УДК 539.3

ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА СВЯЗАННЫХ ДИССИПАТИВНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ*

Белов П.А., Лурье С.А.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Показана эффективность использования вариационного подхода, сформулированного в общем случае для пространственно-временного трансверсально-изотропного континуума совместно с обобщенным вариационным уравнением Седова для формулировки обратимых и необратимых процессов деформирования и теплообмена как в линейной, так и в нелинейной постановках. Используется предложенная авторами процедура построения неинтегрируемой вариационной формы, позволяющая расширить процедуру формального построения вариационных моделей механики деформируемых сред на необратимые процессы деформирования. Неинтегрируемые вариационные формы определяют возможные каналы диссипации в зависимости от списка обобщенных переменных для конкретной модели среды. Доказано, что если обратимая часть рассматриваемых процессов физически линейна, то она может быть выделена в уравнении Седова в виде вариации отдельного функционала. В этом случае вариационное уравнение Седова всегда можно представить в виде суммы вариации лагранжиана обратимой части и линейной комбинации каналов диссипации необратимых физически нелинейных процессов. Отмечается важность введения свойств трансверсальной изотропии при описании связных процессов термодинамики деформирования. Такое обобщение не только расширяет физические модели рассматриваемых сред, но необходимо также для получения непротиворечивой постановки задачи в обобщенных напряжениях для обобщенного вектора импульсов и вектора теплового потока. Показывается возможность обобщения вариационного подхода на формулировки нелинейных моделей диссипативных процессов, в том числе и нелинейных уравнений Навье-Стокса. В частности, рассмотрены примеры использования вариационного подхода для описания гидродинамических моделей в отсутствие теплообмена в среде. Построены соответствующие вариационные модели: гидродинамики Дарси, линейной гидродинамики Навье-Стокса, гидродинамики Бринкмана, градиентной гидродинамики и некоторого обобщения классической нелинейной гидродинамики Навье-Стокса.

Ключевые слова: диссипативные процессы в гидродинамике; вариационные постановки моделей гидродинамики; модель Дарси; линейная модель Навье-Стокса; модель Бринкмана; градиентная гидродинамика; нелинейная модель Навье-Стокса

VARIATION STATEMENT OF RELATED DISSIPATIVE TASKS OF THE MECHANICS OF A CONTINUOUS MEDIA

Belov P.A., Lurie S.A.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

* *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (№18-29-10085-мк) и при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований ИПРИМ РАН (номер гос.регистрации АААА-А19-119012290177-0.*

ABSTRACT

The effectiveness of using the variational approach, formulated in the general case for the spacetime transversely-isotropic four-dimensional continuum together with the generalized Sedov's variational equation is shown for the formulation of reversible and irreversible processes of deformation and heat transfer in both linear and nonlinear formulations. We use the procedure proposed by the authors for constructing a non-integrable variational form, which allows us to extend the formal variational models of the mechanics of deformable media to irreversible processes of deformation. Non-integrable variational forms determine the possible channels of dissipation depending on the list of generalized variables for a particular model of the medium. It is proved that if the reversible part of the processes under consideration is physically linear, then it can be distinguished in the Sedov's equation as a variation of a separate functional. In this case, the Sedov's variational equation can always be represented as the sum of the variation of the Lagrangian of the reversible part and the linear combination of dissipation channels of irreversible physically nonlinear processes. The importance of introducing of transverse isotropy properties in describing the connected processes of thermodynamics of deformation is noted. Such a generalization not only expands the physical models of the media under consideration, but is also necessary to obtain a consistent statement of the problem in generalized voltages for the generalized vector of momenta and the heat flux vector. The possibility of generalizing the variational approach to for formulating non-linear models of dissipative processes, including non-linear Navier-Stokes equations, is shown. In particular, examples of using the variational approach to describe hydrodynamic models in the absence of heat transfer in the medium are considered. The corresponding variational models are constructed: Darcy hydrodynamics, Navier-Stokes linear hydrodynamics, Brinkman hydrodynamics, gradient hydrodynamics and some generalization of the classical non-linear Navier-Stokes hydrodynamics.

Keywords: dissipative processes in hydrodynamics; variational statements of hydrodynamic models; Darcy model; linear Navier-Stokes model; Brinkman model; gradient hydrodynamics; non-linear Navier-Stokes model

ВВЕДЕНИЕ

Вариационный подход в механике деформируемых сред является одним фундаментальных, ибо он не только обеспечивает корректность и полноту формулировок математических постановок для различных моделей сред, но и является основой для прикладных численных методов решения прикладных проблем. Для обратимых процессов модели обобщенных сред полностью определяются плотностью потенциальной энергии, структура которой зависит от списка обобщенных переменных.

Случай необратимых процессов должен быть рассмотрен специально [1-6]. В этом случае часто вводят понятие диссипативной функции (см., например, [2,3,7,8]), что вряд ли является корректным.

Очевидно, что это обстоятельство также следует учитывать при построении вариационных моделей гидродинамики вязких жидкостей, которые также следует рассматривать как необратимые среды. Значительный интерес к развитию моделей гидродинамики жидкости различной сложности связано, в частности, с моделированием капиллярно-пористых структур [4,5,9,10] так как течение жидкостей в микроканалах и малоразмерных устройствах последние годы привлекает внимание многих исследователей в связи с ростом технологических приложений.

Множество частных моделей для описания локальных качественных эффектов в тепловых трубках содержится в [6-11]. В работах [7-12] предложены одномерные модели, которые анализируют течение жидкости и п. Широко при этом используются модели гидродинамики Дарси [8]. Некоторые их обобщение можно найти в работах [9,10,13,14] и др.

Данная работа посвящена развитию вариационного подхода применительно к моделированию необратимых процессов в обобщенных средах с возможностью учета связности процессов деформирования и иных сопутствующих физических процессов. В работах [11-14] показано, что в этом отношении перспективными являются модели, основанные на рассмотрении пространственно-временного континуума. При этом вариационная формулировка уравнений теории упругости для пространственно-временного континуума позволила построить согласованные обобщенные модели связанной термоупругости и гиперболической теплопроводности. В этих работах вместо распространенного постулата об изотропности пространства событий предложено исследовать трансверсально изотропную в отношении орта времени обобщенную среду (пространственно-временного континуума). В результате, физико-механические свойства сплошной среды оказываются гораздо разнообразнее, чем это можно было предположить на основании гипотезы о его изотропности. В результате были развиты модели связной динамической термоупругости и теплопроводности обобщенных моделей сред, тензор обобщенных напряжений которых не является симметричным. В [12-15] установлено, что предложение рассматривать пространственно-временной континуум как трансверсально-изотропную среду является фундаментальным, так как традиционная гипотеза изотропности приводит к явным противоречиям при попытке моделировании импульсов и тепловых потоков в рамках связной термодинамики. Предлагаемый подход позволяет дать и формулировку механистической модели классической электродинамики с антисимметричным тензором 4D-напряжений, а позволяет построить обобщенные модели взаимодействия электромагнитного поля с пространственно-изотропной деформируемой средой [16].

В данной работе обсуждается возможность использования вариационного формализма, для моделирования диссипативных процессов не только для трехмерных сред [17], но и для пространственно-временного континуума. Основные положения вариационного подхода Седова [18], используемого для описания диссипативных процессов, приведены в недавней работе [17]. Известно, что для обратимых процессов существует целый спектр функционалов, стационарность которых приводит к непротиворечивым формулировкам краевых задач [19]. В данной работе мы показываем эффективность использования вариационного уравнения Седова для моделирования диссипативных процессов и в случае нелинейных проблем механики, в том числе для нелинейной проблемы Навье-Стокса.

1. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Введем 4D-вектор перемещений R_i определяя его следующим образом: первыми тремя компонентами являются пространственные компоненты перемещений трехмерной среды r_i, четвертой компонентой – локальное неравномерное время R

$$R_i = r_i + ivRN_i \quad r_k = R_i\delta^*_{ik} \quad R = R_iN_i/(iv), \tag{1}$$

где N_i – орт времени, δ_{ij} – тензор Кронекера в 4D, $\delta^*_{ij} = \delta_{ij} - N_iN_j$ – тензор Кронекера в 3D, i – мнимая единица, v – нормирующий множитель, размерности скорости.

Наряду с 4D-вектором перемещений, кинематическая модель (1) содержит 4D-тензор второго ранга $R_{i,j}$ – тензор дисторсий.

2. СИЛОВАЯ МОДЕЛЬ

Воспользовавшись принципом возможных перемещений, можем записать следующее вариационное равенство

$$\delta A - \overline{\delta U} = \delta A - \int_V \sigma_{ij}\delta R_{i,j}dV = 0, \tag{2}$$

где $A = \int_V P^V_i R_i dV + \int_F P^F_i R_i dF$ – работа внешних 4D-объёмных P^V_i и внешних 4D-поверхностных P^F_i сил, $\overline{\delta U}$ – неинтегрируемая линейная вариационная форма аргументов $R_{i,j}$, возможная работа внутренних силовых факторов σ_{ij} на соответствующих возможных кинематических переменных $\delta R_{i,j}$.

Для обратимых процессов вариационная форма $\overline{\delta U}$ в (2) становится интегрируемой, причем полученный скаляр U_V имеет физический смысл 4D-объёмной плотности потенциальной энергии. Достаточными условиями интегрируемости вариационной формы $\overline{\delta U}$ являются обобщенные формулы Грина

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}}. \tag{3}$$

Таким образом, для обратимых процессов силовая модель (3) определяется обобщенными на 4D напряжениями σ_{ij}. Для пространственно-временного континуума 4D-тензор напряжений имеет в общем случае не девять компонент, а шестнадцать. Его можно представить разложением

$$\sigma_{ij} = \sigma^*_{ij} - (iv)\,p_iN_j + q_jN_i/(iv) + TN_iN_j, \tag{4}$$

где $\sigma^*_{ij} = \sigma_{pq}\delta^*_{ip}\delta^*_{jq}$ – 3D-тензор пространственных напряжений (в общем случае – девять компонент), $p_k = -\sigma_{ij}\delta^*_{ik}N_j/(iv)$ – 3D-вектор импульсов (в общем случае три компоненты), $q_k = (iv)\sigma_{ij}N_i\delta^*_{jk}$ – 3D-вектор теплового потока (в общем случае три компоненты), $T = \sigma_{ij}N_iN_j$ – разность локальной и глобальной температур (в общем случае одна компонента).

Необходимыми условиями интегрируемости вариационной формы $\overline{\delta U}$ в (2) являются соотношения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} - \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial R_{i,j}} = 0. \tag{5}$$

Необходимыми условиями неинтегрируемости вариационной формы $\overline{\delta U}$ являются соотношения

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} - \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial R_{i,j}} = 2\bar{C}_{ijmn}, \qquad (6)$$

где $\bar{C}_{ijmn}$ – тензорное поле, определяющее неинтегрируемость вариационной формы $\overline{\delta U}$.

Общие условия интегрируемости и неинтегрируемости вариационной формы для статических и динамических процессов приводятся в работе [17]. Случай интегрируемости, соответствует обратимым процессам, так как позволяет ввести потенциальную энергию. Для необратимых же процессов неинтегрируемая вариационная форма в вариационном уравнении Л.И.Седова [18] характеризует диссипативные процессы.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Следует обратить внимание на то, что в рассматриваемом четырехмерном континууме существует выделенное направление – орт времени N_i. Мы принимаем, поэтому, что свойства обобщенной четырёхмерной среды будут трансверсально-изотропными относительно направления времени.

Замечание. Обобщение, касающееся трансверсальной изотропии, представляется важным, так как оно позволило построить непротиворечивый вариант расширенной термодинамики [13-15]. В случаях физически-линейных обратимых процессов и стандартной форме плотности потенциальной энергии $U_V = (1/2) C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n}$ структура тензоров модулей упругости имеет вид

$$C_{ijmn} = \lambda \delta^*_{ij} \delta^*_{mn} + \mu\left(\delta^*_{im}\delta^*_{jn} + \delta^*_{in}\delta^*_{jm}\right) + C_1\left(N_i N_j \delta^*_{mn} + \delta^*_{ij} N_m N_n\right) +$$
$$+ C_2 N_i N_j N_m N_n + C_3 N_i N_m \delta^*_{jn} + C_4 \delta^*_{im} N_j N_n + C_5\left(N_i N_n \delta^*_{jm} + \delta^*_{in} N_j N_m\right).$$

Тензоры модулей упругости в этих уравнениях, естественно, подчиняются условиям потенциальности $C_{ijmn} = C_{mnij}$. Коэффициенты λ и μ являются, очевидно, адиабатическими коэффициентами Ламе классической теории упругости и определяют упругие свойства обычной теории упругости изотропного тела. Пять других постоянных $C_1, \ldots, C_5$ определяют трансверсильно-изотропные свойства рассматриваемой среды, так что общая симметрия свойств пространственно-временного континуума отсутствует.

Показано [13-15], что в противном случае (для изотропного пространственно-временного континуума), при симметрии, соответствующей условиям изотропии, 3D-вектор импульса p_k и 3D-вектор теплового потока q_k становятся коллинеарными. Более того, вектор теплового потока в соответствии с гипотезой Фурье, должен быть потенциальным, в то время как вектор импульсов в общем случае может иметь 3D-вихри. Указанные противоречия полностью устраняются введением трансверсальной изотропии. Следовательно, введение трансверсальной изотропии является фундаментальным качеством обобщенных моделей термодинамики сред, рассматриваемых на основе пространственно-временного континуума.

Дадим определение тензорному полю модулей обратимых свойств C_{ijmn} (в общем случае нелинейных)

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} = C_{ijmn}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получим для обратимых процессов

$$C_{ijmn} - C_{mnij} = 0. \tag{8}$$

Для необратимых процессов в общем случае имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} = C_{ijmn} + \overline{C}_{ijmn}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (6), и учитывая (8) найдем для диссипативных свойств

$$\overline{C}_{ijmn} + \overline{C}_{mnij} = 0. \tag{10}$$

В предположении физической линейности, тензорные поля модулей (9) не зависят от кинематических переменных и могут быть проинтегрированы в квадратурах

$$\sigma_{ij} = \left(C_{ijmn} + \overline{C}_{ijmn} \right) R_{m,n}. \tag{11}$$

В полученных уравнениях обобщенного закона Гука далее не будем разделять обратимые и диссипативные свойства, подразумевая в (11) под тензором $E_{ijmn} = C_{ijmn} + \overline{C}_{ijmn}$ не симметрированный согласно (8) и (10) тензор модулей. В результате, физически линейные уравнения закона Гука для напряжений будут иметь вид

$$\sigma_{ij} = E_{ijmn} R_{m,n}. \tag{12}$$

Предположим, что физически нелинейный тензор модулей E_{ijmn} в соответствии с определением (9) является функцией дисторсии. Тогда раскладывая E_{ijmn} в ряд Тейлора и, удерживая линейные по дисторсиям слагаемые, получим

$$E_{ijmn} = E^0_{ijmn} + E^1_{ijklmn} R_{k,l} + \ldots \tag{13}$$

Соответственно, уравнение физически нелинейного закона Гука (12), (13) приобретают вид

$$\sigma_{ij} = E^0_{ijmn} R_{m,n} + E^1_{ijklmn} R_{k,l} R_{m,n} + \ldots \tag{14}$$

Требование

$$E^1_{ijklmn} = E^1_{ijmnkl}$$

вытекает из условия интегрируемости соотношений (9). В общем случае трансверсально изотропный относительно орта N_i тензор модулей шестого ранга в (14) содержит 76 базисных тензоров и, соответственно, в общем случае, 76 независимых модулей. Такое громадное разнообразие физико-механических свойств требует отдельного исследования, выходящего за рамки настоящей работы, и будет опубликовано отдельно.

4. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Учитывая принцип возможных перемещений можно записать

$$\begin{aligned} \delta A - \overline{\delta U} &= \delta A - \int_V \sigma_{ij} \delta R_{i,j} dV = \\ &= \int_V \left(\sigma_{ij,j} + P_i^V \right) \delta R_i dV + \int_F \left(P_i^F - \sigma_{ij} n_j \right) \delta R_i dF = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь n_k – орт нормали к гиперповерхности F, ограничивающей объём пространства событий V.

Как следствие, из вариационного уравнения (15) получаем уравнения движения, пространственные проекции которого дают уравнения равновесия/движения, а временная проекция – уравнение теплового баланса

$$\sigma_{ij,j} + P_i^V = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left(\sigma_{ij,j} + P_i^V\right)\delta_{ik}^* = 0 \\ \left(\sigma_{ij,j} + P_i^V\right)N_i = 0 \end{cases}. \tag{16}$$

Тензор 4D-напряжений в (16) может быть представлен в виде разложения по пространственным, смешанным и временному направлениям (4). Получим

$$\begin{cases} \left(\sigma_{im}\delta_{ik}^*\delta_{mn}^*\right)_{,n} + \dot{\sigma}_{im}\delta_{ik}^* N_m \big/ (iv) + P_i^V \delta_{ik}^* = 0 \\ \left(\sigma_{im}N_i\delta_{mn}^*\right)_{,n} + \left(\sigma_{im}N_iN_m\right)_{,n} N_n + P_i^V N_i = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{kj,j}^* - \dot{p}_k + p_k^{V*} = 0 \\ q_{n,n} + \dot{T} + p^V = 0 \end{cases}. \tag{17}$$

Здесь $P_i^V = p_i^{V*} + p^V N_i \big/ (iv)$, $p_i^{V*} = P_j^V \delta_{ji}^*$ – 3D-объёмная плотность внешних сил, $p^V = P_i^V N_i \big/ (iv)$ – плотность распределенных по 3D-объёму источников/стоков тепловых мощностей.

Частным случаем уравнений движения в (17) являются уравнения движения классической механики сплошной среды, если

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijmn} r_{m,n} \qquad p_k = \rho \dot{r}_k.$$

Другим частным случаем уравнений движения в (17) являются различные обобщения линейных уравнений Навье-Стокса, если

$$\sigma_{ij}^* = p\delta_{ij}^* \big/ 3 \qquad p_k = p_k\left(r_i, \dot{r}_i, \ldots\right),$$

где $p = \sigma_{ij}^*\delta_{ij}^*$ – давление в среде, $p_i = -\sigma_{mn}\delta_{mi}^* N_n \big/ (iv)$ – 3D-импульс, различные зависимости которого от 3D-вектора перемещений будут представлять различные модели линейных уравнений Навье-Стокса.

Частным случаем уравнения теплового баланса в (17) является уравнение классической теплопроводности, если

$$q_n = -\left(k/c\right) T_{,n} \big/ (iv),$$

где $\left(k/c\right)$ – коэффициент температуропроводности, k – коэффициент теплопроводности, c – удельная теплоёмкость среды.

Заметим, что, используя различные варианты нелинейного уравнения закона Гука для импульса и нелинейного уравнения закона Гука для теплового потока можно построить спектр теорий связанных процессов термо-гидро-механики и теплообмена. Примеры некоторых вариантов будут приведены ниже.

5. МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ ДАРСИ

Наиболее простой моделью гидродинамики является физически линейная модель Дарси [8], которая способна описать только ламинарные течения. Канал диссипации, определяющий гидродинамику Дарси, имеет структуру

$$\overline{\delta U_1} = \frac{1}{2}\int_0^t \int_V \frac{\eta}{h_m^2}\left(r_i \delta \dot{r}_i - \dot{r}_i \delta r_i\right) dV dt. \tag{18}$$

Здесь: η – динамическая вязкость жидкости, h_m^2 – коэффициент проницаемости Дарси, h_m – толщина «длинного» погранслоя жидкости.

Модель гидродинамики Дарси определяется следующим вариационным уравнением Седова

$$\delta L + \overline{\delta U_1} = 0. \tag{19}$$

Здесь: δL – вариация лагранжиана, $\overline{\delta U_1}$ – линейная неинтегрируемая вариационная форма (в отличие от первого слагаемого, не равная вариации некоторого функционала U_1).

Будем в (19) и далее во всех последующих моделях принимать лагранжиан в обратимой части одинаковым, дающим в соответствующих уравнениях движения слагаемое с градиентом давления, определяемое первым слагаемым лагранжиана, и слагаемое с силой инерции, определяемое вторым слагаемым лагранжиана

$$L = A - \frac{1}{2}\int_0^t \int_V \left(-\xi r_{i,i} r_{j,j} + \rho \dot{r}_i \dot{r}_i\right) dV dt.$$

Раскрывая вариацию лагранжиана и неинтегрируемую вариационную форму (18), получим вариационное уравнение Седова для этого случая

$$\begin{gathered}\int_0^t \int_V \left(-\frac{\eta}{h_m^2}\dot{r}_i - \rho \ddot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*}\right)\delta r_i dV dt + \int_0^t \int_F \left(p_i^{F*} - p n_i\right)\delta r_i dF dt + \\ + \int_V \left(\rho \dot{r}_i + \frac{1}{2}\frac{\eta}{h_m^2} r_i\right)\delta r_i dV\Big|_0^t = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

Если, согласно принципу Даламбера, учесть силы инерции во внешней нагрузке, уравнения движения в (20) приобретут вид уравнений стационарного процесса

$$\eta \dot{r}_i = K^D\left[p_{,i} + \left(p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i\right)\right]. \tag{21}$$

Можно видеть, что три уравнения движения (21) являются уравнениями гидродинамики Дарси. Здесь введен коэффициент проницаемости Дарси

$$K^D = h_m^2.$$

В отличие от его традиционной трактовки как свойства проницаемости фильтрующей среды для данной жидкости, его физический смысл – квадрат толщины h_m «длинного» погранслоя, характерного для данной жидкости.

6. МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассмотрим теперь модель среды, которая содержит вариацию того же лагранжиана, что и предыдущая, а вот канал диссипации выбран другим, приводящим к линейной модели гидродинамики Навье-Стокса. Канал диссипации, определяющий гидродинамику Навье-Стокса запишем в виде

$$\overline{\delta U_2} = \frac{1}{2}\int_0^t \int_V \eta\left(r_{i,j}\delta \dot{r}_{i,j} - \dot{r}_{i,j}\delta r_{i,j}\right) dV dt. \tag{22}$$

Модель гидродинамики Навье-Стокса определяется следующим вариационным уравнением Седова

$$\delta L + \overline{\delta U_2} = 0. \tag{23}$$

Здесь: δL – вариация лагранжиана, записанного выше для предыдущей модели, $\overline{\delta U_2}$ – линейная неинтегрируемая вариационная форма (в отличие от первого слагаемого, не равна вариации некоторого функционала U_2).

Раскрывая в (23) вариацию лагранжиана и неинтегрируемую вариационную форму (22), получим вариационное уравнение Седова

$$\begin{gathered}\int_0^t\int_V\left(\eta\Delta\dot r_i-\rho\ddot r_i+p_{,i}+p_i^{V*}\right)\delta r_i dVdt+\int_0^t\int_F\left(p_i^{F*}-pn_i-\eta\dot r_{i,j}n_j\right)\delta r_i\}\,dFdt+\\+\left[\int_V(\rho\dot r_i-\frac{1}{2}\eta\Delta r_i)\delta r_i dV+\int_F\frac{1}{2}\eta r_{i,j}n_j\delta r_i dF\right]\Bigg|_0^t=0.\end{gathered}\tag{24}$$

В результате уравнения линейной гидродинамики Навье-Стокса, приобретают следующий вид

$$\eta\Delta\dot r_i+p_{,i}+\left(p_i^{V*}-\rho\ddot r_i\right)=0.$$

7. МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИКИ БРИНКМАНА

Эта модель содержит вариацию того же лагранжиана, что и предыдущие модели, а вот каналы диссипации (18) и (22) учтены оба. Этот вариант приводит к обобщению предыдущих моделей гидродинамики: модели гидродинамики Навье-Стокса-Дарси, позволяющей описывать масштабные эффекты в гидродинамике.

Вариационное уравнение Седова этой модели содержит оба канала диссипации

$$\delta L+\overline{\delta U_1}+\overline{\delta U_2}=0.\tag{25}$$

Раскрывая вариацию лагранжиана и неинтегрируемые вариационные формы в (25), получим вариационное уравнение Седова этой обобщенной модели.

После взятия по частям получим

$$\begin{gathered}\int_0^t\left[\int_V\left(\eta\Delta\dot r_i-\frac{\eta}{h_m^2}\dot r_i-\rho\ddot r_i+p_{,i}+p_i^{V*}\right)\delta r_i dV+\right.\\\left.+\int_F\left(p_i^{F*}-pn_i-\eta\dot r_{i,j}n_j\right)\delta r_i dF\right]dt+\\+\left\{\int_V\left[\rho\dot r_i+\frac{1}{2}\eta\left(-\Delta r_i+\frac{1}{h_m^2}r_i\right)\right]\delta r_i dV+\right.\\\left.+\int_F\left(\frac{1}{2}\eta r_{i,j}n_j\delta r_i\right)dF\right\}\Big|_0^t=0.\end{gathered}\tag{26}$$

В результате, из вариационного уравнения (26) найдем разрешающие уравнения в следующем виде

$$\eta\Delta\dot r_i-\frac{\eta}{h_m^2}\dot r_i+p_{,i}+p_i^{V*}-\rho\ddot r_i=0.\tag{27}$$

Если пренебречь в (27) первым и вторым слагаемыми, получим уравнения закона Паскаля

$$p_{,i}+p_i^{V*}-\rho\ddot r_i=0.$$

Считая первое слагаемое в (27) малым, получим уравнения Дарси

$$\eta \dot{r}_i = K^D \left(p_{,i} + p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i \right).$$

Далее, если пренебречь в (27) вторым слагаемым, получим уравнения Навье-Стокса

$$\eta \Delta \dot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i = 0.$$

Как известно, уравнения гидродинамики Дарси определяют постоянный по поперечным координатам профиль скоростей в капилляре. Уравнения Навье-Стокса определяют параболический профиль скоростей, известный как закон Пуазейля. Ни в том, ни в другом случае невозможно объяснить наличие и определить толщину погранслоя, возникающего у стенок капилляра. Обнаружить существование и определить толщину погранслоя удается только в рамках гидродинамики Бринкмана, когда в уравнениях гидродинамики учитываются как первое, так и второе слагаемое. Тогда относительно скорости уравнения имеют вид неоднородных уравнений Гельмгольца, описывающих погранслой с характерной толщиной равной h_m.

8. МОДЕЛЬ ГРАДИЕНТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Рассмотрим более сложную модель. Полагаем, что эта модель содержит вариацию того же лагранжиана, с учетом каналов диссипации (18) и (22), но дополнительно вводится новый, третий канал, связанный с вариациями кривизны

$$\overline{\delta U_3} = \frac{1}{2} \int_0^t \int_V \eta h_g^2 \left(r_{i,j} \delta \Delta \dot{r}_{i,j} - \Delta \dot{r}_{i,j} \delta r_{i,j} \right) dV dt. \tag{28}$$

В результате с учетом (28) вариационный формализм позволяет получить обобщение линейных уравнений Навье-Стокса до системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$-\eta h_g^2 \Delta \Delta \dot{r}_i + \eta \Delta \dot{r}_i - \frac{\eta}{h_m^2} \dot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i = 0.$$

Введенный канал диссипации позволяет получить некоторые качественные результаты, в частности, дает возможность объяснить введение параметра h_g как длины h_g «короткого», градиентного погранслоя.

9. ОБОБЩЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассмотрим уравнение Седова (15), с физически нелинейными уравнениями закона Гука в виде (14)

$$\delta A - \overline{\delta U} = \delta A - \int_V \sigma_{ij} \delta R_{i,j} dV = \delta A - \int_V \left[\delta \left(\sigma_{ij} R_{i,j} \right) - R_{i,j} \delta \sigma_{ij} \right] dV =$$

$$= \delta \left[A - \int_V \sigma_{ij} R_{i,j} dV \right] + \int_V R_{i,j} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial R_{m,n}} \delta R_{m,n} dV =$$

$$= \delta \left[A - \int_V \sigma_{ij} R_{i,j} dV \right] + \int_V E_{mnij} R_{m,n} \delta R_{i,j} dV.$$

Исследуем кратко структуру последнего слагаемого в последнем равенстве. Учитывая нелинейное определяющее соотношение (14), получим

$$\begin{aligned}
&\int_V E_{mnij} R_{m,n} \delta R_{i,j} dV = \int_V \Big[\left(E_{mnij} + E_{ijmn} \right) \Big/ 2 + \left(E_{mnij} - E_{ijmn} \right) \Big/ 2 \Big] \\
&\quad \Big[\left(R_{m,n} \delta R_{i,j} + R_{i,j} \delta R_{m,n} \right) \Big/ 2 + \left(R_{m,n} \delta R_{i,j} - R_{i,j} \delta R_{m,n} \right) \Big/ 2 \Big] dV = \\
&\quad = \int_V \Big[\left(E_{mnij} + E_{ijmn} \right) \left(R_{m,n} \delta R_{i,j} + R_{i,j} \delta R_{m,n} \right) \Big/ 4 + \\
&\quad + \left(E_{mnij} - E_{ijmn} \right) \left(R_{m,n} \delta R_{i,j} - R_{i,j} \delta R_{m,n} \right) \Big/ 4 \Big] dV = \\
&\quad = \int_V \Big[C_{ijmn} \delta \left(R_{m,n} R_{i,j} \right) \Big/ 2 + \bar{C}_{ijmn} \left(R_{i,j} \delta R_{m,n} - R_{m,n} \delta R_{i,j} \right) \Big/ 2 \Big] dV.
\end{aligned} \tag{29}$$

Если постулировать независимость тензора обратимых термомеханических свойств C_{ijmn} от компонентов дисторсии, первое слагаемое в(29) станет вариацией некоторого функционала и в этом случае становится возможным так же, как и в физически линейной теории, представить структуру уравнения Седова как сумму вариации некоторого функционала, определяющего обратимые процессы и простейших неинтегрируемых линейных вариационных форм (каналов диссипации), определяющих диссипативные процессы

$$\begin{aligned}
\delta A - \overline{\delta U} &= \delta \left[A - \int_V \left(\sigma_{ij} R_{i,j} - \frac{1}{2} C_{ijmn} R_{i,j} R_{m,n} \right) dV \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_V \bar{C}_{ijmn} \left(R_{i,j} \delta R_{m,n} - R_{m,n} \delta R_{i,j} \right) dV.
\end{aligned} \tag{30}$$

Как и в предыдущих примерах, будем постулировать с целью упрощения, что обратимая часть в (30) определяется только слагаемыми, дающими в уравнениях движения градиент давления и классические инерционные силы. Как частный случай рассмотрим выражение для 3D-импульса

$$\begin{aligned}
p_i &= -\sigma_{ab} \delta^*_{ai} N_b \big/ (iv) = -\left(E^0_{abmn} \delta^*_{ai} N_b + E^1_{abklmn} \delta^*_{ai} N_b R_{k,l} + \ldots \right) R_{m,n} = \\
&\quad = -g^0_{imn} R_{m,n} - g^1_{iklmn} R_{k,l} R_{m,n} + \ldots
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{cases} g^0_{imn} = E^0_{abmn} \delta^*_{ai} N_b \big/ (iv) \\ g^1_{iklmn} = E^1_{abklmn} \delta^*_{ai} N_b \big/ (iv) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g^0_{imn} N_i = 0 \\ g^1_{iklmn} N_i = 0 \end{cases}$$

Достаточно кропотливые выкладки, связанные с анализом возможной структуры тензоров модулей упругости, показывают, что нелинейная часть уравнений закона Гука для импульсов в (31) при отсутствии тепловых процессов имеет вид

$$p_i = g^1_{iklmn} R_{k,l} R_{m,n} = B_1 2 \dot{r}_i r_{m,m} \big/ (iv) + B_2 2 \dot{r}_k r_{k,i} \big/ (iv) + B_3 2 \dot{r}_k r_{i,k} \big/ (iv)$$

и, соответственно,

$$\dot{p}_i = B_1 2 \left(\ddot{r}_i r_{m,m} + \dot{r}_i \dot{r}_{m,m} \right) \big/ (iv) + B_2 2 \left(\ddot{r}_k r_{k,i} + \dot{r}_k \dot{r}_{k,i} \right) \big/ (iv) + B_3 2 \left(\ddot{r}_k r_{i,k} + \dot{r}_k \dot{r}_{i,k} \right) \big/ (iv),$$

где B_1, B_2, B_3 – некоторые постоянные.

Отсюда видно, что второе слагаемое в последнем равенстве при множителе B_3 определяет классическое конвективное слагаемое, которое имеет место в нелинейных уравнениях Навье-Стокса. В целом, рассмотренное обобщение содержит пять дополнительных нелинейных слагаемых. Два дополнительных можно отнести к группе слагаемых, определяющих какие-то дополнительные конвективные эффекты, а оставшиеся определяют какие-то инерционные эффекты, связанные ускорениями. В результате обобщение нелинейных уравнений Навье-Стокса имеет следующий вид

$$-B_1 2\left(\ddot{r}_i r_{m,m} + \dot{r}_i \dot{r}_{m,m}\right) \Big/ (iv) - B_2 2\left(\ddot{r}_k r_{k,i} + \dot{r}_k \dot{r}_{k,i}\right) \Big/ (iv) -$$
$$- B_3 2\left(\ddot{r}_k r_{i,k} + \dot{r}_k \dot{r}_{i,k}\right) \Big/ (iv) + \eta \Delta \dot{r}_i + p_{,i} + p_i^{V*} - \rho \ddot{r}_i = 0.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показана эффективность использования вариационного подхода, применённого к анализу пространственно- временного континуума и обобщения вариационного уравнения Седова для формулировки моделей деформирования и теплообмена с учетом процессов диссипации и распространение его на формулировки нелинейных моделей, в том числе и нелинейных уравнений Навье-Стокса. Рассмотрены примеры различных гидродинамических моделей в отсутствие теплообмена в среде. Построены соответствующие модели гидродинамики Дарси, линейной гидродинамики Навье-Стокса, гидродинамики Бринкмана, градиентной гидродинамики и некоторого обобщения классической нелинейной гидродинамики Навье-Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвиенко В.Н., Кирсанов Е.А. *Вязкость и структура дисперсных систем* // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 2. Химия. – 2011. – Т.52. – №4. – С.243-276.
2. Kovtun Al.A. *On the bio model equations and their modifications* // Vopr. Geofiz., Uch. Zap. SPbGU. – 2011. – №4. – Pp.3-25.
3. Biot M. A. *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media* // J. Appl. Phys. – 1962. – Vol.33. – Pp.1482-1498.
4. Kaya T., Goldak J. *Numerical analysis of heat and mass transfer in the capillary structure of a loop heat pipe* // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2006. – Vol.49. – Pp.3211-3220.
5. Sonar R., Hardman S., Pell J., Leger A., Faks M. *Transient thermal and hydrodynamic model of flat heat pipe for the cooling of electronics components* // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2008. – Vol.51. – Pp.6006-6017.
6. Storring S. *Dissertation* / Dep. Mech. Aerospace Eng., Carleton Univ., Ottawa, Ontario, Canada, 2006.
7. Babin B.R., Peterson G.P., Wu D. *Steady-state modeling and testing of micro heat pipe* // J. Heat Transfer. – 1990. – Vol.112. – Pp.595-601.
8. Darcy H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitumen*. – Paris: V. Dalmont, 1856. – 647 p.
9. Lefevre F., Lallemand M. *Coupled thermal and hydrodynamic models of flat micro heat pipes for the cooling of multiple electronic components* // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2006. – Vol.49. – Pp.1375-1383.
10. Sieder B., Sartre V., Lefevre F. *Literature review: Steady-state modelling of loop heat pipe* // Appl.Therm. Eng. – 2015. – Vol.75. – Pp.709-723.

11. Лурье С.А., Белов П.А., Яновский Ю.Г. *О моделировании теплопереноса в динамически деформируемых средах* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2000. – Т.6. – №3. – С.436-444.
12. Belov P.A., Gorshkov A.G., Lurie S.A. *Variational model of nonholonomic 4D-Media* // Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela. – 2006. – Vol.6. – Pp.29-46.
13. Belov P.A., Lurie S.A. *Ideal nonsymmetric 4D-medium as a model of invertible dynamic thermoelasticity* // Mech. Solids. – 2011. – Vol.52. – Pp.243-276.
14. Lurie S.A., Belov P.A. *Theory of space-time dissipative elasticity and scale effects* // NanoMMTA. – 2013. – Vol.2. – Pp.166-178.
15. Lurie S.A., Belov P.A. *On the nature of the relaxation time, the Maxwell-Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity* // Continuum Mech. Thermodyn. – 2018.
16. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O. *Mechanistic model of generalized non-antisymmetrical electrodynamics* // Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Advanced Structured Materials. – 2019. – Vol.103. – Pp.379-394.
17. Belov P.A., Lurie S.A. *On variation models of the irreversible processes in mechanicsof solids and generalized hydrodynamics* // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2019. – Vol.40. – №7. – Pp.896-910.
18. Седов Л.И. *Математические методы построения новых моделей сплошных сред* // Успехи математических наук. – 1965. – Т.20. – Вып.5. – №125. – С.121-180.
19. Ланцош К. *Вариационные принципы механики*. – М.: Изд-во МИР, 1965. – 408 с.

REFERENCES

1. Matvienko V.N., Kirsanov E.A. *Vyazkost' i struktura dispersnykh sistem [Viscosity and structure of disperse systems].* Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 2. Khimiya, 2011, Vol.52, No.4, Pp.243-276.
2. Kovtun Al.A. *On the bio model equations and their modifications.* Vopr. Geofiz., Uch. Zap. SPbGU, 2011, No.4, Pp.3-25.
3. Biot M.A. *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* J. Appl. Phys., 1962, Vol.33, Pp.1482-1498.
4. Kaya T., Goldak J. *Numerical analysis of heat and mass transfer in the capillary structure of a loop heat pipe.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 2006, Vol.49, Pp.3211-3220.
5. Sonar R., Hardman S., Pell J., Leger A., Faks M. *Transient thermal and hydrodynamic model of flat heat pipe for the cooling of electronics components.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 2008, Vol.51, Pp.6006-6017.
6. Storring S. *Dissertation.* Dep. Mech. Aerospace Eng., Carleton Univ., Ottawa, Ontario, Canada, 2006.
7. Babin B.R., Peterson G.P., Wu D. *Steady-state modeling and testing of micro heat pipe.* J. Heat Transfer, 1990, Vol.112, Pp.595-601.
8. Darcy H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon. Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d'eau: ouvrage terminé par un appendice relatif aux fournitures d'eau de plusieurs villes au filtrage des eaux et à la fabrication des tuyaux de fonte, de plomb, de tole et de bitumen*. Paris: V. Dalmont, 1856, 647 p.

9. Lefevre F., Lallemand M. *Coupled thermal and hydrodynamic models of flat micro heat pipes for the cooling of multiple electronic components.* Int. J. Heat and Mass Transfer, 2006, Vol.49, Pp.1375-1383.
10. Sieder B., Sartre V., Lefevre F. *Literature review: Steady-state modelling of loop heat pipe.* Appl. Therm. Eng., 2015, Vol.75, Pp.709-723.
11. Lur'e S.A., Belov P.A., Yanovskij Yu.G. *O modelirovanii teploperenosa v dinamicheski deformiruemykh sredakh [On the simulation of heat transfer in dynamically deformable media]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2000, Vol.6, No.3, Pp.436-444.
12. Belov P.A., Gorshkov A.G., Lurie S. A. *Variational model of nonholonomic 4D-Media*. Izv. Akad. Nauk, Mekh. Tverd. Tela, 2006, Vol.6, Pp.29-46.
13. Belov P.A., Lurie S.A. *Ideal nonsymmetric 4D-medium as a model of invertible dynamic thermoelasticity*. Mech. Solids, 2011, Vol.52, Pp.243-276.
14. Lurie S.A., Belov P.A. *Theory of space-time dissipative elasticity and scale effects.* NanoMMTA, 2013, Vol.2, Pp.166-178.
15. Lurie S.A., Belov P.A. *On the nature of the relaxation time, the Maxwell-Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity.* Continuum Mech. Thermodyn., 2018.
16. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O. *Mechanistic model of generalized non-antisymmetrical electrodynamics*. Dynamical Processes in Generalized Continua and Structures, Advanced Structured Material, 2019, Vol.103, Pp.379-394.
17. Belov P.A., Lurie S.A. *On variation models of the irreversible processes in mechanicsof solids and generalized hydrodynamics.* Lobachevskii J. of Mathematics, 2019, Vol.40, No.7, Pp.896-910.
18. Sedov L.I. *Matematicheskie metody postroeniya novykh modelej sploshnykh sred [Mathematical methods for constructing new models of continuous media]*. Uspekhi matematicheskikh nauk, 1965, Vol.20, Iss.5, No.125, Pp.121-180.
19. Lancosh K. *Variatsionnye printsipy mekhaniki [Variational principles of mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo MIR, 1965, 408 p.

Поступила в редакцию 23 сентября 2019 года.

Сведения об авторах:

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: belovpa@yandex.ru

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., проф., г.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru