

УДК 539.37

## ИНДИКАТОРЫ НЕПРИМЕНИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПО ДАННЫМ ИСПЫТАНИЙ МАТЕРИАЛА НА ПОЛЗУЧЕСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ С НАЛОЖЕНИЕМ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ\*

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Исследуются арсенал возможностей и индикаторы границы области применимости линейного определяющего соотношения вязкоупругости для нестареющих изотропных реономных материалов. Рассматриваемое соотношение пренебрегает влиянием шаровой и девиаторной частей тензоров напряжений и деформаций друг на друга и влиянием их третьих инвариантов (параметров Лоде-Надаи) и содержит две произвольные материальные функции одного аргумента (функции объемной и сдвиговой ползучести), которые предполагаются положительными, дифференцируемыми, возрастающими и выпуклыми вверх на положительной полуоси. Аналитически изучены общие свойства семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести, порождаемых этим соотношением при одноосном нагружении постоянной нагрузкой в сочетании с постоянным гидростатическим давлением и их зависимость от характеристик обеих функций ползучести и уровней осевого напряжения и давления. Доказано, что линейная теория вязкоупругости способна моделировать немонотонное изменение и знакопеременность осевой и поперечной деформаций, исследованы условия наличия у них точек экстремума и перегиба.

Найдены несколько специфичных общих свойств кривых ползучести и объемной и продольной податливостей, которые удобно контролировать и использовать как индикаторы (не)применимости линейной теории по данным серии испытаний материала на ползучесть при совместном действии растягивающей силы и гидростатического давления. Более точное определение границы области линейности (локализация и сужение пограничной зоны) важно не только для описания линейного поведения какого-либо конкретного материала, но и для идентификации нелинейных моделей и описания поведения в нелинейной области. Предложен простой способ идентификации определяющего соотношения: выведены явные формулы, позволяющие определить обе функции ползучести по двум экспериментальным кривым осевой податливости материала с разными значениями отношения давления к растягивающему напряжению.

**Ключевые слова:** вязкоупругость; объемная ползучесть; кривые осевой и поперечной ползучести; осевая и объемная податливости, граница области линейности, индикаторы неприменимости, идентификация

## APPLICABILITY INDICATORS OF THE LINEAR VISCOELASTICITY THEORY USING CREEP CURVES UNDER TENSILE LOAD COMBINED WITH CONSTANT HYDROSTATIC PRESSURE

Khokhlov A.V.

*Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №17-08-01146\_a).

## ABSTRACT

The Boltzmann-Volterra linear constitutive equation for isotropic non-aging visco-elastic materials (with an arbitrary shear and bulk creep compliances) is studied analytically in order to find out its capabilities to provide an adequate qualitative description of rheological phenomena related to creep under uni-axial loading combined with constant hydrostatic pressure and to outline the material functions governing abilities, to indicate application field boundaries of the relation and to develop identification and verification techniques. The constitutive equation doesn't involve the third invariants of stress and strain tensors and implies that their hydrostatic and deviatoric parts don't depend on each other. It is governed by two material functions of a positive real argument (that is shear and bulk creep compliances); they are implied to be positive, differentiable, increasing and convex up functions. General properties and characteristic features of the creep curves for volumetric, longitudinal and lateral strain generated by the linear equation under constant tensile load and constant hydrostatic pressure are investigated. Their dependences on pressure and tensile stress levels and the material functions qualitative characteristics, the conditions for creep curves monotonicity and for existence of extrema and sign changes of strains are in the focus of attention. In particular, it is proved that the linear relation is able to simulate non-monotone behavior and sign changes of lateral and axial strains.

The analysis reveals a number of specific features and quantitative characteristics of the theoretic creep curves which can be employed as the applicability or non-applicability indicators of the linear viscoelasticity theory. They are convenient to check using data of a material creep tests with various levels of pressure and tensile stress. More detailed and precise indication of phenomenological restrictions for the linear viscoelasticity theory and enclosure of linear behavior range of a rheonomic material is also significant for identification of non-linear models and simulation of a material behavior in non-linear range. A simple and effective identification technique is developed. It is based on two creep tests with different pressures and implies measurement of axial compliance in each test (i.e. axial creep curve divided by the stress level). The explicit formulas are derived to determine the shear and bulk creep compliances via experimental axial compliances.

**Keywords:** viscoelasticity; volumetric creep; longitudinal and lateral creep curves; axial and volumetric compliances; linear range boundaries; non-applicability indicators; identification

## ВВЕДЕНИЕ

Точное знание возможностей и границ применимости линейной теории вязкоупругости [1-14] и имманентных свойств порождаемых ею базовых теоретических кривых, вытекающих из постулатов наследственности, линейности и инвариантности относительно сдвигов по времени интегральных операторов, связывающих истории напряжений и деформаций, необходимо для грамотного моделирования, полезно для выбора или построения более сложных и точных моделей поведения реономных материалов, использующих линейную теорию наследственности и обобщающих ее в определённых аспектах, для совершенствования расчётных схем и методов расчёта конструкций. Линейная теория играет роль своеобразного «окуляра», «системы отсчёта», «эталонной» сетки реперных точек, фундамента для наблюдения и анализа физически и геометрически нелинейного поведения материалов и различных эффектов (отклонений от предсказаний линейной модели как начального приближения), для построения, калибровки и сопоставления математических моделей.

Данная статья продолжает цикл работ [15-21] (и др.) по системному исследованию комплекса моделируемых реологических эффектов и границ

области применимости линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости Больцмана-Вольтерры

$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Pi s_{ij}(t), \quad \theta = \Pi_0 \sigma_0, \quad (1)$$

$$\sigma_0(t) = \sigma_{ii}(t)/3, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \theta(t) = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t),$$

$$\Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad t > 0, \quad (2)$$

с двумя произвольными материальными функциями  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  (функциями сдвиговой и объемной ползучести) и физически нелинейного ОС

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad (3)$$

$$L(t) = \Pi \sigma, \quad L_0(t) = \Pi_0 \sigma_0$$

с четырьмя материальными функциями  $\Pi(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ . ОС (3) – один из вариантов распространения на трехосный случай [4,22] нелинейного уравнения  $\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau)$ , предложенного Ю.Н. Работновым [23,24] в качестве обобщения одноосного линейного ОС (1) путем введения второй материальной функции  $\varphi(u)$  (подробную библиографию по этим темам см. в работах [15-20]).

ОС (1) и (3) описывают изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных сред; они связывают истории изменения тензоров (малых) деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$  и напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  в точке тела в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$  (т.е. независимости объемной деформации  $\theta(t)$  от касательных напряжений, а деформаций сдвига – от среднего напряжения  $\sigma_0(t)$ ) и пренебрегая влиянием третьих инвариантов тензоров (или их параметров Лоде). Функции ползучести (ФП)  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$  в (1) предполагаются положительными, дифференцируемыми и возрастающими на  $(0; \infty)$  [1,4-6,9,10,12-14] и выпуклыми вверх [2,3,15-17], входные процессы  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  – кусочно-гладкими при  $t > 0$ , а время и напряжения – безразмерными. Множитель  $3/2$  вынесен из ФП  $\Pi(t)$  в (1) для удобства сравнения с результатами анализа нелинейного ОС (3) [21].

Детально изучить возможности линейной теории с произвольными ФП необходимо, чтобы точно знать круг тех эффектов, которые можно и которые заведомо нельзя описать линейным ОС (в указанном диапазоне температур, деформаций и скоростей деформаций), сферы влияния материальных функций и признаки нелинейности поведения материала. В настоящее время такие списки эффектов и признаков отсутствуют. Нередко случается, что некоторые эффекты, обнаруженные в испытаниях, считаются исследователями признаками нелинейности специфических классов материалов [25-32], а их моделирование – достижением и преимуществом предлагаемых нелинейных ОС, хотя можно доказать, что линейное ОС (1) их (качественно) описывает [15-17], и, следовательно, они присущи всем (почти всем) материалам с наследственностью, работающим в линейной области (при достаточно малых деформациях и скоростях). Детальное знание арсенала возможностей ОС (1)

поможет исключить неверные интерпретации данных испытаний и ложные установки при выборе ОС для их описания. Необходимо системное исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, порождаемых ОС (1) с произвольными ФП при разных типовых программах нагружения, их зависимостей от параметров нагружения и характеристик ФП и удобных для проверки по данным тех или иных испытаний материалов индикаторов неприменимости линейного ОС (1) (маркеров границы области линейности поведения материала), в частности, по данным испытаний при сложном напряженном состоянии, вызванном наложением гидростатического давления на одноосное нагружение (сдвиг или растяжение-сжатие).

Идентификация границы области линейности (локализация и сужение пограничной зоны) важна не только для описания поведения конкретного материала, в частности, для ответа на вопрос, можно ли его описать линейным ОС и применима ли к нему гипотезы о температурно-временной или баро-временной аналогии, но и для описания его поведения в нелинейной области. Дело в том, что в большинстве случаев, идентификация нелинейных моделей проводится в два этапа: чтобы упростить (расщепить) нелинейную систему уравнений для определения материальных функций и параметров, сначала часть неизвестных определяют в предположении линейности поведения материала, «зануляя» или задавая остальные функции и параметры, отвечающие за отклонения от линейности, а затем, фиксируя найденные функции и параметры, находят остальные по данным испытаний материала за пределами диапазона линейности свойств материала. Естественно, результаты (погрешности) такой технологии идентификации существенно зависят от достоверности определения диапазона линейности по данным испытаний (от «полноты» данных и качества их обработки и трактовки), и погрешность, приобретенная на первом этапе идентификации, влечет «умножение» погрешности результатов на втором: задачи идентификации, относятся к классу обратных задач, они, как правило, математически некорректны и даже небольшая погрешность в «начальных» данных, получаемых на первом этапе, может привести к резкому росту погрешности на втором этапе.

К сожалению, разработке арсенала математических средств для определения и уточнения области линейности не уделяется должного внимания (в частности, в монографиях [1-12]), и в конкретных случаях (в работах квалифицированных авторов, посвященных моделированию и идентификации моделей) он фактически, назначается с большой степенью произвола по данным весьма грубых (нередко визуальных) оценок минимального набора кривых (кривых податливости или модулей релаксации или изохронных кривых ползучести). Как правило, эти «оценки» даже не имеют выражения в количественных характеристиках: в установленных допусках определенных норм отклонений каких-либо четко определенных величин, а данные испытаний нередко односторонни и не достаточны (по разнообразию и сложности программ нагружения, по диапазону уровней нагрузки и скоростей деформации, по продолжительности опытов). Проблему с индикаторами (критериями) линейности можно проиллюстрировать на одном простом примере. Общепринятое требование независимости осевой податливости в испытаниях материала на одноосную ползучесть от заданного уровня осевого напряжения  $\bar{\sigma}$  (или эквивалентное условие прямолинейности всех изохронных кривых ползучести) – только необходимое условие линейности интегральных операторов, связывающих

истории тензоров напряжений и деформаций. Даже математически точное выполнение этого условия для *всех* кривых ползучести (КП) с любым  $\bar{\sigma}$  (а не только приближенное выполнение для нескольких экспериментальных кривых) не гарантирует линейности интегрального оператора вида (2) – только его однородность степени один (без аддитивности) на одномерных подпространствах функций, пропорциональных функции Хевисайда и её сдвигам вправо (если дополнительно известно, что оператор инвариантен относительно сдвигов по времени, т.е. материал стабилен, не стареет). В точности то же самое можно сказать о другом общепринятом «условии линейности»: о требовании независимости модуля релаксации (в испытаниях на одноосную релаксацию с разными уровнями деформации) от уровня деформации. Тем не менее, в сотнях статей, монографий и диссертаций (как в России, так и во всём мире) регулярно повторяется утверждение (оно стало общим местом, банальностью): «если в испытаниях на ползучесть при одноосном нагружении установлено, что податливость при ползучести не зависит от уровня напряжения (или: «если изохронные кривые ползучести, построенные по данным испытаний, приблизительно прямолинейны»), то материал ведёт себя линейно и можно применять линейное ОС вязкоупругости» (см., например, [1-14,26,27,30,33]). Вариант (не эквивалентный): «если в испытаниях на релаксацию установлено, что модуль релаксации не зависит от уровня напряжения, можно применять линейное ОС вязкоупругости...» Эти утверждения ошибочны (даже если считать, что по испытаниям на простейшее одноосное нагружение можно сделать заключение о линейности поведения материала), так как один из необходимых признаков линейности возводит в ранг достаточного. По этим причинам необходимы поиск (и проверка) дополнительных индикаторов неприменимости, нужна развитая система маркеров границы применимости ОС (1). Часть из них можно обнаружить, изучая общие свойства линейного ОС (1) («изнутри»), а часть – анализируя свойства основных нелинейных ОС вязкоупругости («снаружи»).

Конкретные задачи данной статьи – анализ общих качественных свойств семейств кривых объемной, осевой и поперечной ползучести, которые порождает ОС (1) с произвольными ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$  при одноосном нагружении постоянной нагрузкой и одновременном приложении постоянного всестороннего давления

$$\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t), \quad p(t) = \bar{p}h(t), \quad \bar{\sigma} > 0, \quad \bar{p} \geq 0 \quad (4)$$

где  $h(t)$  – функция Хевисайда,  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{p}$  – уровни осевого напряжения и давления, их сопоставление со свойствами КП при в случае  $\bar{p} = 0$  и с типичными свойствами экспериментальных КП и поиск индикаторов неприменимости ОС (1).

Анализ данных механических испытаний (даже изначально изотропных) материалов показывает, что изменение объема при нагружении, объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения и его истории на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними термомеханические эффекты весьма существенны при описании деформирования и прочности многих реальных материалов [2,9-12,34-48], а наложение высокого гидростатического давления оказывает сильное воздействие на физические и механические свойства большинства материалов, а также – на структуру и фазовый состав (подробнее см. обзор в [21]). Они заметно влияют на проявление свойств материалов в одноосных испытаниях, на кривые релаксации, ползучести при растяжении-сжатии и сдвиге, длительной прочности, нагружения с постоянной скоростью

и на поведение коэффициента Пуассона, а регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение их влиянием) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку скорости накопления повреждений и долговечности элементов конструкций. На макроуровне у подавляющего большинства материалов с ростом давления возрастают пластичность (предельная деформация при разрушении и длина площадки текучести при деформировании с постоянной скоростью), касательный модуль (жесткость), предел текучести, пределы прочности на растяжение и сдвиг, длительная прочность, коэффициент Пуассона, модуль релаксации, времена релаксации и вязкость, уменьшаются скорости ползучести и релаксации и податливость при ползучести. К материалам, у которых эти эффекты влияния среднего напряжения и объемной ползучести ярко выражены (даже при малых деформациях), относятся, прежде всего, многие полимеры (полиэтилены, полипропилены, фторопласты и т.п.), дисперсно наполненные композиты (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики) прессованные порошковые композиты, сплавы, металлические и полимерные пены, льды, грунты, горные породы и т.п. Именно для них особенно сложно найти область линейности. Испытания на одноосное нагружение с наложением давления и их грамотная математическая обработка и интерпретация могут помочь в решении этой задачи. В частности, потому, что бытует мнение о том, что наложение давления на одноосное растяжение в испытаниях на ползучесть «расширяет область линейного поведения материалов» [34-36], точнее (как следует из контекста этих работ), расширяет диапазон напряжений, при которых осевая податливость (кривая ползучести, деленная на уровень напряжения) практически не зависит от напряжения.

## 1. ОГРАНИЧЕНИЯ НА МАТЕРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОС (1)

Обращение ОС (1), как известно [1-13], имеет вид

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0 \theta, \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3} \mathbf{R} e_{ij}, \quad \mathbf{R} y := \int_0^t R(t-\tau) dy(\tau), \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_0 y := \int_0^t R_0(t-\tau) dy(\tau)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с ФП  $\Pi$  и  $\Pi_0$  уравнениями

$$\int_0^t R(t-\tau) \Pi(\tau) d\tau = t, \quad \int_0^t R_0(t-\tau) \Pi_0(\tau) d\tau = t, \quad t > 0 \quad (6)$$

выражающими условия взаимной обратности операторов  $\mathbf{P}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{P} = \mathbf{I}$  и  $\mathbf{P}_0\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$ . Функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  в ОС (1),(5) предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  – возрастающими и выпуклыми вверх [2,3,15-17], а  $R$  и  $R_0$  – убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R$  и  $R_0$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t=0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция). Из этих условий следует, в частности, существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $y(0) := y(0+)$  – обозначение для

предела функции  $y(t)$  справа в т.  $t=0$ ;  $R(0)=+\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0)=\inf \Pi(t) \geq 0$ . Если  $\Pi(0) \neq 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  (такие модели будем называть регулярными), то  $R(0)=1/\Pi(0) < \infty$  и  $R_0(0)=1/\Pi_0(0) < \infty$  (т.е. мгновенный модуль сдвига  $2G = \frac{2}{3}R(0)$  и объемный модуль  $K = R_0(0)$  диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечны) и на линейном пространстве непрерывных кусочно гладких при  $t \geq 0$  функций операторы ОС (2) и (5) представимы в виде операторов Вольтерры второго рода

$$\mathbf{P}y = \Pi(0)y(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)y(\tau)d\tau,$$

$$\mathbf{R}y = R(0)y(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)y(\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

Все структурные реологические модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений, описываются ОС (1). Любая такая модель задаётся уравнением вида  $\mathbf{P}[\mathbf{d}]\sigma = \mathbf{Q}[\mathbf{d}]\varepsilon$  с двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, где порядки операторов  $p = \deg \mathbf{P}$ ,  $p \geq 0$ , и  $q = \deg \mathbf{Q}$  либо равны, либо  $q = p+1$ , а характеристические корни вещественны, различны и неотрицательны. Поэтому ФП любой реологической модели – сумма экспонент с отрицательными показателями и коэффициентами, и, возможно, функции  $\alpha t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ , а функция релаксации – сумма экспонент с отрицательными показателями и положительными коэффициентами и, возможно, постоянной  $\beta \geq 0$  и сингулярности  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta \geq 0$ . Например, семейство функций

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (7)$$

удовлетворяет всем требованиям к ФП и в случае  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные [15]) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны,  $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$  и  $R(+\infty) = 0$ ), а при  $\alpha = 0$  – трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга-Томпсона с одним демпфером (они регулярны и эквивалентны,  $R = E e^{-\mu t} + r$  и  $R(+\infty) = r > 0$ ). Т.к.  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , то семейство (7) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda\beta = 0$  – ньютоновскую жидкость ( $R = \eta\delta(t)$ ), при  $\alpha = 0$  – модель Фойгта ( $R = \eta\delta(t) + r$ ), при  $\alpha > 0$  – обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ( $R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$ ,  $R(+\infty) = 0$ ). При  $\gamma = 0$  (7) даёт модель Максвелла ( $R = E e^{-\mu t}$ ). Если  $\gamma < 0$ , то нарушается ограничение  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  и порождаемые ОС (1) кривые обратной ползучести возрастают (что противоречит данным испытаний материалов) [15].

## 2. КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ОС (1) ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Рассмотрим мгновенное одноосное нагружение  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t)$ ,  $\sigma_{ij}(t) \equiv 0$  при

$ij > 1$ , где  $h(t)$  – функция Хевисайда. Тогда  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)$ , девиатор напряжений – диагональный тензор  $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)\mathbf{diag}(2, -1, -1)$ , и из (1) следует, что

$$\theta(t; \bar{\sigma}) = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

а девиатор деформаций – тоже диагонален:  $\mathbf{e} = 0.5\bar{\sigma}\Pi(t)\mathbf{diag}(2, -1, -1)$  (будем опускать  $h(t)$ , полагая, что  $t > 0$ ). Следовательно, в любой момент времени у тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \frac{1}{3}\theta\mathbf{I}$  отличны от нуля лишь диагональные элементы

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(t), \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(t). \quad (10)$$

Уравнения (8)-(10) задают семейства кривых объемной, осевой и поперечной ползучести. Из ограничений, наложенных на ФП  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  следует, что для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения)  $\varepsilon(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\varepsilon_{11}(t)$  положительны, монотонно возрастают и выпуклы вверх, а с ростом  $\bar{\sigma}$  смещаются вверх по оси деформации. Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}(t)$  не обязана быть ни монотонной, ни выпуклой вверх функцией: она может убывать или возрастать на всем интервале  $t > 0$ , может иметь точки экстремума и перегиба и менять знак. Поскольку из (10) следует

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t), \quad \ddot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\ddot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}\bar{\sigma}\ddot{\Pi}_0(t), \quad (11)$$

то при  $\bar{\sigma} > 0$  критерии (нестромого) возрастания и выпуклости вниз  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале времени имеют вид  $\dot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$  или  $\ddot{\Pi}_0(t) \geq \frac{9}{2}\ddot{\Pi}(t)$ , а уравнения для точек экстремума и перегиба –  $\dot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\dot{\Pi}(t)$  или  $\ddot{\Pi}_0(t) = \frac{9}{2}\ddot{\Pi}(t)$ .

Если  $\Pi_0(t)$  ограничена (например, ФП (7) с  $\alpha = 0$ ), то  $\theta(\infty) = \frac{1}{9}\bar{\sigma}\Pi_0(\infty) < \infty$ . Если обе ФП ограничены, то обе КП (9), (10) имеют горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma}\left(\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)\right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2}\Pi(\infty) + \frac{1}{9}\Pi_0(\infty)\right).$$

В случае модели с  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , т.е. когда зависимость  $\theta$  от среднего напряжения считается упругой (эта гипотеза часто применяется для упрощения краевых задач), имеем

$$\theta = \frac{1}{3}c\bar{\sigma}, \quad \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\left[\Pi(t) + \frac{1}{9}c\right], \quad \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}\left[-\frac{1}{2}\Pi(t) + \frac{1}{9}c\right],$$

т.е. для любого  $\bar{\sigma} > 0$  КП  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает и выпукла вверх, а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает и выпукла вниз при  $t > 0$ , ибо  $\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) > 0$  и  $\bar{\sigma}\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ .

**Пример 1.** Для ОС (1) с (ограниченными) ФП классической модели Кельвина

$$\begin{aligned} \Pi &= \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0 = \beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}, \quad \lambda, \beta, \lambda_0, \beta_0 > 0, \\ \gamma &\in (0; \beta), \quad \gamma_0 \in (0; \beta_0), \end{aligned} \quad (12)$$

(смысл параметров:  $\tau = 1/\lambda$  и  $\tau_0 = 1/\lambda_0$  – сдвиговое и объемное времена ретардации,

$$G = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\Pi(0)^{-1} = \frac{1}{3}(\beta - \gamma)^{-1}, \quad G_{\infty} = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\Pi(\infty)^{-1} = \frac{1}{3}\beta^{-1}, \quad K = \Pi_0(0)^{-1} = (\beta_0 - \gamma_0)^{-1},$$

$K_{\infty} = \Pi_0(\infty)^{-1} = \beta_0^{-1}$  – мгновенный и длительный модули сдвига и объемные модули) имеем



$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{9} \bar{\sigma} (9\beta + \beta_0 - 9\gamma e^{-\lambda t} - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}), \\ \varepsilon_{\perp} &= \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\beta + 2\beta_0 + 9\gamma e^{-\lambda t} - 2\gamma_0 e^{-\lambda_0 t}). \end{aligned} \tag{13}$$

При  $t \rightarrow \infty$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  стремится к горизонтальной асимптоте  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (2\beta_0 - 9\beta)$ , не зависящей от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ . Скорость ползучести  $\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\gamma \lambda e^{-\lambda t} + 2\gamma_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t})$  может менять знак; из условия экстремума  $9\gamma \lambda e^{-\lambda t} = 2\gamma_0 \lambda_0 e^{-\lambda_0 t}$  при  $\lambda \neq \lambda_0$  находится (единственная) точка экстремума  $t_m = (\ln \mu) / (\lambda_0 - \lambda)$ ,  $\mu = 4.5\gamma_0 \lambda_0 / (\gamma \lambda)$ , если  $t_m > 0$  (т.е.  $\lambda_0 > \lambda$  &  $\mu > 1$  или  $\lambda_0 < \lambda$  &  $\mu < 1$ ). Т.к.  $\varepsilon_{\perp}(t_m) = \frac{1}{18} \bar{\sigma} [2\beta_0 - 9\beta + 9\gamma(1 - \lambda \lambda_0^{-1}) e^{-\lambda t_m}]$ , то  $t_m$  – точка минимума при  $\lambda_0 < \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) < \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ) и  $t_m$  – точка максимума при  $\lambda_0 > \lambda$  (когда  $\varepsilon_{\perp}(t_m) > \varepsilon_{\perp}(\infty)$ ). При  $\lambda = \lambda_0$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  всегда монотонна на луче  $t \geq 0$ :  $\varepsilon_{\perp}(t)$  возрастает, если  $9\gamma > 2\gamma_0$ , и  $\varepsilon_{\perp}$  убывает, если  $2\gamma_0 > 9\gamma$ . В случае  $\gamma_0 = 0$  (когда  $\Pi_0(t) = \beta_0$ )  $\varepsilon_{\perp} = \frac{1}{18} \bar{\sigma} (-9\Pi(t) + 2\beta_0)$  монотонно убывает (и меняет знак, если  $\Pi(0) < \frac{2}{9}\beta_0 < \Pi(\infty)$ , т.е.  $\beta - \gamma < \frac{2}{9}\beta_0 < \beta$ ). При  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  (т.е.  $\tau_0 \rightarrow 0$ ) все семейства КП модели (12) сходятся (снизу, равномерно на любом луче  $t \geq t_0, t_0 > 0$ ) к КП модели с  $\gamma_0 = 0$ .

### 3. ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ОС (1)

Рассмотрим испытания цилиндрического образца на растяжение постоянной нагрузкой в сочетании с всесторонним давлением, т.е. нагружение вида (4) в точке рабочей части образца. Очевидно, девиатор напряжений не меняется при наложении давления на одноосное нагружение:  $\mathbf{s} = \frac{1}{3} \bar{\sigma} h(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ . В силу ОС (1) не изменится и девиатор деформаций  $\mathbf{e} = 0.5 \bar{\sigma} \Pi(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ . Изменяется только среднее напряжение  $\sigma_0 = (\bar{\sigma}/3 - p) h(t) = \bar{\sigma} q h(t)$ , где  $p$  – краткое обозначение уровня давления  $\bar{p}$ , а  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma}$  – параметр нагружения (4),  $q \in (-\infty; \frac{1}{3})$  и объемная деформация

$$\theta(t; \bar{\sigma}, p) = \Pi_0 \sigma_0 = (\frac{1}{3} \bar{\sigma} - p) \Pi_0(t) = \bar{\sigma} q \Pi_0(t). \tag{14}$$

У тензора деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \varepsilon_0 \mathbf{I}$  отличны от нуля лишь диагональные элементы:

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma} \Pi(t) + \frac{1}{3} (\frac{1}{3} \bar{\sigma} - p) \Pi_0(t) = \bar{\sigma} [\Pi(t) + \frac{1}{3} q \Pi_0(t)], \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}, p) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}, p) &= -\frac{1}{2} \bar{\sigma} \Pi(t) + \frac{1}{3} (\frac{1}{3} \bar{\sigma} - p) \Pi_0(t) = \\ &= \bar{\sigma} [-\frac{1}{2} \Pi(t) + \frac{1}{3} q \Pi_0(t)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Так как  $\Pi_0(t) > 0$ , то с ростом  $p$  все кривые ползучести (14)-(16) (объемной, осевой и поперечной) смещаются вниз вдоль оси деформации (семейства (14)-(16) неограниченно убывают по параметру  $p$  при любых  $t$  и  $\bar{\sigma}$ ), в частности, давление тормозит осевую и объемную ползучесть по сравнению с одноосным растяжением и ускоряет при сжатии. Этот эффект наблюдается в испытаниях всех стабильных материалов по программе (4).

Для любых  $\bar{\sigma} > 0$  (в дальнейшем будем для определенности рассматривать случай  $\bar{\sigma} > 0$ ) и  $q > 0$ , т.е. при  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , объемная и осевая деформации положительны, КП (14) и (15) монотонно возрастают по  $t$  на полуоси  $t > 0$  и выпуклы вверх (как и в случае  $p = 0$ ), т.к.

$$\dot{\varepsilon}_{11} = \bar{\sigma} \left( \dot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}q \dot{\Pi}_0(t) \right), \quad \ddot{\varepsilon}_{11} = \bar{\sigma} \left( \ddot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}q \ddot{\Pi}_0(t) \right),$$

$$\dot{\Pi} > 0, \quad \dot{\Pi}_0 > 0, \quad \ddot{\Pi} \leq 0, \quad \ddot{\Pi}_0 \leq 0.$$

Если  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{11} = \bar{\sigma}\Pi(t)$  возрастает и выпукла вверх, а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t) := \varepsilon_{22} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$  отрицательна и убывает при  $t > 0$ .

Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  ( $q < 0$ ), то  $\theta(t; \bar{\sigma}, p)$  и второе слагаемое в (15) отрицательны и убывают по  $t$ , и потому возможны как отрицательность  $\varepsilon_{11}(t)$  на некоторых интервалах времени (в частности, в окрестности начального момента  $t = 0$ , если выполнено неравенство  $-q\Pi_0(0) > 3\Pi(0)$ , – например, в случае  $\Pi(0) = 0$ ,  $\Pi_0(0) \neq 0$ ), так и нарушение монотонности  $\varepsilon_{11}(t)$ . Скорость осевой ползучести  $\dot{\varepsilon}_{11}$  может стать отрицательной при большом давлении (необходимо  $q < 0$ ), если только  $\Pi_0(t) \neq \text{const}$  (если объемные деформации не упруги). Условие наличия точки экстремума на КП (15) – существование решения уравнения  $\dot{\varepsilon}_{11}(t) = 0$ , т.е.

$$-q\dot{\Pi}_0(t) = 3\dot{\Pi}(t). \quad (17)$$

В зависимости от соотношения между сдвиговой и объемной ФП и величины параметра  $q$ , корень уравнения (17)  $t_*(q)$  может быть точкой максимума КП (15) (в случае возрастания  $\varepsilon_{11}(t)$  в окрестности  $t = 0$ ) или минимума (например, когда  $\dot{\varepsilon}_{11}(0) = \bar{\sigma} \left( \dot{\Pi}(0) + \frac{1}{3}q \dot{\Pi}_0(0) \right) < 0$ , но  $\dot{\varepsilon}_{11}(\infty) = \bar{\sigma} \left( \dot{\Pi}(\infty) + \frac{1}{3}q \dot{\Pi}_0(\infty) \right) > 0$ ). КП (15) может иметь и более одной точки экстремума, если функция  $h := \dot{\Pi}(t)/\dot{\Pi}_0(t)$  не монотонна на полуоси  $t > 0$  и уравнение (17) имеет несколько корней (когда  $q$  лежит в интервале многозначности обратного к  $h$  отображения). Так как  $\dot{\Pi}(t) > 0$  и  $\dot{\Pi}_0(t) > 0$ , то для любых ФП и любого момента времени  $t_*$  можно выбрать величину  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (т.е.  $q \in (-\infty; 0)$ ) так, чтобы корень уравнения (17) существовал и совпал с  $t_*$ . При  $q < 0$  КП (15) может не быть выпуклой вверх:  $\ddot{\varepsilon}_{11} > 0$ , если  $q\ddot{\Pi}_0(t) > -3\ddot{\Pi}(t)$ , точка перегиба КП – решение уравнения  $-q\ddot{\Pi}_0(t) = 3\ddot{\Pi}(t)$ .

Поперечная деформация (16), наоборот, убывает, выпукла вниз и отрицательна на всем интервале  $t > 0$  в случае  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  для любых ФП. А в случае  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  не обязана быть монотонной и выпуклой функцией: она может убывать на всем интервале  $t > 0$  (например, в случае  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , когда  $\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\Pi(t) + \frac{1}{3}C$ ,  $C := c\bar{\sigma}q$ ), может иметь точки экстремума и перегиба и может менять знак (например, в случае  $C > \frac{3}{2}\bar{\sigma}\Pi(0)$ , когда  $\varepsilon_{\perp}(0) > 0$ ). Поскольку из (16)

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}\left(\dot{\Pi}(t) - \frac{2}{3}q\dot{\Pi}_0(t)\right), \quad (18)$$

то при  $\bar{\sigma} > 0$  условие убывания  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале имеет вид  $q\dot{\Pi}_0(t) \leq \frac{3}{2}\dot{\Pi}(t)$ . Точки экстремума  $\varepsilon_{\perp}$  – корни уравнения  $q\dot{\Pi}_0(t) = \frac{3}{2}\dot{\Pi}(t)$ , а точки перегиба – уравнения  $q\ddot{\Pi}_0(t) = \frac{3}{2}\ddot{\Pi}(t)$ .

Если  $\Pi_0(t)$  ограничена (например, ФП (7) с  $\alpha = 0$ ), то объемная деформация ограничена:  $\theta(\infty) = \bar{\sigma}q\Pi_0(\infty)$ . Если обе ФП ограничены, то обе КП (15), (16) имеют при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma}\left(\Pi(\infty) + \frac{1}{3}q\Pi_0(\infty)\right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2}\Pi(\infty) + \frac{1}{3}q\Pi_0(\infty)\right). \quad (19)$$

На рис.1а приведены КП (14)-(16) модели (12) с  $\lambda = 0,1$ ,  $\lambda_0 = 0.1$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\beta_0 = 0.005$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\gamma_0 = 0.004$  (время объемной ретардации  $\tau_0 = 1/\lambda_0 = 10$  совпадает с временем сдвиговой ретардации  $\tau = 1/\lambda = 10$ , при  $\bar{\sigma} = 1$  и разных давлениях  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$ , т.е.  $q = \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{11}{3}; -\frac{14}{3}$  (КП 0,1-7):

$$\varepsilon_{11} = \bar{\sigma}\left[\beta - \gamma e^{-\lambda t} + \frac{1}{3}q\left(\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}\right)\right],$$

$$\varepsilon_{\perp} = \bar{\sigma}\left[-\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma e^{-\lambda t} + \frac{1}{3}q\left(\beta_0 - \gamma_0 e^{-\lambda_0 t}\right)\right].$$

Деформации измеряются в процентах. КП  $\varepsilon_{11}(t)$  расположены выше оси времени, КП  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}$  – ниже, а объемные КП  $\theta(t)/3$  показаны штриховыми линиями. Т.к.  $\Pi(\infty) = \beta < \infty$  и  $\Pi_0(\infty) = \beta_0 < \infty$ , то при  $t \rightarrow \infty$  любая КП обладает горизонтальной асимптотой (19) (зависящей от  $\bar{\sigma}$  и  $p$ , но не зависящей от  $\lambda$  и  $\lambda_0$ )

$$\theta(\infty) = \bar{\sigma}q\beta_0, \quad \varepsilon_{11}(\infty) = \bar{\sigma}\left(\beta + \frac{1}{3}q\beta_0\right), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = \bar{\sigma}\left(-\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}q\beta_0\right).$$

С ростом параметра  $p$  (с убыванием  $q$ ) все КП смещаются вниз вдоль оси деформации. В случае  $\lambda_0 = \lambda$ , то осевая и поперечная КП

$$\varepsilon_{11}(t) = \bar{\sigma}\left[\beta + \frac{1}{3}q\beta_0 - \left(\gamma + \frac{1}{3}q\gamma_0\right)e^{-\lambda t}\right],$$

$$\varepsilon_{\perp}(t) = \bar{\sigma}\left[-\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}q\beta_0 + \left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{3}q\gamma_0\right)e^{-\lambda t}\right],$$

не имеют точек экстремума, а смена возрастания КП на убывание происходит синфазно во всех точках  $t$  при том значении  $p$ , при котором множитель при  $e^{-\lambda t}$  меняет знак, т.е. при  $q = -3\gamma/\gamma_0$  для  $\varepsilon_{11}(t)$  и при  $q = \frac{3}{2}\gamma/\gamma_0$  для  $\varepsilon_{\perp}(t)$ .

На рис.1б приведены КП (14)-(16), порожденные той же моделью (12) с  $\lambda = 0,1$ ,  $\lambda_0 = 1$  (времена сдвиговой и объемной ретардации различны:  $\tau = 1/\lambda = 10$  и  $\tau_0 = 1/\lambda_0 = 1$ ),  $\beta = 0.010$ ,  $\beta_0 = 0.005$ ,  $\gamma = 0.005$ ,  $\gamma_0 = 0.004$  при  $\bar{\sigma} = 1$  и тех же значениях давления:  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4$ , т.е.  $q = \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{11}{3}$  (кривые 0,1-6). С ростом  $p/\bar{\sigma}$  КП (14)-(16) смещаются вниз вдоль оси деформации, на осевой КП  $\varepsilon_{11}(t)$  появляется точка минимума и точка перегиба, а при достаточно большом давлении  $\varepsilon_{11}(t)$  становится отрицательной (см. КП 7 для  $p/\bar{\sigma} = 5$ ). Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет точку максимума лишь при  $p < \bar{\sigma}/3$  (см. КП 0), а при  $p \geq \bar{\sigma}/3$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает на всей полуоси.

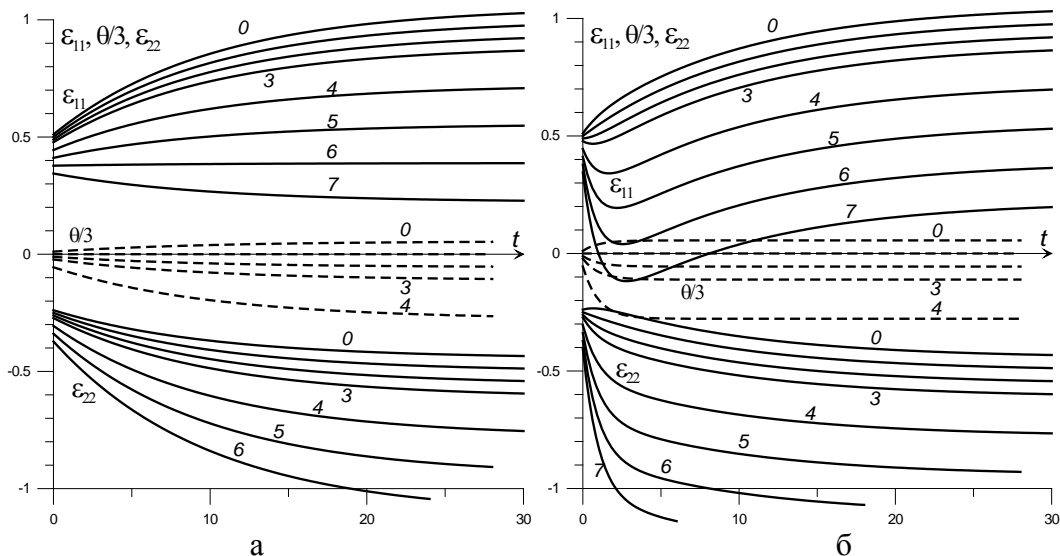


Рис.1. Кривые ползучести (14)-(16) моделей (12) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления  $p/\bar{\sigma} = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 2; 3; 4; 5$  (КП 0, 1-7): а – модели (12) с  $\lambda = 0,1$  и  $\lambda_0 = 0,1$ ; б – модели (12) с  $\lambda = 0,1$  и  $\lambda_0 = 1$ .

#### 4. ОСЕВАЯ И ОБЪЕМНАЯ ПОДАТЛИВОСТИ, ИНДИКАТОРЫ НЕПРИМЕНИМОСТИ ОС (1)

Податливость при осевой ползучести определяется по формуле

$$\kappa(t, \bar{\sigma}, p) := \varepsilon_{11}(t) / \bar{\sigma} = \Pi(t) + \frac{1}{3} q \Pi_0(t). \quad (20)$$

Характер зависимости  $\kappa$  от аргументов  $t$  и  $p$  такой же, как у КП (15), в частности, если  $q \geq 0$ , то  $\kappa$  возрастает по  $t$  (точка экстремума может появиться лишь при  $q < 0$ , если существует корень уравнения (17)) и  $\kappa$  убывает с ростом  $p$  (что и наблюдается в испытаниях материалов [34-36,38]). При всех  $\bar{\sigma}, p > 0$   $\kappa(t, \bar{\sigma}, p) < \kappa_0(t)$ , где  $\kappa_0 := \Pi(t) + \frac{1}{9} \Pi_0(t)$  – осевая податливость при  $p = 0$ , и  $\kappa(t, \bar{\sigma}, p) \rightarrow \kappa_0(t)$  при  $\bar{\sigma}/p \rightarrow +\infty$ .

С ростом  $\bar{\sigma} > 0$  податливость (20) всегда возрастает, если  $p > 0$  (при  $p = 0$  податливость не зависит от  $\bar{\sigma}$  в силу линейности ОС, точнее, в силу однородности операторов (2)). Поэтому линейное ОС (1) (в отличие от нелинейных [21]) не способно описывать поведение материалов, у которых наблюдается убывание или немонотонность податливости по  $\bar{\sigma}$  при некоторых значениях  $t$  и  $p$  (например, у полиэтилена высокой плотности  $\kappa(\bar{\sigma})$  возрастает, а у полиметилметакрилата – убывает [36, с.164]). Существенно также, что  $\kappa(t, \bar{\sigma}, p)$  зависит только от отношения  $p/\bar{\sigma}$ , а не от каждого параметра нагружения в отдельности: нагружения с разными  $\bar{\sigma}$  и  $p$ , но одинаковыми  $q$ , дают совпадающие кривые податливости  $\kappa(t)$ . Два указанных атрибутивных (имманентных) качественных свойства линейного ОС (1) легко проверяются (количественно) по экспериментальным кривым податливости  $\kappa(t, \bar{\sigma}_i, p_i)$  некоторого материала с разными  $\bar{\sigma}$  и  $p$  и могут использоваться как индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости в случае их несоблюдения.

Как качественный индикатор неприменимости ОС (1) можно использовать и нарушение в испытаниях возрастания  $\kappa(t)$  при  $p < \bar{\sigma}/3$ .

Как индикаторы неприменимости ОС (1) и маркеры области линейности можно использовать и нарушение в испытаниях других обнаруженных выше характерных свойств семейств КП (14)-(16), например, таких как: 1) возрастание  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\kappa(t)$  при  $p \in [0; \frac{1}{3}\bar{\sigma}]$ ; 2) возрастание и положительность объемной деформации (14) при  $p \in [0; \frac{1}{3}\bar{\sigma}]$ ; 3) неограниченное убывание деформаций (14) и (15) с ростом  $p$ . Например, в статье [40] приведены объемные КП полиэтиленов низкой плотности при растяжении (для  $p=0$ ), имеющие точку максимума и участок убывания, а в [45] – объемные КП полиэтилена высокой плотности (для  $p=0$ ) с начальным участком убывания и отрицательности. Нарушение свойства 2 означает, что ползучесть полиэтиленов в этом диапазоне температур и напряжений, явно, не описывается линейным ОС (1). В работе [38] приведены данные испытаний фторопласта на ползучесть по программе (4), свидетельствующие о том, что при достаточно больших давлениях (100-150 МПа) происходит стабилизация осевых КП  $\varepsilon_{11}(t, p)$  с фиксированным  $\bar{\sigma}$  (т.е. при  $p \rightarrow \infty$  семейство стремится к предельной КП  $\varepsilon_{11}(t, \infty)$ ). Это означает, что ползучесть фторопласта (и других материалов с подобным поведением, естественным с точки зрения представлений об уменьшении свободного объема и закрытии всех пор с ростом давления), не описывается линейным ОС (1) при достаточно больших давлениях (хотя при давлениях до 30 МПа семейство экспериментальных КП  $\varepsilon_{11}(t, \infty)$  зависит от  $p$  аналогично (15)). Отметим, что нелинейное ОС Работнова способно описать этот эффект стабилизации КП [21].

Объемная податливость

$$w := \theta(t; \bar{\sigma}, p) / (-p) = 3q(3q-1)^{-1} \Pi_0(t) \quad (21)$$

убывает по  $q$  (на интервале  $q \in (-\infty; \frac{1}{3})$ ), убывает по  $\bar{\sigma}$  при  $p > 0$ , и возрастает по  $p$  при  $\bar{\sigma} > 0$ . Поэтому линейное ОС (1) не способно описывать поведение материалов, у которых наблюдается возрастание  $w(t, q)$  с ростом  $q$  или убывание или немонотонность  $w(p)$  с ростом  $p$ , – в отличие от нелинейных, которые могут [21] описывать и убывающую, и возрастающую, и немонотонную по  $p$  объемную податливость (все случаи наблюдаются в испытаниях материалов [34-36,38]). При  $p \rightarrow \infty$   $w(t, q) \rightarrow \Pi_0(t)$ , т.е. стремится к податливости при  $\bar{\sigma} = 0$ . Характер зависимости податливости  $w(t, q)$  от времени такой же, как у  $-\theta(t; \bar{\sigma}, p)$  (см. (14)): при  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $w(t, q) < 0$  и убывает по  $t$  на полуоси  $t > 0$ , при  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $w(t, \bar{\sigma}, p) \equiv 0$ , а при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $w(t, q) > 0$  и возрастает по  $t$ .

Таким образом, семейство (21) кривых объемной податливости линейного ОС (1) обладает тремя специфическими свойствами: 1) оно зависит лишь от отношения  $p/\bar{\sigma}$  (от  $q$ ), а не от  $\bar{\sigma}$  и  $p$  по отдельности; 2) кривые (21) с разными значениями  $q$  подобны: отношение

$$w(t; \bar{\sigma}_2, p_2) / w(t; \bar{\sigma}_1, p_1) = Q(q_1, q_2), \quad (22)$$

$$Q(q_1, q_2) := q_2 q_1^{-1} (1 - 3q_1)(1 - 3q_2)^{-1},$$

не зависит от времени; 3) для любого фиксированного  $t > 0$  податливость  $w(t, \bar{\sigma}, p)$  убывает по параметру  $q$ . Эти атрибутивные качественные свойства линейного ОС (1) легко проверяются по данным испытаний некоторого материала по программам нагружения вида (4) с разными  $\bar{\sigma}$  и  $p$  и могут использоваться как индикаторы неприменимости линейной теории вязкоупругости в случае их несоблюдения, т.е. в случае обнаружения достоверного отклонения функции  $w(t; \bar{\sigma}_2, p_2) / w(t; \bar{\sigma}_1, p_1)$  с  $p_2 / \bar{\sigma}_2 = p_1 / \bar{\sigma}_1$  от тождественно равной единице при любом  $t$  или отклонения (по какой-либо сеточной норме для узловых значений в моменты  $t_m$ ) функции  $w(t; \bar{\sigma}_2, p_2) / w(t; \bar{\sigma}_1, p_1)$  от постоянной  $Q(q_1, q_2)$  или в случае нарушения монотонности  $w(q)$  при некотором  $t$ .

На рис.2 приведены графики осевой податливости (20) для  $p=1$  и  $\bar{\sigma}=3; 2; 1; 0.5; 0.3; 0.2; 0.1$  (кривые 1-7) и объемной податливости (21) для  $\bar{\sigma}=1$  и  $p=0.2; 0.25; \frac{1}{3}; 0.5; 1; 2$  (штриховые линии 11-16) той же модели (12) с  $\lambda=0,1$ ,  $\lambda_0=1$ ,  $\beta=0.01$ ,  $\beta_0=0.005$ ,  $\gamma=0.005$ ,  $\gamma_0=0.004$ , что и на рис.1. С ростом  $\bar{\sigma}$  осевая податливость (20) возрастает (в любой момент времени). Кривая 0 – податливость  $\kappa_0(t) := \Pi(t) + \frac{1}{9}\Pi_0(t)$  при нулевом давлении (предельная кривая семейства  $\kappa(t, \bar{\sigma}, p)$  при  $\bar{\sigma} \rightarrow +\infty$ ), а кривая с меткой  $\infty$  – объемная податливость  $w_0(t) := \Pi_0(t)$  при  $\bar{\sigma}=0$  (предельная кривая семейства  $w(t, 0, p)$  при  $p \rightarrow \infty$ ). Формула (20) и рис.2 показывают, что наложение постоянного давления и учет влияния объемной ползучести на осевую (даже в рамках линейной теории) может существенно изменить характер зависимости осевой податливости от  $t$  и  $\bar{\sigma}$ .

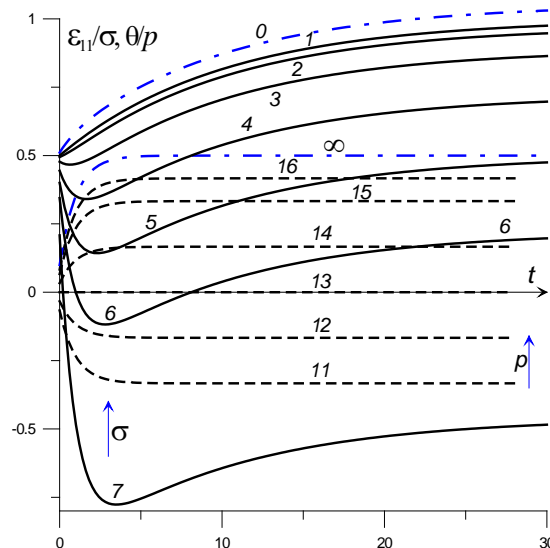


Рис.2. Осевая и объемная податливости (20), (21) модели (12) для разных значений  $q$ .

В случае ОС (1) с  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , т.е. когда объемная деформация считается упругой

$$\begin{aligned} \theta = cq\bar{\sigma}, \quad \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) &= \bar{\sigma} \left[ \Pi(t) + \frac{1}{3}cq \right], \\ \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p) &= \bar{\sigma} \left[ -\frac{1}{2}\Pi(t) + \frac{1}{3}cq \right], \end{aligned} \quad (23)$$

т.е. для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$  КП  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает и выпукла вверх, а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает и выпукла вниз при  $t > 0$  (ибо  $\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) > 0$  и  $\bar{\sigma}\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ ). Осевая податливость  $\kappa = \Pi(t) + \frac{1}{3}cq$  возрастает по  $t$  при любом  $p$ , возрастает по  $q$  и  $\bar{\sigma}$  и убывает по  $p$  (в отличие от нелинейных ОС, когда она может и возрастая, и убывать по  $\bar{\sigma}$  даже в случае  $\Pi_0(t) = \text{const}$ , и быть немонотонной [21]). Объемная податливость  $w := -\theta/p = \frac{1}{3}c(3 - \bar{\sigma}p^{-1})$  тоже убывает по  $\bar{\sigma}$  и возрастает по  $p$ .

Пренебрежение объемной ползучестью (как и гипотеза о постоянстве коэффициента Пуассона) существенно обедняет спектр возможных форм КП  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$ : они уже не могут иметь точки экстремума и перегиба (в отличие от случая  $\Pi_0(t) \neq \text{const}$ ), и расширяет список индикаторов неприменимости линейной модели (с одной материальной функцией).

## 5. ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНОГО ОС (1)

Если анализ данных испытаний материала показывает, что все необходимые индикаторы применимости линейного ОС (1) выполняются и нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования, то по двум кривым осевой податливости  $\kappa(t, q_i)$  в испытаниях материала по программе нагружения (4) с двумя разными значениями  $q$ , можно найти обе ФП на интервале времени, равном времени испытаний: из (20)  $\kappa(t, q_i) = \Pi(t) + \frac{1}{3}q_i \Pi_0(t)$  и потому

$$\begin{aligned} \Pi_0(t) &= 3 \frac{\kappa(t, q_2) - \kappa(t, q_1)}{q_2 - q_1}, \quad \Pi(t) = \frac{q_2 \kappa(t, q_1) - q_1 \kappa(t, q_2)}{q_2 - q_1}, \\ q_2 - q_1 &= (p_1 - p_2) / \bar{\sigma}. \end{aligned} \quad (24)$$

Модель с  $\Pi_0(t) = \text{const}$  обладает специфичным свойством: разность любых двух КП (23) (осевых или поперечных) с одинаковым уровнем  $\bar{\sigma}$ , но разными давлениями  $p_1, p_2 > 0$ , не зависит от времени: для любых  $\bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и  $t > 0$

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p_1) = \delta, \quad \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p_1) = \delta, \quad (25)$$

где  $\delta := \frac{1}{3}c\bar{\sigma}(q_2 - q_1) = \frac{1}{3}c(p_1 - p_2)$ , т.е. КП с разными давлениями получаются друг из друга сдвигом вдоль оси деформации  $\varepsilon_{11}$  или  $\varepsilon_{\perp}$  (причем на одинаковую величину  $\delta$ , пропорциональную разности давлений, для осевых и поперечных деформации). Указанные свойства, особенно тождества (25) с разными значениями  $t, \bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и следующее из (24) тождество  $\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p) = cq\bar{\sigma}$  (в частности, независимость от времени его левой части, т.е. объемной деформации), можно (и удобно) использовать как индикаторы применимости гипотезы об отсутствии объемной ползучести в сочетании с ОС (1) по результатам серии испытаний материала на ползучесть при нагружениях (4) с разными уровнями  $p$  и  $\bar{\sigma}$ , в которых регистрируются

продольная и поперечная деформации  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$ . ФП  $\Pi_0$ , т.е. постоянная  $c$ , легко находится по данным таких испытаний из соотношения  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) = cq\bar{\sigma}$  по измеренной величине  $\theta = \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$ . ФП  $\Pi(t)$  можно найти из уравнения КП (23) или из тождества  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) - \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p) = 1.5\bar{\sigma}\Pi(t)$ . Однако разработка этих и иных методик идентификации ОС (1) – тема других статей (см. [15-17] и др.)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически изучены уравнения (14)-(16) семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести (КП), порождаемых линейным ОС (1) с произвольными функциями сдвиговой и объемной ползучести при нагружениях вида (4), характерные качественные свойства кривых ползучести  $\theta(t)$ ,  $\varepsilon_{11}(t)$ ,  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и их зависимость от параметров  $p$  и  $\bar{\sigma}$  нагружения (4) и функций ползучести. Доказано, что ОС (1) способно моделировать немонотонность и знакопеременность осевой и поперечной деформаций  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , исследованы условия наличия у них точек экстремума, перегиба и перемены знака. Обнаружены характерные свойства КП, которые удобно использовать в случае их нарушения в испытаниях как индикаторы неприменимости ОС (1) и маркеры области линейности материала по данным серии испытаний материала на ползучесть по программам нагружения (4). В частности, доказана

**Теорема.** Пусть функции  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$  в ОС (1) положительны, непрерывно дифференцируемы, возрастают и (нестрого) выпуклы вверх на интервале  $t > 0$ . Тогда семейства КП (14)-(16), порождаемые ОС (1) при нагружениях (4) (с  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p > 0$  и  $q := \frac{1}{3} - p/\bar{\sigma} \leq \frac{1}{3}$ ), обладают следующими свойствами.

- 1) Семейства КП (14)-(16) возрастают по параметру нагружения  $q$  и (неограниченно) убывают по  $p$  и при любых  $t$  и  $\bar{\sigma}$ .
- 2) Если  $0 \leq p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  ( $q \in (0; \frac{1}{3}]$ ), то объемная и осевая деформации  $\theta(t)$  и  $\varepsilon_{11}(t)$  положительны, КП (14), (15) и осевая податливость (20) монотонно возрастают по  $t$  и выпуклы вверх на полуоси  $t \geq 0$ , а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может менять знак и не обязана быть монотонной или выпуклой функцией: она может убывать на всем луче  $t \geq 0$  и может иметь точки экстремума или перегиба.
- 3) Если  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{11}(t) = \bar{\sigma}\Pi(t)$  возрастает и выпукла вверх при  $t > 0$ , а  $\varepsilon_{\perp}(t) = -0.5\varepsilon_{11}(t)$  и убывает.
- 4) Если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) < 0$  и убывает по  $t$ , поперечная деформация (16) отрицательна, убывает и выпукла вниз на луче  $t \geq 0$  ( $|\varepsilon_{\perp}(t)|$  возрастает), а осевая КП  $\varepsilon_{11}(t)$  и податливость (20) могут быть (в зависимости от величины параметра нагружения  $q$  и соотношения между  $\Pi(t)$  и  $\Pi_0(t)$ ) возрастающими или убывающими на луче  $t \geq 0$ , могут иметь точку



экстремума (при условии существования корня уравнения (17)) и точку перегиба и могут менять знак.

- 5) Осевая податливость (20) зависит только от отношения  $p/\bar{\sigma}$  (от параметра  $q$ ), а не от  $\bar{\sigma}$  и  $p$  по отдельности,  $\kappa(t)$  всегда возрастает с ростом  $\bar{\sigma}$  (если  $p > 0$ ), и убывает с ростом  $p$ .
- 6) Семейство кривых объемной податливости (21) зависит только от отношения  $p/\bar{\sigma}$  (от  $q$ ), для любого фиксированного  $t > 0$  податливость (21) убывает по  $q$  (возрастает по  $p$ ), а кривые (21) с разными значениями  $q$  подобны: отношение (22) не зависит от времени.

Особенно удобно использовать как индикаторы неприменимости ОС (1) поведение осевой и объемной податливостей (20) и (21) (п.5,6 теоремы). В частности, линейное ОС (1) (в отличие от нелинейных [21]) не способно описывать поведение материалов, у которых наблюдается убывание или немонотонность осевой податливости  $\kappa(\bar{\sigma})$  при некоторых значениях  $t$  и  $p$ , и тех, у которых нарушается подобие кривых объемной податливости (21) или  $w(t, q)$  возрастает по  $q$  или убывает или немонотонна по  $p$ .

Предложен простой способ идентификации ОС (1) (формулы (24)), позволяющий определить обе ФП по двум экспериментальным кривым осевой податливости материала с разными значениями параметра  $q$ , если анализ данных испытаний показывает, что все указанные необходимые признаки применимости линейного ОС (1) выполняются, т.е. нет «противопоказаний» к его использованию для моделирования. Исследованы специфические свойства КП, порождаемых линейным ОС (1) в сочетании с гипотезой об упругом изменении объема.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
2. Москвитин В.В. *Сопротивление вязкоупругих материалов (применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе)*. – М.: Наука, 1972. – 328 с.
3. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
4. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
5. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. *Реология полимеров*. – М.: Химия, 1977. – 440 с.
6. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. – Heidelberg: Springer, 1989. – 769 p.
7. Drozdov A.D. *Mechanics of viscoelastic solids*. – N.-Y.: Wiley & Sons, 1998. – 484 p.
8. Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. *Методы прикладной вязкоупругости*. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2003. – 411 с.
9. Brinson H.F., Brinson L.C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. – Springer Science & Business Media, 2008. – 446 p.
10. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.
11. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. – N.Y.: Dover Publications, 2012. – 384 p.
12. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. – Elsevier, William Andrew, 2015. – 520 p.

13. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. *Особенности поведения вязкоупругих моделей* // Изв. РАН. МТГ. – 2004. – №1. – С.119-157.
14. Saprunov I., Gergesova M., Emri I. *Prediction of viscoelastic material functions from constant stress- or strain-rate experiments* // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2014. – Vol.18. – No.2. – Pp.349-372.
15. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при циклических ступенчатых нагружениях, порождаемых линейной теорией наследственности* // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2017. – Т.21. – №2. – С.326-361. DOI: 10.14498/vsgtu1533
16. Хохлов А.В. *Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности* // Вестник Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2018. – Т.22. – №1. – С.65-95. DOI: 10.14498/vsgtu1543
17. Хохлов А.В. *Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при *гап*-деформировании и методики её идентификации* // Изв. РАН. МТГ. – 2018. – №3. – С.81-104. DOI: 10.7868/S0572329918030108
18. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – №3. – С.93-123. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-3-93-123
19. Хохлов А.В. *Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией *гап*-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова* // Механика композитных материалов. – 2018. – Т.54. – №4. – С.687-708. DOI: 10.1007/s11029-018-9757-1
20. Хохлов А.В. *Свойства семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Известия РАН. МТГ. – 2019. – №2. – С.29-47. DOI: 10.1134/S0572329919020077
21. Хохлов А.В. *Моделирование зависимости кривых ползучести при растяжении и коэффициента Пуассона реономных материалов от гидростатического давления с помощью нелинейно-наследственного соотношения Работнова* // Механ. композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №3. – С.407-436.
22. Ломакин В.А., Колтунов М.А. *Моделирование процесса деформации нелинейных вязко-упругих сред* // Механика полимеров. – 1967. – №2. – С.221-227.
23. Работнов Ю.Н. *Равновесие упругой среды с последствием* // ПММ. – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
24. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
25. Голуб В.П. *Исследования в области циклической ползучести материалов (обзор)* // Прикладная механика. – 1987. – Т.23. – №12. – С.3-19.
26. Krempl E, Khan F. *Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers* // Int. J. Plast. – 2003. – Vol.19. – Pp.1069-1095.
27. Knauss W.G., Emri I., Lu H. *Mechanics of Polymers: Viscoelasticity* // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, N.Y.: Springer, 2008. – Pp.49-96.

28. Khan F., Yeakle C. *Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers* // Int. J. Plasticity. – 2011. – Vol.27. – Pp.512-521.
29. Drozdov A.D. *Time-dependent response of polypropylene after strain reversal* // International Journal of Solids and Structures. – 2010. – Vol.47. – Pp.3221-3233.
30. Kastner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. *Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model* // Mech. of Materials. – 2012. – Vol.52. – Pp.40-57.
31. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. *The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber* // Polymer Testing. – 2014. – Vol.40. – Pp.124-132.
32. Drozdov A.D., Dusunceli N. *Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers* // Mechanics of Materials. – 2014. – Vol.69. – Pp.116-131.
33. Ahci E., Talreja R. *Characterization of viscoelasticity and damage in high temperature polymer matrix composites* // Composites Science and Technology. – 2006. – Vol.66. – Pp.2506-2519.
34. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л., Цируле К.И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. – М.: Химия, 1981. – 232 с.
35. Гольдман А.Я. *Объемная деформация пластмасс*. – Л.: Машиностроение, 1984. – 232 с.
36. Гольдман А.Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. – Л.: Химия, 1988. – 272 с.
37. Mileiko S.T. *Metal and ceramic based composites*. – Amsterdam: Elsevier, 1997. – 690 p.
38. Ольховик О.Е., Гольдман А.Я. *Ползучесть фторопласта при совместном действии растяжения и гидростатического давления* // Механика полимеров. – 1977. – №3. – С.434-438.
39. Knauss W.G., Emri I. *Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers* // Polym. Eng. Sci. – 1987. – Vol.27. – Pp.86-100.
40. Delin M., Rychwalski R.W., Kubat J., Kubat M.J., Bertilsson H., Klason C. *Volume changes during flow of solid polymers* // Journal of Non-Crystalline Solids. – 1994. – Vol.172-174. – Pp.779-785.
41. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review* // Mech. of Time-Dependent Materials. – 2002. – Vol.6. – No.1. – Pp.3-51.
42. Arzoumanidis G.A., Liechti K.M. *Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models* // Mech. Time-Depend. Mater. – 2003. – Vol.7. – No.3. – Pp.209-250.
43. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. *Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests* // J. Appl. Polym. Sci. – 2004. – Vol.91. – Pp.1784-1791.
44. Конёк Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. *Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (ОБЗОР)* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №1. – С.35-69.
45. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J.M. *Volume Variation Process of High-Density Polyethylene During Tensile and Creep Tests* // Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP. – 2006. – Vol.61. – No.6. – Pp.715-724.

46. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
47. Pandini S, Pegoretti A. *Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins* // Polym. Eng. Sci. – 2008. – Vol.48. – No.7. – Pp.1434-1441.
48. Greaves G.N., Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T. *Poisson's ratio and modern materials* // Nature Materials. – 2011. – Vol.10. – No.11. – Pp.823-837.

#### REFERENCES

1. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termov'язkouprugosti [Fundamentals of the Mathematical Theory of thermo-viscoelasticity]*. Moskva, Nauka, 1970, 280 p.
2. Moskvitin V.V. *Soprotivlenie v'язkouprugikh materialov (primenitel'no k zaryadam raketnykh dvigatelej na tverdom toplive) [Strength of Viscoelastic Materials]*. Moskva, Nauka, 1972, 328 p.
3. Cristensen R.M. *Theory of viscoelasticity. An introduction*. N.-Y., L., Acad. Press, 1971, 256 p.
4. Rabotnov Yu.N. *Ehlementy nasledstvennoj mekhaniki tvyordykh tel [Introduction to hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
5. Vinogradov G.V., Malkin A.A. *Reologiya polimerov [Rheology of Polymeres]*. Moskva, Khimiya, 1977, 440 p.
6. Tschoegl N.W. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Heidelberg, Springer, 1989, 769 p.
7. Drozdov A.D. *Mechanics of viscoelastic solids*. N.-Y., Wiley & Sons, 1998, 484 p.
8. Adamov A.A., Matveenkov V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Metody prikladnoj v'язkouprugosti [Applied Viscoelasticity Methods]*. Ekaterinburg, UrO RAN, 2003, 411 p.
9. Brinson H.F., Brinson L.C. *Polymer Engineering Science and Viscoelasticity*. Springer Science & Business Media, 2008, 446 p.
10. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 462 p.
11. Christensen R.M. *Mechanics of Composite Materials*. N.Y., Dover Publications, 2012, 384 p.
12. Bergstrom J.S. *Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling*. Elsevier, William Andrew, 2015, 520 p.
13. Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E. *Osobennosti povedeniya v'язkouprugikh modelej [Specific Features of the Behavior of Viscoelastic Models]*. Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.1, Pp.119-157.
14. Saprunov I., Gergesova M., Emri I. *Prediction of viscoelastic material functions from constant stress- or strain-rate experiments*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2014, Vol.18, No.2, Pp.349-372.
15. Khokhlov A.V. *Analiz obshhikh svojstv krivykh polzuchesti pri tsiklicheskikh stupenchatykh nagruzheniyakh, porozhdaemykh linejnoy teoriej nasledstvennosti [Analysis of creep curves produced by the linear viscoelasticity theory under cyclic stepwise loadings]*. Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2017, Vol.21, No.2, Pp.326-361.
16. Khokhlov A.V. *Analiz svojstv krivykh polzuchesti s proizvol'noj nachal'noj stadijei nagruzheniya, porozhdaemykh linejnoy teoriej nasledstvennosti [Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under*

- arbitrary loading programs at initial stage*]. Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2018, No.1, Pp.65-95.
17. Khokhlov A.V. *Two-sided estimates for the relaxation function of the linear theory of heredity via the relaxation curves during the ramp-deformation and the methodology of identification*. Mechanics of Solids, 2018, Vol.53, No.3, Pp.307-328.
  18. Khokhlov A.V. *Analiz obshchikh svojstv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhении, porozhdaemykh nelinejnym sootnosheniem Rabotnova dlya vyzkouprugoplastichnykh materialov [Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings]*. Vestnik MGTU im. N.Eh. Baumana. Ser. Estestvennye nauki, 2017, No.3, Pp.93-123.
  19. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory*. Mechanics of Composite Materials, 2018, Vol.54, No 4, Pp.473-486.
  20. Khokhlov A.V. *Properties of stress-strain curves family generated by the Rabotnov nonlinear relation for viscoelastic materials*. Mechanics of Solids, 2019, Vol.54, No.2.
  21. Khokhlov A.V. *Modelirovanie zavisimosti krivykh polzuchesti pri rastyazhenii i koehffitsienta Puassona reonomnykh materialov ot gidrostaticheskogo davleniya s pomoshh'yu nelinejno-nasledstvennogo sootnosheniya Rabotnova [Simulation of hydrostatic pressure influence on creep curves and Poisson's ratio of rheonomic materials under tension using the Rabotnov non-linear hereditary relation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.3, Pp.407-436.
  22. Lomakin V.A. Koltunov M.A. *Simulation of the deformation processes of nonlinear viscoelastic media*. Polimer mechanics, 1967, Vol.3, No.2, Pp.147-150.
  23. Rabotnov Yu.N. *Ravnovesie uprugoj sredy s posledejstviem [Equilibrium of elastic hereditary medium]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1948, Vol.12, No.1, Pp.53-62.
  24. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' ehlementov konstruksij [Creep problems in structural members]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
  25. Golub V.P. *Investigations into cyclic creep of materials (review)*. Soviet Applied Mechanics, 1987, Vol.23, No.12, Pp.1107-1121.
  26. Krempl E, Khan F. *Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers*. Int. J. Plast, 2003, Vol.19, Pp.1069-1095.
  27. Knauss W.G., Emri I., Lu H. *Mechanics of Polymers: Viscoelasticity*. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, N.Y., Springer, 2008, Pp.49-96.
  28. Khan F., Yeakle C. *Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers*. Int. J. Plasticity, 2011, Vol.27, Pp.512-521.
  29. Drozdov A.D. *Time-dependent response of polypropylene after strain reversal*. International Journal of Solids and Structures, 2010, Vol.47, Pp.3221-3233.
  30. Kastner M., Obst M., Brummund J., Thielsch K., Ulbricht V. *Inelastic material behavior of polymers. Experimental characterization, formulation and implementation of a material model*. Mechanics of Materials, 2012, Vol.52, Pp.40-57.
  31. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. *The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber*. Polymer Testing, 2014, Vol.40, Pp.124-132.

32. Drozdov A.D., Dusunceli N. *Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers*. Mechanics of Materials, 2014, Vol.69, Pp.116-131.
33. Ahci E., Talreja R. *Characterization of viscoelasticity and damage in high temperature polymer matrix composites*. Composites Sci. Technol., 2006, Vol.66, Pp.2506-2519.
34. Ainbinder S.B., Tiunina E.L., Tsirole K.I. *Svoystva polimerov v razlichnykh napryazhennykh sostoyaniyakh [Properties of Polymers under various stress states]*. Moskva, Khimiya, 1981, 232 p.
35. Gol'dman A.Ya. *Ob'emnaya deformatsiya plastmass [Volumetric deformation of plastics]*. Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 232 p.
36. Gol'dman A.Ya. *Prognozirovaniye deformatsionno-prochnostnykh svoystv polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Prediction of deformation and strength properties of polymeric and composite materials]*. Leningrad, Khimiya, 1988, 272 p.
37. Mileiko S.T. *Metal and ceramic based composites*. Amsterdam, Elsevier, 1997, 690 p.
38. Ol'khovik O.E., Gol'dman A.Ya. *Creep of fluoroplastic under the joint action of tension and hydrostatic pressure*. Polimer mechanics, 1977, No.3, Pp.370-374.
39. Knauss W.G., Emri I. *Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers*. Polym. Eng. Sci., 1987, Vol.27, Pp.86-100.
40. Delin M., Rychwalski R.W., Kubat J., Kubat M.J., Bertilsson H., Klason C. *Volume changes during flow of solid polymers*. Journal of Non-Crystalline Solids, 1994, Vol.172-174, Pp.779-785.
41. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review*. Mech. Time-Dependent Materials, 2002, Vol.6, No.1, Pp.3-51.
42. Arzoumanidis G.A., Liechti K.M. *Linear viscoelastic property measurement and its significance for some nonlinear viscoelasticity models*. Mech. Time-Depend. Mater., 2003, Vol.7, No.3, Pp.209-250.
43. Cangemi L., Elkoun S., G'Sell C., Meimon Y. *Volume strain changes of plasticized Poly(vinylidene fluoride) during tensile and creep tests*. J. Appl. Polym. Sci., 2004, Vol.91, Pp.1784-1791.
44. Konek D.A., Voitsekhovskii K.V., Pleskachevskii Iu.M., Shil'ko S.V. *Materialy s otritsatel'nykh koehffitsientom Puassona (Obzor) [Materials with negative Poisson's ratio. A review]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2004, Vol.10, No.1, Pp.35-69.
45. Addiego F., Dahoun A., G'Sell C., Hiver J.M. *Volume Variation Process of High-Density Polyethylene During Tensile and Creep Tests*. Oil & Gas Science and Technology – Rev. IFP., 2006, Vol.61, No.6, Pp.715-724.
46. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
47. Pandini S., Pegoretti A. *Time, temperature, and strain effects on viscoelastic Poisson's ratio of epoxy resins*. Polym. Eng. Sci., 2008, Vol.48, No.7, Pp.1434-1441.
48. Greaves G.N., Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T. *Poisson's ratio and modern materials*. Nature Materials, 2011, Vol.10, No.11, Pp.823-837.

*Поступила в редакцию 01 октября 2018 года.*

---

Сведения об авторе:

Хохлов Андрей Владимирович – к.т.н., доц., в.н.с., НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [andrey-khokhlov@yandex.ru](mailto:andrey-khokhlov@yandex.ru)