

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО
ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК В РАМКАХ
УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА**

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Предложена математическая модель упругопластического деформирования гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования, адаптированная под применение численной схемы типа «крест». Неупругое поведение материалов фаз композиции описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением. Геометрическая нелинейность задачи рассматривается в приближении Кармана. Учитывается возможное ослабленное сопротивление армированных оболочек поперечным сдвигам. Сформулированы начально-краевые задачи, позволяющие с разной точностью определять напряженно-деформированное состояние в фазах композиции волокнистых оболочек. Из полученных соотношений в первом приближении вытекают уравнения, граничные и начальные условия традиционной неклассической теории Редди. Исследовано упругопластическое изгибаемое динамическое поведение однонаправленно-, «плоско»- и пространственно-армированных замкнутых цилиндрических оболочек из стеклопластика под воздействием нагрузок взрывного типа. Показано, что расчеты по теории Редди могут приводить не только к количественно неприемлемым, но даже к качественно неверным результатам. Различие в расчетах, выполненных по теории Редди и уточненной теории, возрастает с увеличением расчетного интервала времени. Продемонстрировано, что, согласно расчетам по уточненной теории, для замкнутых оболочек с относительной толщиной менее 1/10 рациональной является структура с «плоским» 2D-армированием. Показано, что в силу геометрической нелинейности исследуемой задачи максимальные по модулю прогибы в тонких армированных оболочках могут возникнуть значительно позже прекращения действия кратковременной динамической нагрузки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка; геометрическая нелинейность; пространственное армирование; теория Редди; уточненная теория изгиба; упругопластическое деформирование; нагружение взрывного типа; схема «крест»

**MODELING OF ELASTO-PLASTIC DYNAMIC BEHAVIOR
OF FLEXIBLE CYLINDRICAL SPATIAL-REINFORCED SHELLS
IN THE FRAMEWORK OF REFINED BENDING THEORY**

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the
Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

ABSTRACT

A mathematical model is proposed for elastic-plastic deformation of flexible cylindrical shells with spatial reinforcement structures, adapted to the use of a numerical scheme of the «cross» type. Inelastic behavior of the materials of the phases of the composition is described by equations of flow theory with isotropic hardening. The geometric nonlinearity of the problem is considered in the Karman approximation. The possible weakened resistance of reinforced shells to transverse shear is taken into account. The initial-boundary value problems, allowing determining with different accuracy the stress-strain state in the phases of the composition of fibrous shells, are formulated. The equations, boundary and initial conditions of the traditional non-classical Reddy theory follow from the obtained relations in the first approximation. The dynamic elastic-plastic flexural behavior of unidirectional-, flat- and spatial-reinforced closed cylindrical shells made of fiberglass plastic under the action of explosive type loads is investigated. It is shown that calculations on the Reddy theory can lead not only to quantitatively unacceptable, but even qualitatively incorrect results. The difference in the calculations performed by Reddy's theory and refined theory increases with the increase of the calculated time interval. It is demonstrated that, according to the calculations by the refined theory for closed shells with a relative thickness less than 1/10, the structure with «flat» 2D-reinforcement is rational. It is shown that due to the geometric nonlinearity of the problem under study, the maximum modulo deflections in thin reinforced shells may appear much later than the stopping of the short-term dynamic load.

Keywords: cylindrical shell; geometric nonlinearity; spatial reinforcement; Reddy theory; refined bending theory; elastic-plastic deformation; loading of explosive type; «cross» scheme

ВВЕДЕНИЕ

Композиционные цилиндрические оболочки в последние десятилетия широко используются в качестве тонкостенных силовых элементов в изделиях авиа-, судо- и машиностроения, в химической промышленности и энергетике [1-5]. Следовательно, актуальной является проблема адекватного математического описания механического поведения таких конструкций [1,5-13]. Известное из экспериментов слабое сопротивление тонкостенных конструкций из композиционных материалов (КМ) поперечным сдвигам традиционно учитывают в рамках теорий Рейсснера [1,5,6,9,11] или Редди [8,10], реже используют более точные теории [7,12,13]. Подавляющее большинство исследований при этом посвящено изучению линейно-упругого поведения таких конструкций [1,5-11]. Однако при высокоинтенсивном нагружении, характерном для современных КМ-изделий, материалы компонентов их композиции могут деформироваться упругопластически [9,14,15]. Проблема моделирования такого деформирования КМ-конструкций на сегодняшний день находится в состоянии становления. Так, в [9] изучалось упругопластическое поведение слоистых конструкций с изотропными слоями. В работе [12] исследовано упругопластическое деформирование цилиндрических оболочек с «плоско»-перекрестными структурами армирования. В монографии [8] было показано, что при линейно-упругом деформировании материалов тонкостенных КМ-конструкций уточнение теории Редди не требуется. Однако в [12] продемонстрировано, что при изучении динамического неупругого поведения «плоско»-армированных цилиндрических оболочек необходимо использовать более точные, чем теория Редди, модели их изгибного деформирования.

В настоящее время все более широкое применение в конструкторской практике находят КМ с пространственными структурами армирования [16-18].

Линейно-упругое деформирование КМ-сред с пространственными структурами армирования моделировалось в [19-21]. В работе [21] было показано, как можно использовать полученные там результаты для моделирования неупругого поведения пространственно-армированных сред в рамках деформационной теории пластичности. В [13] предложена структурная модель упругопластического деформирования таких КМ-сред, использующая определяющие уравнения теории течения с изотропным упрочнением.

Настоящее исследование посвящено математическому моделированию упругопластического деформирования гибких цилиндрических оболочек с пространственными структурами армирования при использовании более точных кинематических гипотез, чем в теории Редди. Численное интегрирование возникающих при этом начально-краевых задач предполагается осуществлять с использованием явной схемы типа «крест».

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРОЙ АРМИРОВАНИЯ

Рассмотрим замкнутую круговую тонкую цилиндрическую оболочку толщиной $2h$, длиной L и радиуса R ($2h \ll \min(L, R)$), с которой связана цилиндрическая система координат x_i такая, что x_1 – осевая координата ($0 \leq x_1 \leq L$), x_2 – угловая (окружная) координата ($0 \leq x_2 < 2\pi$), x_3 – радиальная координата: $R-h \leq x_3 \leq R+h$ (рис.1).

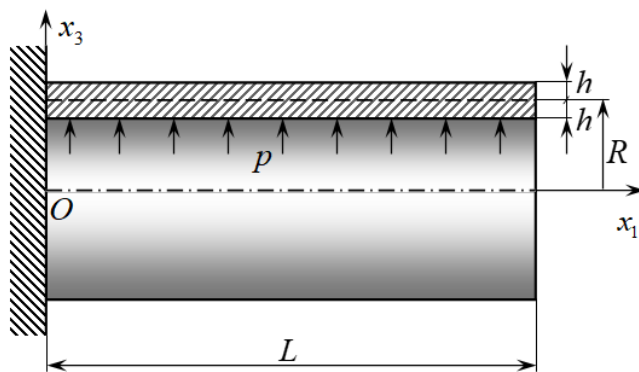


Рис.1. Замкнутая цилиндрическая оболочка, жестко закрепленная на левой кромке.

Конструкция усилена K семействами волокон с плотностями армирования ω_k , $1 \leq k \leq K$; относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции обозначим как ω_0 . Направления армирования определяются углами сферической системы координат θ_k, φ_k (рис.2, где изображена взаимная ориентация локальной $x_i^{(k)}$, связанной с траекторией армирования волокнами k -го семейства, и глобальной x_i ($i = \overline{1, 3}$) систем координат). Оболочка имеет «плоскую» ($\theta_k = \pi/2$) или пространственную ($\theta_k \neq \pi/2$) структуру армирования, квазиоднородную в направлении x_3 (рис.3, где приведены репрезентативные ячейки композиции, причем их искривленность

в силу малых размеров не изображена). На рис.3а представлена структура с «плоским» ортогональным 2D-армированием при $K=2$, на рис.3б – с пространственным ортогональным 3D-армированием при $K=3$ [18,19], а на рис.3в – с пространственным неортогональным 4D-армированием при $K=4$ [16].

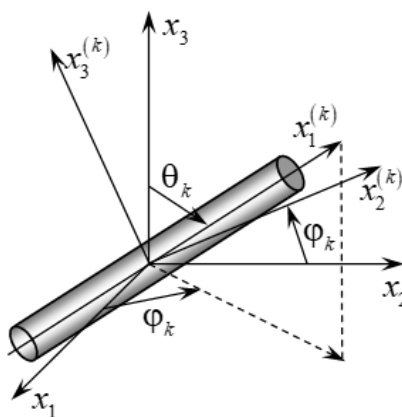


Рис.2. Локальная система координат, связанная с арматурой k-го семейства.

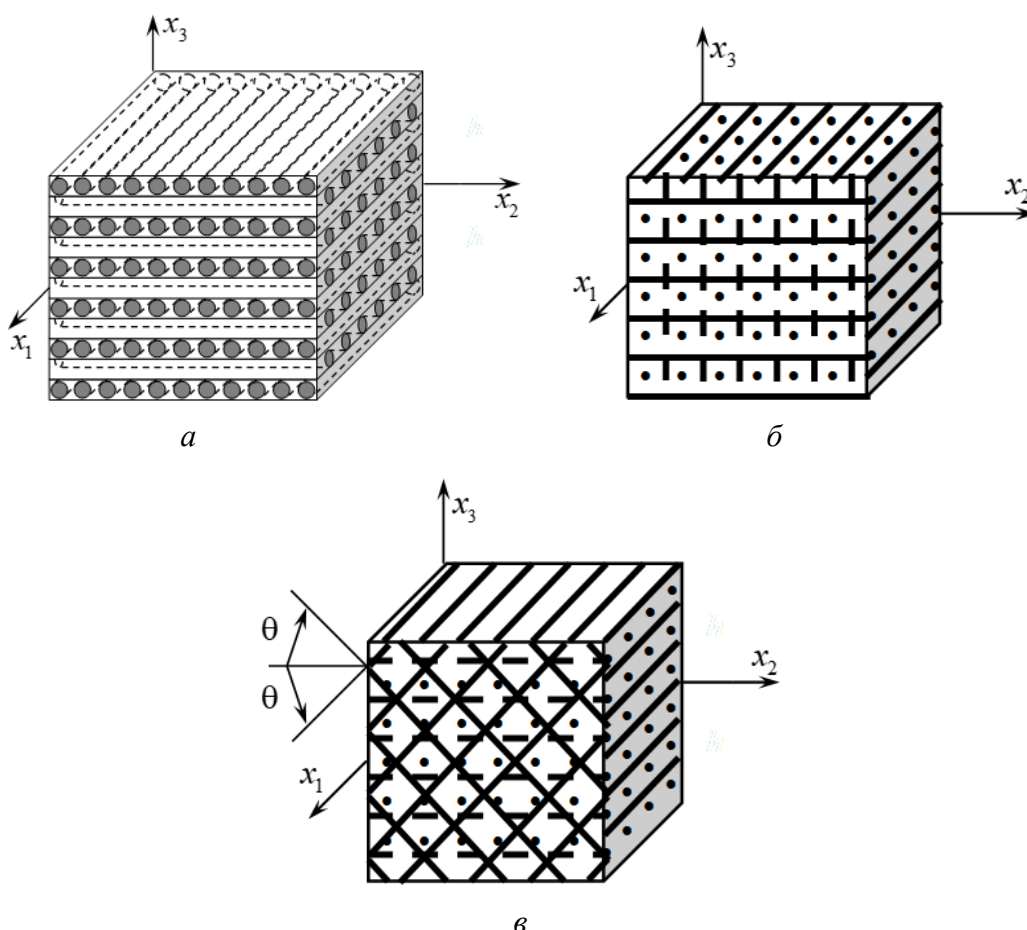


Рис.3. Ячейка периодичности КМ-оболочки: а – с «плоской» ортогональной структурой 2D-армирования; б – с пространственной ортогональной структурой 3D-армирования; в – с пространственной неортогональной структурой 4D-армирования.

В работе [13] показано, что при произвольных структурах пространственного армирования не удастся построить явную численную схему так, чтобы на лицевых поверхностях конструкции силовые граничные условия по касательным напряжениям были удовлетворены. Принимая это во внимание, в данном исследовании будем рассматривать только частные случаи пространственного армирования и нагружения цилиндрической КМ-оболочки, при которых можно построить явную схему типа «крест». В связи с этим предполагаем: пространственная структура армирования конструкции такова, что если арматура k -го семейства наклонна ($0 < \theta_k < \pi/2$ на рис.2), то обязательно найдется n -ое семейство наклонных волокон с параметрами укладки $\theta_n = \pi - \theta_k$, $\varphi_n = \varphi_k$, $\omega_n = \omega_k$ ($1 \leq k, n \leq K, n \neq k$). Такие пространственные структуры армирования часто встречаются на практике [16-19]. В частности, к ним относятся структуры армирования, изображенные на рис.3б,в, а также и структуры с «плоским» армированием (при этом формально $\omega_n = \omega_k = 0$). Кроме того, рассматривается лишь практически важный частный случай нагружения КМ-оболочки, когда к ее лицевым поверхностям прикладываются только нормальные внешние силы (см. рис.1). На основании этих предположений для описания возможного (например в случаях структур 2D- и 3D-армирования, изображенных на рис.3а,б) слабого сопротивления КМ-конструкции поперечным сдвигам используем уточненные кинематические соотношения [12,13]. Учитывая при этом геометрическую нелинейность задачи в приближении Кармана, осредненные деформации композиции ε_{ij} и перемещения U_i точек цилиндрической КМ-оболочки аппроксимируем так [12]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t, \mathbf{r}) &= \partial_1 u_1 - z \partial_1^2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{13}^{(m)} + \frac{1}{2} (\partial_1 w)^2, \\ \varepsilon_{22}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[\frac{R+z}{R} \partial_2 u_2 + \partial_2^2 w + w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{23}^{(m)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_2 w}{R+z} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{R+z} \left[\partial_2 u_1 - z \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \partial_2 \varepsilon_{13}^{(m)} \right] + \frac{R+z}{R} \partial_1 u_2 + \\ &+ \partial_1 \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \partial_1 \varepsilon_{23}^{(m)} + \frac{1}{R+z} \partial_1 w \partial_2 w, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{h^2 - z^2}{h^2} \sum_{m=0}^M \left(\frac{z}{h} \right)^m \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad x_3 \equiv R+z, \quad i=1, 2;$$

$$U_1(t, \mathbf{r}) = u_1(t, \mathbf{x}) - z \partial_1 w + \sum_{m=0}^M f_1^{(m)}(z) \varepsilon_{13}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (2)$$

$$U_2(t, \mathbf{r}) = \frac{R+z}{R} u_2(t, \mathbf{x}) + \partial_2 w + \sum_{m=0}^M f_2^{(m)}(z) \varepsilon_{23}^{(m)}(t, \mathbf{x});$$

$$\begin{aligned} U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad G &= \{\mathbf{x}: 0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 < 2\pi\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$f_i^{(m)}(z) \equiv \frac{2}{h^2} [h^2 \Phi_i^{(m)}(z) - \Phi_i^{(m+2)}(z)] \quad (i=1, 2), \quad \Phi_1^{(m)}(z) \equiv \frac{z^{m+1}}{h^m(1+m)},$$

$$\Phi_2^{(m)}(z) \equiv \frac{R+z}{h^m} \Psi_m(z), \quad \Psi_m(z) \equiv \sum_{l=0}^{m-1} \frac{(-1)^l R^l z^{m-l}}{m-l} - R^m \ln(R+z);$$
(4)

где \mathbf{r} – вектор места точки конструкции; \mathbf{x} – вектор места точки на срединной поверхности оболочки ($z=0$); t_0 – начальный момент времени t ; z – введенная новая радиальная координата, отсчитываемая от срединной поверхности; w – прогиб точек отсчетной поверхности; u_1, u_2 – перемещения тех же точек в продольном и окружном направлениях оболочки; M – целое число, определяющее количество слагаемых, удерживаемых в степенных разложениях деформаций поперечных сдвигов ε_{i3} ; G – область, занимаемая срединной поверхностью цилиндрической оболочки в координатах x_1, x_2 ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i ($i=1, 2$). При $M=0$ из (1)-(3) при учете (4) получаются кинематические соотношения, соответствующие теории Редди [8,10]. Равенство (3) – традиционная для тонких оболочек гипотеза, согласно которой изменяемость перемещения $U_3(t, \mathbf{r})$ в поперечном направлении x_3 не учитывается [1,5,6,8-13].

Таким образом, в равенствах (1)-(3) неизвестны функции w, u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i=1, 2, 0 \leq m \leq M$), которые зависят от двух пространственных переменных x_1, x_2 и времени t .

Как и в [13] предполагаем: компоненты композиции оболочки однородны и изотропны, а их упругопластическое поведение описывается уравнениями теории течения с изотропным упрочнением; деформации малы. Тогда, повторяя рассуждения из [13] (см. там формулы (5)-(17)), получим следующее матричное определяющее соотношение для композиции цилиндрической оболочки:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}},$$
(5)

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23}, \dot{\sigma}_{31}, \dot{\sigma}_{12}\}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}, 2\dot{\varepsilon}_{12}\}^T;$$
(6)

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – вектор-столбцы, элементы которых – скорости осредненных напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в композиции; \mathbf{B} – 6×6 -матрица, вычисляемая по формуле (14) из [13], элементы которой b_{ij} ($i, j = \overline{1, 6}$) зависят от параметров армирования ω_k, θ_k и φ_k ($1 \leq k \leq K$), механических характеристик компонентов композиции и от упругопластического состояния этих компонентов; τ – операция транспонирования; точка – дифференцирование по времени t .

Так как элементы b_{ij} матрицы \mathbf{B} зависят от механического состояния компонентов композиции, уравнение (5) является нелинейным, поэтому в каждый момент времени t в каждой точке КМ-оболочки (независимо от других точек) нужно организовать итерационный процесс, аналогичный итерационному процессу посадки напряженного состояния на поверхность текучести [9]. (Как показывают предварительные расчеты, для получения практически приемлемых результатов достаточно использовать две итерации.) В случае линейно-упругого

деформирования компонентов композиции матрица \mathbf{B} редуцируется в матрицу эффективных жесткостей КМ [21].

В данной работе исследуется деформирование КМ-оболочки как гибкой тонкостенной системы, поэтому напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ с приемлемой для инженерных приложений точностью можно аппроксимировать линейно по поперечной координате z [1]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} z + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad (7)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ – нормальные напряжения на внешней (+) и внутренней (–) лицевых поверхностях, известные из соответствующих силовых граничных условий.

Матричное равенство (5) – система шести алгебраических уравнений. Согласно (6) из третьего уравнения этой системы можно выразить скорость поперечной линейной деформации оболочки

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1} (\dot{\sigma}_{33} - b_{31} \dot{\epsilon}_{11} - b_{32} \dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34} \dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35} \dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36} \dot{\epsilon}_{12}), \quad (8)$$

где функция $\dot{\sigma}_{33}$ известна после дифференцирования (7) по времени t . В правой части равенства (8) скорости деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ определяются за счет дифференцирования по времени соотношений (1), а значит, выражаются через двумерные функции w , \dot{w} , \dot{u}_l , $\dot{\epsilon}_{l3}^{(m)}$ ($l = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

Для приведения трехмерных уравнений динамического равновесия КМ-оболочки к двумерным уравнениям движения, как и в [12], используем метод взвешенных невязок. В качестве весовых функций при этом выступают однородные полиномы z^l . Учитывая предположения (3) и (7), получим [12]

$$\begin{aligned} \rho \dot{u}_1^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{12}^{(l)} - \bar{M}_{23}^{(l)} \partial_1 w \right) - l M_{13}^{(l-1)} + \\ &+ l M_{33}^{(l-1)} \partial_1 w - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_1 w + X_1^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ \rho \dot{u}_2^{(l)} &= \partial_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) + \partial_2 \left(\bar{M}_{22}^{(l)} - \bar{\bar{M}}_{23}^{(l)} \partial_2 w \right) - l M_{23}^{(l-1)} + \\ &+ l \bar{M}_{33}^{(l-1)} \partial_2 w - h^l \left[(R+h)^{-1} \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l (R-h)^{-1} \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_2 w + \\ &+ \bar{M}_{23}^{(l)} + X_2^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ 2h\rho \ddot{w} &= \partial_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) + \\ &+ \partial_2 \left(\bar{M}_{23}^{(0)} + \bar{M}_{21}^{(0)} \partial_1 w + \bar{\bar{M}}_{22}^{(0)} \partial_2 w \right) - \bar{M}_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \\ &- \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq l \leq M+1, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \\ \bar{M}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^l dz, \quad \bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h \frac{\sigma_{ij}(t, \mathbf{r})}{(R+z)^2} z^l dz, \quad i, j = \overline{1, 3}, \\ lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) &= l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) z^{l-1} dz = \frac{h^l}{2} \left[\left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 - (-1)^l \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{l}{l+1} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(1 + (-1)^l \right) \right], \quad l\bar{M}_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \frac{\sigma_{33}(t, \mathbf{r})}{R+z} z^{l-1} dz = \\ &= \frac{l}{2h} \left(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_l(h) - \Psi_l(-h) \right) + \frac{l}{2} \left(\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} \right) \left(\Psi_{l-1}(h) - \Psi_{l-1}(-h) \right); \\ u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_i(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \tag{10}$$

ρ_0, ρ_k – объемная плотность материалов связующего и арматуры k -го семейства; X_i – компоненты объемной нагрузки, действующей на КМ; функции $\Psi_l(z)$ определены в (4).

Согласно третьему соотношению (10), в случае тонких оболочек некоторым из введенных силовых факторов можно дать традиционную механическую трактовку: $M_{ij}^{(0)} \approx F_{ij}, M_{ij}^{(1)} \approx M_{ij}$ – приближенные выражения для мембранных усилий и изгибающих и крутящих моментов; $M_{i3}^{(0)} \approx F_{i3} (i, j = 1, 2)$ – приближенные выражения для перерезывающих сил. Остальные силовые факторы $M_{ij}^{(l)}, \bar{M}_{ij}^{(l)}$ и $\bar{\bar{M}}_{ij}^{(l)}$, заданные в (10), – моменты высших порядков от напряжений, вычисленные с весами $z^l, (R+z)^{-1} z^l$ и $(R+z)^{-2} z^l$ соответственно.

Для однозначного интегрирования исследуемой начально-краевой задачи требуется задать соответствующие граничные и начальные условия. Если на торцевой поверхности замкнутой оболочки заданы нагрузки, то граничные условия в силовых факторах (10) имеют вид [12]

$$\begin{aligned} n_1 \left(M_{11}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_1 w \right) &= P_1^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad n_1 \left(M_{21}^{(l)} - \bar{M}_{13}^{(l)} \partial_2 w \right) = P_2^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ n_1 \left(M_{13}^{(0)} + M_{11}^{(0)} \partial_1 w + \bar{M}_{12}^{(0)} \partial_2 w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad x_1 = 0 \text{ и/или } x_1 = L, \\ 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq l \leq M+1. \end{aligned} \tag{12}$$

В случае задания на торцевой поверхности КМ-оболочки перемещений для прогиба (3) и кинематических переменных (11) имеем [12]

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad x_1 = 0 \text{ и/или } x_1 = L, \\ 0 \leq x_2 < 2\pi, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) z^l dz, \quad j = \overline{1, 3}, \quad i = 1, 2; \tag{14}$$

$n_1 = 1$ при $x_1 = L$, $n_1 = -1$ при $x_1 = 0$; p_j – известные на торцевой поверхности внешние распределенные нагрузки; U_{*3} – известный на кромке прогиб; U_{*i} ($i = 1, 2$) – известные на торцевой поверхности тангенциальные перемещения.

Согласно (3) и (11), в момент времени t_0 нужно использовать начальные условия [12]

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \\ \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \quad v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) z^l dz, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M + 1; \quad (16)$$

U_{0j}, V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – заданные при $t = t_0$ перемещения и скорости точек КМ-оболочки.

Таким образом, для однозначного интегрирования исследуемой динамической задачи в каждой точке области G в момент времени t_0 нужно задать начальные условия (15) при учете (16), а на кромках КМ-оболочки ($x_1 = 0$ и/или $x_1 = L$) – силовые (12) или кинематические (13) граничные условия с учетом обозначений (14). Возможно задание смешанных из (12), (13) граничных условий, например в случае шарнирного опирания кромки.

Для получения связи между введенными выше кинематическими переменными $w, u_i, \varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) и $u_i^{(l)}, i = 1, 2$ (см. (1)-(3), (11)) проинтегрируем (2) по переменной z с весами z^l ($0 \leq l \leq M + 1$), после чего получим матричные равенства [12]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{u}_i + \bar{\mathbf{w}}_i \partial_i w \quad (\bar{\mathbf{w}}_i = \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{w}_i, \quad i = 1, 2), \quad (17)$$

где

$$\mathbf{u}_i = \left\{ u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, \dots, u_i^{(M)}, u_i^{(M+1)} \right\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \left\{ u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(M)} \right\}^T; \quad (18)$$

\mathbf{C}_i^{-1} – матрицы, обратные $(M + 2) \times (M + 2)$ -матрицам $\mathbf{C}_i = \left(c_{jl}^{(i)} \right)$, $\mathbf{w}_i = \left\{ w_j^{(i)} \right\}$ – $(M + 2)$ -компонентные векторы-столбцы, элементы которых $c_{jl}^{(i)}$ и $w_j^{(i)}$ ($1 \leq j, l \leq M + 2$) вычисляются по (31) из [12] и не зависят от решения задачи.

2. МЕТОД РАСЧЕТА

Для численного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи используем метод шагов по времени [9,12,13,22], т.е. значения неизвестных функций будем определять в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. При этом предполагаем, что в моменты времени $t = t_s$ уже известны значения следующих функций

$$\begin{aligned}
w^s(\mathbf{x}) &\equiv w(t_s, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)s}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_s, \mathbf{x}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{33}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), \\
\dot{\sigma}_{33}^{(\pm)s}(\mathbf{x}) &\equiv \dot{\sigma}_{33}^{(\pm)}(t_s, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^s(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_s, \mathbf{r}), \quad X_j^s(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_s, \mathbf{r}), \\
i &= 1, 2, \quad j = \overline{1, 3}, \quad s = n-1, n, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |z| \leq h,
\end{aligned} \quad (19)$$

поэтому по формулам (10) при $t = t_n$ можем вычислить все силовые факторы, входящие в правые части уравнений (9) и в граничные условия (12).

Производные по времени t аппроксимируем центральными конечными разностями на трехточечных шаблонах [9,12,13]. Согласно этому, из конечно-разностных аналогов уравнений (9) (см. (35) в [12]) при учете (19) и соответствующих граничных условий (12), (13) можем определить по явной схеме значения функций w^{n+1} и $u_i^{(l)n+1}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Используя (17) при учете (18), по известным w^{n+1} , $u_i^{(l)n+1}$ ($0 \leq l \leq M+1$) определяем функции u_i^{n+1} и $\varepsilon_{i3}^{(m)n+1}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), а затем по формулам (1) – осредненные деформации композиции ε_{ij}^{n+1} . По предположению при $t = t_{n-1}$ деформации ε_{ij}^{n-1} уже известны (см. (1) при учете (19)), поэтому, используя (8) и формулы численного дифференцирования по времени, вычисляем скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^n$. После этого по структурным формулам из [13] определяем скорости деформаций и напряжений в компонентах композиции. Далее численное решение строится совершенно так же, как и в [12,13]. Если при этом уравнения (9) дискретизировать не только по времени t , но и по пространственным переменным x_1 и x_2 , то в конечном итоге получим явную численную схему «крест» [9,12,13].

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

В качестве конкретных примеров исследуем неупругое динамическое поведение замкнутых круговых цилиндрических КМ-оболочек, которые жестко закреплены по обеим кромкам: $U_{*i} \equiv 0$ (см. (13), (14)), и покоятся в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ (см. (15), (16) при $U_{0i} \equiv 0, V_{0i} \equiv 0$). Массовые нагрузки не учитываем (см. (9), (10) при $X_i \equiv 0, i = \overline{1, 3}$). Конструкции нагружаются внутренним давлением, которое соответствует воздушной взрывной волне [22]

$$\sigma_{33}^{(+)}(t) = 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)}(t) = p(t) = \begin{cases} p_{\max} t/t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t-t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01)/(t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \quad (21)$$

t_{\max} – момент времени t , в который давление достигает наибольшего значения p_{\max} ; t_{\min} – момент времени t , при котором $p(t)$ можно считать пренебрежимо малым в сравнении с p_{\max} . (Так, соотношение (21) соответствует условию

$p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$). Согласно экспериментальным данным из [22], в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс.

Конструкции выполнены из эпоксисвязующего, отвержденного ароматическим амином, и усилены стеклянными волокнами марки S-994. Структуры армирования однородны: $\omega_k = \text{const}$, $\theta_k = \text{const}$, $\varphi_k = \text{const}$, $1 \leq k \leq K$ (см. рис.2). Упругопластическое деформирование компонентов композиции на стадии активного нагружения характеризуется билинейной диаграммой

$$\sigma = \begin{cases} E^{(k)}\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_y^{(k)} = \sigma_y^{(k)} / E^{(k)}, \\ \text{sign}(\varepsilon)\sigma_y^{(k)} + E_y^{(k)}(\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon)\varepsilon_y^{(k)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_y^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq K, \end{cases}$$

где σ , ε – напряжение и деформация при растяжении и сжатии материала; $E_y^{(k)}$ – модуль упрочнения материала k -го компонента композиции; $\sigma_y^{(k)}$, $\varepsilon_y^{(k)}$ – предел текучести и соответствующая ему деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции [14,15].

Материал	ρ , кг/м ³	ν	σ_y , МПа	E , ГПа	E_y , ГПа
Эпоксидная смола	1210	0,33	20	2,8	1,114
Стекловолокно S-994	2520	0,25	4500	86,8	6,230

На рис.4 изображены колебания точек центрального сечения в поперечном направлении (рис.4а: $w_0(t) = w(t, x_1)$, $x_1 = L/2$) и осцилляции наибольших значений интенсивности деформаций в эпоксисвязующем $\varepsilon_*^{(0)}$ (рис.4б,в: $\varepsilon_m^{(0)} = \max_{\mathbf{r}} \varepsilon_*^{(0)}(t, \mathbf{r})$, $0 \leq x_1 \leq L$, $|z| \leq h$) короткой замкнутой, относительно толстой цилиндрической оболочки ($L = R = 0,5$ м, $2h = 5$ см) при $p_{\max} = 20$ МПа (см. (20)), рассчитанные по теории Редди (рис.4в) и по уточненной теории (рис.4а,б). Решение задачи не зависит от угловой координаты x_2 .

Сплошные кривые 1 на рис.4 определены для оболочки, армированной в окружном направлении: $K = 1$, $\theta_1 = \varphi_1 = \pi/2$, $\omega_1 = 0,5$ (см. рис.2). Штриховые кривые 2 рассчитаны при «плоском» ортогональном 2D-армировании ($K = 2$; см. рис.3а): первое семейство волокон уложено в окружном направлении ($\theta_1 = \varphi_1 = \pi/2$, $\omega_1 = 0,4$), второе – в осевом ($\theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\omega_2 = 0,1$). Сплошные кривые 3 соответствуют пространственному 4D-армированию оболочки ($K = 4$) с параметрами: $\theta_1 = \varphi_1 = \pi/2$, $\omega_1 = 0,4$, $\theta_2 = \pi/2$, $\varphi_2 = 0$, $\omega_2 = 0,05$, $\theta_3 = \pi/4$, $\theta_4 = 3\pi/4$, $\varphi_3 = \varphi_4 = 0$, $\omega_3 = \omega_4 = 0,025$. (Подобная структура армирования изображена на рис.3в при $\theta = \pi/4$, которую следует повернуть на угол $\pi/2$ вокруг оси x_3 .) При всех типах армирования суммарный расход волокон одинаков.

Кривые на рис.4а рассчитаны по уточненной теории ($M = 7$; см. (1)) и показывают, что из трех рассматриваемых КМ-оболочек наименьшую

податливость имеет конструкция с окружным 1D-армированием (кривая 1), а наибольшую податливость – 4D-армированная оболочка (кривая 3). Зависимости $w_0(t)$, полученные по теории Редди ($M=0$), практически неотличимы от кривых, изображенных на рис.4а, поэтому не приводятся. Сравнение же кривых на рис.4б, рассчитанных также по уточненной теории, свидетельствуют о том, что максимальное значение интенсивности деформаций в эпоксисвязующем $\varepsilon_m^{(0)}$ при пространственном 4D-армировании оболочки почти в 1,5 раза меньше, чем при армировании в окружном направлении. Однако наименьшие значения $\varepsilon_m^{(0)}$ имеет конструкция с «плоским» 2D-армированием (см. кривую 2 на рис.4б).

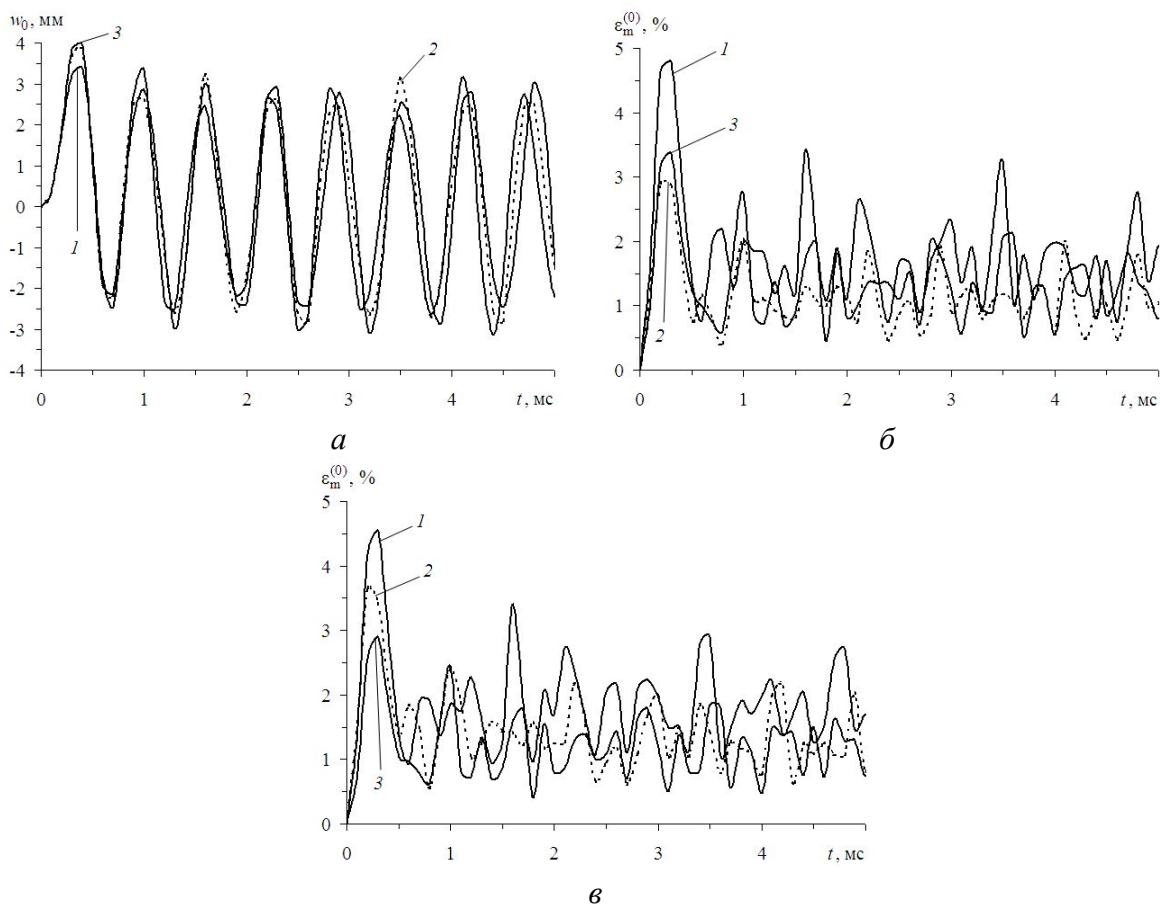
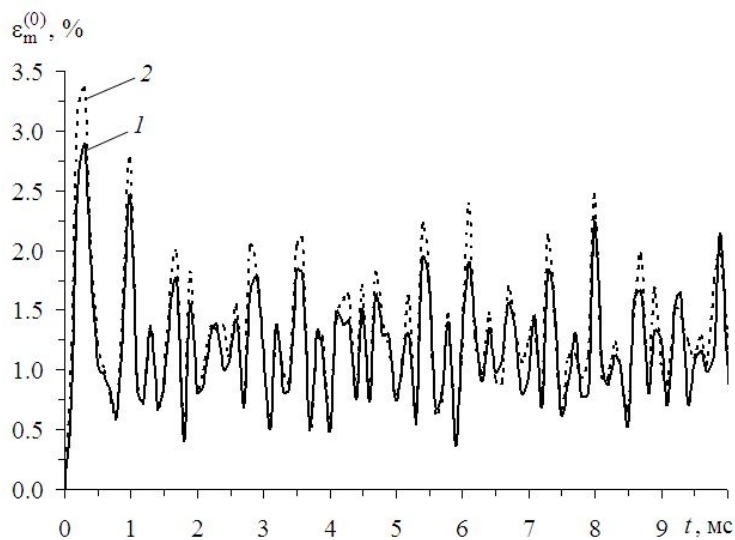


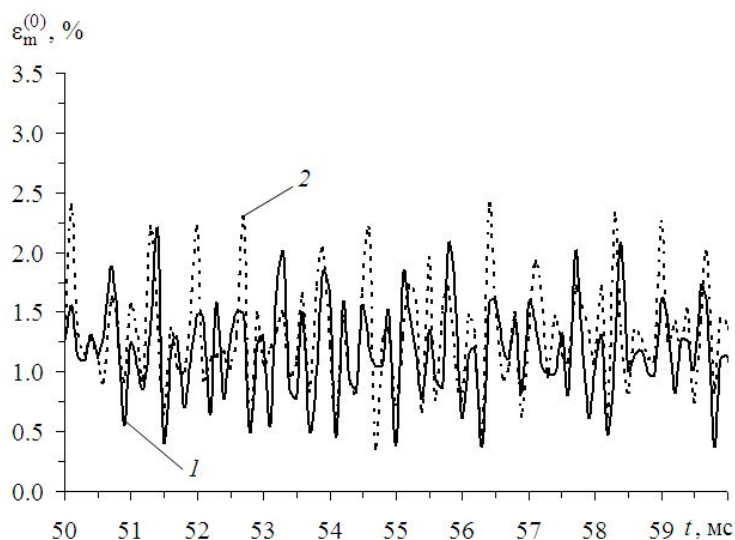
Рис.4. Зависимости от времени, рассчитанные по разным теориям: а – прогиба центрального сечения короткой замкнутой, относительно толстой цилиндрической КМ-оболочки (уточненный расчет); б – максимума интенсивности деформаций в связующем материале той же конструкции (уточненный расчет); в – то же, что и б, но при расчете по теории Редди.

При упругопластическом деформировании величину $\max_{t \geq t_0} \varepsilon_m^{(0)}(t)$ можно рассматривать как меру поврежденности эпоксисвязующего оболочки, поэтому чем больше $\max \varepsilon_m^{(0)}$, тем больше поврежден материал связующего. Согласно поведению кривых на рис.4б, наименее повреждено связующее в относительно толстой короткой цилиндрической оболочке с «плоским» 2D-армированием, хотя конструкция с таким армированием и не обеспечивает наименьшую податливость

(см. рис.4а). На рис.4б для сравнения приведены аналогичные зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, рассчитанные по теории Редди. Поведение кривых 2 и 3 на этом рисунке свидетельствует о том, что, согласно теории Редди, наименьшей поврежденностью эпоксисвязующего обладает не оболочка с «плоским» 2D-армированием, а конструкция с пространственным 4D-армированием. Следовательно, расчеты, проводимые по традиционной неклассической теории Редди, могут приводить к качественно неверным результатам. Последнее обстоятельство может негативно сказаться на решении оптимизационных задач, как о том свидетельствует сравнение поведения кривых на рис.4б,в.



а



б

Рис.5. Зависимость от времени максимума интенсивности деформаций в связующем короткой замкнутой, относительно толстой цилиндрической оболочки с пространственной структурой 4D-армирования, рассчитанная по разным теориям: а – в окрестности начального момента времени; б – в окрестности момента времени $t = 55$ мс .

Для демонстрации существенного различия расчетов деформированного состояния эпоксисвязующего, выполненных по разным теориям, на рис.5 изображены зависимости $\varepsilon_m^{(0)}(t)$, полученные для той же оболочки со структурой 4D-армирования в окрестности начального момента времени (рис.5а) и в окрестности $t = 55$ мс (рис.5б). Сплошные кривые 1 на рис.5 определены по теории Редди, а штриховые кривые 2 – по уточненной теории. Левые участки ($0 \leq t \leq 5$ мс) кривых 1 и 2 на рис.5а совпадают с кривыми 3 на рис.4в,б соответственно. Сравнение кривых на рис.5 показывает, что с увеличением расчетного интервала времени существенно возрастет различие в определении интенсивности деформаций связующего при использовании уточненной теории и теории Редди. Так, расчетные значения $\varepsilon_m^{(0)}$ могут различаться в разы (рис.5б).

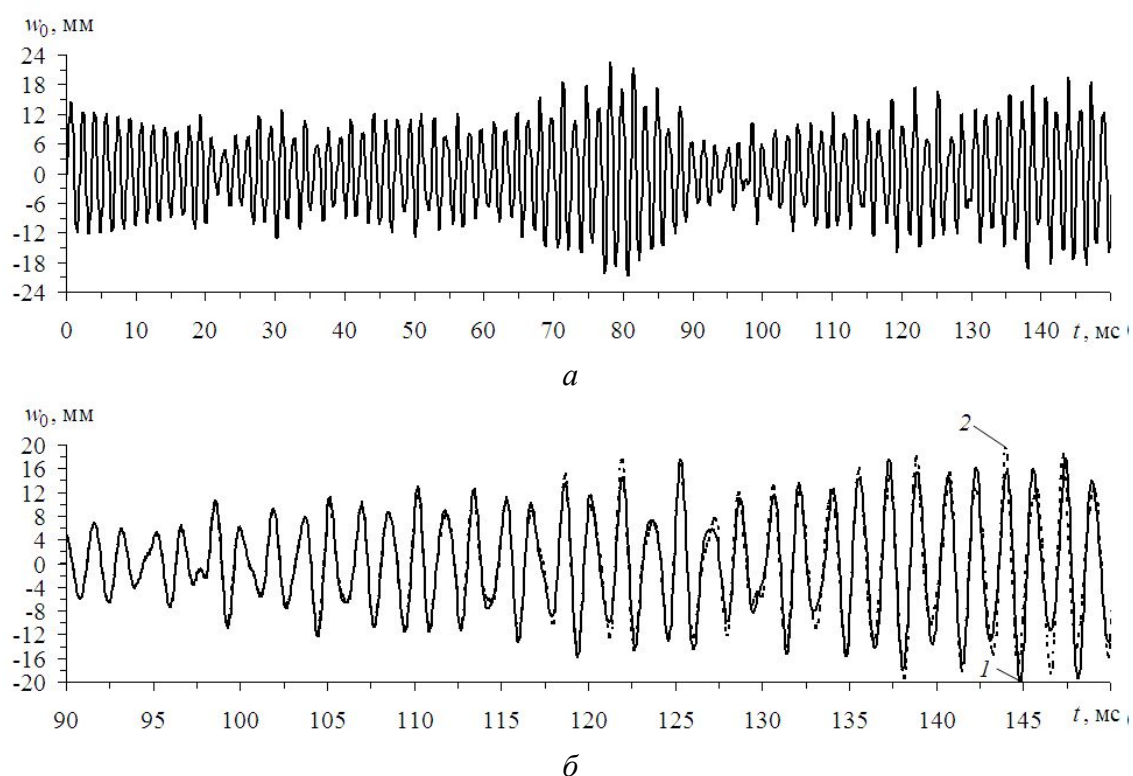


Рис.6. Поперечные осцилляции точек центрального сечения длинной замкнутой тонкой цилиндрической оболочки с пространственной структурой 4D-армирования: а – расчет по уточненной теории; б – сравнение расчетов по уточненной теории и по теории Редди.

На рис.6 изображены зависимости $w_0(t)$, определенные для длинной, относительно тонкой цилиндрической оболочки ($L = 4$ м, $R = 1$ м, $2h = 1$ см) со структурой 4D-армирования при интенсивности нагрузки $p_{\max} = 3$ МПа. Направления армирования при этом такие же, как и в предыдущем примере, а плотности армирования имеют значения: $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,05$, $\omega_3 = \omega_4 = 0,025$. На рис.6а показана зависимость $w_0(t)$, полученная по уточненной теории ($M = 7$), а на рис.6б приведены аналогичные зависимости в окрестности момента

времени $t = 120$ мс, рассчитанные по теории Редди (сплошная кривая 1) и по уточненной теории (штриховая кривая 2). Сравнение кривых на рис.6б показывает, что при $t > 110$ мс различие расчетных прогибов, определенных по разным теориям, становится значительным даже для весьма тонкой КМ-оболочки ($2h/R = 1/100$) с пространственной структурой 4D-армирования, причем это различие возрастает с увеличением расчетного интервала времени.

Так как в настоящем исследовании принято $t_{\min} = 2$ мс (см. (21)), при $t > 2$ мс колебания оболочки можно рассматривать как свободные. Согласно поведению кривой на рис.6а, на рассматриваемом интервале $0 \leq t \leq 150$ мс наибольший по модулю прогиб точек центрального сечения оболочки ($x_1 = L/2$) достигается в окрестности момента времени $t = 80$ мс, т.е. значительно позже окончания действия внешней кратковременной, но интенсивной динамической нагрузки. Для линейно-упругих КМ-оболочек этот факт был отмечен в [1], и является следствием геометрической нелинейности исследуемой задачи.

Дополнительные расчеты, проведенные для тонких длинных цилиндрических оболочек с окружным ($K = 1, \omega_1 = 0,3$) и продольно-окружным 2D-армированием ($K = 2, \omega_1 = 0,2, \omega_2 = 0,1$), показали, что из всех рассматриваемых типов армирования таких КМ-конструкций наименьшую податливость по-прежнему имеет оболочка с окружным армированием, а наибольшую – с пространственным 4D-армированием. С точки зрения же минимизации величины $\max \varepsilon_m^{(0)}$ наилучшей вновь является структура с 2D-армированием, а наихудшей – структура армирования в окружном направлении (соответствующие зависимости не приведены).

Таким образом, пространственное 4D-армирование рассматриваемых относительно толстых коротких и относительно тонких длинных замкнутых цилиндрических КМ-оболочек, согласно уточненной теории расчета, не приводит к повышению их сопротивляемости интенсивным динамическим нагрузкам по сравнению с продольно-окружным 2D-армированием.

Однако последний результат относится именно к замкнутым цилиндрическим КМ-оболочкам, которые деформируются осесимметрично. В случае же незамкнутых даже относительно тонких оболочек, например пологих цилиндрических панелей, пространственное армирование может быть более эффективным, чем «плоское» перекрестное армирование при том же общем расходе арматуры. Соответствующие примеры приведены в [13].

ВЫВОДЫ

Анализ упругопластического динамического деформирования гибких пространственно-армированных цилиндрических оболочек показал, что, как и в случае аналогичных оболочек с «плоскими» структурами армирования [12], применение широко используемой неклассической теории Редди не гарантирует получения надежных результатов расчетов податливости цилиндрических КМ-оболочек при их интенсивном кратковременном нагружении, так как при расчетных интервалах времени порядка одной десятой доли секунды и более прогибы таких конструкций, полученные по теории Редди и уточненным теориям существенно различаются. Еще в большей степени различие наблюдается при

сопоставлении деформированных состояний компонентов композиции, рассчитанных по этим теориям. Это различие может быть столь существенным, что теория Редди может приводить даже к качественно неверным результатам. Последнее же обстоятельство может негативно сказаться на решении проблемы оптимального армирования цилиндрических оболочек.

Сравнение динамического упругопластического осесимметричного деформирования замкнутых цилиндрических оболочек с разными типами армирования показал, что, согласно уточненной теории расчета, при относительной толщине таких конструкций $1/10$ и менее замена «плоской» продольно-окружной структуры армирования на пространственную структуру 4D-армирования с тем же расходом волокон, в отличие от незамкнутых пологих оболочек [13], не приводит ни к уменьшению податливости оболочки в поперечном направлении, ни к уменьшению деформированного состояния в компонентах композиции. В силу геометрической нелинейности исследуемых динамических задач в случае тонких оболочек максимальный прогиб может возникнуть значительно позже времени прекращения действия интенсивной кратковременной нагрузки. В случаях относительно толстых КМ-конструкций наибольший по модулю прогиб достигается, как правило, на первой осцилляции, так как при этом геометрическая нелинейность практически не сказывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.
2. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective* // *Composites*. – 2001. – Part A32. – Pp.901-910.
3. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics* / 3rd ed. – Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites* // *Frontiers of Mechanical Eng.* – 2013. – Vol.8. – No.2. – Pp.187-200.
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики цилиндрических оболочек*. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
6. Reissner E. *On transverse vibrations of thin shallow elastic shells* // *Quarterly of Applied Mathematics*. – 1955. – Vol.13. – No.2. – Pp.169-176.
7. Whitney J., Sun C. *A higher order theory for extensional motion of laminated composites* // *J. of Sound and Vibration*. – 1973. – Vol.30. – No.1. – Pp.85-97.
8. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. *Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания*. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
9. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis* / 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004.
11. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 336 с.

12. Янковский А.П. *Моделирование динамического поведения армированных цилиндрических оболочек при упругопластическом деформировании материалов компонентов композиции* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2018. – №2. – С.133-146.
13. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического деформирования гибких пологих оболочек с пространственными структурами армирования* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2018. – Т.11. – №3. – С.335-354.
14. *Композиционные материалы: Справочник* / Под ред. Карпиноса Д.М. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
15. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн. 1* / Под ред. Любина Дж.; Пер. с англ. Геллера А.Б., Гельмонта М.М.; Под ред. Геллера Б.Э. – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
16. Гарнопольский Ю.М., Жигун И.Г., Поляков В.А. *Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1987. – 224 с.
17. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites* // SAMPE J. – 2001. – Vol.37. – No.3. – Pp.3-17.
18. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites* // Mechanics of Composite Materials. – 2009. – Vol.45. – No.2. – Pp.241-254.
19. Гарнопольский Ю.М., Поляков В.А., Жигун И.Г. *Композиционные материалы, армированные системой прямых взаимно ортогональных волокон. 1. Расчет упругих характеристик* // Механика полимеров. – 1973. – №5. – С.853-860.
20. Крегерс А.Ф., Тетерс Г.А. *Структурная модель деформирования анизотропных, пространственно армированных композитов* // Механика композитных материалов. – 1982. – №1. – С.14-22.
21. Янковский А.П. *Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель* // Механика композитных материалов. – 2010. – Т.46. – №5. – С.663-678.
22. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1/2. – Pp.1-15.

REFERENCES

1. Bogdanovich A.E. *Nelinejnye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear problems of the dynamics of cylindrical composite shells]*. Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
2. Bannister M. *Challenger for composites into the next millennium – a reinforcement perspective*. Composites, 2001, Part A32, Pp.901-910.
3. Gibson R.F. *Principles of composite material mechanics*. 3rd ed. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2012, 686 p.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P. *Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass-fiber-reinforced plastic composites*. Frontiers of Mechanical Eng., 2013, Vol.8, No.2, Pp.187-200.

5. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]*. Moskva, Fizmatlit, 2014, 408 p.
6. Reissner E. *On transverse vibrations of thin shallow elastic shells*. Quarterly of Applied Mathematics, 1955, Vol.13, No.2, Pp.169-176.
7. Whitney J., Sun C. *A higher order theory for extensional motion of laminated composites*. J. of Sound and Vibration, 1973, Vol.30, No.1, Pp.85-97.
8. Andreev A.N., Nemirovskii Yu.V. *Mnogoslojnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustojchivost' i kolebaniya [Multilayered anisotropic shells and plates. Bending, stability and vibration]*. Novosibirsk, Nauka, 2001, 287 p.
9. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelinejnye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksij [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. Nizhnij Novgorod, Izd-vo NNGU, 2002, 400 p.
10. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*. 2nd ed. Boca Raton, CRC Press, 2004.
11. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' uprugikh obolochek neodnorodnoj struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennye i novye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]*. Moskva, Knizhnyj dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.
12. Yankovskii A.P. *Modelirovanie dinamicheskogo povedeniya armirovannykh tsilindricheskikh obolochek pri uprugoplasticheskom deformirovanii materialov komponentov kompozitsii [Modeling of dynamic behavior of reinforced cylindrical shells under elastic-plastic deformation of materials of composition components]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta, Mekhanika, 2018, No.2, Pp.133-146.
13. Yankovskii A.P. *Modelirovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh pologikh obolochek s prostranstvennymi strukturami armirovaniya [Modeling of elastoplastic deformation of flexible shallow shells with spatial reinforcement structures]*. Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred, 2018, Vol.11, No.3, Pp.335-354.
14. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik / Pod red. Karpinosa D.M. [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
15. Lubin G. *Handbook of composites*. New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982, 442 p.
16. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Prostranstvenno-armirovannye kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Spatially reinforced composite materials: Handbook]*. Moskva, Mashinostroenie, 1987, 224 p.
17. Mohamed M.H., Bogdanovich A.E., Dickinson L.C., Singletary J.N., Lienhart R.R. *A new generation of 3D woven fabric performs and composites*. SAMPE J., 2001, Vol.37, No.3, Pp.3-17.
18. Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M. *Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites*. Mechanics of Composite Materials, 2009, Vol.45, No.2, Pp.241-254.
19. Tarnopol'skii Yu.M., Zhigun I.G., Poliakov V.A. *Kompozitsionnye materialy, armirovannye sistemoj pryamykh vzaimno ortogonal'nykh volokon. 1. Raschet uprugikh kharakteristik [Composite materials reinforced with a system of straight*

- mutually orthogonal fibers. 1. Calculation of elastic characteristics]. Mekhanika polimerov, 1973, No.5, Pp.853-860.*
20. Kregers A.F., Teters G.A. *Strukturnaya model' deformirovaniya anizotropnykh, prostranstvenno armirovannykh kompozitov [Structural model of deformation of anisotropic, spatially reinforced composites]. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1982, No.1, Pp.14-22.*
 21. Yankovskii A.P. *Determination of the thermoelastic characteristics of spatially reinforced fibrous media in the case of general anisotropy of their components. 1. Structural model. Mechanics of Composite materials, 2010, Vol.46, No.5, Pp.451-460.*
 22. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1/2, Pp.1-15.*

Поступила в редакцию 10 сентября 2018 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru