

УДК 539.3

DOI 10.33113/mkmk.ras.2019.25.04.595_613.10

О ПРИМЕНЕНИИ РАЗЛИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН $N^{\text{го}}$ ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ О ДИСПЕРСИИ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В УПРУГОМ СЛОЕ*

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассмотрена задача о дисперсии нормальных волн в плоском упругом слое. Построено приближенное решение, основанное на различных вариантах трехмерной теории пластин $N^{\text{го}}$ порядка. Модель пластины базируется на Лагранжевом формализме аналитической динамики континуальных систем со связями и задана конфигурационным пространством со множеством переменных поля, плотностью функционала Лагранжа и уравнениями связей, следующими из краевых условий, перенесенных с лицевых на базовую плоскость. Приведенная общая вариационная формулировка расширенной теории неоднородных анизотропных пластин, обеспечивающей точное удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях, является ковариантной и допускает применение различных типов базисных функций, в том числе ортогональных полиномов и финитных функций формы, соответствующих конечно-элементной дискретизации пластины по толщине. Методом множителей Лагранжа получены уравнения движения трансверсально-неоднородной изотропной пластины, и рассмотрен вариант уравнений с исключенными множителями, аналогичных уравнениям Воронца в аналитической динамике дискретных систем со связями. Показано, что дисперсионная задача в случае расширенной теории пластин сводится к сингулярной обобщенной проблеме собственных значений. Вычислены частоты запирающих распространяющихся мод нормальных волн, проведен сравнительный анализ решений на базе расширенной и элементарной теории пластин, пренебрегающей связями, и показано, что учет связей приводит к снижению эффектов запирающих мод. Проведен сравнительный анализ решения на основе элементарной теории пластин с использованием в качестве базиса полиномов Лежандра, и решения, основанного на кусочно-линейных базисных функциях, соответствующего методу спектральных элементов, и показано, что метод ортогональных полиномов обеспечивает ускоренную сходимость к точному решению по сравнению с методом спектральных элементов.

Ключевые слова: пластины; теории высшего порядка; формализм Лагранжев; волны нормальные; частоты фазовые; моды распространяющиеся; сходимость

ON THE USE OF VARIOUS EQUATIONS OF THE N^{TH} ORDER PLATE THEORY IN PROBLEMS OF NORMAL WAVE DISPERSION IN AN ELASTIC LAYER

Zhavoronok Sergey I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Работа выполнена в рамках Государственного задания ИПРИМ РАН (номер гос. регистрации темы АААА-А19-119012290118-3) при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №19-01-00695-а)

ABSTRACT

The dispersion of normal waves in a plane elastic layer is considered. The approximate solution of this problem is obtained on the background of various formulations of the quasi-3D plate theory of N^{th} order. The plate model is based on the Lagrangian formalism of analytical dynamics of constrained continuum systems; it is defined within the configuration space with the set of field variables, the density of Lagrangian, and the constraint equations following from the boundary conditions shifted from the faces onto the base plane. The general variational formulation of the extended theory of heterogeneous anisotropic plates allows one to satisfy the boundary conditions exactly, at the same time it is covariant and allows one to use different base functions such as orthogonal polynomials or finite functions corresponding to the finite element discretization of a plate across its thickness. The equations of dynamics for an isotropic transversally heterogeneous plate are derived by the Lagrange multiplier method, and the dynamic equation with eliminated multipliers are considered; these equations are analogous to the Voronets equations in the analytical dynamics of constrained discrete systems. It is shown that the dispersion problem based on the extended plate theory leads to a singular generalized eigenvalue problem. The locking frequencies for propagating modes are computed, and the solutions based on the extended plate theory and the constraint-free one are computed; it is shown that accounting for the constraints allows one to reduce the locking effect. The solutions given by the elementary theory based on the Legendre polynomials and on the piecewise linear finite element basis (e. g. the spectral element solution) are compared; it is shown that the solution based on the orthogonal polynomials leads to faster convergence to the exact solution of Rayleigh-Lamb as compared with the spectral element solution using linear shape functions.

Ключевые слова: plates, higher-order theories, Lagrangian formalism, normal waves, phase frequencies, propagating modes, convergence

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи о распространении нормальных волн в неоднородном тонком теле является основой для построения методов неразрушающего контроля состояния тонкостенных конструктивных элементов и апостериорного определения физических констант неоднородного, в том числе функционально-градиентного, материала [1-7]. Существуют различные методы приближенного решения дисперсионной задачи: суперпозиция объемных волн [8,9], матричные методы [9,10]. В ряде случаев эффективен асимптотический подход [11,12] – основной инструмент качественного анализа динамики тонкостенных систем.

Для решения задач о дисперсии волн в трансверсально-неоднородных волноводах сложной формы развиваются методы, основанные на приближении волновода некоторой эквивалентной системой с конечным числом степеней свободы (понятие о модели оболочки как континуально-дискретной системы введено в работе [13]). Для дискретизации волновода в плоскости, ортогональной направлению распространения волны, используются метод степенных рядов, применяемый для описания дисперсионных свойств функционально-градиентных пластин [14] и трансверсально-изотропных градиентных цилиндрических волноводов [15-17], и метод тонких слоев [18].

Полуаналитический метод конечных элементов [19,20], или метод спектральных элементов [21,22] основан на конечно-элементной дискретизации тонкостенного волновода по толщине. Ускоренной сходимости метода спектральных элементов удастся достичь путем применения функций формы высшего порядка – интерполяционных полиномов Лагранжа-Чебышева [23,24].

Заметим, что данный прием идентичен методу пространственной редукции трехмерной задачи, положенному в основу семейства теорий оболочек высшего порядка [25], в том числе слоистых [26] и функционально-градиентных оболочек [27], основанному на применении полиномов Лагранжа. Точность метода спектральных элементов детально изучена в [28-30]. Интерполяционный полином Лагранжа используется также в работе [31].

Альтернативным подходом к решению дисперсионных задач для трансверсально-неоднородных упругих волноводов является представление решения обобщенным рядом Фурье по некоторой ортогональной базисной системе. Как и в случае спектрально-элементной дискретизации, волновод моделируется системой с конечным числом степеней свободы [13], соответствующих базисным функциям, и дисперсионная задача приводится к проблеме собственных значений. Для плоских пластин, включая слоистые, и для цилиндрических радиально-градиентных волноводов в качестве базиса используются полиномы Лежандра [4,32]. Метод ортогональных полиномов допускает распространение на слоистые волноводы с сильным различием материальных констант слоев [33] или на вязкоупругие анизотропные композиционные волноводы (см., например, [34]). Данный метод также лежит в основе теорий оболочек высшего порядка [35-37].

Метод ортогональных полиномов и полуаналитический метод конечных элементов в теории тонкостенных волноводов могут быть представлены как частные случаи общей трехмерной теории оболочек высшего порядка [38-41], опирающейся на пространственную редукцию трехмерной задачи и Лагранжев вариационный формализм механики континуальных систем. Применение биортогональных базисных систем [40,41] обеспечивает традиционное полиномиальное [35-37,42,43] и конечно-элементное определение степеней свободы двумерной модели оболочки как континуально-дискретной системы [13], определенной на двумерном многообразии множеством переменных поля, поверхностной и контурной плотностями функционала Лагранжа [39,40], и уравнениями связей, вытекающих из краевых условий, переносимых с лицевых на базовую поверхность оболочки [41]. Учет связей обеспечивает точное удовлетворение краевым условиям задачи при любом порядке теории. Сходимость приближенных решений, доставляемых теорией оболочек $N^{\text{го}}$ порядка для статических задач показана в [44,45]; в работе [46] рассмотрена задача нестационарной динамики оболочки. Сходимость решения задачи о дисперсии нормальных волн в плоском волноводе к решению Рэлея-Лэмба при применении в качестве базиса полиномов Лежандра проведена в работе [47] по частотам запираания, в [48] – по фазовым частотам при ненулевых значениях волновых чисел, в [49] – по формам нормальных мод, а в работах [50,51] – по дисперсионной кривой второй продольной моды в слое в диапазоне отрицательных групповых скоростей. Решение на базе конечно-элементного варианта теории $N^{\text{го}}$ порядка получено в работе [52]. Сходимость решения на базе расширенной теории оболочек для однородного упругого слоя показана в [53,54]. Ниже проведен сравнительный анализ сходимости приближенного решения задачи Рэлея-Лэмба на основе элементарной и расширенной теорий пластин $N^{\text{го}}$ порядка, а также сходимости решений, полученных с использованием полиномов Лежандра и кусочно-линейных функций в качестве базисной системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НА БАЗЕ РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН N-ГО ПОРЯДКА

1.1. Начально-краевая задача расширенной теории N-го порядка.

Моделью пластины $\mathbb{R}^3 \supset V$ с базисной плоскостью S_0 , $\partial S_0 \equiv \Gamma = S_0 \cap \partial V$ является Лагранжева континуальная система [41], определенная на множестве $(\mathbb{R}^2 \supseteq S_0) \times (\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ конфигурационным пространством $\Omega_N = \{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k=0..N}$ с переменными поля $\mathbf{u}^{(k)}$, поверхностной плотностью функционала Лагранжа $L_S(u_i^{(k)}, \dot{u}_i^{(k)}, \nabla_\alpha u_i^{(k)})$, контурной плотностью $L_\Gamma(u_i^{(k)})$ (1.1) и связями (1.3)

$$\begin{aligned} L_S(u_i^{(k)}, \dot{u}_i^{(k)}, \nabla_\alpha u_i^{(k)}) = & \frac{1}{2} \rho_{(k)}^{(m)} \dot{u}_i^{(k)} \dot{u}_i^{(k)} - \frac{1}{2h} \left(C_{(km)}^{i3j\gamma} \nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{i3j} u_j^{(m)} \right) D_{(n)}^{(k)} u_i^{(n)} - \\ & - \frac{1}{2} \left(C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{\alpha\beta j} u_j^{(m)} \right) \nabla_\beta u_\alpha^{(k)} - \frac{1}{2} \left(C_{(km)}^{3\beta j\gamma} \nabla_\gamma u_j^{(m)} + C_{(km)}^{3\beta j} u_j^{(m)} \right) \nabla_\beta u_3^{(k)} + \\ & + F_{(k)}^i u_i^{(k)}; \quad L_\Gamma(u_i^{(k)}) = q_{B(k)}^i u_i^{(k)}, \quad i, j = 1 \dots 3, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, k, m, n = 0 \dots N, \end{aligned} \quad (1.1)$$

Переменные поля заданы коэффициентами разложения вектора перемещения $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi^\alpha, \zeta)$ [40,41,55] по биортогональной системе $\mathbf{p}_{(k)}(\zeta)$, $\mathbf{p}^{(k)}(\zeta)$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k)}(M, t) = & u_\alpha^{(k)}(\xi^1, \xi^2, t) \mathbf{r}^\alpha + u_3^{(k)}(\xi^1, \xi^2, \zeta) \mathbf{n} \\ u_\alpha^{(k)} = & (u_\alpha, \mathbf{p}^{(k)})_1, \quad u_3^{(k)} = (u_3, \mathbf{p}^{(k)})_1; \quad u_\alpha^{(k)} = (u^\alpha, \mathbf{p}_{(k)})_1, \quad u_3^{(k)} = (u^3, \mathbf{p}_{(k)})_1 \\ (\mathbf{p}_{(k)}, \mathbf{p}^{(m)})_1 = & \int_{-1}^1 \mathbf{p}_{(k)}(\zeta) \mathbf{p}^{(m)}(\zeta) d\zeta = \delta_{(k)}^{(m)}, \quad G_{(km)} = (\mathbf{p}_{(k)}, \mathbf{p}_{(m)})_1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2$ – криволинейные координаты на S_0 [40], $\zeta \in [-1, 1]$ – безразмерная нормальная координата [40,41], t – временная переменная. Здесь и далее используются обозначения линейных операторов, введенные в работах [39-41]

$$\begin{aligned} D_{(n)}^{(k)} = & (d\mathbf{p}_{(n)}/d\zeta, \mathbf{p}^{(k)})_1; \quad \rho_{(k)}^{(m)} = (\rho \mathbf{p}^{(m)}, \mathbf{p}_{(k)})_1; \quad C_{(km)}^{ijpq} = (C^{ijpq} \mathbf{p}_{(k)}, \mathbf{p}_{(m)})_1; \\ C_{(km)}^{\alpha i \delta} = & h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{\alpha 3 i \delta}; \quad C_{(km)}^{3 i \delta} = h^{-1} D_{(k)}^{(n)} C_{(nm)}^{3 3 i \delta}; \end{aligned}$$

C^{ijkl} – контравариантные компоненты тензора упругих постоянных. Силовые краевые условия, перенесенные на базисную поверхность пластины S_0 с ее лицевых поверхностей $S_\pm: \zeta = \pm 1$, образуют уравнения неголономных связей [41]

$$\left(C_{(km)}^{i3j\delta} \nabla_\delta u_j^{(k)} + C_{(km)}^{i3j3} D_{(m)}^{(k)} u_j^{(m)} \right) \mathbf{p}_\pm^{(m)} \pm \bar{q}_\pm^i = 0, \quad \mathbf{p}_\pm^{(m)} = \mathbf{p}^{(m)}(\pm 1). \quad (1.3)$$

Моменты главного вектора внешних сил заданы соотношениями

$$F_{(k)}^i = (\rho F^i, \mathbf{p}_{(k)})_1, \quad q_{B(k)}^i = \left(q^i \Big|_{M \in S_B}, \mathbf{p}_{(k)} \right)_1. \quad (1.4)$$

Уравнения движения пластины являются следствием принципа Гамильтона

$$\delta \mathbf{H} \equiv \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{S_0} L_S(u_i^{(k)}, \dot{u}_i^{(k)}, \nabla_\alpha u_i^{(k)}) dS_0 + \int_\Gamma L_\Gamma(u_i^{(k)}) d\Gamma \right\} = 0$$

и представляют собой обобщенные уравнения Лагранжа второго рода [41].

1.2. Уравнения движения трансверсально-неоднородной пластины.

Для трансверсально-неоднородного изотропного материала, образованного двумя структурными составляющими с модулями упругости E_1, E_2 и плотностями ρ_1, ρ_2 с распределением, заданным функцией $q(\zeta)$ [55], физические постоянные модели пластины N^{Γ^0} порядка определяются соотношениями [52,55]

$$\begin{aligned} C_{(km)}^{\alpha\beta\gamma\delta} &= \lambda_{(km)} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + \mu_{(km)} (a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma}); \quad C_{(km)}^{3333} = \lambda_{(km)} + 2\mu_{(km)}; \\ C_{(km)}^{\alpha 3\beta 3} &= \mu_{(km)} a^{\alpha\beta}; \quad C_{(km)}^{\alpha\beta 33} = \lambda_{(km)} a^{\alpha\beta}; \quad \lambda_{(km)} = \nu(1-2\nu)^{-1} (1+\nu)^{-1} E_{(km)}; \\ \mu_{(km)} &= (2+2\nu)^{-1} E_{(km)}; \quad E_{(km)} = E_1 h V_{(km)}; \quad \rho_{(km)} = \rho_1 h R_{(km)}; \\ V_{(km)} &= \tilde{E} G_{(km)} + \Delta \tilde{E} Q_{(km)}; \quad R_{(km)} = \tilde{\rho} G_{(km)} + \Delta \tilde{\rho} Q_{(km)}; \quad \tilde{E} = E_1^{-1} E_2, \\ \Delta \tilde{E} &= 1 - \tilde{E}, \quad \tilde{\rho} = \rho_1^{-1} \rho_2, \quad \Delta \tilde{\rho} = 1 - \tilde{\rho}; \quad Q_{(mn)} = (q(\zeta) p_{(k)}, p_{(m)})_1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Рассмотрим задачу о распространении волн в плоском трансверсально-неоднородном слое, отнесенном к декартовой системе координат $Ox^1 x^2 x^3$, в плоскости $Ox^1 x^2$. Введем безразмерные переменные [49, 55]: $\xi = x_1 h^{-1}$; $\tau = t c_2 h^{-1}$; $\tilde{u}_\alpha^{(k)} = u_\alpha^{(k)} h^{-1}$; $c_2 = \sqrt{\mu_1 / \rho_1}$. При $q_\pm^i = 0$, $F_{(k)}^i = 0$ безразмерные уравнения движения слоя, соответствующие расширенной теории N^{Γ^0} порядка [41], имеют вид

$$\begin{aligned} R_{(km)} \partial_\tau^2 u_1^{(m)} &= \beta^{-2} V_{(km)} \partial_\xi^2 u_1^{(m)} - D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(ns)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(s)} u_1^{(m)} - \\ &- \left[D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(nm)} - (\beta^{-2} - 2) V_{(kn)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} \right] \partial_\xi u_2^{(m)} + V_{(km)} p_\pm^{(m)} \left[\lambda_1^\pm + (\beta^{-2} - 2) \partial_\xi \lambda_3^\pm \right]; \\ R_{(km)} \partial_\tau^2 u_2^{(m)} &= V_{(km)} \partial_\xi^2 u_2^{(m)} + \beta^{-2} D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(ns)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(s)} u_2^{(m)} - \\ &- \left[(\beta^{-2} - 2) D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(nm)} - V_{(kn)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} \right] \partial_\xi u_1^{(m)} + V_{(km)} p_\pm^{(m)} \left[\partial_\xi \lambda_1^\pm + \beta^{-2} \lambda_3^\pm \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения движения содержат множители Лагранжа $\lambda_1^\pm(\xi, \tau)$, $\lambda_3^\pm(\xi, \tau)$. Уравнения неголономных связей (1.3) с учетом (1.5) записываются в виде [55]

$$\begin{aligned} \left[(\beta^{-2} - 2) V_{(km)} \partial_\xi u_1^{(m)} + \beta^{-2} V_{(kn)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} u_3^{(m)} \right] p_\pm^{(k)} &= 0, \\ V_{(kn)} \left[\bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} u_1^{(m)} + \delta_{(m)}^{(n)} u_3^{(m)} \right] p_\pm^{(k)} &= 0, \quad p^{(k)} = G^{(kn)} p_{(m)}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь и далее $\beta^2 = (c_2 / c_1)^2$, $c_1 = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1) / \rho_1}$, $G^{(kn)} G_{(nm)} = \delta_{(m)}^{(k)}$.

1.3. Формулировка спектральной задачи.

Пусть вдоль оси Ox^1 распространяется нормальная волна [47,53,55]

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{U}^{(k)} \exp[i(\kappa \xi - \omega \tau)], \quad (1.8)$$

ω, κ – безразмерные фазовая частота и волновое число, $\mathbf{U}^{(k)}$ – вектор амплитуды. С учетом (1.8) уравнения движения (1.6) приводятся к следующему виду

$$\begin{aligned} \left(\left[\mathbf{A}(\kappa) \quad \mathbf{B}^T(\kappa) \right] - \omega^2 \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{V} &= 0; \quad \mathbf{V} = (\mathbf{U} \quad \mathbf{\Lambda})^T; \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_+ \quad \mathbf{B}_-); \\ \mathbf{U} &= (U_1^{(0)} \dots U_1^{(N)} \quad U_3^{(0)} \dots U_3^{(N)})^T; \quad \mathbf{\Lambda} = (\lambda_1^+ \quad \lambda_3^+ \quad \lambda_1^- \quad \lambda_3^-)^T; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa^2 \beta^{-2} V_{(km)} + D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(ns)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(s)} & i\kappa \left[D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(nm)} - (\beta^{-2} - 2) V_{(kn)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} \right] \\ i\kappa \left[(\beta^{-2} - 2) D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(nm)} - V_{(kn)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(n)} \right] & \kappa^2 V_{(km)} + \beta^{-2} D_{(k\cdot)}^{(n)} V_{(ns)} \bar{D}_{(m\cdot)}^{(s)} \end{pmatrix},$$

Уравнения неголономных связей (1.7), соответствующие крайевым условиям на поверхностях пластины $\zeta = \pm 1$, при учете (1.8) приводятся к уравнению [55]

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = 0; \quad (1.10)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} R_{(km)} & 0 \\ 0 & R_{(km)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\pm} = \begin{pmatrix} i\kappa (\beta^{-2} - 2) V_{(km)} \mathbf{p}_{\pm}^{(m)} & \beta^{-2} V_{(mn)} \bar{D}_{(k\cdot)}^{(n)} \mathbf{p}_{\pm}^{(m)} \mathbf{p}_{\pm}^{(m)} \\ V_{(mn)} \bar{D}_{(k\cdot)}^{(n)} \mathbf{p}_{\pm}^{(m)} & i\kappa V_{(km)} \mathbf{p}_{\pm}^{(m)} \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Пусть $\exists \{k'_1, k'_2, k'_3, k'_4\} \in [0, 2N + 1] \cap \mathbb{Z}$, такие, что

$$\begin{aligned} \exists \tilde{\mathbf{B}}_{4 \times 4} = \mathbf{B}_{4 \times \{k'\}} : \forall \kappa \geq 0 \quad |\tilde{\mathbf{B}}(\kappa)| \neq 0 &\Rightarrow \mathbf{\Lambda} = -[\tilde{\mathbf{B}}^T(\kappa)]^{-1} \cdot [\tilde{\mathbf{A}}(\kappa) - \omega^2 \tilde{\mathbf{P}}] \cdot \mathbf{U}, \\ \tilde{\mathbf{A}}_{4 \times (2N+2)} = \mathbf{A}_{\{k'\} \times (2N+2)}, \quad \tilde{\mathbf{P}}_{4 \times (2N+2)} = \mathbf{P}_{\{k'\} \times (2N+2)}. \end{aligned}$$

В этом случае система уравнений (1.9) - (1.11) приводится к виду

$$[\bar{\mathbf{A}}(\kappa) - \omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\kappa)] \mathbf{U} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.12)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{(2N-2) \times (2N+2)} = \mathbf{A}_{\{k''\} \times (2N+2)} - \mathbf{B}^T \cdot [\tilde{\mathbf{B}}^T(\kappa)]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\kappa),$$

$$\bar{\mathbf{P}}_{(2N-2) \times (2N+2)} = \mathbf{P}_{\{k''\} \times (2N+2)} - \mathbf{B}^T \cdot [\tilde{\mathbf{B}}^T(\kappa)]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{P}}, \quad \{k''\} \oplus \{k'\} = [0, 2N + 2] \cap \mathbb{Z}.$$

Система (1.12), образованная $2N - 2$ уравнениями движения с исключенными множителями Лагранжа λ_1^{\pm} , λ_3^{\pm} и 4 уравнениями связей (1.10), представляется аналогом уравнений движения Воронца [56]. Уравнения (1.12) порождают сингулярную обобщенную задачу собственных значений [57,58]

$$|\bar{\mathbf{A}}(\kappa) - \omega^2 \bar{\mathbf{P}}(\kappa)| = 0, \quad \bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{A}}^T \quad \mathbf{B}]^T, \quad \bar{\mathbf{P}} = [\bar{\mathbf{P}} \quad \mathbf{0}]. \quad (1.13)$$

В случае элементарной теории $N^{\text{го}}$ порядка при пренебрежении связями (1.7) задача сводится к обобщенной задаче собственных значений вида [47-50]

$$|\mathbf{A}(\kappa) - \omega^2 \mathbf{P}| = 0. \quad (1.14)$$

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ

2.1. Решения на основе элементарной и расширенной теорий.

Рассмотрим сходимость решения задачи о дисперсии волн в однородном слое ($q(\zeta) = 1$) на базе расширенной [53] и элементарной теорий пластин [47]. Значения безразмерных частот записания ω_n , следующих из (1.13) и (1.14) при использовании в качестве $p_{(k)}(\zeta)$ полиномов Лежандра аналогично [47-50], приведены в Таблице 1 (продольные моды) и Таблице 2 (изгибные моды). В качестве эталона использовано точное решение задачи Рэлея-Лэмба [59]. Решение [59] при $\kappa \rightarrow 0$ приводит к следующим форма для (2.1) и изгибных мод (2.2)

$$\begin{aligned} u_1^{n*} &= A_{11} \cos \pi m \zeta, \quad u_2 \equiv 0, \quad 2\pi^{-1} \omega = 2m, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \\ u_1 &= 0, \quad u_2^{n*} = A_{12} \sin 2^{-1} \pi (2m + 1) \zeta, \quad 2\pi^{-1} \omega = (2m + 1) \beta^{-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &\equiv 0, \quad u_2^{n*} = A_{21} \cos \pi m \zeta, \quad \omega = 2\beta^{-1}m, \quad m = 0, 2, \dots \\
 u_1^{n*} &= A_{22} \sin 2^{-1}\pi(2m+1)\zeta, \quad u_2 \equiv 0, \quad \omega = 2m+1, \quad m = 0, 1, 2, \dots,
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

A_{ij} – произвольные константы. Формы волн, соответствующие теории $N^{го}$ порядка, задаются соотношениями (2.3), U^m – собственные векторы (1.13) или (1.14)

$$\begin{aligned}
 u_\alpha^n(\zeta) &= U_\alpha^{kn} p_k(\zeta), \quad \alpha = 1, 2, \quad k = 0 \dots N, \quad n = 1 \dots N+1; \\
 U^m &= [U_1^{km} \quad U_2^{km}], \quad m \in [1, 2N+2] \cap \mathbb{Z},
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Таблица 1.

Сходимость решения по частотам записания продольных мод: элементарная (Э) и расширенная (Р) теории, ортогональные полиномы.

n \ N	2		3		4		5		6		7		8	
	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р
2	2.10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	2.10	1.89	2.47	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	1.91	1.91	2.47	1.98	7.91	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5	1.91	1.91	2.01	2.00	6.20	4.03	7.91	–	–	–	–	–	–	–
6	1.91	1.91	2.01	2.00	5.79	4.03	6.21	5.74	16.49	–	–	–	–	–
7	1.91	1.91	2.00	2.00	4.13	4.02	5.79	5.73	11.50	6.37	16.49	–	–	–
8	1.91	1.91	2.00	2.00	4.13	4.02	5.72	5.72	10.07	6.37	11.50	9.64	28.10	–
9	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.55	6.11	10.07	9.13	18.39	9.64
10	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.55	6.11	9.56	9.13	15.09	9.51
11	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.05	6.00	9.42	8.35	9.56	9.52
12	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.05	6.00	9.42	8.35	9.53	9.53
13	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.00	6.00	8.22	8.00	9.53	9.53
14	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.00	6.00	8.22	8.00	9.53	9.53
15	1.91	1.91	2.00	2.00	4.00	4.00	5.72	5.72	6.00	6.00	8.02	8.00	9.53	9.53
Ex.	1.91		2.00		4.00		5.72		6.00		8.00		9.53	

Таблица 2.

Сходимость решения по частотам записания изгибных мод: элементарная (Э) и расширенная (Р) теории, ортогональные полиномы.

n \ N	2		3		4		5		6		7		8	
	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р
2	1.10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	1.10	0.99	4.70	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	1.00	1.00	4.15	2.98	4.70	–	–	–	–	–	–	–	–	–
5	1.00	1.00	3.83	2.98	4.15	3.82	11.8	–	–	–	–	–	–	–
6	1.00	1.00	3.04	3.00	3.83	3.81	8.65	5.16	11.83	–	–	–	–	–
7	1.00	1.00	3.04	3.00	3.81	3.81	7.86	5.16	8.65	7.67	21.91	–	–	–
8	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.29	5.06	7.86	7.67	14.74	7.70	21.91	–
9	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.29	5.06	7.63	7.62	12.47	7.70	14.74	11.65

10	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.02	5.00	7.63	7.20	7.92	7.62	12.47	10.70
11	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.02	5.00	7.62	7.20	7.92	7.62	11.53	10.70
12	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.00	5.00	7.11	7.00	7.62	7.62	11.04	9.56
13	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.00	5.00	7.11	7.00	7.62	7.62	11.04	9.56
14	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.00	5.00	7.01	7.00	7.62	7.62	9.38	9.00
15	1.00	1.00	3.00	3.00	3.81	3.81	5.00	5.00	7.01	7.00	7.62	7.62	9.38	9.00
Ex.	1.00	3.00	3.81	5.00	7.00	7.62	9.0							

Относительная погрешность формы распространяющейся волны, полученная на базе теории N^{ro} порядка, определяется по норме (2.4) [49]

$$\Delta_n = \|u_\alpha^{n*}(\zeta)\|^{-1} \|u_\alpha^n(\zeta) - u_\alpha^{n*}(\zeta)\|, \quad \|u_\alpha^n(\zeta)\|^2 = (u_\alpha^n, u_\alpha^n)_1 = \int_{-1}^1 [u_\alpha^n(\zeta)]^2 d\zeta. \quad (2.4)$$

Относительные погрешности форм нормальных волн, вычисленные на основе расширенной [53] и элементарной [49] теорий N^{ro} порядка при использовании в качестве базиса $p_{(k)}(\zeta)$ полиномов Лежандра, приведены в Таблице 3 (формы продольных распространяющихся мод, соответствующие (2.1)) и в Таблице 4 (формы изгибных мод, соответствующие точному решению (2.2)).

Таблица 3.

Сходимость форм распространяющихся продольных мод по норме (2.4): элементарная (Э) и расширенная (Р) теории, ортогональные полиномы.

n \ N	2		3		4		5		6		7		8	
	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р
1	0.22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	0.01	0.01	0.43	0.40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0.00	0.00	0.04	0.03	1.08	1.03	1.37	1.36	—	—	—	—	—	—
7	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.22	0.21	1.28	1.26	—	—	—	—
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.01	0.45	0.42	1.22	1.21	—	—
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.13	0.10	0.01	0.01	1.35	1.30
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01	0.00	0.00	0.81	0.76
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.48	0.41
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.18	0.14
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.02
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Таблица 4.

Сходимость форм распространяющихся изгибных мод по норме (2.4): элементарная (Э) и расширенная (Р) теории, ортогональные полиномы.

n \ N	2		3		4		5		6		7		8	
	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р	Э	Р
1	0.21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	0.00	0.00	0.59	0.52	0.43	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0.00	0.00	0.12	0.11	0.04	0.03	0.79	0.70	—	—	—	—	—	—

7	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.00	0.34	0.31	—	—	—	—	—	—
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.06	1.41	1.41	1.20	1.19	1.23	1.21
11	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.21	0.19	0.00	0.00	0.74	0.71
13	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.04	0.02	0.00	0.00	0.38	0.36
15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.12	0.10
17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

2.2. Решения на основе базисных функций различного типа.

Ковариантная формулировка модели $N^{го}$ порядка пластины (1.1), (1.3) обеспечивает применение различных базисных систем. Ниже приводится сравнение сходимости решений, полученных при использовании полиномов Лежандра (рис.1а) [47-50] аналогично методу [4,32] или финитных базисных функций типа «разбиение единицы» [60] (рис.1б)

$$p_{(0)}(\zeta) = p_{(0,1)}(\zeta); \dots p_{(k)}(\zeta) = p_{(k,2)}(\zeta) + p_{(k+1,1)}(\zeta), \quad k = 1, 2 \dots N - 1;$$

$$\dots p_{(N)}(\zeta) = p_{(N,2)}(\zeta);$$

$$p_{(k,1)} = \begin{cases} (\zeta - \zeta_{k+1})\delta\zeta_k^{-1}, & \zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]; \\ 0, & \zeta \notin [\zeta_k, \zeta_{k+1}]; \end{cases} \quad p_{(k,2)} = \begin{cases} (\zeta - \zeta_k)\delta\zeta_k^{-1}, & \zeta \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]; \\ 0, & \zeta \notin [\zeta_k, \zeta_{k+1}]; \end{cases}$$

$$\delta\zeta_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k = \zeta_k = h_- + N^{-1}(h_+ - h_-), \quad k = 0, 1 \dots N + 1,$$

что в рамках задачи (1.8) соответствует концепции полуаналитического конечно-элементного метода [23,31], решения дисперсионной задачи (рис.1).

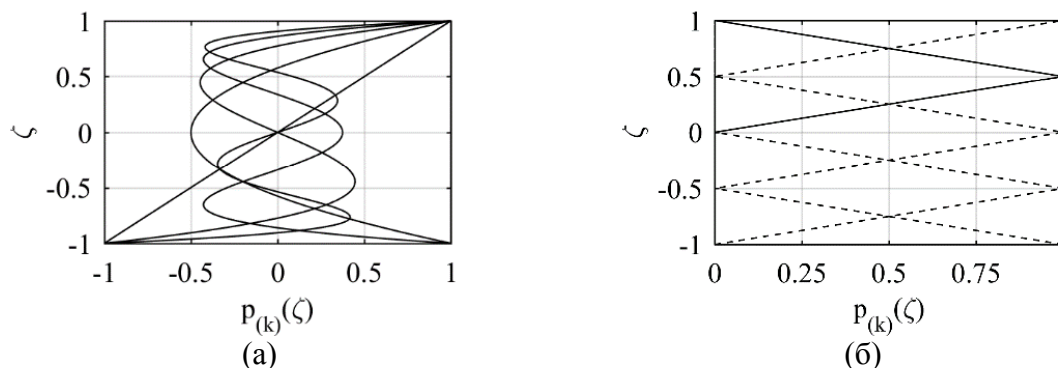


Рис.1. Базисные функции различного типа: ортогональные полиномы (а), финитные линейные функции (б).

Значения безразмерных частот запирания ω_n , полученные на базе (1.14) при использовании в качестве $p_{(k)}(\zeta)$ полиномов Лежандра (рис.1а) [47] и финитных линейных функций (рис.1б) [52] приведены в Таблице 5 (продольные моды нормальных волн) и Таблице 6 (изгибные моды нормальных волн).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнение сходимости решений, полученных выше на базе различных вариантов теории пластин $N^{го}$ порядка, приводит к следующим выводам.

Формулировка задачи о дисперсии нормальных волн на основе элементарной теории $N^{\text{го}}$ порядка приводит к обобщенной задаче о собственных значениях без ограничений, при этом элементарная теория обеспечивает $N + 1$ -модовую аппроксимацию волновода, тогда как введение уравнений связей, порождаемых краевыми условиями на лицевых поверхностях слоя в расширенной теории $N^{\text{го}}$ порядка, приводит к системе типа обобщенных уравнений Воронца с исключенными множителями Лагранжа. Система, состоящая из $2N - 2$ уравнений движения и 4 уравнений связей, сводится к сингулярной обобщенной задаче о собственных значениях. Таким образом, расширенная теория $N^{\text{го}}$ порядка приводит к $N - 1$ -модовой аппроксимации волновода с 4 вырожденными собственными значениями, соответствующими числу уравнений связей.

Таблица 5.

Сходимость решения по частотам запираения продольных мод: элементарная теория, ортогональные полиномы (ОП), спектральные элементы (СЭ).

N \ n	2		3		4		5		6		7		8	
	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ
2	2.10	2.10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	2.10	2.10	2.47	2.21	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	1.91	1.99	2.47	2.21	7.91	6.30	–	–	–	–	–	–	–	–
5	1.91	1.96	2.01	2.21	6.20	4.41	7.91	8.41	–	–	–	–	–	–
6	1.91	1.94	2.01	2.13	5.79	4.80	6.21	6.54	16.49	9.16	–	–	–	–
7	1.91	1.93	2.00	2.09	4.13	4.68	5.79	6.30	11.50	7.61	16.49	12.61	–	–
8	1.91	1.92	2.00	2.07	4.13	4.53	5.72	6.15	10.07	7.18	11.50	11.30	28.10	14.71
9	1.91	1.92	2.00	2.05	4.00	4.41	5.72	6.05	6.55	7.17	10.07	8.82	18.39	13.66
10	1.91	1.92	2.00	2.04	4.00	4.33	5.72	5.98	6.55	7.02	9.56	9.49	15.09	10.72
11	1.91	1.91	2.00	2.03	4.00	4.27	5.72	5.93	6.05	6.86	9.42	9.60	9.56	10.63
12	1.91	1.91	2.00	2.02	4.00	4.22	5.72	5.89	6.05	6.73	9.42	9.51	9.53	10.81
13	1.91	1.91	2.00	2.02	4.00	4.18	5.72	5.87	6.00	6.62	8.22	9.36	9.53	10.75
14	1.91	1.91	2.00	2.02	4.00	4.16	5.72	5.84	6.00	6.53	8.22	9.20	9.53	10.61
15	1.91	1.91	2.00	2.02	4.00	4.14	5.72	5.83	6.00	6.46	8.02	9.05	9.53	10.45
16	1.91	1.91	2.00	2.02	4.00	4.12	5.72	5.81	6.00	6.40	8.02	8.93	9.53	10.29
17	1.91	1.91	2.00	2.01	4.00	4.10	5.72	5.80	6.00	6.35	8.00	8.82	9.53	10.15
18	1.91	1.91	2.00	2.01	4.00	4.09	5.72	5.79	6.00	6.31	8.00	8.73	9.53	10.03
Ex.	1.91		2.00		4.00		5.72		6.00		8.00		9.53	

Таблица 6.

Сходимость решения по частотам запираения изгибных мод: элементарная теория, ортогональные полиномы (ОС), спектральные элементы (СЭ).

N \ n	2		3		4		5		6		7		8	
	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ	ОП	СЭ
2	1.10	1.10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3	1.10	1.10	4.70	4.20	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4	1.00	1.04	4.15	3.31	4.70	4.46	–	–	–	–	–	–	–	–
5	1.00	1.03	3.83	3.58	4.15	4.20	11.83	6.83	–	–	–	–	–	–
6	1.00	1.02	3.04	3.43	3.83	4.06	8.65	6.51	11.83	10.51	–	–	–	–
7	1.00	1.01	3.04	3.31	3.81	3.99	7.86	6.00	8.65	8.92	21.91	11.44	–	–
8	1.00	1.01	3.00	3.22	3.81	3.94	5.29	5.93	7.86	7.72	14.74	8.63	21.91	13.68

9	1.00	1.01	3.00	3.18	3.81	3.91	5.29	5.77	7.63	8.34	12.47	8.41	14.74	10.99
10	1.00	1.01	3.00	3.14	3.81	3.89	5.02	5.63	7.63	8.25	7.92	8.40	12.47	10.92
11	1.00	1.00	3.00	3.11	3.81	3.87	5.02	5.51	7.62	8.13	7.92	8.27	11.53	10.51
12	1.00	1.00	3.00	3.09	3.81	3.86	5.00	5.43	7.11	8.04	7.62	8.11	11.04	10.34
13	1.00	1.00	3.00	3.08	3.81	3.86	5.00	5.36	7.11	7.96	7.62	7.97	11.04	10.21
14	1.00	1.00	3.00	3.07	3.81	3.85	5.00	5.31	7.01	7.83	7.62	7.92	9.38	10.11
15	1.00	1.00	3.00	3.06	3.81	3.84	5.00	5.27	7.01	7.72	7.62	7.88	9.38	10.03
16	1.00	1.00	3.00	3.05	3.81	3.84	5.00	5.23	7.00	7.63	7.62	7.85	9.05	9.97
17	1.00	1.00	3.00	3.04	3.81	3.84	5.00	5.20	7.00	7.55	7.62	7.82	9.05	9.91
18	1.00	1.00	3.00	3.04	3.81	3.83	5.00	5.18	7.00	7.49	7.62	7.80	9.00	9.87
Ex.	1.00		3.00		3.81		5.00		7.00		7.62		9.00	

В Таблицах 7 и 8 приведены минимальные порядки теории, требуемые для приближения частоты запираия ω_n с погрешностью, удовлетворяющей условию

$$\Delta\omega_n = (\omega_n - \omega_n^*) / \omega_n^* < 0,05.$$

Таблица 7.

Сходимость решения на основе теории пластин N^{го} порядка: расширенная теория (Р), элементарная теория (Э).

Номер моды, <i>n</i>	Тип	2	3	4	5	6	7
Порядок теории, <i>N</i>	Продольные моды						
	Р	3	4	5	6	9	11
	Э	4	5	7	7	11	13
	Изгибные моды						
	Р	3	4	5	6	10	8
	Э	4	6	6	10	12	10

Таблица 8.

Сходимость решения на основе теории пластин N^{го} порядка: ортогональные полиномы (ОП), спектральные элементы (СЭ).

Номер моды, <i>n</i>	Тип	2	3	4	5	6	7
Порядок теории, <i>N</i>	Продольные моды						
	ОП	4	5	7	7	11	13
	СЭ	4	7	13	10	18	20
	Изгибные моды						
	ОП	4	6	6	10	12	10
	СЭ	4	9	6	17	20	13

Как следует из результатов, приведенных в Таблицах 1, 2, 7, удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях в форме уравнений связей снижает эффекты запираия. Порядки расширенной теории, требуемые для достижения 5% погрешности определения второй и высших частот запираия, ниже по сравнению с элементарной теорией. При этом погрешности вычисления 1...7 собственных функций по норме (2.4) на основе расширенной и элементарной теорий различаются незначительно, так как неучет связей приводит к отклонению собственных функций в только в окрестности лицевых поверхностей слоя.

Решение, полученное методом спектральных элементов с кусочно-линейными базисными функциями (рис.1б), сходится к точному решению задачи Рэлея-Лэмба заметно медленнее по сравнению с решением, основанном

на ортогональном полиномиальном базисе, причем сходимость высших частот записания существенно ухудшается. Эффективное применение метода спектральных элементов в задачах о дисперсии нормальных волн, бесспорно, требует применения базисных функций высшего порядка [23,31].

ЛИТЕРАТУРА

1. Vary A. *Ultrasonic characterization of material properties*, in *Nondestructive Testing Handbook*. – 2007. – Vol.7. – Pp.306-356.
2. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. *Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации*. – М: Наука, 2009.
3. Ерофеев В.И., Зазнобин В.А., Самохвалов Р.В. *К определению механических напряжений в твердых телах акустическим методом* // Акуст. журн. – 2007. – Т.53. – №5. – С.625-631.
4. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach* // *NDT&E International*. – 2005. – Vol.38. – Pp.344-353.
5. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli* // *Mech. Syst. Signal. Process.* – 2011. – Vol.25. – Pp.2241-2256.
6. Vatulyan A.O., Morgunova A.V. *Study of dispersion properties of cylindrical waveguide with variable properties* // *Acoustical Physics*. – 2015. – Vol.61. – No.3. – Pp.265-271.
7. Белянкова Т.И., Калинин В.В. *Особенности локализации волнового поля в преднапряженном функционально-градиентном слое* // Акуст. журн. – 2017. – Т.63. – №3. – С.219-234.
8. Mal A.K. *Guided waves in layered solids with interface zones* // *Int. J. Engrg. Sci.* – 1988. – Vol.26. – Pp.873-881.
9. Lowe M. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media* // *IEEE Trans. on Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*. – 1995. – Vol.42. – Pp.525-542.
10. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic waves in multilayers: A matrix description* // *Appl. Phys. Letters*. – 1973. – Vol.22. – Pp.495-497.
11. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model* / In: *Proc. of the International Conference “2017 Days of Diffraction (DD2017)”*, 2017.
12. Wilde M.V., Golub M.B., Eremin A.A. *Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate* // *J. Sound Vibr.* – 2019. – Vol.441. – Pp 26-49.
13. Кильчевский Н. А. *Основы аналитической механики оболочек*. – Киев: Изд. АН УССР, 1963.
14. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique* // *NDT&E International*. – 2011. – Vol.44. – Pp.84-92.
15. Моисеенко И.А., Волчков В.В. *Распространение нормальных волн в трансверсально-изотропном радиально-неоднородном полом цилиндре с секторным вырезом* // *Вестн. ДонНУ. Сер.А. Ест. науки*. – 2016. – №4. – С.35-49.

16. Моисеенко И.А. *Нормальные волны вдоль ортотропных функционально-градиентных цилиндров секторного поперечного сечения* // Вестн. ДонНУ. Ест. науки. – 2017. – №4. – С.41-53.
17. Моисеенко И.А. *Распространение нормальных волн вдоль трансверсально-изотропных функционально-градиентных цилиндров* // Вестн. ДонНУ. Ест. науки. – 2018. – №1. – С.37-54.
18. Kausel E. *Thin-layer method: formulation in the time domain* // Int. J. Num. Meth. Engrg. – 1994. – Vol.37. – С.927-941.
19. Nelson R.B., Dong S.E., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminate orthotropic circular cylinders* // J. Sound Vib. – 1971. – Vol.18. – No.3. – Pp.429-444.
20. Marzani A. *Time-transient response for ultrasonic guided waves in damped cylinders* // Int. J. Sol. Struct. – 2008. – Vol.45. – No.25-26. – Pp.6347-6368.
21. Detta S.K., Shah A.H., Bratton R.L., Chakraborty T. *Wave propagation in laminated composite plates* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1988. – Vol.83. – Pp.2020-2026.
22. Galan J.M., Abascal R. *Elastodynamic guided waves scattering in infinite plates* // Int. J. Num. Meth. Engrg. – 2003. – Vol.147. – Pp.1091-1118.
23. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zhang C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements* // J. Comput. Physics. – 2014. – Vol.258. – Pp.381-404.
24. Gopalakrishnan S., Chakraborty T., Roy Mahapatra D. *Spectral Finite Element Method - Wave Propagation, Diagnosis and Control of Anisotropic and Inhomogeneous Structures*, London: Springer - Verlag Limited, 2007.
25. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory* // Advanced Structured Materials. – 2011. – Vol.15. – Pp.715-726.
26. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of laminated piezoelectric plates and shells* // Adv. Mater. Research. – 2013. – Vol.745. – Pp.1-12.
27. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of functionally graded laminated composite materials* // Advanced Structured Materials. – 2015. – Vol.45. – Pp.223-241.
28. Dauksher W., Emery A.F. *Accuracy in modeling the acoustic wave equation with Chebyshev spectral finite elements* // Finite Element Analys. Design. – 1997. – Vol.26. – Pp.115-128.
29. Zak A. *A novel formulation of a spectral plate element for wave propagation in isotropic structures* // Finite Element Analys. Design. – 2009. – Vol.45. – Pp.650-658.
30. Li C.L., Han Q., Liu Y.J., Xiao D.L. *Guided wave propagation in rotating functionally graded annular plates* // Acta Mech. – 2017. – Vol.228. – Pp.1083-1095.
31. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plane structures using the Scaled Boundary Finite Element Method* // Journal of Sound and Vibration. – 2012. – Vol.331. – Pp.2543-2557.
32. Lefebvre J.E., Zhang V., Gazalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates* // J. of Appl. Physics. – 1999. – Vol.85. – Pp.3419.
33. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T., *Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices* // AIP Advances. – 2016. – No.6. – P.065307.

34. Dahmen S., ben Amor M., ben Ghazlen M.H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method* // Composite Struct. – 2016. – Vol.153. – Pp.557-568.
35. Векуа И.Н. *Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек*. – М: Наука, 1982.
36. Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П. *Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач*. – Львов: Вища школа, 1978.
37. Хома И.Ю. *Обобщенная теория анизотропных оболочек*. – Киев: Наукова думка, 1986.
38. Жаворонок С. И. *Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек* // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. – 2011. – №4-5. – С.2154-2156, .
39. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
40. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells* // ZAMM. – 2014. – Vol.94. – No.1-2. – Pp.164-184.
41. Жаворонок С.И. *Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода расширенной трехмерной теории N-го порядка анизотропных оболочек* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.370-381.
42. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Лежандра к теории тонких тел* // Вестник Московского ун-та им.М.В.Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.54-56.
43. Никабадзе М.У. *Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел* // Вестник Московского ун-та им.М.В.Ломоносова. Серия 1: Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.56-63.
44. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. *О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №3. – С.301-310.
45. Жаворонок С.И., Леонтьев А.Н., Леонтьев К.А. *Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы* // Int. J. for Comput. Civil and Struct. Eng. – 2010. – Т.6. – №1-2. – С.105-111.
46. Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. *Взаимодействие оболочки средней толщины с акустической волной* // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т.17. – №2. – С.127-135.
47. Жаворонок С.И. *Исследование гармонических волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4-2. – С.693-701.
48. Жаворонок С.И. *Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
49. Жаворонок С.И. *Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.278-287.
50. Жаворонок С.И. *Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее*

- приложение к задачам стационарной динамики // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.*
51. Егорова О. В., Жаворонок С. И., Курбатов А. С. *О вариационных уравнениях расширенной теории N-го порядка упругих оболочек и их приложении к некоторым задачам динамики // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического ун-та. Механика. – 2015. – №2. – С.36-59.*
52. Egorova O. V., Kurbatov A. S., Rabinskiy L. N., Zhavoronok S. I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I. N. Vekua type // Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2019. <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578008>*
53. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. – Vol.14. – No.1. – Pp.36-48.*
54. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I. N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides // Archives of Mechanics. – 2019. – Vol.71. – Pp.1-23. <https://doi.org/10.24423/aom.3074>*
55. Жаворонок С.И. *Применение расширенной теории пластин N-го порядка к решению задачи о дисперсии волн в градиентно-неоднородном слое // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2019. – Т.25. – №2. – С.240-258.*
56. Маркеев А.П. *Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. – М: Наука, 1992.*
57. Jennings A., Halliday J., Cole M.J. *Solution of Linear Generalized Eigenvalue Problems containing Singular Matrices // J. Inst. Maths. Applics. – 1978. – Vol.22. – Pp.401-410.*
58. Zoltowski M.D. *Solving the generalized eigenvalue problem with singular forms // Proc. of the IEEE. – 1987. – Vol.75. – No.11. – Pp.1546-1548.*
59. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. *Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981.*
60. Babuska I., Melenk J.M. *The Partition of Unity Method // Numer. Meth. in Engineering. – 1998. – Vol.40. – No.4. – Pp.727-758.*

REFERENCES

1. Vary A. *Ultrasonic characterization of material properties. In: Nondestructive Testing Handbook, 2007, Vol.7, Pp.306-356.*
2. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatacii [Acoustical Control of Systems during Production and Operation]. Moscow, Nauka, 2009.*
3. Erofeev V.I., Zaznobin V.A., Samokhvalov R.V. *Determination of mechanical stresses in solids by an acoustic method. Acoustical Physics, 2007, Vol.53, No.5, Pp.546-552.*
4. Elmaimouni L., Lefebvre J.E., Zhang V., Gryba T. *Guided waves in radially graded cylinders: a polynomial approach. NDT&E International, 2005, Vol.38, Pp.344-353.*

5. Sale M., Rizzo P., Marzani A. *Semi-analytical formulation for the guided waves-based reconstruction of elastic moduli*. Mech. Syst. Signal. Process, 2011, Vol.25, Pp.2241-2256.
6. Vatulyan A.O., Morgunova A.V. *Study of dispersion properties of cylindrical waveguide with variable properties*. Acoustical Physics, 2015, Vol.61, No.3, Pp.265-271.
7. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. *Wave field localization in a prestressed functionally graded layer*. Acoustical Physics, 2017, Vol.63, No.3, Pp.245-259.
8. Mal A.K. *Guided waves in layered solids with interface zones*. Int. J. Engrg. Sci., 1988, Vol.26, Pp.873-881.
9. Lowe M. *Matrix techniques for modeling ultrasonic waves in multilayered media*. IEEE Trans. on Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 1995, Vol.42, Pp.525-542.
10. Fahmy A.H., Adler E.L. *Propagation of acoustic waves in multilayers: A matrix description*. Appl. Phys. Letters, 1973, Vol.22, Pp.495-497.
11. Sergeeva N.V., Wilde M.V. *Asymptotic study of dispersion relations for viscoelastic waveguides of canonical shapes in the case of Rabotnov's rheological model*. In: Proc. of the International Conference "2017 Days of Diffraction (DD2017)", 2017.
12. Wilde M.V., Golub M.B., Eremin A.A. *Experimental and theoretical investigation of transient edge waves excited by a piezoelectric transducer bonded to the edge of a thick elastic plate*. J. Sound Vibr., 2019, Vol.441, Pp.26-49.
13. Kil'chevskii N.A. *Osnovy analiticheskoi mekhaniki obolochek [Basics of the Analytical Mechanics of Shells]*, Kiev, Izdatel'stvo AN USSR, 1963.
14. Cao X., Jin F., Jeon I. *Calculation of propagation properties of Lamb waves in a functionally graded material (FGM) plate by power series technique*. NDT&E International, 2011, Vol.44, Pp.84-92.
15. Moiseenko I.A., Volchkov V.V. *Rasprostranenie normal'nykh voln v transversal'no-izotropnom radial'no-neodnorodnom polom tsilindre s sektornym vrezom [Propagation of normal waves in transversely isotropic radially inhomogeneous hollow cylinder with a sector cut]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2016, No.4, Pp.35-49.
16. Moiseenko I.A. *Rasprostranenie normal'nykh voln vdol' transversal'no-izotropnykh funktsional'no-gradientnykh tsilindrov [Propagation of normal waves along transversely isotropic functionally graded cylinders]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2018, No.1, Pp.37-54.
17. Moiseenko I.A. *Normal'nye volny vdol' ortotropnykh funktsional'no-gradientnykh tsilindrov sektornogo poperechnogo secheniya [Normal waves along the orthotropic functionally gradient cylinders of the sectoral cross section]*. Vestnik DonNU. Ser.A: Estestvennye nauki, 2017, No.4, Pp.35-48.
18. Kausel E. *Thin-layer method: formulation in the time domain*. Int. J. Num. Meth. Engrg., 1994, Vol.37, Pp.927-941.
19. Nelson R.B., Dong S.E., Kalra R.D. *Vibrations and waves in laminate orthotropic circular cylinders*. J. Sound Vibr., 1971, Vol.18, No.3, Pp.429-444.
20. Marzani A. *Time-transient response for ultrasonic guided waves in damped cylinders*. Int. J. Sol. Struct., 2008, Vol.45, No.25-26, Pp.6347-6368.
21. Detta S.K., Shah A.H., Bratton R.L., Chakraborty T. *Wave propagation in laminated composite plates*. J. Acoust. Soc. Amer., 1988, Vol.83, Pp.2020-2026.
22. Galan J.M., Abascal R. *Elastodynamic guided waves scattering in infinite plates*. Int. J. Num. Meth. Engrg., 2003, Vol.147, Pp.1091-1118.

23. Hedayatrasa S., Bui T.Q., Zhang C., Lim C.W. *Numerical modeling of wave propagation in functionally graded materials using time-domain spectral Chebyshev elements*. J. Comput. Physics, 2014, Vol.258, Pp.381-404.
24. Gopalakrishnan S. Chakraborty T., Roy Mahapatra D. *Spectral Finite Element Method - Wave Propagation, Diagnosis and Control of Anisotropic and Inhomogeneous Structures*. London, Springer - Verlag Limited, 2007.
25. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *On the use of a new concept of sampling surfaces in shell theory*. Advanced Structured Materials, 2011, Vol.15, Pp.715-726.
26. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of laminated piezoelectric plates and shells*. Adv. Mater. Research, 2013, Vol.745, Pp.1-12.
27. Kulikov G.M., Plotnikova S.V. *Three-dimensional exact analysis of functionally graded laminated composite materials*. Advanced Structured Materials, 2015, Vol.45, Pp.223-241.
28. Dauksher W., Emery A.F. *Accuracy in modeling the acoustic wave equation with Chebyshev spectral finite elements*. Finite Element Analys. Design, 1997, Vol.26, Pp.115-128.
29. Zak A. *A novel formulation of a spectral plate element for wave propagation in isotropic structures*. Finite Element Analys. Design, 2009, Vol.45, Pp.650-658.
30. Li C.L., Han Q., Liu Y.J., Xiao D.L. *Guided wave propagation in rotating functionally graded annular plates*. Acta Mech., 2017, Vol.228, Pp.1083-1095.
31. Gravenkamp H., Song C., Prager J. *A numerical approach for the computation of dispersion relations for plane structures using the Scaled Boundary Finite Element Method*. Journal of Sound and Vibration, 2012, Vol.331, Pp. 2543-2557.
32. Lefebvre J.E., Zhang V., Gzalet J., Gryba T. *Legendre polynomial approach for modelling free-ultrasonic waves in multilayered plates*. J. of Appl. Physics, 1999, Vol.85, Pp.3419.
33. Lefebvre J.E., Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Elmaimouni L., Xu W.J., Gryba T. *Mapped orthogonal functions method applied to acoustic waves-based devices*. AIP Advances, 2016, No.6, P.065307.
34. Dahmen S., ben Amor M., ben Ghazlen M. H. *Investigation of the coupled Lamb waves propagation in viscoelastic and anisotropic multilayer composites by Legendre polynomial method*. Composite Struct., 2016, Vol.153, Pp.557-568.
35. Vekua I.N. *Shell Theory: General Methods of Construction*. Pitman Advanced Publ. Program, Boston, 1985, 282 p.
36. Gulyaev V.I., Bazhenov V.A., Lizunov P.P. *Neklassicheskaya teoriya obolochek i ee prilozhenie k resheniyu inzhenernykh zadach [Nonclassical shell theory and its application to the engineering problems solution]*. L'vov, Vishha shkola, 1978, 192 p.
37. Khoma I.Yu. *Obobshchennaya teoriya anizotropnykh obolochek [Generalized Theory of Anisotropic Shells]*. Kiev, Naukova Dumka, 1986.
38. Zhavoronok S.I. *Variatsionnye uravneniya trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Variational equations of a three-dimensional anisotropic theory of shells]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo, 2011, No.4-5, Pp.2154-2156.
39. Zhavoronok S.I. *Obobshchennye uravneniya Lagranzha vtorogo roda trekhmernoj teorii anizotropnykh obolochek [Generalized Lagrange equations of the second kind of three-dimensional anisotropic shell theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.116-132.

40. Zhavoronok S.I. *A Vekua-type linear theory of thick elastic shells*. ZAMM, 2014, Vol.94, No.1-2, Pp.164-184.
41. Zhavoronok S.I. *Obobshhennyye uravneniya Lagranzha vtorogo roda rasshirennoy trekhmernoj teorii N-go poryadka anizotropnykh obolochek [The generalized lagrange equations of the second kind for the extended three-dimensional n'th order theory of anisotropic shells]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2015, Vol.21, No.3, Pp.370-381.
42. Nikabadze M.U. *Primenenie sistemy polinomov Legendra k teorii tonkikh tel [Application of Legendre polynomials to the theory of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo un-ta im. M.V. Lomonosova. Ser.1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.5, Pp.54-56.
43. Nikabadze M.U. *Primenenie sistemy polinomov Chebysheva k teorii tonkikh tel [Application of Chebyshev polynomials to the theory of thin bodies]*. Vestnik Moskovskogo un-ta im. M.V. Lomonosova. Ser.1: Matematika. Mekhanika, 2007, No.5, Pp.56-63.
44. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'iev K.A. *O reshenii nekotorykh zadach o napryazhenno-deformirovannom sostoyanii anizotropnykh tolstostennykh obolochek vrashcheniya v trekhmernoj postanovke [On the solution of some problems about stress-strain atate of thick anisotropic shells of revolution in three-dimensional problem statement]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2004, Vol.10, No.3, Pp.301-310.
45. Zhavoronok S.I., Leont'iev A.N., Leont'iev K.A. *Analiz skhodimosti reshenia pri raschete tolstostennykh obolochek vrashcheniya proizvol'noi formy [Analysis of the Convergence of solution for thick-walled shells of revolution of arbitrary shape]*. Int. J. for Comput. Civil and Struct. Eng., 2010, Vol.6, No.1-2, Pp.105-111.
46. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Vzaimodeistvie obolochki srednei tolshchiny s austicheskoi volnoi [Middle thickness shell's interaction with acoustical wave]*. Vestnik Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta, 2010, Vol.17, No.2, Pp.127-135.
47. Zhavoronok S.I. *Issledovanie garmonicheskikh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2010, Vol.16, No.4-2, Pp.693-701.
48. Zhavoronok S.I. *Issledovanie kinematiki normal'nykh voln v uprugom sloe na osnove trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka dlya razlichnykh znachenij volnovykh chisel [Kinematics of normal modes in elastic layer for some wave numbers investigation based on n-th order three-dimensional shells' theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2012, Vol.18, No.1, Pp.45-56.
49. Zhavoronok S.I. *Issledovanie rasprostranyayushhikhsya mod garmonicheskikh voln v uprugom sloe na baze trekhmernoj teorii obolochek N-go poryadka [Investigation of propagating modes of harmonic waves in elastic layer using Nth order three-dimensional shells theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2011, Vol.17, No.2, Pp.278-287.
50. Zhavoronok S.I. *Formulirovka nachal'no-kraevoy zadachi priblizhennoj trekhmernoj teorii N-go poryadka v obobshhennykh peremeshheniyakh i ee prilozhenie k zadacham statsionarnoj dinamiki [A formulation of the three-dimensional approximated shells theory of N-th order using generalized displacements and its*

- application to steady dynamics*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2012, Vol.18, No.3, Pp.333-344.
51. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. *An application of various n-th order shell theories to normal waves propagation problems*. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, No.2, Pp.36-59.
52. Egorova O.V., Kurbatov A.S., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Modeling of the dynamics of plane functionally graded waveguides based on the different formulations of the plate theory of I. N. Vekua type*. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019, <https://doi.org/10.1080/15376494.2019.1578008>
53. Zhavoronok S.I. *On the use of extended plate theories of Vekua-Amosov type for wave dispersion problems*. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, Vol.14, No.1, Pp.36-48.
54. Egorova O.V., Rabinskiy L.N., Zhavoronok S.I. *Use of the higher-order plate theory of I. N. Vekua type in problems of dynamics of heterogeneous plane waveguides*. *Archives of Mechanics*, 2019, Vol.71, Pp.1-23. <https://doi.org/10.24423/aom.3074>
55. Zhavoronok S.I. *Primeneniye rasshirennoi teorii plastin N-go poryadka k resheniyu zadach o dispersii voln v gradientno-neodnorodnom sloye [An application of the nth order extended plate theory in the wave dispersion problem for a functionally graded layer]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2019, Vol.25, No.2, Pp.240-258.
56. Markeev A.P. *Dinamika tela, soprikasayushchegosya s tverdoy poverkhnist'yu [Dynamics of a Body Contacting with a Rigid Surface]*. Moscow, Nauka, 1992.
57. Jennings A., Halliday J., Cole M.J. *Solution of Linear Generalized Eigenvalue Problems containing Singular Matrices*. *J. Inst. Maths. Applics.*, 1978, Vol.22, Pp.401-410.
58. Zoltowski M.D. *Solving the generalized eigenvalue problem with singular forms*. *Proc. of the IEEE*, 1987, Vol.75, No.11, Pp.1546-1548.
59. Grin'chenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh [Harmonic oscillations and waves in elastic bodies]*. Kiev, Naukova dumka, 1981, 284 p.
60. Babuska I., Melenk J.M. *The Partition of Unity Method*. *Numer. Meth. in Engineering*, 1998, Vol.40, No.4, Pp.727-758.

Поступила в редакцию 24 сентября 2019 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия, e-mail: zhavor71@mail.ru