

ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ТОНКОСТЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Рыбаков Л.С.

*ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Представлен линейный упругий анализ регулярной пространственной тонкостенной стержневой системы ортогональной структуры. Система образована из трех взаимно ортогональных семейств прямых однородных стержней и расположенных между ними тонких прямоугольных пластинок постоянной толщины. По предположению стержни работают только на растяжение-сжатие, а в пластинках реализуемо состояние однородного чистого сдвига.

Для упругого анализа таких систем предложена строгая дискретная линейная теория упругости, построенная с помощью метода склейки. В соответствии с его процедурой тонкостенная стержневая система расчленялась на элементы (стержни, пластинки и узлы – пересечения упругих линий стержней). К ним прикладывались заданные внешние и искомые внутренние силы и проводился линейный анализ механического поведения изолированных элементов с учетом геометрических условий их сопряжения. Теория сформулирована в терминах узловых смещений, обобщенных деформаций (полных удлинений стержней, сдвигов пластинок и их стержневых обрамлений) и обобщенных внутренних сил (начальных усилий стержней и потоков касательных сил пластинок). Все эти переменные являются функциями целочисленных параметров, использованных для нумерации элементов системы.

Полную замкнутую систему определяющих соотношений теории составили геометрические и физические зависимости, статические соотношения и уравнения совместности обобщенных деформаций. Геометрические зависимости выражают обобщенные деформации через узловые перемещения, а физические зависимости представляют линейную связь между обобщенными внутренними силами и деформациями. Роль статических соотношений, устанавливающих связь между заданными внешними и искомыми внутренними силами, играют уравнения равновесия свободных узлов. С помощью этих зависимостей даны две постановки дискретных краевых задач: одна в узловых смещениях и сдвигах пластинок, другая в обобщенных внутренних силах. Последняя постановка проиллюстрирована на примере произвольно нагруженного однозамкнутого кессона любой конечной длины, для которого построено точное аналитическое решение в полиномах Чебышёва.

Ключевые слова: пространственные регулярные тонкостенные стержневые системы; линейный упругий анализ; метод склейки; дискретные краевые задачи

LINEAR ELASTIC ANALYSIS OF SPATIAL THIN-WALLED ROD SYSTEM WITH ORTHOGONAL STRUCTURE

Rybakov L.S.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

A linear elastic analysis of a regular spatial thin-walled rod system of orthogonal structure is presented. The system is formed from three mutually orthogonal families of straight homogeneous rods and thin rectangular plates of constant thickness located between them. According to the assumption, the rods work only for tension-compression and in the plates a state of uniform pure shear is realizable.

For the elastic analysis of such systems, a strict discrete linear theory of elasticity constructed using the gluing method is proposed. In accordance with its procedure, the thin-walled rod system was divided into elements (rods, plates and nodes – intersections of elastic rod lines). The given external and unknown internal forces were applied to them and a linear analysis of the mechanical behavior of isolated elements was carried out taking into account the geometric conditions of their conjugation. The theory is formulated in terms of nodal displacements, the generalized strains (full rod elongations and shifts of the plates and their rod frames) and the generalized internal forces (initial rod forces and tangent force flows). All these variables are functions of integer parameters used for numbering system elements.

The complete closed system of defining relations of the theory consists of geometrical and physical dependences, static relations and equations of compatibility of generalized deformations. Geometric relationships express generalized deformations through nodal displacements, and physical relationships represent a linear dependency between generalized internal forces and deformations. The role of static relations, establishing a connection between the given external and the unknown internal forces are the equilibrium equations of free nodes. With the help of all these dependences, two statements of discrete boundary value problems are given: one in nodal displacements and shifts of plates, another in generalized internal forces. The latter formulation is illustrated by the example of an arbitrarily loaded one-closed caisson of any finite length for which an exact analytical solution in Chebyshev polynomials is constructed.

Keywords: spatial regular thin-walled rod systems; linear elastic analysis; gluing method; discrete boundary problems.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пространственную тонкостенную стержневую систему, образованную из трех взаимно ортогональных семейств прямых однородных стержней и трех взаимно ортогональных семейств расположенных между ними прямоугольных тонких пластинок (стенок) постоянной толщины. Система в форме прямоугольного параллелепипеда, отнесенная к декартовой системе отсчета с осями x_i (здесь и далее латинские индексы принимают значения 1,2,3), показана схематично на рис.1. Она представляет собой периодическое повторение вдоль декартовых осей x_i элементарной ячейки в виде прямоугольного параллелепипеда (рис.2), ребрами которого являются стержни, а гранями тонкие стенки.

Стержни, параллельные оси x_i , и стенки, перпендикулярные ей, назовем соответственно i -стержнями и i -стенками, а точки пресечения упругих линий стержней узлами. За номер текущего элемента системы фиксированного семейства будем принимать совокупность целочисленных параметров i_1, i_2, i_3 (кратко i_n), отсчитываемых в положительных направлениях осей x_1, x_2, x_3 соответственно. Краткая нумерация смежных узлов и размеры текущей элементарной ячейки показаны на рис.2 (δ_{in} – символ Кронекера).

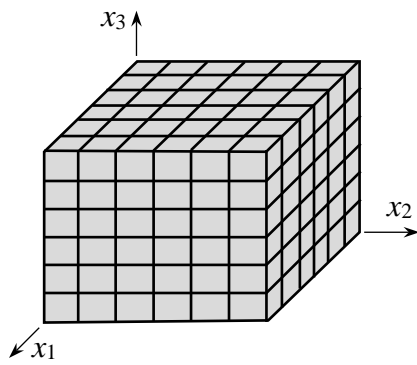


Рис.1.

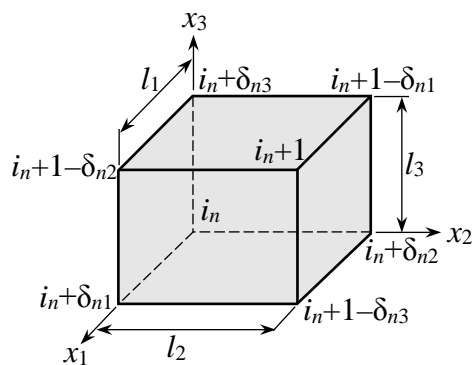


Рис.2.

Для тонкостенной стержневой системы, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда (рис.1), за область определения номеров узлов можно принять множества $i_n \in [0, I_n]$, где I_n – заданные целые числа, а $[0, I_n]$ – все целые числа от 0 до I_n включительно. Будем считать, что номера текущих стержней и стенок совпадают с младшими номерами ближайших к ним узлов. Тогда i -стержень с номером i_n соединяет узлы с номерами i_n и $i_n + \delta_{in}$, а углы, например, 1 – стенки с номером i_n совпадают с узлами, имеющими номера i_n , $i_n + \delta_{n2}$, $i_n + \delta_{n3}$, $i_n + 1 - \delta_{n1}$ (рис.2), при этом области определения номеров i -стержней и i -стенок даются множествами $i_n \in [0, I_n - \delta_{in}]$ и $i_n \in [0, I_n - 1 + \delta_{in}]$ соответственно.

Механическое поведение тонкостенных стержневых систем существенным образом зависит от принятых моделей деформирования их элементов. Среди имеющихся здесь возможностей [1-19] выделим линейно упругие системы, в которых стержни работают на растяжение-сжатие, а тонкие стенки пребывают в состоянии однородного чистого сдвига [1-6]. Включение этих моделей в состав библиотек готовых конечных элементов ряда современных программных комплексов свидетельствует о неистощающемся интересе к таким системам.

Линейный упругий анализ тонкостенных стержневых систем ортогональной структуры базируется в основном на классических методах строительной механики [1-6], дискретно-континуальная сущность которых позволяет сохранять в модели деформирования системы индивидуальные свойства ее элементов. С появлением вычислительной техники их развитие шло по пути применения матричного аппарата и конечно-элементного подхода [11-19].

Строгая линейная теория плоской регулярной тонкостенной стержневой упругой системы ортогональной структуры построена с помощью метода склейки в статье [17]. Теория сформулирована в терминах узловых смещений, полных удлинений стержней, сдвигов стенок и их стержневых обрамлений, начальных усилий стержней и потоков касательных сил стенок и представлена полной замкнутой системой определяющих соотношений, допускающих альтернативные постановки дискретных краевых задач, а в отдельных случаях и их точные аналитические решения.

Нижеупомянутая теория обобщается на пространственные тонкостенные стержневые упругие системы ортогональной структуры, частными случаями которых являются, например, кессонные конструкции крыльев.

Геометрические свойства тонкостенных стержневых систем описываются толщинами h_i и длинами l_i соответственно i -стенок и i -стержней, а упругие

свойства – модулями сдвига G_i и жесткостями на растяжение-сжатие g_i этих же элементов. Допустимыми внешними воздействиями на упругую систему являются погонные осевые силы стержней и узловые силы.

При построении намеченной теории используются функции целочисленных параметров, с помощью которых формируются номера элементов системы. Дискретные операции изменяют значения этих параметров, вынуждая всякий раз указывать их фактические значения, что отрицательно сказывается на обзорности формул и уравнений. Избавиться от всего этого удастся путем введения частных дискретных операторов.

Пусть $\psi[i_1, i_2, i_3] = \psi[i_n]$ – функция дискретных аргументов i_1, i_2, i_3 . Введем линейные операторы частного сдвига ∇_i^\pm , смысл которых поясняют равенства

$$\nabla_i^\pm \psi = \psi[i_n \pm \delta_{in}], \quad \nabla_i^+ \nabla_i^- = \nabla_i^- \nabla_i^+ = 1. \tag{1}$$

С их помощью формируются частные разностные операторы различных порядков. Так для операторов 1-го и 2-го порядка, определяемых равенствами

$$\Delta_i^\pm \psi = \pm \psi[i_n \pm \delta_{in}] \mp \psi[i_n], \tag{2}$$

$$\Delta_i^2 \psi = \psi[i_n + \delta_{in}] - 2\psi[i_n] + \psi[i_n - \delta_{in}],$$

справедливы выражения (см. (1), (2))

$$\Delta_i^\pm = \pm \nabla_i^\pm \mp 1, \quad \Delta_i^2 = \Delta_i^+ \Delta_i^- = \Delta_i^+ - \Delta_i^- = \nabla_i^+ - 2 + \nabla_i^-.$$

Введенные операторы и позволяют записывать формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов, опуская ради краткости записи такие аргументы при символах зависимых переменных. Ниже используются еще дискретные операции суммирования по частям. Суть их на примере функций $\varphi[i_k], \psi[i_k]$ поясняют формулы

$$\begin{aligned} \sum_{i_k=0}^{I_k} \varphi \nabla_n^\pm \psi &= \sum_{i_k=\pm\delta_{kn}}^{I_k \pm \delta_{kn}} \nabla_n^\mp \varphi \cdot \psi, & \sum_{i_k=0}^{I_k} \varphi \Delta_n^+ \psi &= - \sum_{i_k=0}^{I_k + \delta_{kn}} \Delta_n^- \varphi \cdot \psi, \\ \sum_{i_k=0}^{I_k} \varphi \Delta_n^+ \Delta_m^+ \psi &= \sum_{i_k=0}^{I_k + \delta_{km} + \delta_{kn}} \Delta_n^- \Delta_m^- \varphi \cdot \psi, & \sum_{i_k=0}^{I_k} \varphi \Delta_n^2 \psi &= \sum_{i_k=-\delta_{kn}}^{I_k + \delta_{kn}} \Delta_n^2 \varphi \cdot \psi. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь и далее под суммой с индексом суммирования i_k понимается тройная сумма, например,

$$\sum_{i_k=\delta_{2k}}^{I_k - \delta_{1k}} (\dots) = \sum_{i_1=0}^{I_1-1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \sum_{i_3=0}^{I_3} (\dots),$$

а знак умножения в виде точки ограничивает справа область действия предшествующих ему разностных операторов. Кроме того, предполагается, что в формулах (3) и далее должны быть опущены слагаемые, содержащие значения функций дискретных аргументов вне области их определения.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Приступая к выводу определяющих соотношений изучаемой теории, условимся группу уравнений (формул), подчиняющихся круговой перестановке латинских индексов, представлять одним типовым уравнением, опуская при нем символ круговой перестановки. Будем также считать, что значения i_n , при которых справедливы зависимости, относящиеся к конкретному семейству элементов,

всегда совпадают с оговоренной для их номеров областью определения. Повторно эти значения указываться не будут. Кроме того, единообразная запись таких зависимостей для всего семейства элементов предполагает исключение из них величин, указывающих на несуществующие элементы системы.

Введем обозначения: $x \in [0, l_i]$ – координата, отсчитываемая вдоль упругой оси i -стержня в направлении оси x_i ; $u_i(x)$, $n_i(x)$ и $p_i(x)$ – осевое смещение, внутреннее усилие и погонная внешняя сила в произвольной точке упругой линии i -стержня; q_i , γ_i и $g_{0i} = G_i h_i$ (суммирование по i не предполагается) – поток касательных сил, деформация сдвига и жесткость на сдвиг i -стенки; U_i и P_i – смещение узла и приложенная к нему заданная внешняя сила в направлении оси x_i . Введенные переменные показаны на рис.3, где изображён видимый фрагмент системы, вырезанный в окрестности ее текущего узла.

Как отмечалось, зависимые переменные величины являются функциями параметров i_n , так что следовало бы, например, писать $u_i(x; i_1, i_2, i_3)$, $P_i[i_1, i_2, i_3]$ или сокращенно $u_i(x; i_n)$, $P_i[i_n]$. Однако, как было условлено выше, текущие значения дискретных аргументов ради краткости записи опускаются.

Произвольная система ортогональной структуры дискретно неоднородна в отношении упруго-геометрических характеристик ее элементов, т.е. в общем случае $l_1 = l_1[i_1]$, $l_2 = l_2[i_2]$ и $l_3 = l_3[i_3]$, но $g_i = g_i[i_n]$, $g_{0i} = g_{0i}[i_n]$. Ниже основное внимание уделяется дискретно однородным (регулярным) системам, в которых перечисленные характеристики не зависят от i_n .

Следуя методу склейки, расчленим систему на элементы (i -стержни, i -стенки и узлы), приложим к ним заданные внешние силы и искомые силы взаимодействия с соседними элементами, после чего проведем поэлементный анализ с учетом геометрических условий сопряжения смежных элементов.

Геометрические условия сопряжения стержней с узлами имеют вид

$$u_1(0) = U_1, \quad u_1(l_1) = \nabla_1^+ U_1. \quad (4)$$

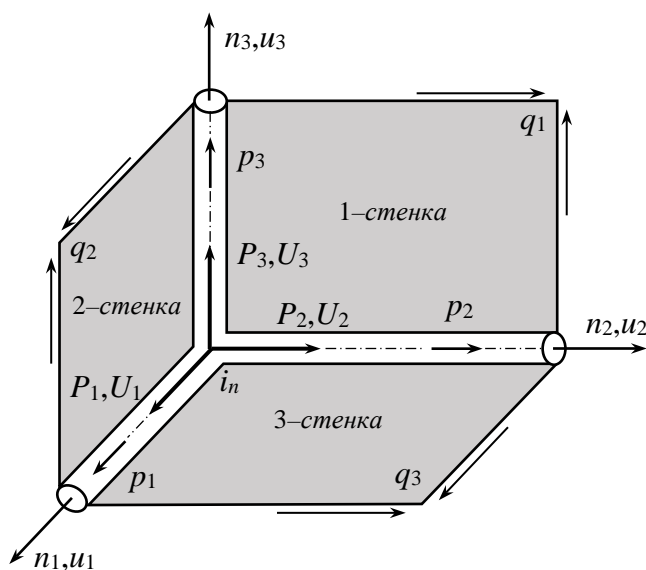


Рис.3.

Деформирование изолированных стержней описывается уравнениями

$$n_1'(x) + \Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3 + p_1(x) = 0, \quad n_1(x) = g_1 u_1'(x), \quad (5)$$

общее решение которых с учетом первого условия (4) дается формулами

$$\begin{aligned} u_1(x) &= U_1 + g_1^{-1} \left[N_1 x - \frac{1}{2} (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) x^2 \right] + u_1^*(x), \\ n_1(x) &= N_1 - (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) x + n_1^*(x), \quad N_1 = n_1(0), \\ u_1^*(x) &= -g_1^{-1} \int_0^x (x - \tau) p_1(\tau) d\tau, \quad n_1^*(x) = -\int_0^x p_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

В стенках, как отмечалось, реализуемо самоуравновешенное состояние чистого сдвига. Поэтому для них имеет место только закон Гука

$$q_1 = g_{01} \gamma_1. \quad (7)$$

Что касается узлов, то для них можно записать лишь уравнения равновесия

$$n_1(0) - \nabla_1^- n_1(l_1) + P_1 = 0. \quad (8)$$

Из первой формулы (6) и второго условия (4) вытекают соотношения

$$N_1 = g_1 E_1 + \frac{1}{2} l_1 (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) + N_1^* \quad (9)$$

и обратные им зависимости

$$E_1 = g_1^{-1} \left[N_1 - \frac{1}{2} l_1 (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) \right] + E_1^*. \quad (10)$$

В них введены полные удлинения стержней

$$E_1 = l_1^{-1} \Delta_1^+ U_1 \quad (11)$$

и обозначения

$$N_1^* = -g_1 E_1^*, \quad E_1^* = l_1^{-1} u_1^*(l_1).$$

Уравнения (8) с учетом вторых формул (6) принимают вид

$$\Delta_1^- N_1 + l_1 \nabla_1^- (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) + P_1^* = 0, \quad P_1^* = P_1 - \nabla_1^- n_1^*(l_1). \quad (12)$$

Геометрические условия сопряжения стенки и ее стержневого обрамления вытекают из условия равенства нулю работы потока касательных сил как внутренней силы упругой системы. Пусть A_1^+ – работа потока q_1 в текущей изолированной 1-стенке, а A_1^- – работа потока $-q_1$ на смещениях стержней, обрамляющих эту стенку. Согласно теореме Клапейрона $A_1^+ = q_1 \gamma_1 l_2 l_3$, а

$$A_1^- = -q_1 \left[\int_0^{l_2} \Delta_3^+ u_2(x) dx + \int_0^{l_3} \Delta_2^+ u_3(x) dx \right].$$

Раскрывая левую часть равенства $A_1^+ + A_1^- = 0$, приходим к зависимости

$$\gamma_1 = \frac{1}{l_2 l_3} \left[\int_0^{l_2} \Delta_3^+ u_2(x) dx + \int_0^{l_3} \Delta_2^+ u_3(x) dx \right], \quad (13)$$

выражающей равенство сдвига в стенке и осредненного сдвига ее стержневого обрамления.

Чтобы выявить обобщенные деформации в системе, отвечающие внутренним силам N_i и q_i , обратимся к принципу Лагранжа, согласно которому

$$\delta U - \delta A = 0, \quad (14)$$

где для первых вариаций потенциальной энергии системы δU и работы внешних сил δA имеем

$$\delta U = \sum_{i_k=0}^{I_k-\delta_{1k}} \int_0^{l_1} n_1 \delta u_1' dx + \dots + \sum_{i_k=0}^{I_k-1+\delta_{1k}} l_2 l_3 q_1 \delta \gamma_1 + \dots,$$

$$\delta A = \sum_{i_k=0}^{I_k-\delta_{1k}} \int_0^{l_1} p_1 \delta u_1 dx + \dots + \sum_{i_k=0}^{I_k} P_1 \delta U_1 + \dots$$

Здесь и далее многоточие указывает на наличие еще двух слагаемых, получаемых из предшествующего слагаемого (тройной суммы) круговой перестановкой индексов. С помощью формул (4)-(6), (11) и интегрирования по частям устанавливаем, что

$$\int_0^{l_1} n_1 \delta u_1' dx = l_1 \left[N_1 \delta E_1 - (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) \delta \nabla_1^+ U_1 \right] +$$

$$+ (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) \int_0^{l_1} \delta u_1 dx + n_1^* (l_1) \nabla_1^+ \delta U_1 + \int_0^{l_1} p_1 \delta u_1 dx.$$

Подставляя этот результат в выражение δU и проводя суммирование по частям (см. (3)), после преобразования равенства (14) с учетом равенства (13) находим

$$\delta U - \delta A = l_1 \sum_{i_k=0}^{I_k-\delta_{1k}} N_1 \delta E_1 + \dots + l_2 l_3 \sum_{i_k=0}^{I_k-1+\delta_{1k}} q_1 \delta \Gamma_1 + \dots - \sum_{i_k=0}^{I_k} P_1^* \delta U_1 - \dots = 0. \quad (15)$$

Отсюда заключаем, что внутренним силам N_i отвечают полные удлинения стержней E_i , а потокам касательных сил q_i величины Γ_i , связанные с узловыми смещениями зависимостями

$$\Gamma_1 = l_3^{-1} \nabla_2^+ \Delta_3^+ U_2 + l_2^{-1} \nabla_3^+ \Delta_2^+ U_3. \quad (16)$$

Анализ геометрии деформированного состояния стержневого обрамления i -стенки показывает, что Γ_i – уменьшение прямого угла между теми стержнями обрамления, которые примыкают к узлу со старшим номером. Условимся называть величину Γ_i сдвигом обрамления i -стенки. Попутно заметим, что равенство (15) после подстановки в него формул (11), (16) и суммирования по частям (см. (3)) принимает вид

$$\sum_{i_k=0}^{I_k} \left[\Delta_1^- N_1 + l_1 \nabla_1^- (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) + P_1^* \right] \delta U_1 + \dots = 0,$$

подтверждающий уравнения равновесия узлов (12).

Раскрывая соотношение (13) с помощью первых формул (6), находим

$$\Gamma_1 = \kappa_{01} q_1 + \kappa_{23} \Delta_3^+ \left[3l_2^{-1} N_2 - 2(\Delta_3^- q_1 + \Delta_1^- q_3) \right] +$$

$$+ \kappa_{32} \Delta_2^+ \left[3l_3^{-1} N_3 - 2(\Delta_1^- q_2 + \Delta_2^- q_1) \right] + \Gamma_1^*. \quad (17)$$

Здесь

$$\kappa_{0i} = g_{0i}^{-1}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{6} \lambda_{ij} / g_i^*, \quad \lambda_{ij} = l_i l_j^{-1}, \quad g_i^* = g_i l_i^{-1},$$

$$\Gamma_1^* = \lambda_{23} \Delta_3^+ E_2^* + \lambda_{32} \Delta_2^+ E_3^* - \gamma_1^*, \quad (18)$$

$$\gamma_1^* = \frac{1}{l_2 l_3} \left[\int_0^{l_2} \Delta_3^+ u_2^*(x) dx + \int_0^{l_3} \Delta_2^+ u_3^*(x) dx \right].$$

Трех уравнений равновесия (12) недостаточно для нахождения шести внутренних силовых факторов N_i , q_i . Следовательно, изучаемая упругая система статически неопределимая, и определяющие уравнения должны быть дополнены уравнениями совместности обобщенных деформаций E_i и Γ_i . Исключая узловые перемещения из соотношений (11), (16), находим

$$\begin{aligned} \lambda_{23}\Delta_3^2 E_2 + \lambda_{32}\Delta_2^2 E_3 - \Delta_2^- \Delta_3^- \Gamma_1 &= 0 \\ (i_n \in [1 - \delta_{n1}, I_n - 1 + \delta_{n1}]), \\ \Delta_1^- (\lambda_{12}\Delta_2^+ \Gamma_2 + \lambda_{13}\Delta_3^+ \Gamma_3 - \Delta_1^+ \Gamma_1) - 2\lambda_{12}\lambda_{13}\Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1 &= 0 \\ (i_n \in [\delta_{1n}, I_n - 1]). \end{aligned} \quad (19)$$

Значения i_n , при которых справедливы эти уравнения, установлены из условия вхождения в них только тех величин E_i и Γ_i , которые указывают на существующие элементы системы.

Итак, напряженно-деформированное состояние упругой системы описано с точностью до узловых смещений U_i , сдвигов γ_i в стенках, полных удлинений E_i стержней, сдвигов обрамлений стенок Γ_i , начальных усилий N_i в стержнях и потоков касательных сил q_i в стенках. Все эти искомые величины – функции лишь дискретных аргументов i_n и связаны между собой геометрическими (11), (16) и физическими (7), (9), (10) зависимостями, геометрическими условиями сопряжения (17) стенок и их стержневого обрамления, уравнениями (12) равновесия узлов и уравнениями (19) совместности деформаций, образующими в совокупности полную замкнутую систему определяющих соотношений изучаемой теории.

Уравнения (12), относящиеся к граничным узлам, играют роль статических граничных условий, которые можно записать и таким образом

$$\begin{aligned} N_1[-1, i_2, i_3] = q_2[-1, i_2, i_3] = q_3[-1, i_2, i_3] &= 0, \\ N_1[I_1, i_2, i_3] = q_2[I_1, i_2, i_3] = q_3[I_1, i_2, i_3] &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Если на граничные или иные узлы наложены геометрические связи, предписывающие этим узлам заданные смещения U_i^* , то уравнения равновесия этих узлов должны быть заменены геометрическими граничными условиями вида

$$U_i = U_i^*.$$

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Примем сначала за основные, определяемые в первую очередь, неизвестные узловые смещения U_i и потоки касательных сил q_i . Последние заменяют сдвиги γ_i в стенках, отличающиеся от них постоянным множителем (см. (7)). Обращаясь к формулам (9), (11), находим зависимости

$$N_1 = g_1^* \Delta_1^+ U_1 + \frac{1}{2} l_1 (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) + N_1^*,$$

выражающие усилия N_i через основные неизвестные. Подставляя их вместе с формулами (16) в уравнения (12), (17), приходим к системе шести уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned}
g_1^* \Delta_1^2 U_1 + l_1 (B_{12}^- q_2 + B_{13}^- q_3) + F_1 &= 0, \\
l_3^{-1} B_{21}^+ U_2 + l_2^{-1} B_{31}^+ U_3 + \sum_{j=1}^3 D_{1j} q_j + H_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{21}$$

служащей для отыскания узловых смещений U_i и потоков касательных сил q_i в стенках. В уравнениях (21)

$$\begin{aligned}
B_{12}^\pm &= \frac{1}{2} (1 + \nabla_1^\pm) \Delta_3^\pm, \quad B_{13}^\pm = \frac{1}{2} (1 + \nabla_1^\pm) \Delta_2^\pm, \\
D_{11} &= \frac{1}{2} (\kappa_{32} \Delta_2^2 + \kappa_{23} \Delta_3^2) - \kappa_{01}, \quad D_{12} = \frac{1}{2} \kappa_{32} \Delta_1^- \Delta_2^+, \quad D_{13} = \frac{1}{2} \kappa_{23} \Delta_1^- \Delta_3^+, \\
F_1 &= P_1^* + \Delta_1^- N_1^*, \quad H_1 = \gamma_1^* - \frac{1}{2} (\lambda_{23} \Delta_3^+ E_2^* + \lambda_{32} \Delta_2^+ E_3^*).
\end{aligned} \tag{22}$$

Пусть теперь роль основных неизвестных играют силовые факторы N_i, q_i . Для их отыскания служат уравнения равновесия узлов (12) и уравнения совместности деформаций (19), которые после подстановки в них выражений (10), (17) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\kappa_{23} \Delta_3^2 \left[3l_2^{-1} (1 + \nabla_2^-) N_2 - (1 + 2\nabla_2^-) (\Delta_3^- q_1 + \Delta_1^- q_3) \right] - \kappa_{01} \Delta_2^- \Delta_3^- q_1 + \\
&\quad + \kappa_{32} \Delta_2^2 \left[3l_3^{-1} (1 + \nabla_3^-) N_3 - (1 + 2\nabla_3^-) (\Delta_2^- q_1 + \Delta_1^- q_2) \right] + Q_1^* = 0, \\
&\Delta_1^- (\lambda_{12} \kappa_{02} \Delta_2^+ q_2 + \lambda_{13} \kappa_{03} \Delta_3^+ q_3) - \kappa_{01} \Delta_1^2 q_1 - \\
&\quad - 2\lambda_{12} \kappa_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ \left[3l_1^{-1} (1 + \nabla_1^-) N_1 - (1 + 2\nabla_1^-) (\Delta_3^- q_2 + \Delta_2^- q_3) \right] + \\
&\quad + R_1^* = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Здесь применены обозначения

$$\begin{aligned}
Q_1^* &= \lambda_{23} \Delta_3^2 E_2^* + \lambda_{32} \Delta_2^2 E_3^* - \Delta_2^- \Delta_3^- \Gamma_1^*, \\
R_1^* &= \Delta_1^- (\lambda_{12} \Delta_2^+ \Gamma_2^* + \lambda_{13} \Delta_3^+ \Gamma_3^* - \Delta_1^+ \Gamma_1^*) - 2\lambda_{12} \lambda_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1^*.
\end{aligned}$$

Покажем, что общее решение уравнений равновесия узлов (12) представимо через шесть функций $\Phi_i = \Phi_i [i_n], \Psi_i = \Psi_i [i_n]$ дискретных аргументов. Назовем их силовыми функциями. В изучаемой теории они играют ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел.

Представим искомое решение в виде суммы

$$N_1 = N_1^0 + N_1^p, \quad q_1 = q_1^0 + q_1^p \tag{24}$$

какого-либо частного решения N_1^p, q_1^p неоднородной системы (12) и общего решения N_1^0, q_1^0 соответствующей однородной системы, т.е.

$$\begin{aligned}
\Delta_1^- N_1^p + l_1 \nabla_1^- (\Delta_3^- q_2^p + \Delta_2^- q_3^p) + P_1^* &= 0, \\
\Delta_1^- N_1^0 + l_1 \nabla_1^- (\Delta_3^- q_2^0 + \Delta_2^- q_3^0) &= 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

При отыскании частного решения удобно воспользоваться эвристическим подходом, согласно которому за нетривиальные (отличные от нуля) значения внутренних сил можно принять внутренние силы любой подсистемы исходной системы, способной воспринимать конкретно заданные внешние силы.

При построении общего решения однородной системы уравнений (25) воспользуемся началом наименьшей работы, полагая пока упругую систему неограниченной во всех направлениях. Согласно этому началу для свободной упругой системы или системы с идеальными связями

$$\delta U = \sum_{i_k} \int_0^{l_1} u_1' \delta n_1^0 dx + \dots + l_2 l_3 \sum_{i_k} \gamma_1 \delta q_1^0 + \dots = 0. \quad (26)$$

Здесь, по-прежнему, под суммой с индексом i_k понимается тройная сумма с бесконечными пределами для всех индексов суммирования, а многоточие говорит о наличии еще двух слагаемых, каждое из которых получается циклической перестановкой индексов из предшествующего слагаемого. Замечая затем, что (см. (4), (6), (11)); $\delta N_i = \delta N_i^0$, $\delta q_i = \delta q_i^0$)

$$\delta n_1' = -(\Delta_3^- \delta q_2^0 + \Delta_2^- \delta q_3^0), \quad \delta n_1(l_1) = \delta N_1^0 - l_1 (\Delta_3^- \delta q_2^0 + \Delta_2^- \delta q_3^0),$$

$$\int_0^{l_1} u_1' \delta n_1 dx = l_1 E_1 \delta N_1^0 - (\Delta_3^- \delta q_2^0 + \Delta_2^- \delta q_3^0) \left[l_1 \nabla_1^+ U_1 - \int_0^{l_1} u_1 dx \right],$$

из равенства (26) после суммирования по частям (см. (3), (13), (16)) получаем

$$\delta U = l_1 \sum_{i_k} E_1 \delta N_1^0 + \dots + l_2 l_3 \sum_{i_k} \Gamma_1 \delta q_1^0 + \dots = 0. \quad (27)$$

Если бы были известны выражения величин N_i^0 , q_i^0 через силовые функции $\Phi_k = \Phi_k [i_n]$, $\Psi_k = \Psi_k [i_n]$, то равенство (27) после подстановки в него этих выражений и суммирования по частям (см. (3)) приняло бы вид

$$\delta U = l_2 l_3 \sum_{i_k} (\lambda_{23} \Delta_3^2 E_2 + \lambda_{32} \Delta_2^2 E_3 - \Delta_2^- \Delta_3^- \Gamma_1) \delta \Phi_1 + \dots +$$

$$+ l_2 l_3 \sum_{i_k} [\Delta_1^- (\lambda_{12} \Delta_2^+ \Gamma_2 + \lambda_{13} \Delta_3^+ \Gamma_3 - \Delta_1^+ \Gamma_1) - 2\lambda_{12} \lambda_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1] \delta \Psi_1 + \quad (28)$$

$$+ \dots = 0.$$

Отсюда после суммирования по частям (см. (3)) имеем

$$\delta U = l_1^2 \sum_{i_k} E_1 \delta (\Delta_3^2 \Phi_2 + \Delta_2^2 \Phi_3 - 2\Delta_2^- \Delta_3^- \Psi_1) + \dots -$$

$$- l_2 l_3 \sum_{i_k} \Gamma_1 \delta [\Delta_2^+ \Delta_3^+ \Phi_1 + \Delta_1^2 \Psi_1 - \Delta_1^- (\Delta_2^+ \Psi_2 + \Delta_3^+ \Psi_3)] - \dots = 0.$$

Сопоставляя этот результат с равенством (27), заключаем, что

$$N_1^0 = l_1 (\Delta_3^2 \Phi_2 + \Delta_2^2 \Phi_3 - 2\Delta_2^- \Delta_3^- \Psi_1), \quad (29)$$

$$q_1^0 = -\Delta_2^+ \Delta_3^+ \Phi_1 - \Delta_1^2 \Psi_1 + \Delta_1^- (\Delta_2^+ \Psi_2 + \Delta_3^+ \Psi_3),$$

и, следовательно, общее решение уравнений равновесия (12) дается формулами (см. (24), частное решение для неограниченной системы полагаем известным)

$$N_1 = l_1 (\Delta_3^2 \Phi_2 + \Delta_2^2 \Phi_3 - 2\Delta_2^- \Delta_3^- \Psi_1) + N_1^p, \quad (30)$$

$$q_1 = -\Delta_2^+ \Delta_3^+ \Phi_1 - \Delta_1^2 \Psi_1 + \Delta_1^- (\Delta_2^+ \Psi_2 + \Delta_3^+ \Psi_3) + q_1^p,$$

в чем убеждает непосредственная подстановка их в эти уравнения.

Возвращаясь к конечной упругой системе, заметим, что согласно формулам (30), которые полагаем верными и в этом случае, в N_i , q_i входят значения функций Φ_k и Ψ_k при $i_n \in [\delta_{kn} - 1, I_n + 1 - \delta_{kn}]$ и $i_n \in [-1, I_n + \delta_{kn}]$ соответственно. Условие (26) для конечной упругой системы

$$\delta U = \sum_{i_k=0}^{I_k - \delta_{1k}} \int_0^{l_1} u_1' \delta n_1 dx + \dots + l_2 l_3 \sum_{i_k=0}^{I_k - 1 + \delta_{1k}} \gamma_1 \delta q_1 + \dots = 0$$

после знакомых преобразований принимает вид

$$\delta U = l_1 \sum_{i_k=0}^{I_k-\delta_{ik}} E_1 \delta N_1^0 + \dots + l_2 l_3 \sum_{i_k=0}^{I_k-1+\delta_{1k}} \Gamma_1 \delta q_1^0 + \dots = 0$$

Раскрывая в нем величины δN_1^0 , δq_1^0 с помощью формул (29) и суммируя по частям (см. (3)), приходим в итоге к равенству

$$\begin{aligned} & l_2 l_3 \sum_{i_k=\delta_{k1}-1}^{I_k+1-\delta_{k1}} \left(\lambda_{23} \Delta_3^2 E_2 + \lambda_{32} \Delta_2^2 E_3 - \Delta_2^- \Delta_3^- \Gamma_1 \right) \delta \Phi_1 + \dots + \\ & + l_2 l_3 \sum_{i_k=-1}^{I_k+\delta_{1k}} \left[\Delta_1^- \left(\lambda_{12} \Delta_2^+ \Gamma_2 + \lambda_{13} \Delta_3^+ \Gamma_3 - \Delta_1^+ \Gamma_1 \right) - 2\lambda_{12} \lambda_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1 \right] \delta \Psi_1 + \quad (31) \\ & + \dots = 0. \end{aligned}$$

Здесь, напомним, в выражениях, предваряющих вариации силовых функций, величины, появляющиеся после раскрытия разностных операторов и указывающие на несуществующие элементы упругой системы, следует положить равными нулю.

Решение N_i^p , q_i^p удовлетворяет неоднородным уравнениям равновесия всех узлов. Поэтому в случае свободной системы статические граничные можно записать следующим образом (см. (20))

$$\begin{aligned} N_1^0 [-1, i_2, i_3] &= q_2^0 [-1, i_2, i_3] = q_3^0 [-1, i_2, i_3] = 0, \\ N_1^0 [1, i_2, i_3] &= q_2^0 [1, i_2, i_3] = q_3^0 [1, i_2, i_3] = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда формулы (29), устанавливаем, что в случае свободной системы силовые функции должны подчиняться краевым условиям

$$\begin{aligned} \text{при } i_1 = -1, I_1 \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \Psi_i &= 0, \\ \text{при } i_1 = 0, I_1 + 1 \quad \Phi_2 = \Phi_3 = \Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, функции Φ_k и Ψ_k нетривиальны при $i_n \in [1 - \delta_{kn}, I_n - 1 + \delta_{kn}]$ и $i_n \in [\delta_{kn}, I_n - 1]$ соответственно, при этом число их нетривиальных значений совпадает с числом алгебраических уравнений, содержащихся в уравнениях (19), вытекающих, между прочим, и из условия стационарности (31).

Если же на упругую систему наложены идеальные связи, то условия (32) должны быть заменены геометрическими граничными условиями, выраженными в конечном счете через искомые внутренние силовые факторы. В терминах E_i и Γ_i они вытекают из условия стационарности (31) путем приравнивания нулю усеченных указанным образом левых частей уравнений совместности деформаций, стоящих перед вариациями значений силовых функций, выделенных условиями (32). Так, если узлы, отвечающие $i_1 = 0$ закреплены, то приравнивание выражений в условии стационарности (31), например, при $\delta \Psi_1 [-1, i_2, i_3]$ и $\delta \Psi_1 [0, i_2, i_3]$ приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \text{при } i_1 = 0 \quad \Gamma_1 &= 0, \\ \nabla_1^+ \Gamma_1 - \lambda_{12} \Delta_2^+ \Gamma_2 - \lambda_{13} \Delta_3^+ \Gamma_3 + 2\lambda_{12} \lambda_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1 &= 0, \end{aligned} \quad (33)$$

которые могут быть переписаны через силовые функции с помощью выражений

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \frac{1}{2} l_1 g_1^{-1} (1 + \nabla_1^+) (\Delta_3^2 \Phi_2 + \Delta_2^2 \Phi_3 - 2\Delta_2^- \Delta_3^- \Psi_1) + E_1^{p*}, \\
 \Gamma_1 &= \kappa_{23} (1 + 2\nabla_2^+) \Delta_3^+ (\Delta_3^2 \Phi_1 + \Delta_1^2 \Phi_3 - 2\Delta_1^- \Delta_3^- \Psi_2) + \\
 &+ \kappa_{32} \Delta_2^+ (1 + 2\nabla_3^+) (\Delta_2^2 \Phi_1 + \Delta_1^2 \Phi_2 - 2\Delta_1^- \Delta_2^- \Psi_3) - \\
 &- \kappa_{01} [\Delta_2^+ \Delta_3^+ \Phi_1 + \Delta_1^2 \Psi_1 - \Delta_1^- (\Delta_2^+ \Psi_2 + \Delta_3^+ \Psi_3)] + \Gamma_1^{p*},
 \end{aligned} \tag{34}$$

вытекающих из формул (10), (17), (30). Здесь

$$\begin{aligned}
 E_1^{p*} &= E_1^* + E_1^p, \quad \Gamma_1^{p*} = \Gamma_1^* + \Gamma_1^p, \\
 E_1^p &= g_1^{-1} [N_1^p - \frac{1}{2} l_1 (\Delta_3^- q_2^p + \Delta_2^- q_3^p)], \\
 \Gamma_1^p &= \kappa_{01} q_1^p + \kappa_{23} \Delta_3^+ [3l_2^{-1} N_2^p - 2(\Delta_3^- q_1^p + \Delta_1^- q_3^p)] + \\
 &+ \kappa_{32} \Delta_2^+ [3l_3^{-1} N_3^p - 2(\Delta_2^- q_1^p + \Delta_1^- q_2^p)].
 \end{aligned} \tag{35}$$

Уравнения, предназначенные для отыскания силовых функций, порождаются уравнениями совместности деформаций (23). Подставляя в них формулы (30), приходим к искомой системе уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^3 (L_{1n} \Phi_n + S_{1n}^- \Psi_n) + Q_1 &= 0 \quad (i_j \in [1 - \delta_{1j}, I_j - 1 + \delta_{1j}]), \\
 \sum_{n=1}^3 (\lambda_{1n} S_{n1}^+ \Phi_n + R_{1n} \Psi_n) + R_1 &= 0 \quad (i_j \in [\delta_{1j}, I_j - 1]).
 \end{aligned} \tag{36}$$

В ней введены разностные операторы

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \Delta_3^2 K_{23} + \Delta_2^2 K_{32} + \kappa_{01} \Delta_2^2 \Delta_3^2, \quad S_{11}^\pm = \kappa_{01} \Delta_1^2 \Delta_2^\pm \Delta_3^\pm, \\
 L_{12} &= \Delta_1^2 K_{32}, \quad S_{12}^\pm = -\Delta_1^\pm \Delta_3^\pm (\kappa_{01} \Delta_2^2 + 2K_{23}), \\
 L_{13} &= \Delta_1^2 K_{23}, \quad S_{13}^\pm = -\Delta_1^\pm \Delta_2^\pm (\kappa_{01} \Delta_3^2 + 2K_{32}), \\
 R_{11} &= \Delta_1^2 (\kappa_{01} \Delta_1^2 + \lambda_{12} \kappa_{02} \Delta_2^2 + \lambda_{13} \kappa_{03} \Delta_3^2) + 4\lambda_{12} \Delta_2^2 K_{13}, \\
 R_{12} &= -\Delta_1^- \Delta_2^+ (\kappa_{01} \Delta_1^2 + \lambda_{12} \kappa_{02} \Delta_2^2 - \lambda_{13} \kappa_{03} \Delta_3^2), \\
 R_{13} &= -\Delta_1^- \Delta_3^+ (\kappa_{01} \Delta_1^2 - \lambda_{12} \kappa_{02} \Delta_2^2 + \lambda_{13} \kappa_{03} \Delta_3^2), \quad K_{ij} = \kappa_{ij} (\Delta_i^2 + 6) \Delta_j^2.
 \end{aligned} \tag{37}$$

и свободные члены

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= Q_1^* + Q_1^p, \quad R_1 = R_1^* + R_1^p, \\
 Q_1^p &= l_2^{-1} [K_{23} N_2^p + \kappa_{23} (\nabla_2^+ + 2) \Delta_3^2 P_2^*] + \\
 &+ l_3^{-1} [K_{32} N_3^p + \kappa_{32} (\nabla_3^+ + 2) \Delta_2^2 P_3^*] - \kappa_{01} \Delta_2^- \Delta_3^- q_1^p, \\
 R_1^p &= \Delta_1^- (\lambda_{12} \kappa_{02} \Delta_2^+ q_2^p + \lambda_{13} \kappa_{03} \Delta_3^+ q_3^p) - \kappa_{01} \Delta_1^2 q_1^p - \\
 &- 2\lambda_{12} \kappa_{13} l_1^{-1} \Delta_2^+ \Delta_3^+ [(\Delta_1^2 + 6) N_1^p + (\nabla_1^+ + 2) P_1^*].
 \end{aligned} \tag{38}$$

В заключение, остановимся на приеме, позволяющем учитывать отсутствие отдельных тонких стенок. Пусть требуется найти напряженно-деформированное состояние в системе без k -стенки с номером (s_j) , где $s_j \in [0, I_j - 1 + \delta_{kj}]$. С этой целью рассмотрим вспомогательную задачу о целой системе с искусственно введенной несовместностью d_k деформации сдвига исключаемой стенки и сдвига ее стержневого обрамления. Условимся переменные этой вспомогательной задачи

помечать сверху символом \sim . Тогда в зависимостях (13) следует заменить γ_i на $\tilde{\gamma}_i - d_k \delta_{ik} \delta_{i_j s_j}$, где $\delta_{i_j s_j} = \delta_{i_1 s_1} \delta_{i_2 s_2} \delta_{i_3 s_3}$. Решение вспомогательной задачи получаются из решения задачи для системы без несовместности заменой γ_i^* , Γ_i^* , H_i , Q_i и R_i соответственно на

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i^* + d_k \delta_{ik} \delta_{i_j s_j}, \quad \tilde{\Gamma}_i^* - d_k \delta_{ik} \delta_{i_j s_j}, \quad \tilde{H}_i + d_k \delta_{ik} \delta_{i_j s_j}, \\ \tilde{Q}_i + d_k \delta_{ik} \Delta_m^- \Delta_n^- \delta_{i_j s_j} \quad (m \neq n \neq k), \quad \tilde{R}_i + d_k (\lambda_{ik} - 2\delta_{ik}) \Delta_i^- \Delta_k^+ \delta_{i_j s_j} \end{aligned}$$

(см. (18), (22)). В силу линейности теории поток касательных сил в удаленной стенке равен

$$\tilde{q}_k [s_j] = q_k [s_j] + d_k q_{kd} [s_j],$$

где первое слагаемое $q_k [s_j]$ представляет поток в той же стенке целой системы при отсутствии введенной несовместности, а второе слагаемое $d_k q_{kd} [s_j]$ учитывает влияние на него этой несовместности. Сходный вид имеют и все другие переменные, описывающие напряженно-деформированное состояние системы. Решение задачи для системы с вырезанной стенкой получается из решения вспомогательной задачи при значении d_k , обращающим в нуль поток $\tilde{q}_k [s_j]$, т. е. при

$$d_k = -q_k [s_j] / q_{kd} [s_j].$$

Очевидные рассуждения указывают на способ учета нескольких удаленных стенок. При этом допустимой является такая схема вырезов тонких стенок, при которой сохраняется геометрическая неизменяемость системы.

3. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проиллюстрируем постановку задач во внутренних силовых факторах на примере однозамкнутого кессона ($I_2 = I_3 = 1$, рис.4а), полагая внешние нагрузки на него произвольными.

В силу граничных условий (32) функции Φ_i, Ψ_2, Ψ_3 исчезают и напряженное состояние кессона описывается единственной силовой функцией $\Psi_1 [i, 0, 0]$. Формулы (30) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} N_1 = -2l_1 \Delta_2^- \Delta_3^- \Psi_1 + N_1^p, \quad N_2 = N_2^p, \quad N_3 = N_3^p, \\ q_1 = -\Delta_1^2 \Psi_1 + q_1^p, \quad q_2 = \Delta_1^+ \Delta_2^- \Psi_1 + q_2^p, \quad q_3 = \Delta_1^+ \Delta_3^- \Psi_1 + q_3^p. \end{aligned} \quad (39)$$

Из шести уравнений (36) остается только первое уравнение второй подсистемы, записываемое здесь следующим образом

$$R_{11} \Psi_1 [i_1, 0, 0] + R_1 [i_1, 0, 0] = 0 \quad (i_1 \in [1, I_1 - 1]). \quad (40)$$

Раскроем в уравнениях (39), (40) разностные операторы по переменным i_2, i_3 и удержим в них только нетривиальные значения силовой функции $\Psi_1 [i_1, 0, 0]$. Полагая далее $i_1 = i, I_1 = I, i_2 = m, i_3 = n, \Psi_1 [i_1, 0, 0] = \Psi [i]$ и опуская нижний индекс 1 при разностных операторах, действующих на аргумент i_1 , приходим к формулам

$$\begin{aligned}
 N_1[i, m, n] &= -2l_1 (-1)^{m+n} \Psi[i] + N_1^p[i, m, n], \\
 N_2[i, 0, n] &= N_2^p[i, 0, n], \quad N_3[i, m, 0] = N_3^p[i, m, 0], \\
 q_1[i, 0, 0] &= -\Delta^2 \Psi[i] + q_1^p[i, 0, 0], \\
 q_2[i, m, 0] &= (-1)^m \Delta^+ \Psi[i] + q_2^p[i, m, 0], \\
 q_3[i, 0, n] &= (-1)^n \Delta^+ \Psi[i] + q_3^p[i, 0, n] \quad (m, n = 0, 1)
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

и обыкновенному разностному уравнению ($\Delta^4 = \Delta^2 \Delta^2$)

$$(\kappa_{01} \Delta^4 - 4A \Delta^2 + 4B) \Psi[i] = -R_1[i, 0, 0] \quad (i \in [1, I-1])
 \tag{42}$$

четвертого порядка, служащему для отыскания силовой функции $\Psi[i]$. В нем

$$A = \frac{1}{2}(\lambda_{12} \kappa_{02} + \lambda_{13} \kappa_{03}) - \frac{1}{6} B, \quad B = 12(\lambda_{12} \kappa_{13} + \lambda_{13} \kappa_{12}).$$

Если жесткость g_{01} устремить к бесконечности, то 1-стенки кессона станут абсолютно жесткими в своей плоскости. При этом $\kappa_{01} = 0$, и уравнение (42) переходит в разностное уравнение второго порядка

$$(-4A \Delta^2 + 4B) \Psi[i] = -R_1[i, 0, 0] \quad (i \in [1, I-1]),$$

известное в литературе как уравнение трех осевых сил [3]. Возвращаясь к уравнению (42), заметим, что ему можно придать вид

$$(\nabla^+ - 2\eta_1 + \nabla^-)(\nabla^+ - 2\eta_2 + \nabla^-) \Psi[i] = R[i] \quad (i \in [1, I-1])
 \tag{43}$$

обыкновенного разностного уравнения 4-го порядка возвратного типа, в котором

$$\begin{aligned}
 \eta_\alpha &= a + 1 - (-1)^\alpha \sqrt{a^2 - b} \quad (\alpha = 1, 2), \\
 a &= g_{01} A, \quad b = g_{01} B, \quad R[i] = -g_{01} R_1[i, 0, 0].
 \end{aligned}$$

Общее решение его с точностью до постоянных C_k дается формулами [20-22]

$$\Psi[i] = \sum_{k=1}^4 C_k \sigma[i+k-3] + \Psi_*[i], \quad \Psi_*[i] = \sum_{j=1}^{i-2} \sigma[i-j] R[j].
 \tag{44}$$

Здесь сумма предполагается равной нулю, если ее верхний предел меньше нижнего,

$$\sigma[i] = -\sigma[-i] = \frac{1}{2} \eta_-^{-1} \nabla^- (\pi_1 - \pi_2), \quad \pi_\alpha[i] = \frac{\mu_\alpha^{i+1} - \mu_\alpha^{-i-1}}{\mu_\alpha - \mu_\alpha^{-1}} \quad (\alpha = 1, 2),
 \tag{45}$$

где $\pi_\alpha[i]$ – полином Чебышёва 2-го рода степени i относительно параметра η_α [23], а функция $\sigma[i]$, обладающая свойствами

$$\sigma[0] = \sigma[\pm 1] = 0, \quad \sigma[2] = 1, \quad \sigma[3] = 2\eta_+,
 \tag{46}$$

удовлетворяет рекуррентному соотношению ($\nabla^{\pm 2} = \nabla^\pm \nabla^\pm$)

$$(\nabla^{+2} - 2\eta_+ \nabla^+ + 4\eta_+ + 2 - 2\eta_+ \nabla^- + \nabla^{-2}) \sigma[i] = 0,
 \tag{47}$$

равносильному однородному уравнению (43). В формулах (45)-(47)

$$\mu_\alpha^{\pm 1} = \eta_\alpha \pm \sqrt{\eta_\alpha^2 - 1}, \quad \eta_\pm = \eta_1 \pm \eta_2, \quad \eta = \eta_1 \eta_2.$$

В случае свободного кессона силовая функция $\Psi[i]$ должна быть подчинена условиям (см. (32))

$$\Psi[-1] = \Psi[0] = \Psi[I] = \Psi[I+1] = 0.
 \tag{48}$$

Находя отсюда постоянные C_k , приходим к решению

$$\Psi[i] = \Psi_*[i] - \Psi_*[I]\omega_1[i] - \Psi_*[I+1]\omega_2[i] \quad (i \in [-1, I+1]), \quad (49)$$

в котором с помощью сокращения $\sigma_i = \sigma[i]$ введены функции

$$\omega_1[i] = \frac{\sigma_{I+1}\sigma_{i+1} - \sigma_{I+2}\sigma_i}{\sigma_{I+1}^2 - \sigma_I\sigma_{I+2}}, \quad \omega_2[i] = \frac{\sigma_{I+1}\sigma_i - \sigma_I\sigma_{i+1}}{\sigma_{I+1}^2 - \sigma_I\sigma_{I+2}}. \quad (50)$$

Пусть теперь граничные узлы кессона, отвечающие $i_1 = i = 0$, закреплены. В таком случае сохраняют силу два последних условия (48). Еще два условия дают равенства (33) при $i_2 = i_3 = 0$. Согласно формулам (34)

$$\begin{aligned} E_1[i, m, n] &= -(-1)^{m+n} l_1 g_1^{-1} (1 + \nabla^+) \Psi[i] + E_1^{p*}[i, m, n], \\ \Gamma_1[i, 0, 0] &= -\kappa_{01} \Delta^2 \Psi[i] + \Gamma_1^{p*}[i, 0, 0], \\ \Gamma_2[i, m, 0] &= (-1)^m \left[\kappa_{02} \Delta^+ + 4\kappa_{13} (1 + 2\nabla^+) \right] \Psi[i] + \Gamma_2^{p*}[i, m, 0], \\ \Gamma_3[i, 0, n] &= (-1)^n \left[\kappa_{03} \Delta^+ + 4\kappa_{12} (1 + 2\nabla^+) \right] \Psi[i] + \Gamma_3^{p*}[i, 0, n] \quad (m, n = 0, 1), \end{aligned}$$

так что условия (33) принимают вид

$$\Delta^2 \Psi[0] = \psi_0, \quad (\nabla^+ \Delta^2 - 4a\Delta^+ + 2b) \Psi[0] = \psi_1. \quad (51)$$

В них ($i_k = i = m = n = 0$)

$$\begin{aligned} \psi_0 &= g_{01} \Gamma_1^{p*}, \\ \psi_1 &= g_{01} \left(\nabla^+ \Gamma_1^{p*} - \lambda_{12} \Delta_2^+ \Gamma_2^{p*} - \lambda_{13} \Delta_3^+ \Gamma_3^{p*} + 2\lambda_{12} \lambda_{13} \Delta_2^+ \Delta_3^+ E_1^{p*} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Из краевых условий (51), находим (см. (44), (47))

$$C_2 = -\psi_0 - 2(\eta_+ - 1)C_1 + C_4, \quad C_3 = \psi_1 + (2\eta - 1)C_1 - 2C_4,$$

что позволяет записать решение (44) таким образом

$$\Psi[i] = C_1 \alpha[i] + C_4 \beta[i] + \Psi_*[i]. \quad (53)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha[i] &= \left[\nabla^{-2} - 2(\eta_+ - 1)\nabla^- + 2\eta - 1 \right] \sigma[i], \quad \beta[i] = \Delta^2 \sigma[i], \\ \Psi_*[i] &= \Psi_*[i] + (\psi_1 - \psi_0 \nabla^-) \sigma[i]. \end{aligned} \quad (54)$$

Подчиняя решение (53) двум последним условиям (48), имеем

$$\Psi[i] = \Psi_*[i] - \Psi_*[I]\zeta_1[i] - \Psi_*[I+1]\zeta_2[i] \quad (i \in [-1, I+1]), \quad (55)$$

где с помощью сокращений $\alpha_i = \alpha[i]$, $\beta_i = \beta[i]$ введены функции

$$\zeta_1[i] = \frac{\beta_{I+1}\alpha_i - \alpha_{I+1}\beta_i}{\alpha_I\beta_{I+1} - \alpha_{I+1}\beta_I}, \quad \zeta_2[i] = \frac{\alpha_I\beta_i - \beta_I\alpha_i}{\alpha_I\beta_{I+1} - \alpha_{I+1}\beta_I}. \quad (56)$$

Подчеркнем, что решения (49), (55) справедливы для однозамкнутого кессона любой конечной длины ($I > 1$) при произвольном его внешнем нагружении. Проиллюстрируем последнее решение на примере задачи кручения закрепленного кессона парой вертикальных единичных сил, приложенных к верхним концевым узлам (рис.4а). В этом случае

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^* = P_\alpha = P_\alpha^* = 0, \quad P_3[i, m, n] = P_3^*[i, m, n] = -(-1)^m \delta_{iI} \delta_{n1}, \\ E_i^* &= \Gamma_i^* = 0, \quad E_i^{p*} = E_i^p, \quad \Gamma_i^{p*} = \Gamma_i^p, \quad R_i = R_i^p. \end{aligned}$$

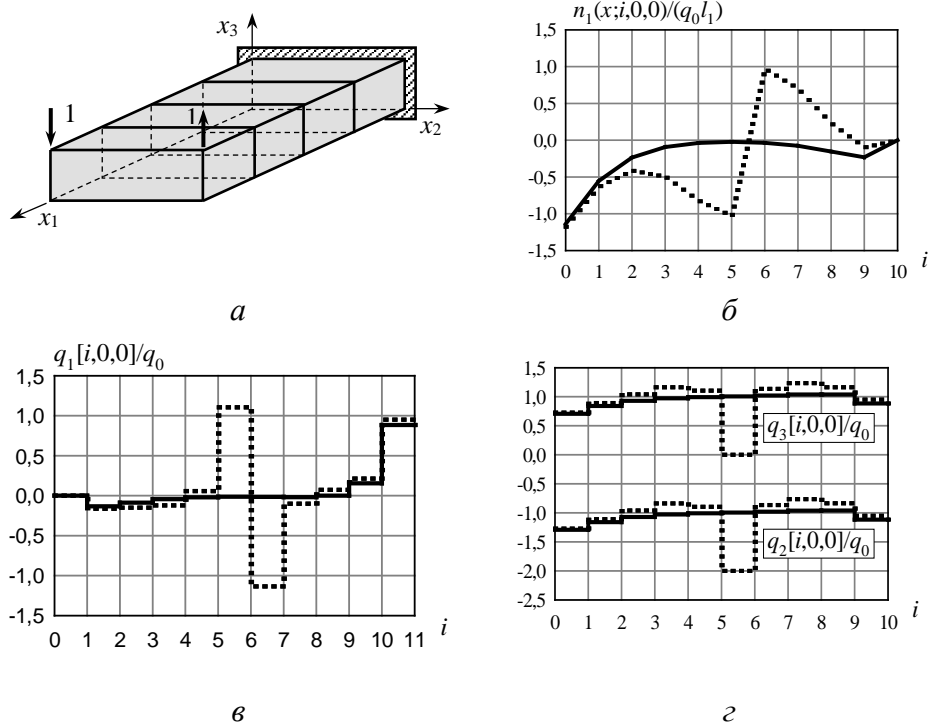


Рис.4.

За частное решение N_i^p , q_i^p уравнений равновесия узлов можно принять напряженное состояние, при котором действующие силы воспринимаются боковыми панелями кессона. Как показывают вычисления, это решение имеет вид

$$N_1^p [i, m, n] = -2(-1)^{m+n} l_1 q_0 (I - i), \quad q_2^p [i, m, 0] = -2(-1)^m q_0, \quad (57)$$

$$N_2^p = N_3^p = q_1^p = q_3^p = 0, \quad q_0 = 1/(2l_3).$$

Согласно формулам (35), (38), (44), (52), (54), (57)

$$E_1^{p*} [i, m, n] = (-1)^{m+n} q_0 l_1 g_1^{-1} (1 - 2I + 2i), \quad \Gamma_1^{p*} [i, 0, 0] = 0,$$

$$\Gamma_2^{p*} [i, m, 0] = 2(-1)^m q_0 [2\kappa_{13} (3I - 3i - 2) - \kappa_{02}],$$

$$\Gamma_3^{p*} [i, 0, n] = 4(-1)^n q_0 \kappa_{12} (3I - 3i - 2), \quad R_1 [i, 0, 0] = 4Bq_0 (I - i),$$

$$R [i] = -4bq_0 (I - i), \quad \Psi_0 = 0, \quad \Psi_1 = -2q_0 [2\lambda_{12} g_{01} g_{02}^{-1} + b(I - \frac{1}{3})],$$

$$\Psi^* [i] = q_0 [i - I(\alpha + 1) + (I - 1)\beta + 2(2a + b/3 - 2\lambda_{12} g_{01} g_{02}^{-1})\sigma]. \quad (58)$$

При выводе последнего выражения были применены формулы

$$\sum_{j=1}^{i-2} \sigma [i - j] = \frac{1}{4} b^{-1} (1 + \alpha - \beta - 2b\sigma), \quad \sum_{j=1}^{i-2} j\sigma [i - j] = \frac{1}{4} b^{-1} (i - \beta + 4a\sigma),$$

полученные путем суммирования рекуррентной зависимости (47) и результата предварительного умножения ее на i .

Некоторые результаты вычислений внутренних сил в элементах кессона

$$n_1(x; i, m, n) - 2(-1)^{m+n} \left\{ (l_1 + x\Delta^+) \Psi [i] + q_0 [l_1 (I - i) - x] \right\},$$

$$q_1 [i, 0, 0] = -\Delta^2 \Psi [i], \quad (-1)^m q_2 [i, m, 0] + 2q_0 = (-1)^n q_3 [i, 0, n] = \Delta^+ \Psi [i]$$

(см. (41), (47), (55)-(58)) при $I = 10$, $l_2 = 3l_1$, $l_3 = l_1$, $g_{0n} = g_{01}$, $g_1 = 3g_{01}l_1$ показаны графически на рис.4б-г сплошными жирными линиями. Внизу графиков приведены

значения параметра i , отсчитываемые в горизонтальном направлении и используемые для нумерации элементов системы вдоль оси x_1 .

Как видно, включение в работу элементов кессона и влияние на нее запрета депланации в заделке происходит в соответствии с дискретным краевым эффектом. О концентрации внутренних сил в кессоне, вызванной при том же его нагружении исключением 3-стенки под номером 5,0,0, можно судить по точечным линиям на рис.4б-г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью метода склейки построена строгая линейная дискретная теория упругости для пространственной регулярной тонкостенной стержневой системы ортогональной структуры, образованной из трех взаимно ортогональных семейств прямых однородных стержней и такого же количества семейств расположенных между ними тонких прямоугольных пластинок. По предположению стержни работают на растяжение-сжатие, а в пластинках допустимо состояние однородного чистого сдвига.

Определяющие соотношения теории представлены уравнениями в частных разностях, допускающими альтернативные постановки дискретных краевых задач, а в отдельных случаях и их точные аналитические решения.

Изложенная методология применима для построения аналогичных теорий пространственных тонкостенных стержневых упругих систем с более сложными моделями деформирования ее элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уманский А.А. *Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций*. – М.-Л.: Оборонгиз, 1939. – 109 с.
2. Уманский А.А. *Строительная механика самолета*. – М.: Оборонгиз, 1961. – 530 с.
3. Кан С.Н., Пановко Я.Г. *Элементы строительной механики тонкостенных конструкций*. – М.: Оборонгиз, 1952. – 163 с.
4. Феофанов А.Ф. *Строительная механика тонкостенных конструкций*. – М.: Оборонгиз, 1958. – 330 с.
5. Феофанов А.Ф. *Строительная механика авиационных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1964. – 284 с.
6. *Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем: Сборник статей*. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 876 с.
7. Власов В.З. *Избранные труды. Т.2*. – М.: Наука, 1963. – 507 с.
8. Власов В.З. *Избранные труды. Т.3*. – М.: Наука, 1964. – 472 с.
9. Образцов И.Ф. *Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1966. – 392 с.
10. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. *Контактные задачи теории пластин и оболочек*. – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
11. Benscoter S.U. *A theory of torsion bending for multicell beams* // J. Appl. Mech. – 1954. – Vol.21. – Pp.25-34.
12. Yoo C.H. *Bimoment contribution to stability of thin-walled assemblages* // Comput. Struct. – 1980. – Vol.11. – Pp.465-471.

13. Tralli A. *A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams* // Comput. Struct. – 1986. – Vol.22. – Pp.649-658.
14. Chen H., Blandford G.E. *A C^0 finite element formulation for thin-walled beams* // Int. J. Numer. Methods Eng. – 1989. – Vol.28. – Pp.2239-2255.
15. Song O., Librescu L. *Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour* // J. Sound Vib. – 1993. – Vol.167. – Pp.129-147.
16. Kim Y.Y., Kim Y. *A one-dimensional theory of thin-walled curved rectangular box beams under torsion and out-of-plane bending* // Int. J. Numer. Methods Eng. – 2002. – Vol.53. – Pp.1675-1693.
17. Vo T.P., Lee J. *Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams* // Eng. Struct. – 2007. – Vol.29. – Pp.1774-1782.
18. Sándor Ádány *Constrained shell finite element method for thin-walled members with holes* // Thin-Walled Structures. – 2017. – Vol.121. – Pp.41-56.
19. Zhong H., Liu Z., Qin H., Liu Y. *Static analysis of thin-walled space frame structures with arbitrary closed cross-sections using transfer matrix method* // Thin-Walled Structures. – 2018. – Vol.123. – Pp.255-269.
20. Рыбаков Л.С. *Линейный упругий анализ плоских ортогональных тонкостенных стержневых систем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №1. – С.3-15.
21. Jordan C. *Calculus of finite differences*. – New York: Chelsea Publishing Company, 1950, 652 p.
22. *Математические основы теории автоматического регулирования. Т.2* – М.: Высшая школа, 1977. – 453 с.
23. Пашковский С. *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

REFERENCES

1. Umanskij A.A. *Kruchenie i izgib tonkostennykh aviakonstruktsij [Torsion and bending of thin-walled aircraft structures]*. Moskva-Leningrad, Oborongiz, 1939, 109 p.
2. Umanskij A.A. *Stroitel'naya mekhanika samoleta [Structural mechanics of aircraft]*. Moskva, Oborongiz, 1961, 530 p.
3. Kan S.N., Panovko Y.G. *Ehlementy stroitel'noj mekhaniki tonkostennykh konstruktsij [Elements of structural mechanics of thin-walled structures]*. Moskva, Oborongiz, 1952, 163 p.
4. Feofanov A.F. *Stroitel'naya mekhanika tonkostennykh konstruktsij [Structural mechanics of thin-walled constructions]*. Moskva, Oborongiz, 1958, 330 p.
5. Feofanov A.F. *Stroitel'naya mekhanika aviatsionnykh konstruktsij [Structural mechanics of aircraft constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1964, 284 p.
6. *Sovremennye metody rascheta slozhnykh staticheski neopredelimykh sistem: Sbornik statej [Modern methods of calculation of complex statically indeterminate systems]*. Leningrad, Sudpromgiz, 1961, 876 p.
7. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. T.2. [Selected works. Vol.2]*. Moskva, Nauka, 1963, 507 p.
8. Vlasov V.Z. *Izbrannye trudy. T.3. [Selected works. Vol.3]*. Moskva, Nauka, 1964, 472 p.

9. Obrazcov I.F. *Variatsionnye metody rascheta tonkostennykh aviatsionnykh konstruksij [Variational methods of calculation of thin-walled aircraft structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1966, 392 p.
10. Grigolyuk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnye zadachi teorii plastin i obolochek [Contact problems of plate and shell theory]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 416 p.
11. Benscoter S.U. *A theory of torsion bending for multicell beams*. J. Appl. Mech., 1954, Vol.21, Pp.25-34.
12. Yoo C.H. *Bimoment contribution to stability of thin-walled assemblages*. Comput. Struct., 1980, Vol.11, Pp.465-471.
13. Tralli A. *A simple hybrid model for torsion and flexure of thin-walled beams*. Comput. Struct., 1986, Vol.22, Pp.649-658.
14. Chen H., Blandford G.E. *A C^0 finite element formulation for thin-walled beams*. Int. J. Numer. Methods Eng., 1989, Vol.28, Pp.2239-2255.
15. Song O., Librescu L. *Free vibration of anisotropic composite thin-walled beams of closed cross-section contour*. J. Sound Vib., 1993, Vol.167, Pp.129-147.
16. Kim Y.Y., Kim Y. *A one-dimensional theory of thin-walled curved rectangular box beams under torsion and out-of-plane bending*. Int. J. Numer. Methods Eng., 2002, Vol.53, Pp.1675-1693.
17. Vo T.P., Lee J. *Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams*. Eng. Struct., 2007, Vol.29, Pp.1774-1782.
18. Sándor Ádány. *Constrained shell finite element method for thin-walled members with holes*. Thin-Walled Structures, 2017, Vol.121, Pp.41-56.
19. Zhong H., Liu Z., Qin H., Liu Y. *Static analysis of thin-walled space frame structures with arbitrary closed cross-sections using transfer matrix method*. Thin-Walled Structures, 2018, Vol.123, Pp.255-269.
20. Rybakov L.S. *Linejnyj uprugij analiz ploskikh ortogonal'nykh tonkostennykh sterzhnevnykh sistem [Linear elastic analysis of flat orthogonal thin-walled rod systems]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.1, Pp.3-15.
21. Jordan C. *Calculus of finite differences*. New York, Chelsea Publishing Company, 1950, 652 p.
22. *Matematicheskie osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. T.2 [Mathematical foundations of theory of automatic control. Vol.2.]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1977, 453 p.
23. Paszkowski S. *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*. Warszawa, PWN, 1975, 481 p.

Поступила в редакцию 22 февраля 2019 года.

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru