

УДК 539.3

## СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ МОРИ-ТАНАКА И ГОРБАЧЕВА-ПОБЕДРИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ С ПЬЕЗОАКТИВНЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ\*

Соляев Ю.О.<sup>1</sup>, Горбачев В.И.<sup>2</sup><sup>1</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия<sup>2</sup>Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

Рассматривается проблема прогноза эффективных характеристик композиционных материалов на основе полимерной изотропной матрицы с наполнителем из пьезоактивных трансверсально изотропных керамических частиц. В рамках модели сферического включения проводится сопоставление трех методов осреднения. Во-первых, привлекается метод Мори-Танака, который позволяет получить аналитические оценки эффективных свойств, основанные на решении задачи Эшелби для изолированного включения. Во-вторых, рассматривается метод Горбачева-Победри, который основан на интегральном представлении решений для задач о деформациях неоднородной среды и требует численного решения вспомогательных задач для определения, так называемых, структурных функций. Прогнозы, получаемые в рамках указанных методов, сопоставляются с результатами прямого численного моделирования представительных фрагментов композитов, для которых эффективные характеристики определяются, как отношение соответствующих осредненных значений полей напряжений, деформаций, напряженности электрического поля и электрической индукции.

В результате расчетов установлено, что рассмотренные методы могут приводить к отличающимся прогнозам свойств пьезокомпозитов. Наибольшее различие реализуется для пьезоэлектрических констант: до 150-200% при объемном содержании включений 30-40%. Также установлено качественное различие в получаемых прогнозах: для констант, определяющих жесткость композита при растяжении/сжатии и диэлектрические свойства наиболее высокие эффективные значения получены по методу Горбачева-Победри, а наименьшие – по методу Мори-Танака. Для жесткости композита на сдвиг наиболее высокие прогнозы дает метод Мори-Танака, а самая низкая эффективная жесткость на сдвиг реализуется при реализации подхода, основанного на конечно-элементном моделировании представительных фрагментов.

**Ключевые слова:** пьезокомпозит; эффективные свойства; сферическое включение; методы осреднения; прогноз свойств

### COMPARISON BETWEEN MORI-TANAKA AND GORBACHEV- POBEDRYA METHODS IN THE PROBLEM OF DETERMINATION OF THE EFFECTIVE PROPERTIES OF COMPOSITES WITH PIEZOELECTRIC SPHERICAL INCLUSIONS

\* Работа выполнена при поддержке программы ИППРИМ РАН (рег. номер №АААА-А17-117032010137-0) и гранта для молодых ученых кандидатов-наук №МК-1336.2017.8.

Solyaev Y.O.<sup>1</sup>, Gorbachev V.I.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

The problem of prediction of the effective characteristics of composite materials with polymeric isotropic matrix filled with piezoactive transversely isotropic ceramic particles is considered. Within the framework of the spherical inclusion model, three methods of averaging are compared. Firstly, the Mori-Tanaka method is used, which allows one to obtain analytical estimates of effective properties based on the Eshelby problem solution for an isolated inclusion. Secondly, the Gorbachev-Pobedrya method is considered, which is based on an integral representation of solutions for problems of deformation of a heterogeneous medium and requires numerical solution of auxiliary problems for determining of the so-called structural functions. The predictions obtained in the framework of these methods are compared with the results of numerical modeling of representative fragments of composites, for which effective characteristics are determined as the ratio of the corresponding averaged values of stress, strain, electric field and electric displacements. As a result of the calculations, it was established that the considered methods may lead to different predictions of the properties of piezocomposites. The greatest difference is realized for piezoelectric constants: up to 150-200% with a volume content of inclusions 30-40%. The highest predictions for the elastic tensile moduli and dielectric constants are obtained by using Gorbachev-Pobedrya method and the lowest – by using Mori-Tanaka method. In opposite, the highest shear moduli are predicted by Mori-Tanaka method, while the smallest ones are followed from the finite element simulation.

**Keywords:** piezocomposite; effective properties; spherical inclusion; averaging methods; property prediction

### ВВЕДЕНИЕ

Композиционные материалы на основе полимерных связующих, наполненных пьезоэлектрическими включениями, обладают рядом преимуществ по сравнению с пьезокерамиками. Композиты обладают высокими пьезоэлектрическими свойствами, достаточно высокой прочностью, трещиностойкостью, их диэлектрические свойства могут варьироваться в широких пределах, они более технологичны. В настоящее время пьезокомпозиты на основе полимерных связующих широко применяются в качестве элементов различных электромеханических устройств – датчиков, актуаторов, преобразователей и т.д. [1,2].

Зависимость эффективных электромеханических свойств композиционных материалов от параметров их состава и микроструктуры может быть оценена на основании теоретических расчетов. Задача осреднения для пьезокомпозитов, армированных эллипсоидальными включениями, была решена впервые в работе [3]. Здесь эффективные свойства были найдены на основе метода Мори-Танака, дифференциальной схемы осреднения, самосогласованного метода, а также в рамках модели изолированного включения (dilute approximation). Эти методы осреднения, разработанные первоначально в теории упругости [4], были обобщены на случай электроупругих материалов путем построения соответствующего решения обобщенной задачи Эшелби с учетом пьезоэлектрических эффектов. При этом использовался подход Барнета и Лотта [5], в рамках которого рассматривается расширенный четырехмерный вектор

обобщенных переменных, включающий в себя, компоненты вектора перемещений и потенциал электрического поля.

Позднее были предложены методы прогноза эффективных свойств пьезокомпозитов на основе модели полидисперсных включений [6], на основе обобщенного самосогласованного метода [7] и асимптотического метода осреднения [8,9]. Было получено обобщение вилки Хашина-Штрикмана для неоднородных пьезоэлектриков [10]. Были реализовано численное моделирование представительных фрагментов пьезокомпозитов [11,9,12,13]. Замкнутые аналитические решения для композитов с трансверсально изотропными фазами и со сфероидальными включениями были получены в работе [14]. В работах [15,16,17] были развиты методы статистической механики композитов для неоднородных пьезоэлектриков. Были построены решения для оценки свойств композитов, армированных включениями с покрытиями [18,19]. Рассматривались модели с учетом поверхностных эффектов [20,21] и модели градиентной теории электроупругости [22,23], учитывающие влияние размера включений.

Как и для упругих материалов, для пьезокомпозитов, армированных эллипсоидальными включениями, одним из наиболее удобных и простых в применении оказывается метод осреднения Мори-Танака, который позволяет в замкнутой аналитической форме получить выражения для всех эффективных характеристик эквивалентной однородной среды. В частности, при использовании этого метода выражения для эффективных материальных констант могут быть представлены через компоненты тензора Эшелби рассматриваемой задачи. Такие решения были получены для случая цилиндрических и пластинчатых пьезоэлектрических включений в работе [3], а для сферических включений в работе [24]. Другие известные аналитические методы осреднения не позволяют получать решения в замкнутой форме, как например, дифференциальная схема или обобщенный самосогласованный метод [3,25], либо могут применяться в ограниченных диапазонах параметров, как например, самосогласованный метод или модель изолированного включения [3,26].

Сопоставление различных аналитических методов определения эффективных свойств пьезокомпозитов проводилось ранее в работе [3]. Сопоставление численного моделирования с методом асимптотического осреднения было реализовано в работе [9]. В настоящей работе проводится сопоставление прогнозов свойств для дисперсно-армированных композитов, получаемых в рамках метода Мори-Танака и метода Горбачева-Победри. Последний был предложен в работе [27] и обобщен на случай пьезоэлектрических материалов в недавней работе [28]. Этот метод является разновидностью метода асимптотического осреднения, однако, он не требует введения предположения о периодической структуре композита и для вычисления эффективных констант использует интегральные представления для перемещений и потенциала электрического поля, записываемые через тензор Грина рассматриваемой задачи. Реализация этого метода требует численного решения вспомогательных задач, для вычисления, так называемых структурных функций [28,27]. Получаемые результаты в рамках двух указанных методов дополнительно сопоставляются в настоящей работе с результатами прямого конечно-элементного моделирования периодических фрагментов композиционного материала на основе стандартного подхода, изложенного, например, в [11].

## 1. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ

Рассматриваем статическую задачу линейной теории электроупругости [15,29] для неоднородного тела  $\Omega$ . Из законов сохранения импульса и электрического заряда следует выполнение уравнений равновесия и закона Гаусса в объеме тела

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad x_i \in \Omega \quad (1)$$

$$D_{i,i} - \rho = 0, \quad x_i \in \Omega \quad (2)$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $f_i$  – компоненты вектора объемных нагрузок,  $D_{i,i}$  – компоненты вектора электрической индукции,  $\rho$  – объемная плотность электрических зарядов,  $x_i$  – координаты точек среды в декартовой системе; по повторяющимся индексам предполагается суммирование, а запятая обозначает производную по соответствующим координатам.

Определяющие соотношения для пьезоэлектрика записываем в терминах деформаций  $\varepsilon_{ij}$  и напряженности электрического поля  $E_i$ , через которые выражаются компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{ijk}E_k \quad (3)$$

$$D_i = e_{ijk}\varepsilon_{jk} + \kappa_{ij}E_j \quad (4)$$

где  $C_{ijkl}(x_i)$  – компоненты тензора модулей упругости;  $e_{ijk}(x_i)$  – компоненты тензора пьезоупругих модулей,  $\kappa_{ij}(x_i)$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости; материальные константы зависят от пространственных координат для рассматриваемого неоднородного тела.

В приближении линейной теории деформации связаны с компонентами вектора перемещений соотношениями  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ . Напряженность электрического поля определяется градиентом электростатического потенциала  $E_i = -\phi_{,i}$ .

Постановка задачи содержит 22 неизвестных  $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}, D_i, E_i, \phi$ . Граничные условия формулируются относительно перемещений, напряжений, потенциала электрического поля и вектора электромагнитной индукции, задаваемых на соответствующих частях внешней поверхности рассматриваемого тела  $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} u_i &= u_i^0, \quad x_i \in \partial\Omega_u & \sigma_{ij}n_j &= \sigma_i^0, \quad x_i \in \partial\Omega_\sigma \\ \phi &= \phi_0, \quad x_i \in \partial\Omega_\phi & D_in_i &= D_0, \quad x_i \in \partial\Omega_D \end{aligned} \quad (5)$$

## 2. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ

В данном разделе приводится краткое описание методов осреднения, которые применяются далее для вычисления эффективных упругих, пьезоупругих и диэлектрических констант композиционного материала, содержащего сферические трансверсально-изотропные включения. Подробное описание и общее теоретическое обоснование применяемого метода Мори-Танакки изложено в работах [3,4,30], метод Горбачева-Победри описан в работах [28,27]. Методика численного моделирования и прогноза свойств для периодических

представительных фрагментов пьезоактивных композитов изложена в [11]. Во всех дальнейших расчетах предполагается, что ось анизотропии включений совпадает с направлением  $x_3$  в глобальной системе координат.

### 2.1. Метод Мори-Танака.

Метод Мори-Танака основан на использовании следующего известного соотношения для вычисления тензора эффективных констант неоднородной среды  $\mathbf{C}^*$  на основании заданных характеристик фаз  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  и объемного содержания включений  $c_2$  [3,30]

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}_1 + c_2 (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \mathbf{A} \quad (6)$$

Тензор концентрации  $\mathbf{A}$  в рамках метода Мори-Танака вычисляется через тензор концентрации для задачи об изолированном включении  $\mathbf{T}$  на основании соотношения

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \left( (1 - c_2) \mathbf{I} + c_2 \mathbf{T} \right)^{-1} \quad (7)$$

Тензор концентрации  $\mathbf{T}$  для включений эллипсоидальной формы, в свою очередь, может быть представлен через тензор Эшелби  $\mathbf{S}$ , вычисленный для соответствующей задачи об изолированном включении

$$\mathbf{T} = \left( \mathbf{I} + \mathbf{S} \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1) \right)^{-1} \quad (8)$$

Таким образом, подстановка (8) в (7) и затем в (6) приводит к замкнутому аналитическому выражению для определения эффективных констант  $\mathbf{C}^*$  через заданные тензоры  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  объемное содержание включений  $c_2$  и тензор Эшелби  $\mathbf{S}$  для рассматриваемой задачи.

Представленная формулировка метода Мори-Танака была предложена первоначально для задачи об определении эффективных упругих констант неоднородных сред. Решение задачи электроупругости может быть представлено в аналогичной форме (6)-(8) путем использования обобщенной нотации Барнета и Лотта [5,3,24]. В этом случае рассматривается четырехмерное пространство переменных (переменными являются перемещения и электрический потенциал), и используется следующее покомпонентное представление для тензоров материальных констант

$$C_{iJMn} = \begin{cases} C_{ijmn}, & J, M = 1, 2, 3 \\ e_{nij}, & J = 1, 2, 3; M = 4 \\ e_{imn}, & J = 4; M = 1, 2, 3 \\ -\kappa_{in}, & J = M = 4 \end{cases}$$

В приведенной записи большие индексы изменяются от 1 до 4, но в диапазоне значений от 1 до 3 они совпадают малыми индексами, обозначенными то же буквой.

Для обобщения решения (8) на случай пьезоэлектриков, тензор Эшелби также должен быть вычислен в рамках задачи линейной электроупругости. В частности, его компоненты в случае задачи о сферическом включении могут быть выражены через тензор электроупругих модулей матрицы композита в следующем виде [24]

$$S_{MnAb} = \begin{cases} \frac{1}{8\pi} C_{iJAb} (I_{innJ} + I_{innJ}), & M = 1, 2, 3 \\ \frac{1}{4\pi} C_{iJAb} I_{in4J}, & M = 4 \end{cases} \quad (9)$$

$$I_{inMJ} = \int_{-1}^1 dt \int_0^{2\pi} G_{inMJ} d\phi$$

$$G_{inMJ} = y_i y_n (C_{pMJq} y_p y_q)^{-1}$$

$$y_1 = \sqrt{1-t^2} \cos \phi, \quad y_2 = \sqrt{1-t^2} \sin \phi, \quad y_3 = t$$

Интегралы  $I_{inMJ}$  могут быть вычислены в аналитической форме в случае трансверсально изотропных материалов [24]. Более того, в случае рассматриваемых далее композитов с изотропной матрицей, структура тензора Эшелби оказывается очень простой: она включает в себя только компоненты классического тензора Эшелби для задачи теории упругости, выражаемые через коэффициент Пуассона матрицы  $\nu$ , и компоненты аналога тензора Эшелби для задачи электростатики. Отличными от нуля компонентами будут следующие

$$S_{1111} = S_{2222} = S_{3333} = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)},$$

$$S_{1122} = S_{2233} = S_{3311} = S_{1133} = S_{2211} = S_{3322} = \frac{5\nu-1}{15(1-\nu)},$$

$$S_{1212} = S_{2323} = S_{3131} = \frac{4-5\nu}{15(1-\nu)},$$

$$S_{4141} = S_{4242} = S_{4343} = \frac{1}{3}$$

Для реализации метода Мори-Танака все вычисления в выражениях (6)-(8) могут проводиться с использованием матричного представления тензоров четвертого ранга. В этом случае, тензоры материальных констант, тензоры концентрации и тензор Эшелби для задачи электроупругости могут быть представлены в виде матриц размерностью  $9 \times 9$  с введением соответствующей двухиндексной нотации [29]. Дальнейшие вычисления сводятся к операциям на над матрицами.

## 2.2. Метод Горбачева-Победри.

Метод Горбачева-Победри основан на применении определяющих соотношений электроупругости (3), (4), записываемых относительно осредненных по объему неоднородного материала напряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$ , деформаций  $\langle \varepsilon_{kl} \rangle$ , электрической индукции  $\langle D_i \rangle$  и напряженности электрического поля  $\langle E_j \rangle$ . Коэффициентами в этих определяющих соотношениях являются искомые эффективные материальные константы композита  $C_{ijkl}^*$ ,  $e_{kij}^*$ ,  $\kappa_{ij}^*$

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle - e_{kij}^* \langle E_k \rangle \quad (10)$$

$$\langle D_i \rangle = e_{ijk}^* \langle \varepsilon_{jk} \rangle + \kappa_{ij}^* \langle E_j \rangle \quad (11)$$

Осредненные величины, входящие в записанные соотношения (10), (11), вычисляются с использованием интегральных представлений для перемещений

и потенциала электрического поля, реализующихся в неоднородном материале. Эти представления являются, по сути, обобщением на случай электроупругих сред представлений решения задач теории упругости через тензор Грина [31]. Полученные представления позволяют ввести разложение в ряды специального вида искомых функций перемещений и потенциала электрического поля через вспомогательные структурные функции. При учете только первых членов разложения, в связанной задаче электроупругости возникает четыре набора структурных функций  $N_{ijk}$ ,  $U_{ij}$ ,  $V_{ij}$  и  $M_i$ , которые могут быть найдены численно на основании требования выполнения уравнений равновесия и граничных условий рассматриваемой задачи [28].

Осреднение полевых переменных задачи по объему композита при заданных однородных граничных условиях (в терминологии Хашина [32]) приводит к следующей связи между искомыми эффективными характеристиками эквивалентной среды, характеристиками фаз композита и структурными функциями задачи [28]

$$C_{ijnm}^* = \langle C_{ijnm} + C_{ijkl} N_{kmn,l} + e_{kij} V_{mn,k} \rangle \quad (12)$$

$$e_{mij}^* = \langle e_{mij} + C_{ijkl} U_{km,l} + e_{kij} M_{m,k} \rangle \quad (13)$$

$$\kappa_{jm}^* = \langle \kappa_{jm} + \kappa_{jkl} M_{m,k} + e_{jkl} U_{km,l} \rangle \quad (14)$$

Необходимые условия симметрии тензоров эффективных констант доказываются в процессе построения решения [28]. Параметры микроструктуры композита (объемное содержание и т.п.) в явном виде не возникают в представлении (12)-(14). Эти параметры учитываются при вычислении структурных функций, на основании решения следующих вспомогательных задач

$$\begin{cases} (C_{ijkl} N_{kmn,l} + e_{kij} V_{mn,k} + C_{ijnm})_{,j} = 0, & x_i \in \Omega \\ (-\kappa_{ij} N_{mn,k} + e_{jkl} V_{kmn,l} + e_{jmn})_{,j} = 0, & x_i \in \Omega \\ N_{kmn} = 0, V_{mn} = 0, & x_i \in \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} (C_{ijkl} U_{km,l} + e_{kij} V_{m,k} + e_{mij})_{,j} = 0, & x_i \in \Omega \\ (-\kappa_{jk} N_{m,k} + e_{jkl} V_{km,l} - \kappa_{jm})_{,j} = 0, & x_i \in \Omega \\ M_m = 0, U_{km} = 0, & x_i \in \partial\Omega \end{cases} \quad (16)$$

Заметим, что в случае кусочно-однородных материалов (композитов) «правые части» в системах (15), (16) возникают только на границе контакта разнородных фаз, как разность соответствующих упругих, пьезоупругих или диэлектрических констант, относящихся к контактирующим материалам [27]. Решая эти краевые задачи, мы можем определить все искомые структурные функции. Затем, проводя осреднение и используя представления (12)-(14), найдем все эффективные характеристики неоднородного тела, причем, эти представления справедливы в общем случае анизотропии фаз.

Для упрощения учтем, что в дальнейших расчетах будет рассматриваться композит на основе изотропной матрицы, армированной включениями из трансверсально изотропной керамики с осью изотропии, совпадающей с осью  $x_3$ . Поэтому количество решаемых систем в (15), (16) можно уменьшить, учитывая структуру тензоров материальных констант. Тривиальные системы,

в которых не будет возникать «правых частей» можно исключить из рассмотрения.

Для проведения дальнейшего анализа учтем, что наиболее общей структурой обладают тензоры, определяющие свойства трансверсально изотропных пьезоупругих материалов (такими будут включения и эффективная среда). Ненулевыми компонентами в этих тензорах будут

$$\begin{aligned} C_{1111} = C_{2222} = C_{11}, \quad C_{1122} = C_{12}, \quad C_{1133} = C_{2233} = C_{13}, \\ C_{3333} = C_{33}, \quad C_{1313} = C_{2323} = C_{44}, \quad C_{1212} = (C_{11} - C_{12})/2 \\ e_{311} = e_{322} = e_{31}, \quad e_{333} = e_{33}, \quad e_{223} = e_{113} = e_{15}, \\ \kappa_{11} = \kappa_{22}, \quad \kappa_{33}. \end{aligned} \quad (17)$$

В записанных выражениях использована двухиндексная нотация Фойгта, и следует учитывать условия симметрии тензоров материальных констант по парам и внутри пар индексов, справедливые для любого типа анизотропии. Из анализа (15) с учетом (17), следует, что функции  $N_{kmn}$ ,  $V_{mn}$  симметричны по паре индексов  $mn$  и содержат 18 и 6 независимых компонент, соответственно. Также выполняется:  $N_{k11} = N_{k22}$ ,  $N_{k13} = N_{k23}$ ,  $V_{11} = V_{22}$ ,  $V_{13} = V_{23}$ . Поэтому количество искоемых функций  $N_{kmn}$  составляет всего 12, а функций  $V_{mn}$  – 4. Краевые задачи (15) позволяют определить эти функции. В постановке (15) содержится всего шесть краевых задач (с учетом указанной симметрии для индексов  $mn$ ). Каждая задача содержит по четыре уравнения для определения функций  $N_{k1}$ ,  $N_{2mn}$ ,  $N_{3mn}$ ,  $V_{mn}$ , где индексы  $m$  и  $n$  фиксированы. С учетом указанных условий симметрии можно искать, например, структурные функции для пар индексов  $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 3)$ .

