

ОБ ОДНОЙ ПРИБЛИЖЕННОЙ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рыбаков Л.С.

ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Для прямоугольной упругой изотропной пластины постоянной толщины с помощью метода конечных элементов построена приближенная линейная дискретно-континуальная аналитическая теория, описываемая дифференциально-разностными уравнениями.

Пластина представлялась регулярной дискретно-одномерной упругой системой, составленной из одинаковых элементов прямоугольной формы в плане, длина которых совпадала с одним из габаритов пластины, а поперечный размер определялся отношением другого габарита пластины к задаваемому числу элементов. За исходную модель деформирования пластины и конечных элементов принималось плоское напряженное состояние.

Смещения всех конечных элементов аппроксимировались в поперечном направлении линейно так, чтобы выполнялись геометрические условия сопряжения смежных элементов. Это позволило уже на начальном этапе свести двумерную континуальную теорию плоского напряженного состояния к дискретно-континуальной теории, описываемой функциями двух аргументов. Один из них континуальный (продольная декартова координата), а другой целочисленный параметр, с помощью которого пронумерованы элементы упругой системы.

Строгий дискретно-континуальный анализ конечно-элементной упругой системы, основанный на методе склейки и вариационных принципах Лагранжа и Кастильяно, позволил выявить обобщенные перемещения, деформации, внутренние и внешние силы изучаемой теории и установить ее определяющие геометрические, физические и статические соотношения, включая уравнения совместности деформаций. В рамках этой теории даны альтернативные постановки дифференциально-разностных краевых задач в обобщенных смещениях и внутренних силах. При постановке задачи во внутренних силах введены силовые функции (дискретно-континуальные аналоги функций напряжений), позволившие сократить число дифференциально-разностных разрешающих уравнений.

Применение теории проиллюстрировано на плоском стержне, для которого построена простейшая статически неопределимая модель деформирования, частными случаями которой являются модели Бернулли и Тимошенко.

Ключевые слова: плоское напряженное состояние; метод конечных элементов; метод склейки; дискретно-континуальный линейный упругий анализ; плоский стержень

ABOUT ONE APPROXIMATE DISCRETE-CONTINUAL THEORY OF A PLANE STRESS STATE

Rybakov L.S.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian

ABSTRACT

An approximate linear discrete-continuum analytical theory described by differential-difference equations is constructed for a rectangular elastic isotropic plate of constant thickness using the finite element method.

The plate was represented by a regular discrete-one-dimensional elastic system composed of the same rectangular elements in the plan. Their length coincided with one of the dimensions of the plate, and the transverse size was determined by the ratio of the other size of the plate to the specified number of elements. The plane stress state was taken as the initial model of deformation of the plate and finite elements.

The displacements of all the finite elements were approximated in the transverse direction linearly so that the geometric conditions of conjugation of the adjacent elements were satisfied. This made it possible, at the initial stage, to reduce the two-dimensional continuum theory of a plane stress state to a discrete-continuum theory described by functions of two arguments. One of them is the continual variable (the longitudinal Cartesian coordinate), and the other is an integer parameter, by means of which the elements of the elastic system are numbered.

A rigorous discrete-continual analysis of the finite-element elastic system based on the gluing method and the variational principles of Lagrange and Castigliano allowed us to reveal generalized displacements, deformations, internal and external forces of the theory under study and establish its defining geometric, physical and static relationships, including the equations of compatibility of deformations. Within the framework of the theory, alternative formulations of differential-difference boundary-value problems in generalized displacements and internal forces are given. When the problem is formulated in the internal forces, force functions (discrete-continual analogs of stress functions) are introduced, which have made it possible to reduce the number of differential-difference resolving equations.

The application of the theory is illustrated on a flat rod for which the simplest statically indeterminate model of deformation is constructed, with Bernoulli and Tymoshenko models as special cases.

Keywords: plane stress state; finite element method; gluing method; discrete-continual linear elastic analysis; plane rod

ВВЕДЕНИЕ

Среди методов приближенного упругого анализа деформируемых тел широкую известность обрели метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Суть первого из них [1-16], появившегося задолго до второго, в сведениях дифференциальных уравнений к алгебраическим путем формирования в изучаемой области ортогональной сетки, аппроксимации непрерывных искомых зависимых переменных дискретными функциями, задаваемыми только в узлах сетки, и замены дифференциальных операций разностными. Итоговые алгебраические уравнения допускают аналитическую запись, а в отдельных случаях и аналитические решения, добываемые методами исчисления конечных разностей [17-19].

В методе конечных элементов [20-25] упругое континуальное тело заменяется упругой системой из малых конечных элементов, взаимодействующих между собой в выбранных точках – узлах системы. Свойства этой системы зависят от исходной модели упругого тела, от геометрии конечных элементов и аппроксимации их напряженно-деформированного состояния. Алгоритм метода конечных элементов направлен на получение системы алгебраических уравнений, служащей для отыскания узловых значений искомых зависимых переменных.

Поэлементная аппроксимация не затрагивает математические операции исходной теории упругого тела, на что указывает, например, интерпретация метода конечных элементов как метода Ритца-Тимошенко.

Особое место занимают модели упругих тел, составленные из одинаковых конечных элементов, включая аппроксимацию их напряженно-деформированного состояния. Регулярность их структуры позволяет создавать строгие дискретные теории упругих тел. Общая методология подобного анализа обсуждалась в [26], а точная реализация его для сжато-растянутого стержня представлена в [27].

Дискретная конечно-элементная модель плоского напряженного состояния предложена в [28], где прямоугольная пластина представлена регулярной упругой системой, образованной из одинаковых конечных элементов прямоугольной формы в плане. Аналитические методы дискретно-континуального линейного анализа регулярных упругих систем [29] позволили построить для этой конечно-элементной модели строгую дискретную теорию упругости. Полная система ее определяющих соотношений в терминах узловых перемещений, обобщенных деформаций и обобщенных внешних и внутренних сил конечных элементов допускает альтернативные постановки задач, сводящиеся к системам разрешающих уравнений в частных разностях относительно выбранных основных неизвестных.

В настоящей работе для прямоугольной упругой изотропной пластины постоянной толщины строится приближенная дискретно-континуальная линейная аналитическая теория плоского напряженного состояния. Главное отличие ее от только что описанной дискретной теории в использовании прямоугольных в плане конечных элементов, один размер которых совпадает с одним из габаритов пластины в плане, а другой равен отношению другого размера пластины к задаваемому количеству элементов. По этой причине изучаемая теория имеет дело с функциями двух аргументов. Один из них непрерывный (локальная декартова координата), а другой целочисленный параметр, с помощью которого пронумерованы элементы дискретно-континуальной упругой модели плоского напряженного состояния. Конечно-элементная аппроксимация только в одном поперечном направлении предопределила дифференциально-разностный вид определяющих и разрешающих уравнений.

Целочисленный параметр, обозначим его символом i , может принимать различные значения. При явной записи его фактических значений уравнения и формулы становятся трудно обозримыми. Поэтому условимся, что во всех зависимых переменных присутствует текущее (несмещенное) значение аргумента i , который ради краткости записи опускается. Это становится возможным благодаря введению линейных операторов сдвига ∇^\pm и разностных операторов Δ^\pm первого порядка, смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[i]$ дискретного аргумента i поясняют равенства

$$\nabla^+ \psi = \nabla^+ \psi[i] = \psi[i \pm 1], \quad \Delta^\pm \psi = \Delta^\pm \psi[i] = \pm \psi[i \pm 1] \mp \psi[i]. \quad (1)$$

Эти операторы перестановочны, связаны между собой зависимостями

$$\nabla^\pm = 1 \pm \Delta^\pm, \quad \nabla^\pm \nabla^\mp = 1, \quad \Delta^\pm = \nabla^\pm \Delta^\mp \quad (2)$$

и позволяют образовывать разностные операторы более высокого порядка. Например, для разностного оператора второго порядка имеем

$$\Delta^2 \psi = \Delta^2 \psi[i] = \psi[i+1] - 2\psi[i] + \psi[i-1], \quad (3)$$

$$\Delta^2 = \Delta^+ \Delta^- = \Delta^+ - \Delta^- = \nabla^+ - 2 + \nabla^-.$$

Условимся также, что зависимая переменная при значениях дискретного аргумента, указывающих явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент системы, равна нулю.

Ниже используются еще дискретные операторы смежного осреднения

$$S^\pm = \frac{1}{2}(1 + \nabla^\pm) \tag{4}$$

и операция суммирования по частям, смысл которой на примере функций $\varphi[i]$, $\psi[i]$ дискретного аргумента i , отличных от нуля лишь при $i \in [1, I]$, поясняют формулы

$$\sum_{i=1}^I \varphi[i] \Delta^\pm \psi[i] = -\sum_{i=1}^I \Delta^\mp \varphi[i] \cdot \psi[i], \quad \sum_{i=1}^I \varphi[i] S^\pm \psi[i] = \sum_{i=1}^I S^\mp \varphi[i] \cdot \psi[i]. \tag{5}$$

Здесь и далее знак умножения в виде точки ограничивает справа действие предшествующих разностных операций.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ

Рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии тонкой изотропной пластины прямоугольной формы в плане, имеющей постоянную толщину h . Отнесем ее к глобальной декартовой системе отсчета x_σ (всюду греческие индексы принимают значения 1,2), обозначая символом l_σ ее размер вдоль оси x_σ (рис.1).

В общем случае внешние силы на свободную пластину задаются декартовыми компонентами поверхностных сил $p_\alpha(x_1, x_2)$, погонных сил $p_{1\alpha}^{(0)}(x_2)$ и $p_{1\alpha}^{(1)}(x_2)$ на левой и правой вертикальных границах, а также погонных сил $p_{2\alpha}^-(x_1)$ и $p_{2\alpha}^+(x_1)$ на нижней и верхней горизонтальных границах (рис.1).

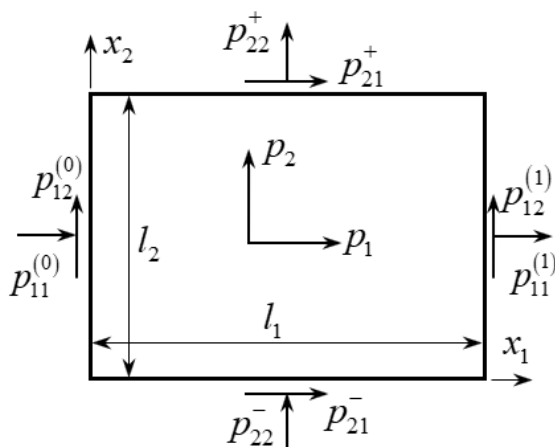


Рис.1.

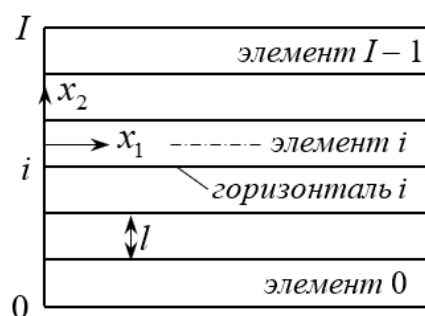


Рис.2.

Представим пластину в виде упругой системы, образованной из одинаковых прямоугольных упругих конечных элементов, вытянутых вдоль оси x_1 , и горизонталей – горизонтальных линий, разграничивающих соседние конечные элементы и совпадающих с горизонтальными границами последних. Продольные размеры элементов и длины горизонталей совпадают с горизонтальным размером

пластины, а поперечный размер элементов равен $l = l_2/I$, где I – количество элементов. Соседние горизонталы и элементы жестко связаны между собой в зоне их контакта. Конечно-элементная схема пластины и принятая нумерация горизонталей и элементов с помощью целочисленного параметра i показана на рис.2. Как видно, область определения его для горизонталей $i \in [0, I]$, а для конечных элементов $i \in [0, I-1]$. Здесь и далее $[n, N]$ означает все целые числа от n до $N > n$.

Следуя методу склейки, разобьем пластину на горизонталы и конечные элементы.

При упругом анализе текущего изолированного элемента будем использовать локальные декартовы оси. Горизонтальная локальная ось разделяет элемент по высоте пополам и по сути совпадает с такой же глобальной осью, а вертикальная локальная ось отличается от глобальной оси x_2 тем, что она отсчитывается от средней горизонтальной линии элемента. Сохраним для локальных осей обозначения глобальных осей, полагая, что $x_1 \in [0, l_1]$ и $x_2 \in [-l/2, l/2]$, используя обозначение $\xi = x_2/l$ для безразмерного аналога оси x_2 ($\xi \in [-1/2, 1/2]$).

Плоское напряженное состояние конечных элементов описывается декартовыми компонентами u_α , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $n_{\alpha\beta}$ соответственно вектора смещений, тензора деформаций и тензора погонных внутренних усилий. Все эти величины являются функциями локальных координат x_σ и дискретного параметра i , так что следовало бы, например, писать $u_\alpha(x_1, x_2; i)$ или более кратко $u_\alpha(x_\sigma; i)$. Однако, там, где это не может привести к недоразумению, все или отдельные текущие аргументы функций опускаются.

Пусть $U_\alpha = U_\alpha(x_1; i)$ – смещение произвольной точки текущей горизонтали вдоль оси x_α . Геометрические условия сопряжения элементов с горизонталями

$$u_\alpha(x_1, -0,5l; i) = U_\alpha, \quad u_\alpha(x_1, 0,5l; i) = \nabla^+ U_\alpha \quad (6)$$

будут выполнены, если смещения конечных элементов задать в виде (см. (1)-(4))

$$u_\alpha(x_\sigma; i) = (S^+ + \xi \Delta^+) U_\alpha(x_1; i). \quad (7)$$

Подставляя эти выражения в соотношения Коши, находим (символ после запятой в нижнем индексе указывает на дифференцирование по соответствующей локальной координате)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{1,1} &= E_{11} + K_1 \xi, & \varepsilon_{22} = \varepsilon_{2,2} &= E_{22}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,1}) = E_{12} + \frac{1}{2} K_2 \xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь введены обобщенные деформации конечных элементов

$$E_{\alpha\beta}(x_1; i) = \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{\alpha\beta} d\xi, \quad K_\alpha(x_1; i) = 12\alpha \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{1\alpha} \xi d\xi, \quad (9)$$

связанные с перемещениями горизонталей зависимостями

$$\begin{aligned} E_{11} &= S^+ U_1', & E_{12} &= \frac{1}{2}(l^{-1} \Delta^+ U_1 + S^+ U_2'), \\ E_{22} &= l^{-1} \Delta^+ U_2, & K_\alpha &= \Delta^+ U_\alpha', \end{aligned} \quad (10)$$

в которых штрихами помечены производные по континуальному аргументу x_1 .

Обобщенный закон Гука

$$n_{\alpha\beta} = B \left[(1-\mu)\varepsilon_{\alpha\beta} + \mu\varepsilon_{\sigma\sigma}\delta_{\alpha\beta} \right]$$

($B = Eh(1-\mu^2)^{-1}$, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона; повторяющиеся индексы указывают на суммирование по всей области их изменения; $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера) после подстановки в него формул (8) принимает вид

$$n_{1\alpha} = N_{1\alpha} + 12M_\alpha \xi, \quad n_{22} = N_{22} + 12\mu M_1 \xi,$$

где введены обобщенные внутренние силовые факторы конечных элементов

$$N_{\alpha\beta}(x_1; i) = \int_{-0.5}^{0.5} n_{\alpha\beta} d\xi, \quad M_\alpha(x_1; i) = \int_{-0.5}^{0.5} n_{1\alpha} \xi d\xi, \quad (11)$$

связанные с их обобщенными деформациями (10) зависимостями

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= B \left[(1-\mu)E_{\alpha\beta} + \mu E_{\sigma\sigma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad M_1 = \frac{1}{12} B K_1, \\ M_2 &= \frac{1}{24} (1-\mu) B K_2, \quad E_{\alpha\beta} = \frac{(1+\mu)N_{\alpha\beta} - \mu N_{\sigma\sigma} \delta_{\alpha\beta}}{(1-\mu^2)B}, \\ K_1 &= \frac{12M_1}{B}, \quad K_2 = \frac{24M_2}{(1-\mu)B}. \end{aligned} \quad (12)$$

С целью отыскания статических соотношений изучаемой теории обратимся к вариационному принципу Лагранжа, согласно которому, если δU и δA – первые вариации потенциальной энергии и работы внешних сил конечно-элементной упругой системы, то

$$\delta U - \delta A = 0. \quad (13)$$

Для первой вариации потенциальной энергии имеем (см. (8), (11))

$$\delta U = l \sum_{i=0}^{l-1} \int_0^{l_1} \int_{-0.5}^{0.5} n_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} d\xi dx_1 = l \sum_{i=0}^{l-1} \int_0^{l_1} (N_{\alpha\beta} \delta E_{\alpha\beta} + M_\alpha \delta K_\alpha) dx_1.$$

Раскрывая здесь с помощью выражений (10) обобщенные деформации, после приведения подобных членов, суммирования (см. (5)) и интегрирования по частям и введения сокращений

$$V_\alpha = S^- N'_{1\alpha} + \Delta^- (l^{-1} N_{\alpha 2} - M'_\alpha), \quad W_\alpha = S^- N_{1\alpha} - \Delta^- M_\alpha \quad (14)$$

находим

$$\delta U = -l \sum_{i=0}^{l-1} \left[\int_0^{l_1} V_\alpha \cdot \delta U_\alpha dx_1 - (W_\alpha \cdot \delta U_\alpha) \Big|_0^{l_1} \right]. \quad (15)$$

Напомним, что величины, обнаруживаемые непосредственно или после раскрытия разностных операторов, считаются равными нулю, если их дискретный аргумент указывает на несуществующие конечные элементы или горизонтالي.

Первая вариация работы внешних сил записывается изначально следующим образом

$$\delta A = l \sum_{i=0}^{l-1} \left[\int_0^{l_1} \int_{-0.5}^{0.5} p_\alpha \delta u_\alpha d\xi dx_1 + \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{s=0}^1 p_{1\alpha}^{(s)} \delta u_\alpha^{(s)} d\xi \right] + \int_0^{l_1} (p_{2\alpha}^+ \delta u_\alpha^+ + p_{2\alpha}^- \delta u_\alpha^-) dx_1.$$

Здесь внешние силы записаны в локальных координатах конечных элементов, $u_\alpha^{(0)}$ и $u_\alpha^{(1)}$ – перемещения левых и правых вертикальных границ элементов, а u_α^-

и u_α^+ – перемещения внешних горизонтальных границ соответственно нижнего и верхнего элементов. Раскроем в последней формуле перемещения с помощью выражений (6), (7), введем обобщенные внешние силы конечных элементов

$$\begin{aligned} P_\alpha(x_1; i) &= \int_{-0,5}^{0,5} p_\alpha d\xi, & H_\alpha(x_1; i) &= \int_{-0,5}^{0,5} p_\alpha \xi d\xi, \\ P_{1\alpha}^{(s)}[i] &= \int_{-0,5}^{0,5} p_{1\alpha}^{(s)} d\xi, & H_{1\alpha}^{(s)}[i] &= \int_{-0,5}^{0,5} p_{1\alpha}^{(s)} \xi d\xi \quad (s=0,1). \end{aligned} \quad (16)$$

и выполним суммирование по частям (см. (5)). В итоге получим

$$\delta A = I \sum_{i=0}^I \left[\int_0^{l_i} N_\alpha \cdot \delta U_\alpha dx_1 + N_\alpha^{(0)} \cdot \delta U_\alpha(0; i) + N_\alpha^{(1)} \cdot \delta U_\alpha(l_1; i) \right]. \quad (17)$$

Здесь введены обобщенные внешние силы горизонталей

$$\begin{aligned} N_\alpha(x_1; i) &= S^- P_\alpha(x_1; i) - \Delta^- H_\alpha(x_1; i) + I^{-1} \left[p_{2\alpha}^-(x_1) \delta_{i0} + p_{2\alpha}^+(x_1) \delta_{iI} \right], \\ N_\alpha^{(s)}[i] &= S^- P_{1\alpha}^{(s)}[i] - \Delta^- H_{1\alpha}^{(s)}[i] \quad (s=0,1). \end{aligned} \quad (18)$$

Подстановка выражений (15), (17) в условие стационарности (13) дает равенство

$$\sum_{i=0}^I \left[\int_0^{l_i} (V_\alpha + N_\alpha) \cdot \delta U_\alpha dx_1 - (W_\alpha - N_\alpha^{(1)}) \cdot \delta U_\alpha \Big|_{x_1=l_i} + (W_\alpha + N_\alpha^{(0)}) \cdot \delta U_\alpha \Big|_{x_1=0} \right] = 0,$$

из которого вытекают уравнения равновесия горизонталей (см. (14))

$$S^- N'_{1\alpha} + \Delta^- (I^{-1} N_{\alpha 2} - M'_\alpha) + N_\alpha = 0 \quad (i \in [0, I]) \quad (19)$$

и статические граничные условия на их концах

$$\begin{aligned} S^- N_{1\alpha}(0; i) - \Delta^- M_\alpha(0; i) &= -N_\alpha^{(0)}[i], \\ S^- N_{1\alpha}(l_1; i) - \Delta^- M_\alpha(l_1; i) &= N_\alpha^{(1)}[i] \quad (i \in [0, I]), \end{aligned} \quad (20)$$

Подчеркнем, что равенства (19), (20) выглядят так, как они записаны, для внутренних горизонталей ($i \in [1, I-1]$). Их аналоги для внешних горизонталей получаются из них при $i=0, I$ после обнуления переменных, указывающих на несуществующие элементы системы. Так для внешних ($i=0, I$) горизонталей уравнения (19) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N'_{1\alpha}(x_1; 0) + I^{-1} N_{\alpha 2}(x_1; 0) - M'_\alpha(x_1; 0) + N_\alpha(x_1; 0) &= 0 \\ \frac{1}{2} N'_{1\alpha}(x_1; I-1) - I^{-1} N_{\alpha 2}(x_1; I-1) + M'_\alpha(x_1; I-1) + N_\alpha(x_1; I) &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

а статические граничные условия (20) дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N_{1\alpha}(0; 0) - M_\alpha(0; 0) &= -N_\alpha^{(0)}[0], \\ \frac{1}{2} N_{1\alpha}(0; I-1) + M_\alpha(0; I-1) &= -N_\alpha^{(0)}[I], \\ \frac{1}{2} N_{1\alpha}(l_1; 0) - M_\alpha(l_1; 0) &= N_\alpha^{(1)}[0], \\ \frac{1}{2} N_{1\alpha}(l_1; I-1) + M_\alpha(l_1; I-1) &= N_\alpha^{(1)}[I]. \end{aligned} \quad (22)$$

Альтернативой статическим граничным условиям (20) на концах горизонталей являются геометрические граничные условия

$$U_\alpha(0, i) = U_{\alpha 0}^*[i], \quad U_\alpha(l_1, i) = U_{\alpha 1}^*[i] \quad (i \in [0, I]),$$

в которых $U_{\alpha 0}^*[i]$, $U_{\alpha 1}^*[i]$ – перемещения, предписанные на соответствующих концах горизонталей наложенными там геометрическими связями.

Для отыскания пяти искомым внутренних сил $N_{\alpha\beta}$, M_α имеется лишь два уравнения (19). Следовательно, изучаемая упругая система статически неопределима, и должны существовать 3 уравнения совместности обобщенных деформаций. Такое же число произвольных функций должно присутствовать в общем решении уравнений (19).

Представим последнее в виде суммы

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0 + N_{\alpha\beta}^p, \quad M_\alpha = M_\alpha^0 + M_\alpha^p$$

общего решения $N_{\alpha\beta}^0$, M_α^0 однородных аналогов уравнений (19)

$$S^-(N_{1\alpha}^0)' + \Delta^- \left[l^{-1} N_{\alpha 2}^0 - (M_\alpha^0)' \right] = 0 \quad (23)$$

и какого-то частного решения $N_{\alpha\beta}^p$, M_α^p неоднородных уравнений (19), которое для конкретного вида нагружения подбирается путем обнуления в равенствах (19) трех соответствующих внутренних сил.

Равенства (23) обратятся в тривиальные тождества, если положить

$$N_{1\alpha}^0 = \Delta^+ \Phi_\alpha', \quad l^{-1} N_{\alpha 2}^0 - (M_\alpha^0)' = -S^+ \Phi_\alpha'',$$

где $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha(x_1; i)$ ($\alpha = 1, 2$) – произвольные функции континуального x_1 и дискретного i аргументов. Отсюда устанавливаем

$$N_{11}^0 = \Delta^+ \Phi_1', \quad (M_1^0)' = S^+ \Phi_1'' + l^{-1} \Delta^+ \Phi_2',$$

$$N_{12}^0 = \Delta^+ \Phi_2', \quad (M_2^0)' = S^+ \Phi_2'' + l^{-1} N_{22}^0.$$

Заменим Φ_1' на Φ_1 и введем третью произвольную функцию $\Phi_3 = \Phi_3(x_1; i)$ равенством $N_{22}^0 = l\Phi_3'$. В результате, получим общее решение однородных уравнений (23)

$$\begin{aligned} N_{11}^0 &= \Delta^+ \Phi_1, & N_{12}^0 &= \Delta^+ \Phi_2', & N_{22}^0 &= l\Phi_3', \\ M_1^0 &= S^+ \Phi_1 + l^{-1} \Delta^+ \Phi_2, & M_2^0 &= S^+ \Phi_2' + \Phi_3, \end{aligned} \quad (24)$$

а затем и общее решение

$$\begin{aligned} N_{11} &= \Delta^+ \Phi_1 + N_{11}^p, & N_{12} &= \Delta^+ \Phi_2' + N_{12}^p, & N_{22} &= l\Phi_3' + N_{22}^p, \\ M_1 &= S^+ \Phi_1 + l^{-1} \Delta^+ \Phi_2 + M_1^p, & M_2 &= S^+ \Phi_2' + \Phi_3 + M_2^p. \end{aligned} \quad (25)$$

неоднородных уравнений (19). Назовем функции $\Phi_n(x_1; i)$ ($n = 1, 2, 3$) силовыми функциями. В изучаемой теории они играют ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел. Области определения силовых функций в части параметра i диктуются областью определения $i \in [0, I-1]$ обобщенных внутренних сил $N_{\alpha\beta}$, M_α и даются значениями $i \in [0, I]$ для функций Φ_α и $i \in [0, I-1]$ для функции Φ_3 .

Расписывая однородные уравнения равновесия (23) при $i = 0, I$ и подставляя в них решение (24), устанавливаем, что в случае свободной системы они обратятся в тривиальные тождества, если

$$\Phi_1'(x_1; 0) = \Phi_1'(x_1; I) = 0, \quad \Phi_2''(x_1; 0) = \Phi_2''(x_1; I) = 0$$

и тем более, если

$$\Phi_1(x_1; 0) = \Phi_1(x_1; I) = 0, \quad \Phi_2(x_1; 0) = \Phi_2(x_1; I) = 0. \quad (26)$$

Следовательно, функции Φ_α нетривиальны при $i \in [1, I-1]$, а функция Φ_3 при $i \in [0, I-1]$, так что общее количество нетривиальных силовых функций равно $3I-2$. В связи с этим заметим, что число искомым обобщенных внутренних силовых факторов, равное $5I$, превышает число $2(I+1)$ статических уравнений свободной системы на $3I-2$. Поэтому степень статической неопределенности конечно-элементной упругой системы, исчисляемая функциональными обобщенными силами, равна $3I-2$ и, как и следовало ожидать, совпадает с количеством нетривиальных силовых функций.

Уравнения совместности обобщенных деформаций получим с помощью следствия принципа Кастильяно, известного как начало наименьшей работы, по которому (см. (8), (11))

$$\delta U = l \sum_{i=0}^{I-1} \int_0^{l_i} \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\alpha\beta} d\xi dx_1 = l \sum_{i=0}^{I-1} \int_0^{l_i} (E_{\alpha\beta} \delta N_{\alpha\beta} + K_\alpha \delta M_\alpha) dx_1 = 0.$$

Посредством формул (25) ($\delta N_{\alpha\beta}^p = \delta M_\alpha^p = 0$) и условий (26) это равенство путем суммирования (см. (5)) и интегрирования по частям приводится с помощью сокращений

$$D_1 = S^- K_1 - \Delta^- E_{11}, \quad D_2 = \Delta^- (2E'_{12} - l^{-1} K_1) - S^- K'_2, \quad D_3 = K_2 - lE'_{22}$$

к виду

$$\sum_{i=1}^{I-1} \int_0^{l_i} D_\alpha \cdot \delta \Phi_\alpha dx_1 + \sum_{i=0}^{I-1} \int_0^{l_i} D_3 \cdot \delta \Phi_3 dx_1 = 0.$$

Отсюда находим уравнения совместности обобщенных деформаций

$$\begin{aligned} \Delta^- E_{11} - S^- K_1 &= 0, \quad \Delta^- (2E'_{12} - l^{-1} K_1) - S^- K'_2 = 0 \quad (i \in [1, I-1]), \\ lE'_{22} - K_2 &= 0 \quad (i \in [0, I-1]), \end{aligned} \quad (27)$$

справедливость которых подтверждает непосредственная подстановка в них формул (10). Число же уравнений (27), как и следовало ожидать, совпадает со степенью статической неопределенности изучаемой упругой системы.

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Напряженно-деформированное состояние конечно-элементной упругой системы, моделирующей плоское напряженное состояние, описано смещениями горизонталей U_α , обобщенными деформациями $E_{\alpha\beta}$, K_α и внутренними силами $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ конечных элементов. Все эти величины – функции непрерывного x_1 и дискретного i аргументов и связаны между собой геометрическими (10), физическими (12) и статическими (19) соотношениями, образующими вместе с уравнениями совместности обобщенных деформаций (27) замкнутую систему определяющих соотношений построенной теории.

Обращаясь к альтернативным постановкам краевых задач, примем сначала за основные, определяемые в первую очередь, неизвестные смещения $U_\alpha(x_1; i)$

горизонтальных границ. Внутренние силы в элементах выражаются через них формулами (см. (10), (12))

$$N_{11} = B(S^+U_1' + \mu l^{-1}\Delta^+U_2), \quad N_{12} = \frac{1}{2}(1-\mu)B(l^{-1}\Delta^+U_1 + S^+U_2')$$

$$N_{22} = B(l^{-1}\Delta^+U_2 + \mu S^+U_1'), \quad M_1 = \frac{1}{12}B\Delta^+U_1', \quad M_2 = \frac{1}{24}(1-\mu)B\Delta^+U_2'.$$

Внося их в соотношения (19), (21) приходим к уравнениям, для внутренних

$$R_1U_1 + RU_2 + B^{-1}N_1 = 0,$$

$$RU_1 + R_2U_2 + B^{-1}N_2 = 0 \quad (i \in [1, I-1])$$

и внешних

$$R_1^+U_1(x_1;0) + R_{12}^+U_2(x_1;0) + B^{-1}N_1(x_1;0) = 0,$$

$$R_{21}^+U_1(x_1;0) + R_2^+U_2(x_1;0) + B^{-1}N_2(x_1;0) = 0,$$

$$R_1^-U_1(x_1;I) + R_{12}^-U_2(x_1;I) + B^{-1}N_1(x_1;I) = 0,$$

$$R_{21}^-U_1(x_1;I) + R_2^-U_2(x_1;I) + B^{-1}N_2(x_1;I) = 0$$

горизонталей.

В них фигурируют дифференциально-разностные операторы

$$R_1 = R_1^+ + R_1^- = \frac{\Delta^2 + 6}{6} \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\Delta^2}{l^2}, \quad R_1^\pm = \frac{\nabla^\pm + 2}{6} \frac{d^2}{dx_1^2} \pm \frac{1-\mu}{2} \frac{\Delta^\pm}{l^2},$$

$$R_2 = R_2^+ + R_2^- = \frac{1-\mu}{2} \frac{\Delta^2 + 6}{6} \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{\Delta^2}{l^2}, \quad R_2^\pm = \frac{1-\mu}{2} \frac{\nabla^\pm + 2}{6} \frac{d^2}{dx_1^2} \pm \frac{\Delta^\pm}{l^2},$$

$$R = R_{12}^+ + R_{12}^- = R_{21}^+ + R_{21}^- = \frac{1+\mu}{4l} (\Delta^+ + \Delta^-) \frac{d}{dx_1},$$

$$R_{12}^\pm = \pm \frac{1}{4l} [(1+\mu)\nabla^\pm + 1 - 3\mu] \frac{d}{dx_1}, \quad R_{21}^\pm = \pm \frac{1}{4l} [(1+\mu)\nabla^\pm - 1 + 3\mu] \frac{d}{dx_1}.$$

Статические граничные условия на горизонталях выводятся сходным образом из равенств (20) и имеют вид

$$\frac{1}{3}(\Delta^2 + 6)U_1'(0;i) + \mu l^{-1}(\Delta^+ + \Delta^-)U_2(0;i) = -2N_1^{(0)}[i]/B,$$

$$l^{-1}(\Delta^+ + \Delta^-)U_1(0;i) + \frac{1}{3}(\Delta^2 + 6)U_2'(0;i) = -4N_2^{(0)}[i]/[(1-\mu)B],$$

$$\frac{1}{3}(\Delta^2 + 6)U_1'(l_1;i) + \mu l^{-1}(\Delta^+ + \Delta^-)U_2(l_1;i) = 2N_1^{(1)}[i]/B,$$

$$l^{-1}(\Delta^+ + \Delta^-)U_1(l_1;i) + \frac{1}{3}(\Delta^2 + 6)U_2'(l_1;i) = 4N_2^{(1)}[i]/[(1-\mu)B] \quad (i \in [1, I-1])$$

для внутренних горизонталей,

$$\frac{1}{3}(\nabla^+ + 2)U_1'(0;0) + \mu l^{-1}\Delta^+U_2(0;0) = -2N_1^{(0)}[0]/B,$$

$$l^{-1}\Delta^+U_1(0;0) + \frac{1}{3}(\nabla^+ + 2)U_2'(0;0) = -4N_2^{(0)}[0]/[(1-\mu)B],$$

$$\frac{1}{3}(\nabla^+ + 2)U_1'(l_1;0) + \mu l^{-1}\Delta^+U_2(l_1;0) = 2N_1^{(1)}[0]/B,$$

$$l^{-1}\Delta^+U_1(l_1;0) + \frac{1}{3}(\nabla^+ + 2)U_2'(l_1;0) = -4N_2^{(1)}[0]/[(1-\mu)B]$$

для нижней ($i = 0$) горизонтали и

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}(2 + \nabla^-)U_1'(0; I) + \mu l^{-1} \Delta^- U_2(0; I) &= -2N_1^{(0)} [I] / B, \\ l^{-1} \Delta^- U_1(0; I) + \frac{1}{3}(2 + \nabla^-)U_2'(0; I) &= -4N_2^{(0)} [I] / [(1 - \mu)B], \\ \frac{1}{3}(2 + \nabla^-)U_1'(l_1; I) + \mu l^{-1} \Delta^- U_2(l_1; I) &= 2N_1^{(1)} [I] / B, \\ l^{-1} \Delta^- U_1(l_1; I) + \frac{1}{3}(2 + \nabla^-)U_2'(l_1; I) &= 4N_2^{(1)} [I] / [(1 - \mu)B] \end{aligned}$$

для верхней ($i = I$) горизонтали.

Примем теперь за основные неизвестные обобщенные внутренние силы $N_{\alpha\beta}$, M_α . Для их отыскания служат статические уравнения (19) и уравнения совместности обобщенных деформаций (27). Последние после замены деформаций их выражениями через обобщенные внутренние силы (см. (12)) принимают вид

$$\begin{aligned} \Delta^- (N_{11} - \mu N_{22}) - 12(1 - \mu^2) S^- M_1 &= 0, \\ \Delta^- [N'_{12} - 6(1 - \mu) l^{-1} M_1] - 12 S^- M'_2 &= 0 \quad (i \in [1, I - 1]), \\ l(N'_{22} - \mu N'_{11}) - 24(1 + \mu) M_2 &= 0 \quad (i \in [0, I - 1]). \end{aligned}$$

Подстановка сюда выражений (25) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} L_1 \Phi_1 - L \Phi_2 - \mu l \Phi'_3 + F_1 &= 0, \\ -L \Phi_1 + L_2 \Phi_2 - 12 S^- \Phi'_3 + F_2 &= 0 \quad (i \in [1, I - 1]), \\ -\mu l^{-1} \Delta^+ \Phi'_1 - \lambda^2 S^+ \Phi'_2 + \Phi''_3 - \lambda^2 \Phi_3 + F_3 &= 0 \quad (i \in [0, I - 1]), \end{aligned}$$

в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} L_1 &= \Delta^2 - 12(1 - \mu^2) S^- S^+, \quad L = 6(1 - \mu^2) l^{-1} (\Delta^+ + \Delta^-), \\ L_2 &= (\Delta^2 - 12 S^- S^+) \frac{d^2}{dx_1^2} - 6(1 - \mu) l^{-2} \Delta^2, \quad \lambda^2 = 24(1 + \mu) l^{-2} \end{aligned}$$

и обусловленные внешними воздействиями величины

$$\begin{aligned} F_1 &= \Delta^- (N_{11}^p - \mu N_{22}^p) - 12(1 - \mu^2) S^- M_1^p, \\ F_2 &= \Delta^- \left[(N_{12}^p)' - 6(1 - \mu) l^{-1} M_1^p \right] - 12 S^- (M_2^p)', \\ F_3 &= l^{-1} \left[(N_{22}^p)' - \mu (N_{11}^p)' \right] - \lambda^2 M_2^p. \end{aligned}$$

Отметим, что погонные усилия $n_{\alpha 2}(x_1, x_2; i)$ противоречат статическим условиям сопряжения смежных элементов

$$n_{\alpha 2}(x_1, -l/2; i) = n_{\alpha 2}(x_1, l/2; i - 1) \quad (i \in [1, I - 1])$$

и статическим граничным условиям на внешних горизонтальных границах крайних элементов

$$n_{\alpha 2}(x_1, -l/2; 0) = -p_{2\alpha}^-(x_1), \quad n_{\alpha 2}(x_1, l/2; I - 1) = p_{2\alpha}^+(x_1). \quad (28)$$

Этого не произойдет, если, как и в случае классических моделей плоского стержня Бернулли и Тимошенко, названные усилия искать непосредственно из уравнений равновесия плоского напряженного состояния $n_{\alpha\beta, \beta} + p_\alpha = 0$, полагая известным, скажем, усилие $n_{11}(x_1, x_2; i)$. Для этого следует сначала

воспользоваться первым уравнения равновесия и первым статическим граничным условием (28) и найти $n_{12}(x_1, x_2; i)$, а затем по нему из второго уравнения равновесия и второго статического граничного условия (28) вывести формулу для $n_{22}(x_1, x_2; i)$.

3. ПРОСТЕЙШЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ

Применение построенной теории проиллюстрируем на плоском стержне, для которого по определению $l_2 \ll l_1$. В приведенных выше рассуждениях это отношение в расчет не принималось. Поэтому изучаемая теория применима к плоскому стержню без каких-либо ограничений, если не считать выбираемое число элементов I , влияющее на точность модели стержня.

Рассмотрим простейшую в рамках обсуждаемой теории модель плоского стержня, полагая $I = 1$, а, следовательно, $l = l_2$. Это означает, что сам стержень – единственный конечный элемент. Его деформирование описывается смещениями $U_\alpha(x_1; i)$ ($i = 0, 1$) и существующими лишь при $i = 0$ пятью деформациями $E_{\alpha\beta}$, K_α и пятью внутренними силами $N_{\alpha\beta}$, M_α – функциями только континуального аргумента x_1 .

Геометрические соотношения (10) после введения новых обобщенных смещений

$$V_\alpha(x_1) = S^+ U_\alpha(x_1; 0), \quad \Theta_\alpha(x_1) = l^{-1} \Delta^+ U_\alpha(x_1; 0), \quad (29)$$

связанных со старыми смещениями зависимостями

$$U_\alpha(x_1; s) = V_\alpha - \frac{1}{2} l (-1)^s \Theta_\alpha \quad (s = 0, 1),$$

приобретают вид

$$E_{11} = V_1', \quad E_{12} = \frac{1}{2}(V_2' + \Theta_1), \quad E_{22} = \Theta_2, \quad K_\alpha = l \Theta_\alpha'. \quad (30)$$

Физические соотношения (12) остаются в силе, но только при $i = 0$.

Что же касается статических соотношений, то они здесь даются равенствами (см. (21) при $I = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N_{1\alpha}' + l^{-1} N_{\alpha 2} - M_\alpha' + N_\alpha(x_1; 0) &= 0, \\ \frac{1}{2} N_{1\alpha}' - l^{-1} N_{\alpha 2} + M_\alpha' + N_\alpha(x_1; 1) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Из трех уравнений совместности (27) сохраняет силу только третье уравнение

$$l E_{22}' - K_2 = 0,$$

справедливое опять же при $i = 0$. После замены E_{22} и K_2 их выражениями через обобщенные внутренние силы (см. (12)) оно записывается следующим образом

$$l^{-1} (N_{22}' - \mu N_{11}') - \lambda^2 M_2 = 0. \quad (32)$$

Уравнения (31) равносильны равенствам

$$N_{1\alpha}' + N_\alpha^+(x_1) = 0, \quad M_\alpha' - l^{-1} N_{\alpha 2} + N_\alpha^-(x_1) = 0, \quad (33)$$

в которых (см. (18))

$$\begin{aligned} N_\alpha^+(x_1) &= N_\alpha(x_1; 1) + N_\alpha(x_1; 0) = P_\alpha + l^{-1} (p_{2\alpha}^+ + p_{2\alpha}^-), \\ N_\alpha^-(x_1) &= \frac{1}{2} [N_\alpha(x_1; 1) - N_\alpha(x_1; 0)] = H_\alpha + \frac{1}{2} l^{-1} (p_{2\alpha}^+ - p_{2\alpha}^-). \end{aligned} \quad (34)$$

Отсюда с точностью до постоянных C_1 , C_2 , C_3 находим выражения

$$N_{1\alpha} = C_\alpha + N_{1\alpha}^*(x_1), \quad M_1 = C_3 + l^{-1}C_2x_1 + M_1^*(x_1), \quad (35)$$

где

$$N_{1\alpha}^*(x_1) = -\int_0^{x_1} N_\alpha^+(\tau) d\tau, \quad M_1^*(x_1) = \int_0^{x_1} [l^{-1}N_{12}^*(\tau) - N_1^-(\tau)] d\tau, \quad (36)$$

и соотношение

$$N_{22} = l(M_2' + N_2^-). \quad (37)$$

С помощью равенств (33), (37) уравнение (32) приводится к виду

$$M_2''(x_1) - \lambda^2 M_2(x_1) = m(x_1). \quad (38)$$

Здесь введено обозначение

$$m(x_1) = -\mu l^{-1} N_1^+ - (N_2^-)'. \quad (39)$$

Решая уравнение (38), с точностью до постоянных интегрирования C_4, C_5 находим

$$M_2(x_1) = C_4 \operatorname{ch} \lambda x_1 + C_5 \operatorname{sh} \lambda x_1 + M_2^*(x_1), \quad (40)$$

$$M_2^*(x_1) = \lambda^{-1} \int_0^{x_1} m(\tau) \operatorname{sh} \lambda(x_1 - \tau) d\tau,$$

и теперь согласно зависимости (37)

$$N_{22}(x_1) = \lambda l(C_4 \operatorname{sh} \lambda x_1 + C_5 \operatorname{ch} \lambda x_1) + N_{22}^*(x_1), \quad (41)$$

$$N_{22}^*(x_1) = l \left[N_2^- + (M_2^*)' \right].$$

Обратимся теперь к отысканию обобщенных смещений (29). Из формул (30) и соответствующих выражений (12) вытекают дифференциальные уравнения

$$V_1' = A_1 - \mu \lambda l (A_4 \operatorname{sh} \lambda x_1 + A_5 \operatorname{ch} \lambda x_1) + E_{11}^*,$$

$$\Theta_1' = 12(1 - \mu^2) l^{-2} (A_2 x_1 + A_3 l) + l^{-1} K_1^*, \quad (42)$$

$$V_2' = 2(1 + \mu) A_2 + 2E_{12}^* - \Theta_1$$

и конечное соотношение

$$\Theta_2(x_1) = \lambda l (A_4 \operatorname{sh} \lambda x_1 + A_5 \operatorname{ch} \lambda x_1) - \mu A_1 + E_{22}^*.$$

в которых для краткости записи сделана замена постоянных интегрирования

$$A_n = \frac{C_n}{(1 - \mu^2) B} \quad (n = 1, 2, \dots, 5) \quad (43)$$

и использованы обозначения

$$E_{\alpha\beta}^* = \frac{(1 + \mu) N_{\alpha\beta}^* - \mu N_{\sigma\sigma}^* \delta_{\alpha\beta}}{(1 - \mu^2) B}, \quad K_1^* = \frac{12 M_1^*}{B}.$$

Решая уравнения (42), находим

$$V_1 = A_6 + A_1 x_1 - \mu l (A_4 \operatorname{ch} \lambda x_1 + A_5 \operatorname{sh} \lambda x_1) + V_1^*$$

$$\Theta_1 = A_7 + 6(1 - \mu^2) l^{-2} (A_2 x_1^2 + 2A_3 l x_1) + \Theta_1^*,$$

$$V_2 = A_8 + [2(1 + \mu) A_2 - A_7] x_1 - 2(1 - \mu^2) l^{-2} (A_2 x_1^3 + A_3 l x_1^2) + V_2^*.$$

Здесь появились новые постоянные интегрирования A_6, A_7, A_8 и обозначения

$$V_1^*(x_1) = \int_0^{x_1} E_{11}^*(\tau) d\tau, \quad \Theta_1^*(x_1) = l^{-1} \int_0^{x_1} K_1^*(\tau) d\tau,$$

$$V_2^*(x_1) = \int_0^{x_1} [2E_{12}^*(\tau) - \Theta_1^*(\tau)] d\tau.$$

В случае свободного стержня постоянные интегрирования C_1, C_2, \dots, C_5 находятся из статических граничных условий (см. (22) при $I = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} N_{1\alpha}(0;0) - M_\alpha(0;0) &= -N_\alpha^{(0)}[0], & \frac{1}{2} N_{1\alpha}(0;0) + M_\alpha(0;0) &= -N_\alpha^{(0)}[1], \\ \frac{1}{2} N_{1\alpha}(l_1;0) - M_\alpha(l_1;0) &= N_\alpha^{(1)}[0], & \frac{1}{2} N_{1\alpha}(l_1;0) + M_\alpha(l_1;0) &= N_\alpha^{(1)}[1], \end{aligned}$$

равносильных равенствам (см. (18))

$$N_{1\alpha}(0) = -P_{1\alpha}^{(0)}, \quad M_\alpha(0) = -H_{1\alpha}^{(0)}, \quad N_{1\alpha}(l_1) = P_{1\alpha}^{(1)}, \quad M_\alpha(l_1) = H_{1\alpha}^{(1)}.$$

Три из них будут выполняться автоматически в силу глобального равновесия свободного стержня. Все другие условия позволяют найти 5 констант, фигурирующих в обобщенных внутренних силах. Остающиеся в перемещениях неопределенными 3 постоянные обусловлены смещениями стержня как жесткого целого.

Пусть, например, $p_{\alpha\beta}$ – постоянный симметричный декартовый тензор 2-го ранга и пусть внешние воздействия на свободный стержень заданы следующим образом

$$p_\alpha = 0, \quad p_{1\alpha}^{(s)} = -(-1)^s p_{1\alpha} \quad (s = 0, 1), \quad p_{2\alpha}^\pm = \pm p_{2\alpha}.$$

Это означает, что стержень по-разному равномерно растягивается в двух направлениях и одновременно находится в состоянии однородного сдвига. Тогда (см. (16), (18), (34)-(36), (39)-(41))

$$\begin{aligned} P_\alpha &= H_\alpha = H_{1\alpha}^{(s)} = 0 \quad (s = 0, 1), & P_{1\alpha}^{(0)} &= -P_{1\alpha}^{(1)} = -p_{1\alpha}, \\ N_\alpha^+ &= 0, & N_\alpha^- &= l^{-1} p_{2\alpha}, & N_{1\alpha}^* &= m = M_2^* = 0, & N_{22}^* &= p_{22}, \\ M_1^* &= -l^{-1} p_{21} x_1, & C_\alpha &= p_{1\alpha}, & C_3 &= C_4 = C_5 = 0. \end{aligned}$$

С учетом этого имеем (см. (35), (40), (41))

$$N_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta}, \quad M_\alpha = 0,$$

что является точным решением как приближенной теории стержня, так и исходной его модели – плоского напряженного состояния.

Главная особенность представленной модели плоского стержня в большей по сравнению с классическими моделями степени его деформирования. Этим объясняется увеличение числа кинематических и силовых величин, участвующих во всестороннем описании деформирования стержня и, как следствие, его статическая неопределимость.

Если пренебречь эффектом Пуассона (положить $\mu = 0$) и ввести гипотезу о несжимаемости стержня в поперечном направлении ($\varepsilon_{22} = E_{22} = \Theta_2 = 0$ и поэтому $K_2 = M_2 = 0$; см. (12), (29), (30)), то данная модель вырождается в модель плоского стержня Тимошенко. Если к тому же исключить поперечный сдвиг ($\varepsilon_{12} = E_{12} = 0$), то придем к модели стержня Бернулли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Путем реализации одномерной регулярной конечно-элементной процедуры построена приближенная дискретно-континуальная линейная аналитическая теория плоского напряженного состояния прямоугольной пластины. Сущность использованной аппроксимации состояла в предположении о линейном распределении перемещений конечных элементов в направлении их меньшего размера. Остальные рассуждения были строгими.

Возможности представленного не исчерпываются изложенным. Меняя, например, исходную аппроксимацию и воспроизводя приведенные выше рассуждения, можно строить иные дискретно-континуальные теории плоского напряженного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Положий Г.Н. и др. *Математический практикум*. – М.: Физматлит, 1960. – 512 с.
2. Канторович Л.В., Крылов В.И. *Приближенные методы высшего анализа*. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
3. Вазов В., Форсайт Дж. *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*. – М.: ИЛ, 1963. – 488 с.
4. Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач*. – М.: Мир, 1972. – 418 с.
5. Годунов С.К., Рябенкий В.С. *Разностные схемы. Введение в теорию*. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений*. – М.: Наука, 1978. – 588 с.
7. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
8. Победря Б.Е. *Численные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
9. Хейгеман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы*. – М.: МИР, 1986. – 448 с.
10. Ортега Дж., Пул У. *Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений*. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
11. Федоренко Р.П. *Введение в вычислительную физику*. – М.: Изд-во Моск. Физ.-техн. Ин-та, 1994. – 528 с.
12. Fuschi P., Pisano A.A., De Domenico D. *Plane stress problems in nonlocal elasticity: finite element solutions with a strain-difference-based formulation*. // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 2015. – Vol.431. – Iss.2. – Pp.714-736.
13. Uzelac I., Smoljanović H., Peroš B. *A computationally efficient numerical model for a dynamic analysis of thin plates based on the combined finite–discrete element method* // Engineering Structures. – 2015. – Vol.101. – Pp.509-517.
14. Zapata M., Balam R. *High-order implicit finite difference schemes for the two-dimensional Poisson equation* // Appl. Math. and Comput. – 2017. – Vol.309. – Pp.222-244.
15. Kotousov A., Bun S., Khanna A. *A new analytical method for the evaluation of transverse displacements and stresses in plane problems of elasticity* // Int. J. of Solids and Structures. – 2017. – Vol.118-119. – Pp.89-96.

16. Розин Л. А. *Задачи теории упругости и численные методы их решения*. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 428 с.
17. Блейх Ф., Мелан Е. *Уравнения в конечных разностях статики сооружений*. – Харьков.: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. – 383 с.
18. Jordan С. *Calculus of finite differences*. – New York: Chelsea Publishing Company, 1950. – 652 p.
19. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей*. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.
20. Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
21. Галлагер Р. *Метод конечных элементов. Основы*. – М.: МИР, 1984. – 428 с.
22. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. *Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов*. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
23. Бреббия К., Теллес Ж., Вробел Л. *Методы граничных элементов*. – М.: МИР, 1987. – 524 с.
24. Громадка П Т.В., Лей Ч. *Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах*. – М.: МИР, 1990. – 303 с.
25. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. – Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013. – 756 p.
26. Рыбаков Л.С. *Об аналитической теории метода конечных элементов в механике упругих тел / X Юбилейная международная конференция «Вычислительная механика и современные прикладные программные системы». Тезисы докладов*. – Переславль-Залесский, 1999. – С.171-172.
27. Рыбаков Л.С. *Метод конечных элементов с точки зрения механики регулярных упругих систем // Конструкции из композиционных материалов*. – 2000. – Вып.2. – С.41-49.
28. Рыбаков Л.С. *Об аналитической реализации метода конечных элементов // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №3. – С.338-351.
29. Рыбаков Л.С. *Принципы Лагранжа и Кастильяно в теории плоской регулярной фермы ортогональной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2018. – Т.24. – №1. – С.93-110.

REFERENCES

1. Polozhij G.N. et al. *Matematicheskij praktikum [Mathematical Workshop]*. Moskva, Fizmatlit, 1960, 512 p.
2. Kantorovich L.V., Krylov V.I. *Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]*. Leningrad, Fizmatgiz, 1962, 708 p.
3. Wasow W.R., Forsythe G.E. *Finite-difference methods for partial differential equations*. New York-London, John Wiley & Sons, Inc., 1960, 444 p.
4. Richtmyer R.D., Morton K.W. *Difference methods for initial-value problems*. New York, John Wiley & Sons, 1967, 420 p.
5. Godunov S.K., Rjaben'kij V.S. *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu [Difference schemes. Introduction to theory]*. Moskva, Nauka, 1977, 439 p.
6. Samarskij A.A., Nikolaev E.S. *Metody resheniya setochnykh uravnenij [Methods for solving grid equations]*. Moskva, Nauka, 1978, 588 p.
7. Samarskij A.A. *Teoriya raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]*. Moskva, Nauka, 1989, 616 p.

8. Pobedrja B.E. *Chislennyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Numerical methods in the theory of elasticity and plasticity]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, 1981, 344 p.
9. Hageman L.A., Young D.M. *Applied iterative methods*. New York-London-Toronto-Sydney-San Francisco, Academic Press, 1981, 386 p.
10. Ortega J.M., Poole W.G. *An introduction to numerical methods for differential equations*. Jr. Pitman Publishing Inc., 1981, 282 p.
11. Fedorenko R. P. *Vvedenie v vychislitel'nyuyu fiziku [Introduction to Computational Physics]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo instituta, 1994, 528 p.
12. Fuschi P., Pisano A. A., De Domenico D. *Plane stress problems in nonlocal elasticity: finite element solutions with a strain-difference-based formulation*. J. of Mathematical Analysis and Applications, 2015, Vol.431, Iss.2, Pp.714-736.
13. Uzelac I., Smoljanović H., Peroš B. *A computationally efficient numerical model for a dynamic analysis of thin plates based on the combined finite-discrete element method*. Engineering Structures, 2015, Vol.101, Pp.509-517.
14. Zapata M., Balam R. *High-order implicit finite difference schemes for the two-dimensional Poisson equation*. Appl. Math. and Comput., 2017, Vol.309, Pp.222-244.
15. Kotousov A., Bun S., Khanna A. *A new analytical method for the evaluation of transverse displacements and stresses in plane problems of elasticity*. Int. J. of Solids and Structures, 2017, Vol.118-119, Pp.89-96.
16. Rozin L.A. *Zadachi teorii uprugosti i chislennyye metody ikh resheniya [Problems of theory of elasticity and numerical methods of their solution]*. Sankt-Peterburg, Izdatel'stvo SPbGTU, 1998, 428 p.
17. Bleich F., Melan E. *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*. Berlin, Springer, 1927, 350 p.
18. Jordan C. *Calculus of finite differences*. New York, Chelsea Publishing Company, 1950, 652 p.
19. Gel'fond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostej [Calculus of finite differences]*. Moskva, Fizmatgiz, 1959, 400 p.
20. Postnov V.A., Harhurim I.Ja. *Metod konechnykh ehlementov v raschetakh sudovykh konstruksij [Finite element method in calculations of ship structures]*. Leningrad, Sudostroenie, 1974, 344 p.
21. Gallager R.H. *Finite element analysis. Fundamentals*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1975, 420 p.
22. Obrazcov I.F., Savel'ev L.M., Hazanov H.S. *Metod konechnykh ehlementov v zadachakh stroitel'noj mekhaniki letatel'nykh apparatov [The finite element method in the problems of structural mechanics of aircrafts]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1985, 392 p.
23. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, Springer-Verlag, 1984, 464 p.
24. Hromadka II T.V., Lai Chintu. *The complex variable boundary element method in engineering analysis*. New York-Berlin-Heidelberg-London-Paris-Tokyo, Springer-Verlag, 1987, 389 p.
25. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013, 756 p.

26. Rybakov L.S. *Ob analiticheskoy teorii metoda konechnykh ehlementov v mekhanike uprugikh tel [On the analytic theory of the finite element method in the mechanics of elastic bodies]*. X yubilejnaya mezhdunarodnaya konferentsiya «Vychislitel'naya mekhanika i sovremennye prikladnye programmnye sistemy», Tezisy dokladov, Pereslavl'-Zalesskij, 1999, Pp.171-172.
27. Rybakov L.S. *Metod konechnykh ehlementov s točki zreniya mekhaniki reguljarnykh uprugikh sistem [The finite element method from the point of view of the mechanics of regular elastic systems]*. Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov, 2000, Iss.2, Pp.41-49.
28. Rybakov L.S. *Ob analiticheskoy realizatsii metoda konechnykh ehlementov [On the analytic realization of the finite element method]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.3, Pp.338-351.
29. Rybakov L.S. *Printsipy Lagranzha i Kastil'yano v teorii ploskoj reguljarnoj fermy ortogonal'noj struktury [Variational principles of Lagrange and Castigliano in theory of a plane regular truss with orthogonal structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2018, Vol.24, No.1, Pp.93-110.

Поступила в редакцию 05 июня 2019 года.

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., проф., проф. кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru