствует нагреву в свободном состоянии, скачкообразное его возрастание – приложению нагрузки  $P_1$  при температуре  $T_1 = 57^\circ\text{C}$ . Степень дискретизации расчетной области во всех трех методах (величина шага по температуре, характерный размер элемента в методе конечных элементов, количество слоев и число разбиений по длине балки в методе послойного расчета) выбиралась оптимальной из условия обеспечения требуемой точности расчета, была исследована практическая сходимость решений. В методах конечных элементов и послойного расчета величина шага по температуре не оказывает существенного влияния на результат, поэтому она была выбрана  $1^\circ\text{C}$ . Однако конструкционный метод демонстрирует чувствительность к шагу по температуре, и для данного метода он был задан  $0,125^\circ\text{C}$ . В методе конечных элементов выбиралось 24 слоя элементов по толщине балки, чему соответствует общее число элементов  $N_{el} = 2880$ . Поскольку в задаче реализуется плоское напряженное состояние, то тензор управляющего напряжения содержит три независимые компоненты, которые необходимо "запоминать" для каждого мартенситного элемента. Для метода послойного расчета было задано число слоев  $N_{layer} = 12$  и число разбиений по длине балки  $N_L = 10$ . Дискретизация по объемной доле мартенсита во всех трех методах задавалась одинаковой: число расчетных мартенситных элементов  $N_q = 1000$ .

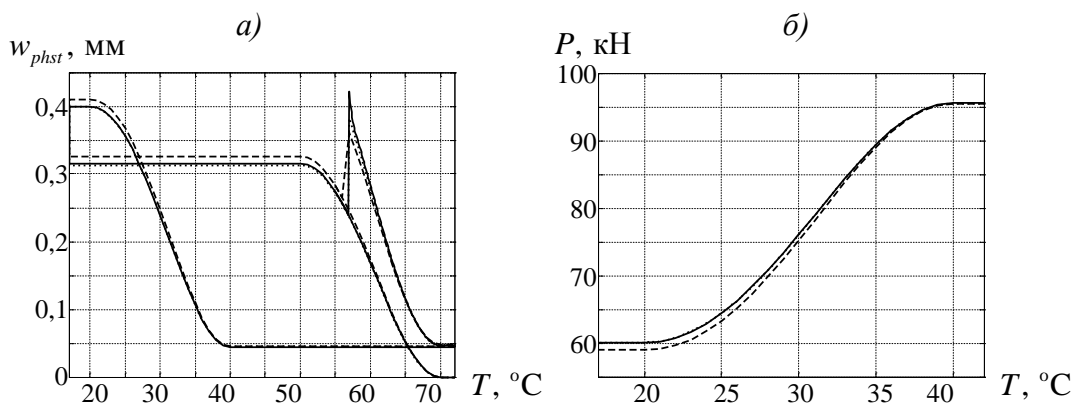


Рис.4. Зависимости прогиба балки (а) и силы противодействия пружины (б) от температуры.

Как видно из рис.4, результаты расчетов по всем трем методам достаточно близки: конструкционный метод и метод конечных элементов дают практически совпадающие результаты; результат, полученный методом послойного расчета, отклоняется на небольшую величину. Однако не все методы одинаково эффективны: как видно из табл.1, самым затратным с вычислительной точки зрения является метод конечных элементов. Ему соответствует наибольшее время расчета и наибольший размер массива данных, которые необходимо сохранять в памяти на протяжении всего расчета. Самым экономичным является конструкционный метод; метод послойного расчета занимает промежуточное положение. С другой стороны, метод конечных элементов, реализующий трехмерные определяющие соотношения (5), является наиболее универсальным из рассмотренных, поскольку позволяет рассчитать конструкцию произвольной формы при любых условиях термосилового воздействия. Конструкционный метод менее универсален, так как имеет ограничения, перечисленные в разделе 3. Наименее универсальным является метод послойного расчета, так как он нацелен только на расчет балок и пластин в условиях изгиба.

Таблица 1.

Метод расчета	Объем массива управляющих силовых характеристик	Время расчета, с
Метод конечных элементов	$1000 \cdot 2880 \cdot 3 = 8640000$	3740
Метод послойного расчета	$1000 \cdot (12 \cdot 10) \cdot 1 = 120000$	62
Конструкционный метод	$1000 \cdot 1 = 1000$	0,34

В рассмотренной задаче материал претерпевает прямой фазовый переход под действием изменяющегося напряжения, в связи с этим возникающие мартенситные элементы имеют разные управляющие силовые параметры. Такой процесс называется неоднородным фазовым деформированием. Возможность описывать такие процессы с помощью модели (1) в случае одноосного напряженного состояния была продемонстрирована в [6]; изложенные в настоящей работе расчетные методы, основанные на этой модели, позволяют решать подобные задачи и для сложного напряженного состояния.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены три метода расчета НДС изгибающейся балки из сплава с памятью формы. Все три метода основываются на определяющем соотношении (1) модели [6]: в методе конечных элементов используется обобщение этого соотношения на трехмерный случай, в конструкционном методе – на кинематический и силовой параметры конструкции, а в методе послойного расчета это соотношение используется непосредственно для расчета НДС каждого слоя, находящегося в условиях одноосного растяжения/сжатия. Для сопоставления трех методов решена задача об изгибе консольной балки, условия нагружения которой подобраны таким образом, что в процессе охлаждения и последующего нагрева реализуются случаи неоднородного фазового деформирования и структурного превращения. Показано, что результаты расчетов, полученные разными методами, близки; дана оценка вычислительной эффективности каждого метода.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Оцука К., Симидзу К., Судзуки Ю. *Сплавы с эффектом памяти формы*. – Под ред. Х. Фикакубо. Пер. с яп. – М.: Металлургия, 1990. – 221 с.
2. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Издательство ЛГУ, 1987. – 216 с.
3. Беляев С.П. и др. *Материалы с эффектом памяти формы*. – Справ.изд. – Под ред. Лихачева В.А. – Т.1. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – 424 с.
4. *Эффект памяти формы в сплавах*. – Под ред. Займовского В.А. Пер. с англ. – М.: Металлургия, 1979. – 469 с.
5. Тихомирова К.А. *Экспериментальное и теоретическое исследование взаимосвязи фазовой и структурной деформаций в сплавах с памятью формы* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – №1. – С.40-57.
6. Тихомирова К.А. *Феноменологическое моделирование фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы. Одномерный случай* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т.11. – №1. – С.36-50.
7. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2016. – Vol.76. – Pp.244-284.
8. Auricchio F. et al. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation* // International Journal of Plasticity. – 2014. – Vol.59. – Pp.30-54.
9. Chemisky Y. et al. *Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation* // Mechanics of Materials. – 2011. – Vol.43. – No.7. – Pp.361-376.
10. Manchiraju S., Anderson P.M. *Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model* // International Journal of Plasticity. – 2010. – Vol.26. – No.10. – Pp.1508-1526.
11. Волков А.Е. и др. *Математическое моделирование мартенситной неупругости и эффектов памяти формы* // Журнал технической физики. – 1996. – Т.66. – №11. – С.3-35.
12. Yu C. et al. *A micromechanical constitutive model based on crystal plasticity for thermo-mechanical cyclic deformation of NiTi shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2013. – Vol.44. – Pp.161-191.
13. Шишкин С.В., Махутов Н.А. *Расчет и проектирование силовых конструкций на сплавах с эффектом памяти формы*. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 412 с.
14. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-89.
15. Mirzaeifar R. et al. *On superelastic bending of shape memory alloy beams* // International Journal of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50. – No.10. – Pp.1664-1680.
16. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-203.

17. Ганыш С.М., Гаврюшин С.С. *Простейшая математическая модель пространственного стержня, выполненного из сплава с эффектом памяти формы* // Инженерный вестник. – 2014. – №10. – С.69-82.
18. Гаврюшин С.С., Ганыш С.М. *Численное моделирование процессов деформирования элемента в форме винтовой цилиндрической пружины, выполненного из материала с эффектом памяти формы* // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2012. – №8. – С.15-20.
19. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
20. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
21. Казарина С.А., Мовчан А.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное исследование взаимодействия фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.85-98.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Эффект перекрестного упрочнения сплава с памятью формы при сжатии* // Деформация и разрушение материалов. – 2019. – №4. – С.2-9.
23. Мишустин И.В. *Модель деформирования сплава с памятью формы с учетом разносопротивляемости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №4. – С.484-498.
24. Raniecki B., Tanaka K., Ziólkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state – Selected Results of Polish-Japanese Research Cooperation* // Material Science Research International, Special Technical Publication. – 2001. – Vol.2. – Pp.327-334.
25. Bouvet C., Calloch S., Lexcellent C. *Mechanical behavior of a Cu-Al-Be shape memory alloy under multiaxial proportional and nonproportional loadings* // Journal of Engineering Materials and Technology. – 2002. – Vol.124. – No.2. – Pp.112-124.
26. Мовчан А.А. и др. *Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы – микромеханика, феноменология, термодинамика* // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2010. – Т.152. – №4. – С.180-194.
27. Мовчан А.А., Чжо Т.Я. *Решение связанной термоэлектромеханической задачи для стержня из сплава с памятью формы в рамках теории нелинейного деформирования этих материалов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №3. – С.443-460.
28. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. *Справочник по сопротивлению материалов*. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.
29. Роговой А.А., Столбова О.С. *Моделирование упруго-неупругих процессов при конечных деформациях в сплавах с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т.54. – №2. – С.148-162.

## REFERENCES

1. Otsuka K., Shimizu K., Suzuki Y. *Splavy s efektompamiatiformy [Alloys with shape memory effect]*. Moscow, Metallurgiya, 1990, 221 p.
2. Lihachev V.A., Kuz'min S.L., Kamenceva Z.P. *Effekt-pamiatiformy [Shape memory effect]*. Saint Petersburg, Izdatel'stvo LGU, 1987, 216 p.
3. Beliaev S.P. et al. *Materialy s efektompamiatiformy [Materials with shape memory effect]*. Spravochnoe izdanie, Saint Petersburg, Izdatel'stvo NIIKh SPbGU, 1998, Vol.1, 424 p.
4. *Shape Memory Effects in Alloys*. – Ed. by J. Perkins. New York, Springer US, 1975, 469 p.
5. Tikhomirova K.A. *Eksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie vzaimosvyazi fazovoy i strukturnoy deformacij v splavah s pamyat'yu formy [Experimental and theoretical study of the relationship between phase and structural deformations in shape memory alloys]*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2018, No.1, Pp.40-57.
6. Tikhomirova K.A. *Fenomenologicheskoe modelirovanie fazovyh i strukturnyh deformacij v splavah s pamyat'yu formy. Odnomernyj sluchaj [Phenomenological modeling of phase and structural deformations in shape memory alloys: one-dimensional case]*. Computational Continuum Mechanics, 2018, Vol.11, No.1, Pp.36-50.
7. Cisse C., Zaki W., Zineb T.B. *A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2016, Vol.76, Pp.244-284.
8. Auricchio F. et al. *Theoretical and numerical modeling of shape memory alloys accounting for multiple phase transformations and martensite reorientation*. International Journal of Plasticity, 2014, Vol.59, Pp.30-54.
9. Chemisky Y. et al. *Constitutive model for shape memory alloys including phase transformation, martensitic reorientation and twins accommodation*. Mechanics of Materials, 2011, Vol.43, No.7, Pp.361-376.
10. Manchiraju S., Anderson P.M. *Coupling between martensitic phase transformations and plasticity: a microstructure-based finite element model*. International Journal of Plasticity, 2010, Vol.26, No.10, Pp.1508-1526.
11. Volkov A.E. et al. *Mathematical modeling of martensitic inelasticity and shape memory effect*. Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics, 1996, Vol.41, No.11, Pp.1084-1101.
12. Yu C. et al. *A micromechanical constitutive model based on crystal plasticity for thermo-mechanical cyclic deformation of NiTi shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2013, Vol.44, Pp.161-191.
13. Shishkin S.V., Makhutov N.A. *Raschet i proektirovanie silovyh konstrukcij na splavah s efektom pamyati formy [Calculation and design of power structures on alloys with shape memory effect]*. M.-Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», 2007, 412 p.
14. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashchenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugih deformacij i raznosoprotivlyaemosti etih splavov [Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]*. Mekhanikakompozitsionnykhmaterialovikonstruktsii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-89.

15. Mirzaeifar R. et al. *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. International Journal of Solids and Structures, 2013, Vol.50, No.10, Pp.1664-1680.
16. Safronov P.A. *Cilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti etogo materiala [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of cylindrical bend of the plate from shape memory alloy]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-203.
17. Ganysh S.M., Gavryushin S.S. *Prostejshaya matematicheskaya model' prostranstvennogo sterzhnya, vpolnennogo iz splava s efektom pamyati formy [The simplest mathematical model of a SMA spatial bar]*. Inzhenernyjvestnik, 2014, No.10, Pp.69-82.
18. Gavryushin S.S., Ganysh S.M. *Chislennoe modelirovanie processov deformirovaniya elementa v forme vintovoj cilindricheskoj pruzhiny, vpolnennogo iz materiala s efektom pamyati formy [Numerical simulation of deformation process for the shape memory alloy screw cylindrical spring element]*. Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie. 2012, No.8, Pp.15-20.
19. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
20. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.72-94.
21. Kazarina S.A., Movchan A.A., Sil'chenko A.L. *Eksperimental'noe issledovanie vzaimodeistviya fazovykh i strukturnykh deformatsii v splavakh s pamiat'iu formy [Experimental investigation the interaction between phase and structure deformations in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.85-98.
22. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Effekt perekrestnogo uprochneniya splava s pamyat'yu formy pri szhatii [Effect of cross-hardening in shape memory alloy under compression]*. Deformatsiia i razrushenie materialov, 2019, No.4, Pp.2-9.
23. Mishustin I.V. *Model' deformirovaniya splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti [Model of shape memory alloy deformation with resistance asymmetry]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, Vol.23, No.4, Pp.484-498.
24. Raniecki B., Tanaka K., Ziółkowski A. *Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state – Selected Results of Polish-Japanese Research Cooperation // Material Science Research International, Special Technical Publication. 2001, Vol.2, Pp.327-334.*
25. Bouvet C., Calloch S., Lexcellent C. *Mechanical behavior of a Cu-Al-Be shape memory alloy under multiaxial proportional and nonproportional loadings // Journal of Engineering Materials and Technology. 2002, Vol.124, No.2, Pp.112-124.*
26. Movchan A.A. et al. *Opredel'aiushchie sootnosheniia dlia splavov s pamiat'iu formy – mikromekhanika, fenomenologiya, termodinamika [Shape memory alloys constitutive relations – micromechanics, phenomenology, thermodynamics]*. Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 2010, Vol.152, No.4, Pp.180-193.

27. Movchan A.A., Kyaw Thu Ya. *Reshenie svjaznoj termojelektromehaničeskoj zadachi dlja sterzhnja iz splava s pamjat'ju formy v ramkah teorii nelinejnogo deformirovanija jetih materialov [Solution of the coupled thermoelectromechanics problem for the beam from shape memory alloys in the framework of the non-linear theory of deformation of these materials].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2008, Vol.14, No.3, Pp.443-460.
28. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveev V.V. *Spravočnik po soprotivleniyu materialov [Material Resistance Reference].* Kiev. Naukova dumka, 1988, 736 p.
29. Rogovoi A.A., Stolbova O.S. *Modeling elastic-inelastic processes in shape memory alloys at finite deformations.* Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2013, No.54(2), Pp.295-307.

Поступила в редакцию 28 октября 2019 года.

---

Сведения об авторе:

Ксения Алексеевна Тихомирова – к.ф.-м.н., н.с., Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [tikhomirova.k@icmm.ru](mailto:tikhomirova.k@icmm.ru)