Из аналогичного анализа (16) с учетом (17) для функций  $U_{km}$ ,  $M_m$  следуют условия:  $U_{k1} = U_{k2}$ ,  $M_1 = M_2$ . Поэтому количество искоемых функций  $U_{km}$  составляет всего 6, а функций  $M_m$  – 2. Эти функции определяются из решения систем (16), которые можно находить, например, для значений индексов  $m = 1$  и  $m = 3$ . Каждая из систем (16) содержит по 4 уравнения и позволяет найти функции  $U_{1m}$ ,  $U_{2m}$ ,  $U_{3m}$ ,  $M_m$ .

Решения систем уравнений (15) и (16) удобно находить численно методом конечных элементов. Результаты реализации такого решения представлены в разделе 3.

### 2.3. Численное моделирование.

Эффективные характеристики пьезокомпозиатов могут быть найдены на основании непосредственного численного моделирования электромеханического поведения представительных фрагментов. При использовании такого подхода для оценки эффективных свойств необходимо 1) рассмотреть модель представительного фрагмента композиционного материала (рис.1) в рамках линейной теории электроупругости (1)-(5); 2) задать однородные граничные условия, обеспечивающие однородное поле деформаций и напряженности электрического поля в эквивалентной однородной среде; 3) решить задачу численно методом конечных элементов; 4) осреднить по объему фрагмента поле напряжений, деформаций, напряженность и индукцию электрического поля;



5) найти эффективные характеристики среды на основании определяющих соотношений (10), (11), как отношение соответствующих осредненных величин.

Численное решение строится с учетом периодических граничных условий, в соответствии с которыми, на противоположных поверхностях фрагмента ставится требование равенства соответствующих компонент напряжений, деформаций, напряженности электрического поля и электрической индукции.

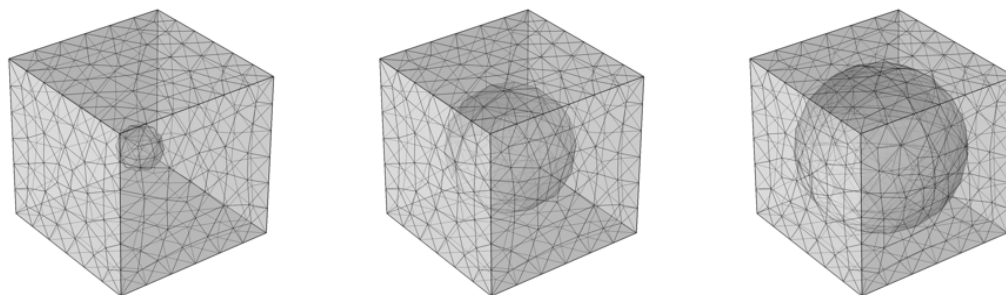


Рис.1. Представительные фрагменты композита с объемным содержанием включений 1%, 20%, 40%.

Область, которую занимает весь кубический представительный фрагмент с размером граней  $d$ , определяется условиями:  $\{x_i \in [-d/2, d/2], i = 1, 2, 3\}$ . Сферическое включение, считаем, расположено по центру фрагмента и занимает область  $\{x_i : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq R\}$ , где  $R$  – радиус включения. Объемное содержание включений определяется отношением  $c_2 = 4\pi R^3 / (3d^3)$ . В расчетах размер фрагмента принимался равным  $d = 1$ , а радиус включений вычислялся на основании заданного объемного содержания включений.

Для определения всех искомых эффективных характеристик материала, армированного трансверсально изотропными включениями, решались следующие задачи [11]:

1. Растяжение фрагмента в направлении оси  $x_1$  с заданной величиной одноосной деформации  $\varepsilon$ :

$$x_1 = \pm d/2 : u_1 = \pm d\varepsilon/2,$$

$$x_2 = \pm d/2 : u_2 = 0,$$

$$x_3 = \pm d/2 : u_3 = 0, \phi = 0$$

Из решения этой задачи определяются эффективные константы жесткости на основании соотношений  $C_{11}^* = \langle \sigma_{11} \rangle / \varepsilon$  и  $C_{12}^* = \langle \sigma_{22} \rangle / \varepsilon$ .

2. Растяжение фрагмента в направлении оси  $x_3$  с заданной величиной одноосной деформации  $\varepsilon$ :

$$x_1 = \pm d/2 : u_1 = 0,$$

$$x_2 = \pm d/2 : u_2 = 0,$$

$$x_3 = -d/2 : u_3 = -\varepsilon d/2, \phi = 0,$$

$$x_3 = d/2 : u_3 = \varepsilon d/2$$

Из решения этой задачи определяются эффективные константы жесткости  $C_{13}^* = \langle \sigma_{11} \rangle / \varepsilon$  и  $C_{33}^* = \langle \sigma_{33} \rangle / \varepsilon$ .

3. Сдвиг фрагмента в плоскости  $x_1x_3$  с заданной величиной деформации чистого сдвига  $\gamma$ :

$$x_1 = \pm d/2 : u_3 = \pm \gamma d/4, \phi = 0,$$

$$x_2 = \pm d/2 : u_2 = 0,$$

$$x_3 = \pm d/2 : u_1 = \pm \gamma d/4$$

Из решения этой задачи определяются эффективная константа жесткости  $C_{44}^* = \langle \sigma_{13} \rangle / \gamma$  и пьезоэлектрическая константа  $e_{15}^* = \langle D_1 \rangle / \gamma$ .

4. Задание разности потенциалов в направлении оси  $x_3$ :

$$x_1 = \pm d/2 : u_1 = 0,$$

$$x_2 = \pm d/2 : u_2 = 0,$$

$$x_3 = \pm d/2 : u_3 = 0, \phi = \pm E_0 d/2$$

Из решения задачи определяются эффективные пьезоэлектрические константы  $e_{13}^* = \langle \sigma_{11} \rangle / E_0$ ,  $e_{33}^* = \langle \sigma_{33} \rangle / E_0$  и диэлектрическая константа  $\epsilon_{13}^* = \langle D_3 \rangle / E_0$ .

5. Задание разности потенциалов в направлении оси  $x_1$ :

$$x_1 = \pm d/2 : u_1 = 0, \phi = \pm E_0 d/2$$

$$x_2 = \pm d/2 : u_2 = 0,$$

$$x_3 = \pm d/2 : u_3 = 0$$

Из решения этой задачи определяется эффективная диэлектрическая константа  $\kappa_{11}^* = \langle D_1 \rangle / E_0$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассматриваем композит на основе эпоксидной матрицы, содержащей включения пьезоупругой керамики PZT-7а. Свойства указанных материалов взяты из работы [3] и представлены в таблице 1. Будем рассматривать материал с объемным содержанием включений  $c_2 = 1-40\%$ . Примеры таких фрагментов были представлены на рис.1. Максимальная плотная упаковка в рассматриваемом фрагменте составляет 52%, но приблизиться к этому значению достаточно сложно, так как в этом случае в конечно-элементных моделях требуется построение очень мелкой сетки в областях, где граница включения приближается к внешней границе фрагмента. В аналитическом методе Мори-Танака формальных ограничений на объемное содержание включений нет, хотя известно, что для больших объемных содержаний этот метод приводит к погрешностям [33].

Таблица 1.

Свойства материалов.

Материал	$C_{11}$ , ГПа	$C_{12}$ , ГПа	$C_{13}$ , ГПа	$C_{33}$ , ГПа	$C_{44}$ , ГПа	$e_{31}$ , К/м <sup>2</sup>	$e_{33}$ , К/м <sup>2</sup>	$e_{15}$ , К/м <sup>2</sup>	$\kappa_{11}/\kappa_0$	$\kappa_{33}/\kappa_0$
Эпоксидная матрица	8	4.4	4.4	8	1.8	0	0	0	4.2	4.2
Керамические частицы	148	76.2	74.2	131	25.4	-2.1	9.5	9.2	460	235

В расчетах, сферическому включению присваивались анизотропные пьезоэлектрические свойства керамики, а в остальной области, занятой матрицей, задавались свойства эпоксидной смолы. Далее на основании трех изложенных методов осреднения (раздел 2) вычислялась зависимость эффективных свойств композита от объемного содержания включений. Метод Мори-Танака был реализован в системе Mathematica. Метод Горбачева-Победри и численное моделирование проводилось в системе Comsol.

Пример результатов вычисления структурных функций, фигурирующих в методе Горбачева-Победри, представлен на рис.2. Здесь показаны распределения значений структурных функций в трех взаимоперпендикулярных сечениях представительного фрагмента с объемным содержанием включений 20%. Представлены нормированные значения этих функций. Для нормировки для каждого типа функций в объеме фрагмента находилось максимальное по модулю значение. Далее все функции одного типа делились на это значение. Таким образом, все цветовые графики построены в диапазоне от  $-1$  до  $1$  и на них видно, что абсолютные значения структурных функций могут значительно различаться, что определяется геометрией включения, свойствами и анизотропией фаз. Максимумы структурных функций реализуется на границе раздела фаз, где в постановке краевых задач (15), (16) задаются «условия нагружения» в виде разности соответствующих материальных констант матрицы и включений.

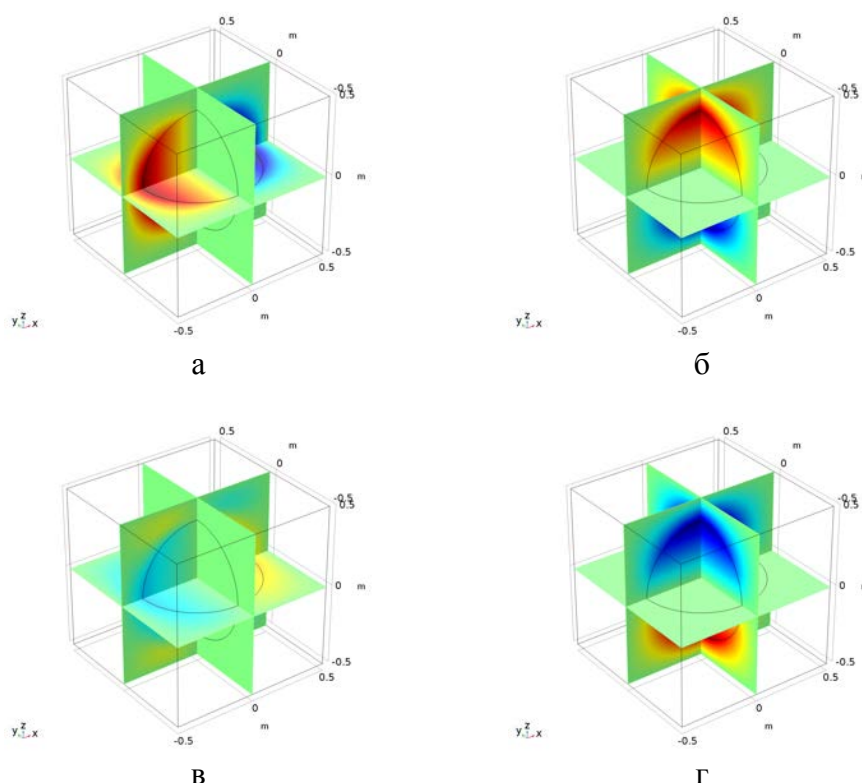


Рис.2. Примеры результатов вычисления значений структурных функций, а:  $N_{111}$ , б:  $V_{33}$ , в:  $U_{13}$ , г:  $M_3$ .

Вид представительных фрагментов композита, моделируемых с использованием метода конечных элементов, представлен на рис.3. Здесь показано распределение компонент вектора электрической индукции при

заданных деформациях фрагмента и распределение компонент тензора деформаций при заданной разности потенциалов на поверхностях фрагмента. В частности, видно, что характер электрического поля внутри включения оказывается различным при различных заданных условиях деформирования (рис.3а,б). Также показано, что при задании разности потенциалов в направлении оси  $x_3$  включение сжимается в том же направлении и растягивается в перпендикулярных (рис.3в), а при задании разности потенциалов в направлении оси  $x_1$  во включении возникает сдвиг (рис.3г).

Найденные зависимости эффективных упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических характеристик композита от объемного содержания включений представлены на рис.4. Объемное содержание на этих графиках отсчитывается в долях единицы. Результаты, полученные с использованием метода Мори-Танака показаны сплошными линиями, результаты применения метода Горбачева-Победри показаны круглыми маркерами, а результаты конечно-элементного моделирования показаны треугольными маркерами.

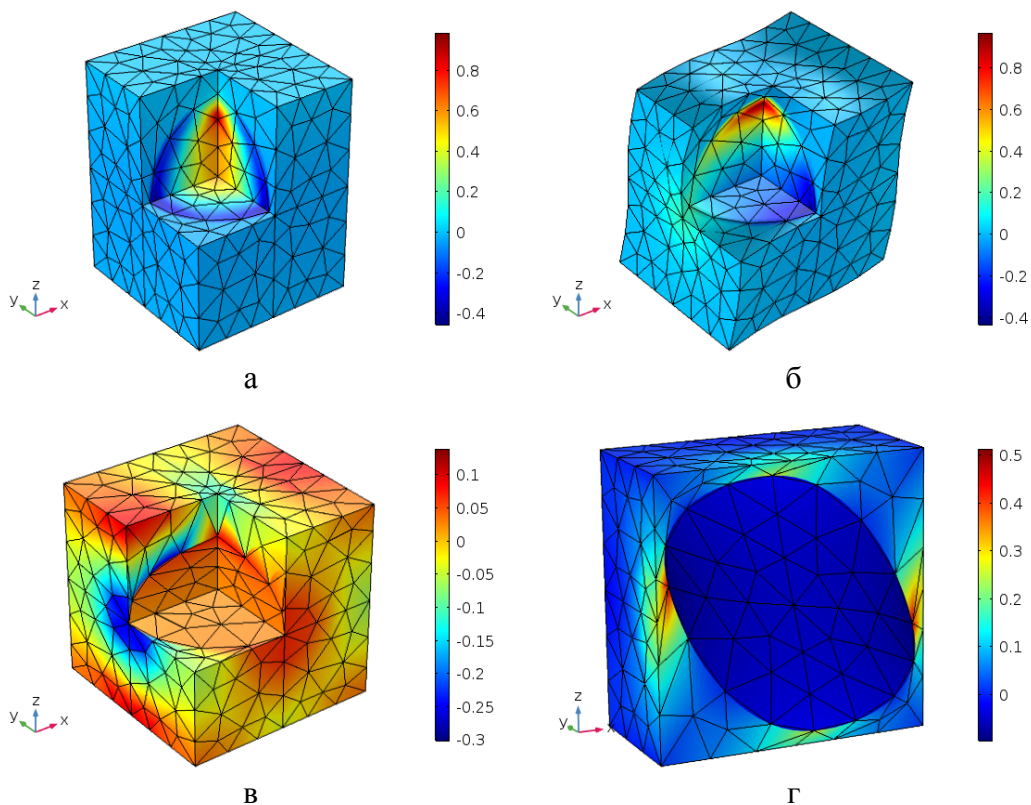


Рис.3. Примеры результатов конечно-элементного моделирования фрагментов композита, а:  $D_3$  при заданной деформации растяжения вдоль оси  $x_3$ , б:  $D_1$  при заданной деформации сдвига, в:  $\epsilon_{11}$  при заданной разности потенциалов вдоль оси  $x_3$ , г:  $\epsilon_{13}$  при заданной разности потенциалов вдоль оси  $x_1$ .

На полученных графиках видно, что при малых объемных содержаниях включений, свойства композита совпадают со свойствами эпоксидной смолы. В частности, пьезоэлектрические свойства таких композитов стремятся к нулю.

При увеличении содержания включений эффективные характеристики растут (за исключением константы  $e_{31}$ , которая имеет отрицательные значения во включениях и поэтому уменьшается) и стремятся к свойствам включений. Можно отметить, что композит обладает незначительной анизотропией, так как исходная анизотропия рассматриваемых керамических частиц невелика.

При малом объемном содержании включений (до 0.1) все методы дают хорошо согласующиеся результаты, однако, при увеличении объемного содержания возникают различия. Для констант жесткости  $C_{11}$ ,  $C_{33}$  и для диэлектрических констант численные методы дают прогнозы, превышающие оценки метода Мори-Танака на величину до 15% при содержании включений 0.4. Для эффективных констант жесткости  $C_{12}$ ,  $C_{13}$  результаты практически совпадают, и соответствующие графики сливаются на рис.4а. Для этих констант, как и для константы, определяющей жесткость на сдвиг  $C_{44}$ , аналитический расчет дает более высокие прогнозы по сравнению с двумя другими методами.

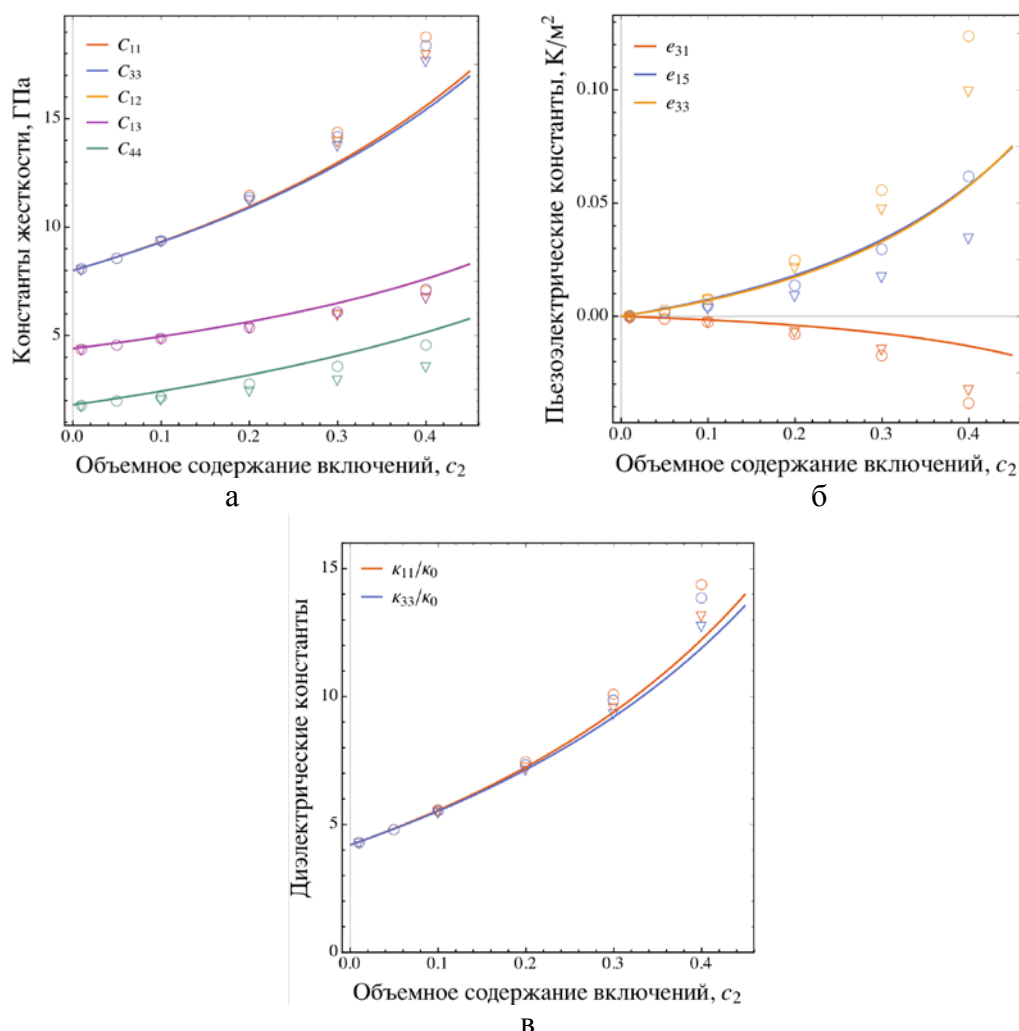


Рис.4. Зависимость эффективных характеристик пьезокомпозита от объемного содержания включений. Сплошные линии – метод Мори-Танака, круглые маркеры – метод Горбачева-Победри, треугольные маркеры – конечно-элементное моделирование.

Наибольшее различие между методами осреднения возникает при оценке эффективных пьезоэлектрических констант (рис.4б). Здесь метод Мори-Танака дает очень близкие прогнозы для эффективных констант  $e_{15}$ ,  $e_{33}$ , что является следствием того, что соответствующие характеристики включения очень близки (9.5 и 9.2 К/м<sup>2</sup>, соответственно). Метод Горбачева-Победри при оценке константы  $e_{15}$ , практически совпадает с методом Мори-Танака, а конечно-элементное моделирование приводит к более низким значениям. Для двух других пьезоэлектрических констант численные методы приводят к более высоким значениям эффективных характеристик, по сравнению с аналитическим расчетом. Для всех случаев расчета можно заметить, что применение метода Горбачева-Победри приводит к более высоким оценкам эффективных пьезоэлектрических констант (по абсолютному значению) на 5-10%, по сравнению с конечно-элементным моделированием, что может быть связано, в том числе с накапливающейся ошибкой численного расчета. В расчетах упругих и диэлектрических свойств метод Горбачева-Победри и численное прямое моделирования дают близкие, хорошо согласующиеся результаты.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрены и реализованы три подхода к оценке эффективных характеристик композитов на основе изотропной матрицы, армированной пьезоэлектрическими трансверсально-изотропными включениями. На примере композиционного материала системы эпоксидная смола/керамика показано, что рассмотренные методы могут приводить к различающимся прогнозам для эффективных характеристик.

Наиболее существенное различие реализуется при расчете эффективных пьезоэлектрических констант, что, по-видимому, связано с тем, что рассмотренные методы по-разному учитывают влияние связанных пьезоэлектрических эффектов на эффективные характеристики среды. Так, например, метод Мори-Танака в значительно меньшей степени учитывает влияние анизотропии упругих свойств материала, при оценке его пьезоэлектрических свойств. В этом методе для диапазона объемного содержания включений 0-0.4 значения пьезоэлектрических констант полностью определяются значениями соответствующих характеристик матрицы и включений. В двух других рассмотренных методах это не так – несмотря на то, что пьезоэлектрические константы включения  $e_{15}$  и  $e_{33}$  близки по своим значениям, эффективные константы композита существенно различаются (см. рис.4б). Более высокие значения эффективных пьезоэлектрических констант реализуются в направлении более высокой жесткости материала.

Получаемые различия в прогнозируемых эффективных характеристиках являются достаточно существенными (до 150-200% для высоконаполненных материалов), что может являться проблемой при проектировании технических устройств. Поэтому выявление наилучших методов прогноза эффективных свойств пьезокомпозитов, в конечном итоге, должно быть основано на анализе экспериментальных данных.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Smith W.A. *The role of piezocomposites in ultrasonic transducers* / Ultrasonics Symposium IEEE. Proceedings, 1989. – Pp.755-766.
2. Sebastian M.T., Jantunen H. *Polymer-ceramic composites of 0-3 connectivity for circuits in electronics: a review* // International Journal of Applied Ceramic Technology. – 2010. – Vol.7. – Iss.4. – Pp.415-434.
3. Dunn M.L., Taya M. *Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites* // International Journal of Solids and Structures. – 1993. – Vol.30. – Iss.2. – Pp.161-175. DOI:10.1016/00207683(93)90058-F.
4. Aboudi J. *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*. – Vol.29. – Elsevier, 2013.
5. Barnett D., Lothe J. *Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators* // Physica Status Solidi (b). – 1975. – Vol.67. – Iss.1. – Pp.105-111.
6. Benveniste Y., Milton G.W. *New exact results for the effective electric, elastic, piezoelectric and other properties of composite ellipsoid assemblages* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2003. – Vol.51. – Iss.10. – Pp.1773-1813. DOI:10.1016/S0022-5096(03)00074-7.
7. Jiang C., Tong Z., Cheung Y. *A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear* // Mechanics of Materials. – 2001. – Vol.33. – Iss.5. – Pp.295-308.
8. Bravo-Castillero J., Guinovart-Diaz R., Sabina F.J., Rodriguez-Ramos R. *Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents–ii. piezoelectric and square symmetry* // Mechanics of Materials. – 2001. – Vol.33. – Iss.4. – Pp.237-248.
9. Berger H., Kari S., Gabbert U., Rodriguez-Ramos R., Guinovart R., Otero J.A., Bravo-Castillero J. *An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites* // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol.42. – Iss.21-22. – Pp.5692-5714. DOI: 10.1016/j.ijstr.2005.03.016.
10. Hori M., Nemat-Nasser S. *Universal bounds for effective piezoelectric moduli* // Mechanics of Materials. – 1998. – Vol.30. – Iss.1. – Pp.1-19. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(98\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00029-5).
11. Berger H., Kari S., Gabbert U., Rodriguez-Ramos R., Bravo Castillero J., Guinovart-Diaz R., Sabina F., Maugin G. *Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties* // Smart Materials and Structures. – 2006. – Vol.15. – Iss.2. – Pp.451-458.
12. Zhang G., Wu M.S. *International Journal of Engineering Science Connectivity and shape effects on the effective properties of piezoelectric – polymeric composites* // International Journal of Engineering Science. – 2010. – Vol.48. – Iss.1. – Pp.37-51. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.006.
13. R. de Medeiros, Rodriguez-Ramos R., Guinovart-Diaz R., Bravo-Castillero J., Otero J.A., Tita V. *Numerical and analytical analyses for active fiber composite piezoelectric composite materials* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 2015. – Vol.26. – Iss.1. – Pp.101-118.
14. Sevostianov I., Levin V., Kachanov M. *On the modeling and design of piezocomposites with prescribed properties* // Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.). – 2001. – Vol.71. – Iss.11. – Pp.733-747.

15. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. *Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов*. – Киев: Наукова думка, 1989. – 206 с.
16. Паньков А.А. *Статистическая механика пьезокомпозитов*. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. – 480 с.
17. Паньков А.А. *Самосогласованные решения для коэффициентов электромагнитной связи волокнистого пьезокомпозита // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2013. – Т.19. – №2. – С.233-243.
18. Dinartz F., Sabar H. *Electroelastic behavior of piezoelectric composites with coated reinforcements: Micromechanical approach and applications // International Journal of Solids and Structures*. – 2009. – Vol.46. – Iss.20. – Pp.3556-3564. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.05.019.
19. Malakooti M.H., Sodano H.A. *Multi-Inclusion modeling of multiphase piezoelectric composites // Composites Part B: Engineering*. – 2013. – Vol.47. – Pp.181-189. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.10.034.
20. Xiao J.H., Xu Y.L., Zhang F.C. *Evaluation of effective electroelastic properties of piezoelectric coated nano-inclusion composites with interface effect under antiplane shear // International Journal of Engineering Science*. – 2013. – Vol.69. – Pp.61-68. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.03.008.
21. Huang M.-J., Fang X.-Q., Liu J.-X., Feng W.-J., Zhao Y.-M. *Size-dependent effective properties of anisotropic piezoelectric composites with piezoelectric nanoparticles // Smart Materials and Structures*. – 2015. – Vol.24. – No.1. – Pp.015005. DOI:10.1088/0964-1726/24/1/015005.
22. Sladek J., Sladek V., Repka M., Kasala J., Bishay P. *Evaluation of effective material properties in magneto-electro-elastic composite materials // Composite Structures*. – 2017. – Vol.174. – Pp.176-186.
23. Solyaev Y., Lurie S. *Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions // Composite Structures*. – 2018. – Vol.202. – Pp.1099-1108.
24. Mikata Y. *Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – Vol.38. – Iss.40-41. – Pp.7045-7063. DOI:10.1016/S0020-7683(00)00419-4.
25. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1979. – Vol.27. – Iss.4. – Pp.315-330.
26. Christensen R.M. *A critical evaluation for a class of micro-mechanics models // Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 1990. – Vol.38. – Iss.3. – Pp.379-404. DOI:10.1016/0022-5096(90)90005-O.
27. Горбачев В.И., Победря Б.Е. *Эффективные характеристики неоднородных сред // Прикладная математика и механика*. – 1997. – Т.61. – №1. – С.149-156.
28. Gorbachev V.I. *Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials // Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*. – 2017. – Vol.8. – Iss.2. – Pp.147-170.
29. Ikeda T. *Fundamentals of piezoelectricity*. – Oxford university press, 1996.
30. Benveniste Y. *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials // Mechanics of Materials*. – 1987. – Vol.6. – No.2. – Pp.147-157. DOI:10.1016/0167-6636(87)90005-6.



31. Новацкий В. *Теория упругости*. – М.: Мир, 1975.
32. Hashin Z. *Analysis of composite materials – a survey* // Journal of Applied Mechanics. – 1983. – Vol.50. – Iss.3. – Pp.481-505.
33. Christensen R., Schantz H., Shapiro J. *On the range of validity of the Mori-Tanaka method* // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol.40. – Iss.1. – Pp.69-73.

## REFERENCES

1. Smith W.A. *The role of piezocomposites in ultrasonic transducers*. Ultrasonics Symposium IEEE, Proceedings, 1989, Pp.755-766.
2. Sebastian M.T., Jantunen H. *Polymer-ceramic composites of 0-3 connectivity for circuits in electronics: a review*. International Journal of Applied Ceramic Technology, 2010, Vol.7, Iss.4, Pp.415-434.
3. Dunn M.L., Taya M. *Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites*. International Journal of Solids and Structures, 1993, Vol.30, Iss.2, Pp.161-175. DOI:10.1016/00207683(93)90058-F.
4. Aboudi J. *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*, Vol.29, Elsevier, 2013.
5. Barnett D., Lothe J. *Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators*. Physica Status Solidi (b), 1975, Vol.67, Iss.1, Pp.105-111.
6. Benveniste Y., Milton G.W. *New exact results for the effective electric, elastic, piezoelectric and other properties of composite ellipsoid assemblages*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, Vol.51, Iss.10, Pp.1773-1813. DOI:10.1016/S0022-5096(03)00074-7.
7. Jiang C., Tong Z., Cheung Y. *A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear*. Mechanics of Materials, 2001, Vol.33, Iss.5, Pp.295-308.
8. Bravo-Castillero J., Guinovart-Diaz R., Sabina F.J., Rodriguez-Ramos R. *Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents–ii. piezoelectric and square symmetry*. Mechanics of Materials, 2001, Vol.33, Iss.4, Pp.237-248.
9. Berger H., Kari S., Gabbert U., Rodriguez-Ramos R., Guinovart R., Otero J.A., Bravo-Castillero J. *An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites*. International Journal of Solids and Structures, 2005, Vol.42, Iss.21-22, Pp.5692-5714. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.016.
10. Hori M., Nemat-Nasser S. *Universal bounds for effective piezoelectric moduli*. Mechanics of Materials, 1998, Vol.30, No.1, Pp.1-19. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0167-6636\(98\)00029-5](https://doi.org/10.1016/S0167-6636(98)00029-5).
11. Berger H., Kari S., Gabbert U., Rodriguez-Ramos R., BravoCastillero J., Guinovart-Diaz R., Sabina F., Maugin G. *Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties*. Smart Materials and Structures, 2006, Vol.15, Iss.2, Pp.451-458.
12. Zhang G., Wu M.S. *International Journal of Engineering Science Connectivity and shape effects on the effective properties of piezoelectric – polymeric composites*. International Journal of Engineering Science, 2010, Vol.48, Iss.1, Pp.37-51. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2009.06.006.
13. R. de Medeiros, Rodriguez-Ramos R., Guinovart-Diaz R., Bravo-Castillero J., Otero J.A., Tita V. *Numerical and analytical analyses for active fiber composite*

- piezoelectric composite materials*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2015, Vol.26, Iss.1, Pp.101-118.
14. Sevostianov I., Levin V., Kachanov M. *On the modeling and design of piezocomposites with prescribed properties*. Arch. Appl. Mech. (Ingenieur Arch.), 2001, Vol.71, Iss.11, Pp.733-747.
  15. Khoroshun, L.P., Maslov, B.P., Leshchenko, P.V. *Prognozirovanie ehffektivnykh svojstv p'ezoaktivnykh kompozitnykh materialov [Prediction of the effective properties of piezoactive composite materials]*. Kiev, Naukova dumka, 1989, 206 p.
  16. Pan'kov A.A. *Statisticheskaya mekhanika p'ezokompozitov [Statistic mechanics of piezocomposites]*. Perm', Izd-vo Perm. gos. tekhn. un-ta, 2009, 480 p.
  17. Pan'kov A.A. *Samosoglasovannye resheniya dlya koehffitsientov ehlektromagnitnoj svyazi voloknistogo p'ezokompozita [Self-consistent solutions for coefficients of electromagnetic coupling for the fiber reinforced composite]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2013, Vol.19, No.2, Pp.233-243.
  18. Dinzart F., Sabar H. *Electroelastic behavior of piezoelectric composites with coated reinforcements: Micromechanical approach and applications*. International Journal of Solids and Structures, 2009, Vol.46, Iss.20, Pp.3556-3564. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.05.019.
  19. Malakooti M.H., Sodano H.A. *Multi-Inclusion modeling of multiphase piezoelectric composites*. Composites Part B: Engineering, 2013, Vol.47, Pp.181-189. DOI: 10.1016/j.compositesb.2012.10.034.
  20. Xiao J.H., Xu Y.L., Zhang F.C. *Evaluation of effective electroelastic properties of piezoelectric coated nano-inclusion composites with interface effect under antiplane shear*. International Journal of Engineering Science, 2013, Vol.69, Pp.61-68. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2013.03.008.
  21. Huang M.-J., Fang X.-Q., Liu J.-X., Feng W.-J., Zhao Y.-M. *Size-dependent effective properties of anisotropic piezoelectric composites with piezoelectric nanoparticles*. Smart Materials and Structures, 2015, Vol.24, No.1, Pp.015005. DOI:10.1088/0964-1726/24/1/015005.
  22. Sladek J., Sladek V., Repka M., Kasala J., Bishay P. *Evaluation of effective material properties in magneto-electro-elastic composite materials*. Composite Structures, 2017, Vol.174, Pp.176-186.
  23. Solyaev Y., Lurie S. *Numerical predictions for the effective size-dependent properties of piezoelectric composites with spherical inclusions*. Composite Structures, 2018, Vol.202, Pp.1099-1108.
  24. Mikata Y. *Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion*. International Journal of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Iss.40-41, Pp.7045-7063. DOI:10.1016/S0020-7683(00)00419-4.
  25. Christensen R.M., Lo K.H. *Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1979, Vol.27, Iss.4, Pp.315-330.
  26. Christensen R.M. *A critical evaluation for a class of micro-mechanics models*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1990, Vol.38, Iss.3, Pp.379-404. DOI:10.1016/0022-5096(90)90005-O.
  27. Gorbachev V.I., Pobedrya B.E. *Ehffektivnye kharakteristiki neodnorodnykh sred [Effective characteristics of inhomogeneous media]*. Prikl. matem. i mekhan., 1997, Vol.61, No.1, Pp.149-156.
  28. Gorbachev V.I. *Integral formulas in electromagnetic elasticity of heterogeneous bodies. application in the mechanics of composite materials*. Composites:

- Mechanics, Computations, Applications: An International Journal, 2017, Vol.8, Iss.2, Pp.147-170.
29. Ikeda T. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1996.
  30. Benveniste Y. *A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials*. Mechanics of Materials, 1987, Vol.6, No.2, Pp.147-157. DOI:10.1016/0167-6636(87)90005-6.
  31. Novatskii V. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva, Mir, 1975.
  32. Hashin Z. *Analysis of composite materials – a survey*. Journal of Applied Mechanics, 1983, Vol.50, Iss.3, Pp.481-505.
  33. Christensen R., Schantz H., Shapiro J. *On the range of validity of the Mori-Tanaka method*. J. Mech. Phys. Solids, 1992, Vol.40, Iss.1, Pp.69-73.

Поступила в редакцию 02 декабря 2018 года.

---

Сведения об авторах:

Соляев Юрий Олегович – к.т.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [solyaev@bk.ru](mailto:solyaev@bk.ru)

Горбачев Владимир Иванович – д.ф.-м.н., доц., зав. каф. механики композитов, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [vigorby@mail.ru](mailto:vigorby@mail.ru)