

УДК 539.4

РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В БАЛКЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ МАТЕРИАЛА *

Сафронов П.А.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе получено решение задачи о прямом мартенситном превращении (ПП) в балке сплошного прямоугольного сечения из сплава с памятью формы (СПФ) под действием постоянного изгибающего момента. Выполнен учет свойства разносопротивляемости СПФ, которое заключается в значительном несовпадении кривых деформирования при растяжении и сжатии образцов из СПФ. Решение получено на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях в однократно связанной термомеханической постановке. Выполнен учет неоднородности упрочнения представительного объема СПФ при прямом мартенситном превращении. Рассматриваются медленные процессы – распределение поля температур по высоте сечения балки считается равномерным. Приняты гипотезы Бернулли-Эйлера в отношении физической стороны процесса изгиба балки.

В рамках рассматриваемого процесса ПП показано влияние разносопротивляемости СПФ при растяжении и сжатии на распределение нормальных напряжений и параметра фазового состава в сечении балки, на положение границ начала и окончания фазового перехода (ФП) в растянутой и сжатой областях сечения балки, а также на податливость балки. Установлено положение нейтральной плоскости в каждой точке процесса ПП. Показано влияние учета как однородного, так и неоднородного упрочнения представительного объема СПФ на решение задачи. Определена область значений изгибающего момента, для которой влияние на решение задачи явлений разносопротивляемости и неоднородности упрочнения представительного объема СПФ при прямом мартенситном превращении оказывается максимальным.

Продемонстрирована сходимость решения задачи о ПП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связанной постановке к решению аналогичной задачи в несвязной постановке.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; разносопротивляемость; фазовые переходы; неоднородность упрочнения; балки; связанная постановка

SOLUTION THE COUPLED DIRECT PHASE TRANSITION PROBLEM IN BENDING BEAM FROM SHAPE MEMORY ALLOY WITH TAKING INTO ACCOUNT TENSION-COMPRESSION ASYMMETRY

Safronov P.A.

Moscow aviation institute (national research center), Moscow, Russia

* Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216

ABSTRACT

In this paper, a solution of the problem of direct martensite transitions (DT) in a beam of a solid rectangular cross section from shape memory alloy (SMA) under the constant bending moment was obtained. An account has been taken of the property of the tension-compression asymmetry (TCA) of the SMA, which consists in a significant discrepancy between the stress-strain curves under tension and compression of samples from the SMA. The solution is obtained database on the model of nonlinear deformation of the SMA in phase and structural transitions in a single coupled thermomechanical formulation. An account has been taken of the heterogeneous hardening of elementary volume of SMA in DT. Slow processes are considered - the distribution of the temperature field over the height of the beam section is considered uniform. The Bernoulli-Euler hypotheses were accepted on the physical side of the beam bending process.

Within the framework of the considered process, DT shows the effect of TCA of the SMA in compression and tension on the distribution of normal stresses and the phase composition parameter in the beam section, on the position of the boundaries of the beginning and ending of the phase transition in the stretched and compressed regions of the beam, and on the compliance of the beam. The position of the neutral plane at each point of the DT process is established. The influence of taking into account both homogeneous and heterogeneous hardening of the elementary volume of the SMA on the solution of the problem is shown. The range of values of the bending moment is determined, for which the influence on the solution of the problem of the phenomena of TCA and inhomogeneity of the hardening of the representative SMA volume during the DT turns out to be maximum.

The convergence of the solution of the DT problem in the beam from SMA under a constant bending moment in a coupled formulation to the solution of a similar problem in a non-coupled formulation is shown.

Keywords: shape memory alloys; tension-compression asymmetry; phase transitions; heterogeneous hardening; beam; coupled formulation

ВВЕДЕНИЕ

Сплавы с памятью формы обладают уникальными термомеханическими свойствами, среди которых способность образцов из СПФ сначала накапливать значительные (до 8%) неупругие деформации под действием механических напряжений, затем восстанавливать первоначальную форму при нагреве (явление обратного превращения) или разгрузке (явление сверхупругости). Другое, не менее важное свойство СПФ заключается в значительном несовпадении кривых деформирования при растяжении и сжатии образцов из этого материала [1,2] – свойство разносопротивляемости. Причем, данное явление характерно как для режимов мартенситной неупругости (МН) [3-5] и сверхупругости [6-8], так и для процесса прямого термоупругого превращения [9-13].

Узкий круг работ посвящен данной тематике ввиду объективной сложности решения краевых задач о термомеханическом поведении активных элементов конструкции из СПФ с учетом свойства разносопротивляемости. Среди них решение задач об изгибе балки из СПФ в режиме сверхупругости [14] на основе модели [15,16], а также для явлений МН и ПП как с учетом [17,18], так и без учета упругих деформаций [19], но уже в рамках модели [20-23]. Решению аналогичных краевых задач без учета свойства асимметрии кривых деформирования СПФ посвящены работы [22,24-27] также на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [20-23]. Влияние эффектов термомеханической связанности в задачах изгиба для

элементов из СПФ, а также для сферы и цилиндра из СПФ, находящихся под действием внутреннего давления, без учета эффектов разнсопротивляемости этих материалов показано в [28,29].

Данная работа посвящена решению задачи о прямом термоупругом фазовом превращении в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента. Выполнен учет свойства разнсопротивляемости с помощью простейшей модификации модели [20-24], а также учтена неоднородность упрочнения представительного объема СПФ при мартенситном превращении [30,31].

1. МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПФ

Согласно модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [20-24], девиатор неупругих деформаций имеет вид

$$d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st} \quad (1.1)$$

Компоненты девиатора фазовых и структурных деформаций могут быть записаны в виде

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \omega_{ij}^+ dq, \quad \omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1-f(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad dq > 0 \quad (1.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} F_2'(\sigma_i) d\sigma_i, \quad d\sigma_i \geq 0 \quad (1.3)$$

В выражении для приращения фазовой деформации (1.2) материальная функция $f(q)$ определяет соотношение между процессами зарождения и развития мартенситных элементов при фазовом превращении. В работе не учитывается вклад развития мартенситных элементов в приращение фазовой деформации, принимается $f(q) = 0$. Поскольку задача рассматривается в связанной постановке, то действующие напряжения оказывают влияние на характерные температуры фазовых переходов. Таким образом, выражение для параметра фазового состава будет иметь вид [32-34]

$$q = \sin\left(\frac{\pi}{2} t_\sigma\right), \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{\Delta M^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma_{ij}'}{\Delta S_0}, \quad \Delta M^0 = M_s^0 - M_f^0 \quad (1.4)$$

Приращение параметра фазового состава получено путем дифференцирования группы выражений (1.4) с учетом одномерной постановки задачи ($\sigma_i = \sigma$, $\sigma'_{11} = 2\sigma/3$)

$$\begin{cases} dq = a_1^+ d|s| + b_1 dt_0, & s > 0 \\ dq = a_1^- d|s| + b_1 dt_0, & s < 0 \end{cases}, \text{ здесь} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} a_1^+ = \frac{\pi \rho_d \sqrt{1-q^2}}{2\delta S} \left(\varphi_{1r}(|s|) + |s| \varphi_{1r}'(|s|) \right), & s > 0 \\ a_1^- = \frac{\pi \rho_d \sqrt{1-q^2}}{2\delta S} \left(\varphi_{1c}(|s|) + |s| \varphi_{1c}'(|s|) \right), & s < 0 \end{cases}, \quad b_1 = \frac{\pi \sqrt{1-q^2}}{2}$$

Здесь и далее индексы « t, c » показывают принадлежность переменных к растяжению и сжатию, соответственно. В (1.5) приняты следующие безразмерные переменные: $s = \sigma/\sigma'_{01}$ – безразмерные продольные напряжения,

$s_{ic} = \sigma_{01}^t / \sigma_{01}^c, \sigma_{01}^t, \sigma_{01}^c$ – параметры материала, получаемые при идентификации модели поведения СПФ, $\delta S = \Delta S_0 \Delta M^0 / \sigma_{01}^t$ – безразмерный скачок объёмной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния в аустенитное при отсчётной температуре T , $t_0 = (M_s^0 - T) / \Delta M^0$ – безразмерный параметр температуры.

С учетом $(ds_i = d|s|, d|s| = ds \text{ при } s > 0 \text{ и } d|s| = -ds \text{ при } s < 0)$, одномерные варианты выражений для приращения фазовых и структурных продольных деформаций имеют вид

$$d\varepsilon^{ph} = \begin{cases} \rho_d \varphi_{1t}(|s|) dq = \omega^+ dq, & d|s| > 0, dq > 0 \\ -\rho_d \varphi_{1c}(|s| s_{ic}) dq = \omega^- dq, & d|s| > 0, dq > 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

$$d\varepsilon^{st} = \begin{cases} \rho_d q_{st} \varphi'_{2t}(|s|) ds = r_1^+ ds, & s > 0, q > 0 \\ \rho_d q_{st} \varphi'_{2c}(|s| s_{ic}) s_{ic} ds = r_1^- ds, & s < 0, q > 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Соотношения (1.7) соответствуют общему случаю, когда учитывается неоднородность упрочнения представительного объёма СПФ при прямом мартенситном превращении. Если группа мартенситных ячеек dq_1 в представительном объёме СПФ зародилась при действующих нормальных напряжениях σ_1 , то доориентация (структурный переход) данных мартенситных ячеек возможна, если действующие напряжения превосходят σ_2 [30]. Величина q_{st} в представительном объёме СПФ может быть получена путем суммирования объёмных долей всех мартенситных ячеек, принадлежащих данному представительному объёму $q_{st} = \sum_i dq_i \leq q$, для которых выполняются условия $\sigma \geq \sigma_2$

$$\sigma_2 = \sigma_{02} \left\{ -\ln \left(1 - \operatorname{erf} \left(\sigma_1 / \sqrt{2} \sigma_{01} \right) \right) \right\}^{1/\alpha} \quad (1.8)$$

В случае, если неоднородность упрочнения мартенсита и различия в диаграммах ПП и мартенситной неупругости (МН) не учитываются, то выполнения условия (1.8) не требуется, таким образом, в структурном переходе участвует весь мартенсит в представительном объёме СПФ, $q_{st} = q$.

В случае, если структурный переход не учитывается вовсе, $d\varepsilon^{st} = 0$.

Выражения для упругих продольных деформаций имеют вид

$$\varepsilon^e = \frac{s}{e(q)}, \quad \frac{1}{e(q)} = \frac{q}{e_m} + \frac{1-q}{e_A} \quad (1.9)$$

$$d\varepsilon^e = \frac{ds}{e(q)} + s \frac{\Delta e}{e_A e_m} dq, \quad \Delta e = e_A - e_m$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные: $e_A = E_A / \sigma_{01}^t$, $e_m = E_m / \sigma_{01}^t$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В БАЛКЕ ИЗ СПФ

Рассмотрим сечение балки $b \times h$ (рис.1).

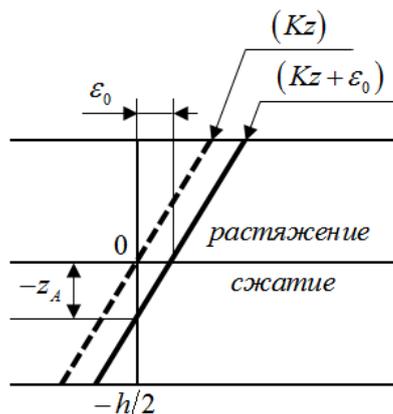


Рис.1.

Ввиду учета свойства разносопротивляемости, положение нейтральной плоскости (плоскость, в которой отсутствуют продольные деформации) не совпадает с плоскостью симметрии балки. Гипотеза плоских сечений имеет вид

$$\varepsilon = Kz + \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

Дифференцирование выражения (2.1) позволит записать выражения для приращения полной продольной деформации

$$d\varepsilon = \xi dy + d\varepsilon_0 \tag{2.2}$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные: $\xi = z/h$ – безразмерная координата в сечении балки, $y = kh$ – безразмерная кривизна.

В силу аддитивности представления полных продольных деформаций, из (1.6-1.9, 2.2) следует

$$\begin{cases} \xi dy + d\varepsilon_0 = \frac{ds}{e(q)} + d_1^+ a_1^+ ds + d_1^+ b_1 dt_0 + r_1^+ ds, & s > 0 \\ \xi dy + d\varepsilon_0 = \frac{ds}{e(q)} - d_1^- A_1 d\sigma + d_1^- b_1 dt_0 + r_1^- ds, & s < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\text{где } d_1^+ = s \frac{\Delta e}{e_A e_m} + \omega^+, \quad d_1^- = s \frac{\Delta e}{e_A e_m} + \omega^-$$

Принимая во внимание ($d|s| = ds$ при $s > 0$ и $d|s| = -ds$ при $s < 0$), приращение напряжений может быть записано в виде

$$\begin{cases} ds = \xi c_1^+ dy + c_1^+ d\varepsilon_0 - c_2^+ dt_0, & s > 0 \\ ds = \xi C_1^- dy + c_1^- d\varepsilon_0 - c_2^- dT, & s < 0 \end{cases}$$

где

$$\frac{1}{c_1^+} = \frac{1}{e(q)} + d_1^+ a_1^+ + r_1^+, \quad c_2^+ = d_1^+ d_1 c_1^+, \quad \frac{1}{c_1^-} = \frac{1}{e(q)} - d_1^- a_1^- + r_1^- s_{tc}, \quad c_2^- = d_1^- b_1 c_1^- \tag{2.4}$$

Соотношения (2.4) справедливы в части сечения, где происходит фазовый переход. В общем случае, в растянутой и сжатой части сечения балки может быть три зоны, приращение напряжений для которых запишем в виде (2.5-2.7).

Зона 1. Зона упругого деформирования с аустенитным упругим модулем

$$ds = e_A \xi dy + e_A d\varepsilon_0, \quad (\xi_{0c} \leq \xi \leq \xi_{0r}) \tag{2.5}$$

Зона 2, $\xi_0 < \xi < \xi_{00}$. В этой зоне имеют место и фазовый и структурный переходы

$$\begin{cases} ds = \xi c_1^+ dy + c_1^+ d\varepsilon_0 - c_2^+ dt_0, & (\xi_{0r} \leq \xi \leq \xi_{00r}) \\ ds = \xi c_1^- dy + c_1^- d\varepsilon_0 - c_2^- dt_0, & (\xi_{00c} \leq \xi \leq \xi_{0c}) \end{cases} \quad (2.6)$$

Зона 3. В этой части сечения балки фазовый переход полагается завершенным. Здесь происходит упругое деформирование с мартенситным упругим модулем, а также возможно накопление неупругих деформаций за счет структурного перехода

$$\begin{cases} ds = \xi c_3^+ dy + c_3^+ d\varepsilon_0, & s > 0, \quad 1/c_3^+ = \frac{1}{e(q)} + r_1^+, \quad (\xi_{00r} \leq z \leq 1/2) \\ ds = \xi c_3^- dy + c_3^- d\varepsilon_0, & s < 0, \quad 1/c_3^- = \frac{1}{e(q)} + r_1^- s_{tc}, \quad (-1/2 \leq z \leq \xi_{00c}) \end{cases} \quad (2.7)$$

Изгибающий момент в поперечном сечении балки может быть определен согласно выражению

$$\mu = \int_{-0.5}^{0.5} s \xi d\xi, \quad \text{где } \mu = M / \sigma_{01}^t b h^2 \quad (2.8)$$

Приращение изгибающего момента определим с помощью (2.5-2.8) и запишем в виде

$$d\mu = a_{11} dy + a_{12} d\varepsilon_0 - a_{13} dt_0 \quad (2.9)$$

Здесь применены следующие обозначения

$$\begin{cases} a_{11} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi^2 c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi^2 c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi^2 e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi^2 c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi^2 c_3^+ d\xi \\ a_{12} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi c_3^+ d\xi \\ a_{13} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{00r}} \xi c_2^+ d\xi \end{cases} \quad (2.10)$$

Сумму сил в отсеченной части балки в проекции на продольную ось запишем в виде

$$p_x = \int_{-0.5}^{0.5} s d\xi, \quad \text{где } p_x = P_x / b h \sigma_{01}^t \quad (2.11)$$

Приращение продольной силы будет иметь вид

$$dp_x = a_{21} dy + a_{22} d\varepsilon_0 - a_{23} dt_0 \quad (2.12)$$

Здесь применены следующие обозначения

$$\begin{cases} a_{21} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} \xi c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} \xi c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} \xi e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} \xi c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} \xi c_3^+ d\xi \\ a_{22} = \int_{-0.5}^{\xi_{00c}} c_3^- d\xi + \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_1^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{0r}} e_A d\xi + \int_{\xi_{0r}}^{\xi_{00r}} c_1^+ d\xi + \int_{\xi_{00r}}^{0.5} c_3^+ d\xi \\ a_{23} = \int_{\xi_{00c}}^{\xi_{0c}} c_2^- d\xi + \int_{\xi_{0c}}^{\xi_{00r}} c_2^+ d\xi \end{cases} \quad (2.13)$$

Принимая во внимание тот факт, что $d\mu = 0$, $dp_x = 0$, $a_{12} = a_{21}$, выражения (2.9) и (2.12) можно объединить в систему

$$\begin{cases} a_{11}dy + a_{12}d\varepsilon_0 = a_{13}dt_0 \\ a_{12}dy + a_{22}d\varepsilon_0 = a_{23}dt_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

решение которой может быть записано в виде

$$\begin{cases} dy = \frac{a_{13}a_{22} - a_{23}a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} dt_0 \\ d\varepsilon_0 = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} dt_0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Границу начала фазового превращения находим из условия

$$M_s^\sigma = T \quad (2.16)$$

Напряжения на границе области имеют вид $s = e_A(y\xi_0 + \varepsilon_0)$. С учетом (1.4) условие (2.16) приведем к виду

$$e_A |y\xi_0 + \varepsilon_0| \rho_d \varphi_1(e_A |y\xi_0 + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S \quad (2.17)$$

Поскольку разномодульность материала не учитывается, начальное состояние балки будет определяться строго упругими соотношениями и начальную температуру T_0 , при которой на границах балки начнется фазовый переход можно найти из (2.18), положив $\xi_0 = \pm 0.5$, $\varepsilon_0 = 0$

$$t_{00} = -\frac{|\varepsilon_{00}| e_A \rho_d \varphi_1(e_A |\varepsilon_{00}|)}{\delta S} \quad (2.18)$$

Здесь ε_{00} – деформация крайнего волокна балки в начальном упругом состоянии.

В общем случае алгоритм численного решения задачи следующий. На первом этапе решается упругая классическая задача о чистом изгибе балки сплошного прямоугольного сечения. Поскольку разномодульность не учитывается, положение нейтральной плоскости на начальном этапе будет совпадать с плоскостью симметрии балки, ($\xi_A = 0$). Материал балки находится в полностью аустенитном состоянии. Для заданного начального изгибающего момента μ_0 определяется значение начальной кривизны y_0 и линейное распределение нормальных напряжений по сечению балки $s(\xi) = e_A y_0 \xi$. Значения температур t_{00r} и t_{00c} устанавливаются согласно выражению (2.18) для крайних волокон балки $\xi = 0,5$ и $\xi = -0,5$. Начальная температура t_{00} определяется из условия $t_{00} = \max(t_{00r}, t_{00c})$.

Предположим, на некотором шаге процесса охлаждения балки под действием постоянного изгибающего момента известны величины: $t_0, q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$. Выполняется малый шаг по температуре $dt_0 > 0$, ($dT < 0$). Вычисляем новое значение температуры $t_0 = t_0 + dt_0$. Для старых значений $q(\xi), s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}, \xi_A$ и новой температуры t_0 определяются значения $q_{st}(\xi)$ для каждой точки поперечного сечения балки согласно алгоритму, представленному в [22]. Для новых значений t_0 и $q_{st}(\xi)$

определяем приращение безразмерной кривизны dy и $d\varepsilon_0$ согласно системе (2.15). Для старых значений границ $\xi_{0t}, \xi_{0c}, \xi_{00t}, \xi_{00c}, \xi_A$ и новых значений $t_0, q_{st}(\xi), y, \varepsilon_0$ определяем приращений безразмерных продольных напряжений согласно (2.5-2.7). На данном этапе определяется новое положение нейтральной плоскости ξ_A путем поиска точки, в которой происходит смена знака эпюры безразмерных напряжений $s(\xi)$. Для новых значений $t_0, s(\xi), y, \varepsilon_0, \xi_{0t}, \xi_{0c}, \xi_{00t}, \xi_{00c}, \xi_A, q_{st}$ находим приращение параметра фазового состава согласно (1.5). Затем необходимо обновить положения границ окончания ФП ξ_{00t}, ξ_{00c} путем исключения той области сечения балки, где в результате предыдущего шага получилось $q^{new} = q^{old} + dq \geq 1$. Новые положения границ начала ФП ξ_{0t}, ξ_{0c} определяются из условий

$$\begin{cases} e_A |y\xi_{0c} + \varepsilon_0| \rho_d \varphi_{1c} (e_A |y\xi_{0c} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, \xi_{0c} \leq \xi_A \\ e_A |y\xi_{0t} + \varepsilon_0| \rho_d \varphi_{1t} (e_A |y\xi_{0t} + \varepsilon_0|) = -t_0 \delta S, \xi_{0t} \geq \xi_A \end{cases} \quad (2.19)$$

Далее организуется итерационный процесс: повторяются шаги с определения приращения кривизны dy до установления новых границ начала и окончания ФП до тех пор, пока очередное приближение приращения dy не станет малым, по отношению к значению этой же величины на прошлом шаге итерационного процесса. При выполнении критерия сходимости происходит новый малый шаг по температуре $dt_0 > 0, (dT < 0)$.

Охлаждение балки продолжается до тех пор, пока обе границы окончания ФП ξ_{00t}, ξ_{00c} не достигнут положения нейтральной плоскости ξ_A . При этом, температура на момент окончания ПП должна удовлетворять условию $T \geq M_f^0$.

При численном решении задачи о ПП в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента приняты следующие значения параметров: $\sigma_{01}^t = 169 \text{ МПа}, \sigma_{01}^c = 189 \text{ МПа}, \sigma_{02}^t = 242 \text{ МПа}, \sigma_{02}^c = 290 \text{ МПа}, \alpha_t = 2, \alpha_c = 2,2, \rho_{dt} = 0,056, \rho_{dc} = 0,0465, \Delta S_0 = 0,43 \text{ МПа} / \text{K}$. Установленные значения параметров материала отвечают результатам, представленным в работе [11]. Параметры α_t, α_c дополнительно отвечают положению о том, что диаграмма мартенситной неупругости на плоскости напряжения – деформации находится выше вдоль оси напряжений, чем диаграмма прямого превращения [30].

Рассматриваются четыре постановки задачи: решение задачи без учета структурных превращений и свойства разнсопротивляемости соответствует модели 1. Аналогичная постановка задачи, но с учетом разнсопротивляемости растяжению и сжатию СПФ отвечает модели 2. Решение задачи, полученное с учетом разнсопротивляемости и структурного перехода, однако без учета неоднородности упрочнения представительного объема СПФ – соответствует модели 3. Наконец, решение задачи с учетом всех вышеназванных явлений отвечает модели 4.

Ниже представлено решение задачи в виде эпюры безразмерных нормальных напряжений s по высоте сечения балки ξ . Значение безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$, что соответствует начальной деформации крайнего волокна балки $\varepsilon_{00} = 0.002$.

На рис.2а,б показаны кривые $s = s(\xi)$ для модели 4. Здесь 1 соответствует начальному упругому решению задачи. Кривая 2 – распределение напряжений в сечении балки для температуры t_0^* , при которой обе границы начала ФП ξ_{0r}, ξ_{0c} впервые достигли нейтральной плоскости ξ_A . Далее будет показано, что обе границы ξ_{0r}, ξ_{0c} достигают нейтральной плоскости одновременно. Кривая 3 соответствует окончанию ФП во всех точках сечения балки. Пунктирные кривые соответствуют промежуточным этапам решения задачи.

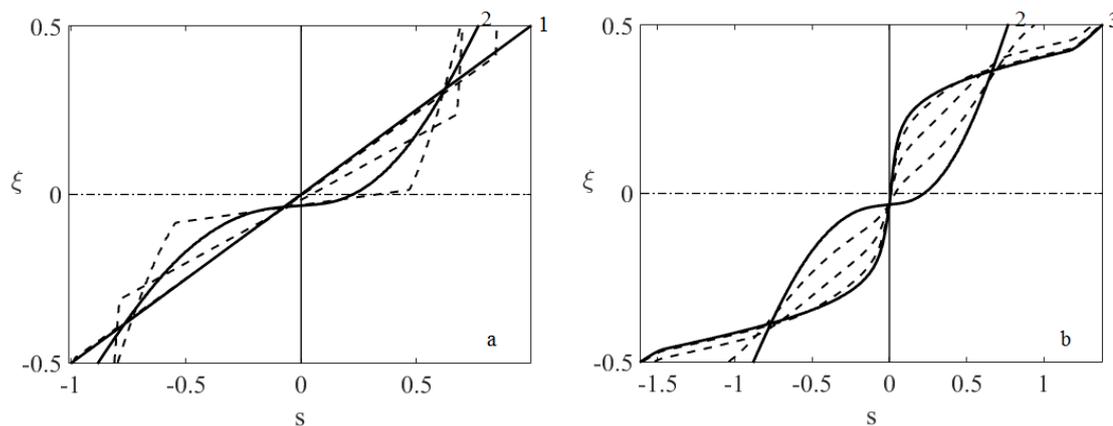


Рис.2. Кривые $s = s(\xi)$ для различных t_0 .

На рис.3 показано распределение параметра фазового состава по высоте сечения балки в разные моменты охлаждения балки. Кривые 1-9 построены через равные промежутки $\Delta t_0 = 0.1744$. Используется модель 4. Из положения кривых 1-2 видно, что ФП начинается раньше в растянутой области сечения балки. В ходе численного решения задачи установлено, что помимо продольных деформаций, на нейтральной плоскости балки продольные напряжения также равны 0. Поэтому, наименьшие значения параметра фазового состава для промежуточных значений t_0 достигаются на нейтральной плоскости ξ_A в виду отсутствия напряжений на последней. Полученный результат соответствует соотношениям (1.4) и экспериментальным наблюдениям – механические напряжения сдвигают диаграмму ФП в сторону больших температур.

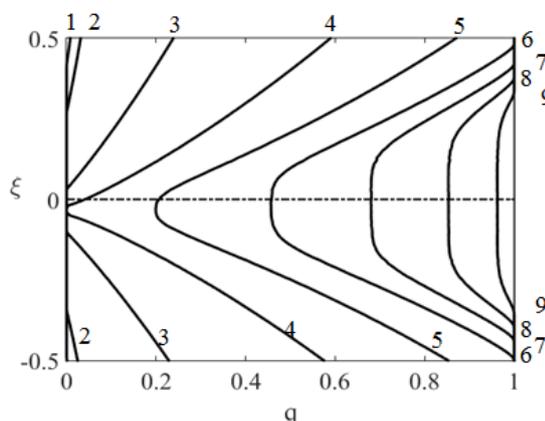


Рис.3. Кривые $q = q(\xi)$ для различных t_0 .

На рис.4a,b показаны зависимости $s = s(\xi)$ для значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$ и 0.249 соответственно. Здесь, линии 5 – решение упругой задачи. Кривые 1-4 отвечают моделям 1-4 соответственно. В рамках модели 2 полагается, что структурный переход отсутствует, что приводит к завышенным значениям напряжений на границах сечения балки. Модель 3 предполагает наличие структурного перехода, однако без учета упрочнения СПФ. Это приводит к тому, что весь мартенсит в точке сечения балки участвует в структурном превращении, что в свою очередь приводит к чрезмерной релаксации и занижению значений напряжений в верхней и нижней четверти сечения балки. Модель 4 учитывает неоднородность упрочнения представительного объема СПФ при прямом мартенситном превращении, а также несовпадение кривых деформирования для явления ПП и ФП. Таким образом, кривая 4 занимает промежуточное положение между 2 и 3, релаксация напряжений присутствует в верхней и нижней четверти сечения и не является чрезмерной. Аналогичный результат получен для задачи кручения [31].

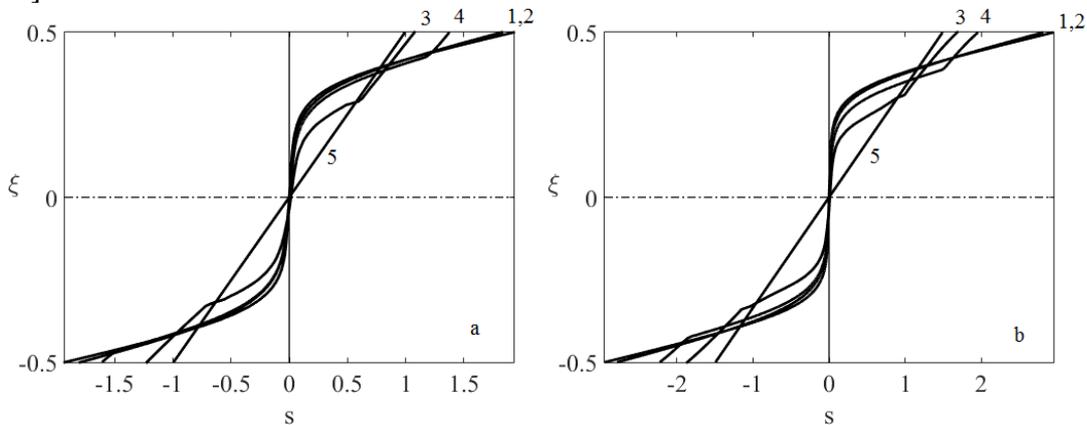


Рис.4. Кривые $s = s(\xi)$, модели 1-4.

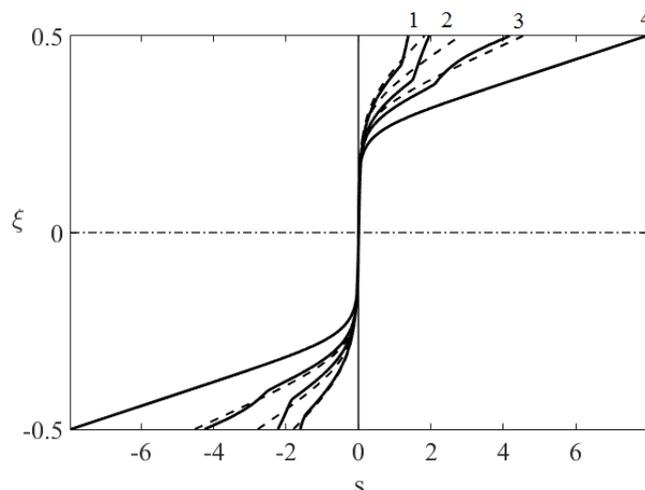


Рис.5. Кривые $s = s(\xi)$ для различных значений $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$.

На рис.5 показаны зависимости $s = s(\xi)$ на момент окончания ФП. Группы кривых 1-4 получены для различных значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$. Сплошные кривые построены с учетом

неоднородности упрочнения, модель 4, пунктирные – без учета структурного превращения, модель 2. Поведение кривых показывает, что наибольшее влияние структурного перехода на решение задачи достигается при средних значениях изгибающего момента $\mu_0 = 0.249$, ($\varepsilon_{00} = 0.003$). Для больших значений изгибающего момента $\mu_0 = 0.828$, ($\varepsilon_{00} = 0.01$), наличие структурного перехода практически не влияет на решение задачи. Полученный результат согласуется с результатами, полученными в [31].

На рис.6 показаны зависимости $y = y(t_0)$. Аналогично рис.4, группы кривых 1-4 получены для различных значений безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166, 0.249, 0.414, 0.828$. Сплошные кривые – модель 4, пунктирные – модель 2.

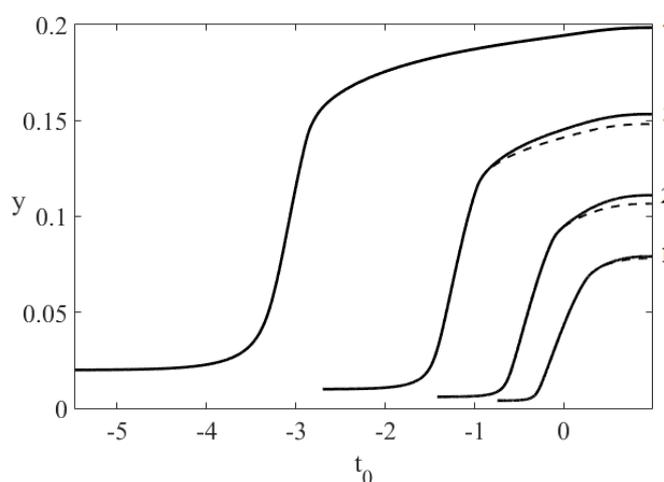


Рис.6. Кривые $y = y(t_0)$, модели 2 и 4.

На рис.7(a-d) показана история изменения положения границ ФП $\xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}$, а также положения нейтральной плоскости ξ_A в ходе фазового перехода. Рис.7(a-d) получены для моделей 1-4 соответственно, значение безразмерного изгибающего момента $\mu_0 = 0.166$, ($\varepsilon_{00} = 0.002$). Рис.7а получен без учета свойства разнсопротивляемости, положение нейтральной плоскости закономерно совпадает с плоскостью симметрии балки, а движение границ ФП $\xi_{0r}, \xi_{0c}, \xi_{00r}, \xi_{00c}$ в растянутой и сжатой частях сечения балки является строго симметричным. Остановимся более подробно на рисунке 7d. Кривая А-В-С-D-Е соответствует истории изменения положения нейтральной плоскости ξ_A при охлаждении балки. Поскольку разномодульность СПФ не учитывается, начальное упругое решение задачи предполагает совпадение нейтральной плоскости и плоскости симметрии балки в начальный момент времени, точка А. В точке В обе границы начала ФП ξ_{0r}, ξ_{0c} достигают нейтральной плоскости одновременно, при температуре $t_0 = 0$ ($T = M_s^0$). Это вызвано фактом отсутствием продольных напряжений на нейтральной плоскости балки, который был установлено в ходе численного решения задачи. Участок А-В этой кривой показывает смещение ξ_A в нижнюю полуплоскость балки в виду наличия прямого мартенситного перехода, для которого учитывается свойство разнсопротивляемости. На участке В-С, кривая ξ_A выходит на некоторый установившийся уровень, поскольку все сечение

балки участвует в ФП. На участке С-D кривая ξ_A демонстрирует стремление к плоскости симметрии. Такое поведение ξ_A обусловлено тем фактом, что в крайних волокнах балки уже закончился ФП, однако действующие напряжения все еще малы для инициализации структурного перехода. Таким образом, крайние волокна балки деформируются по упругому закону с мартенситным модулем, без разноспротивляемости. На участке D-E напряжения в сечении балки достигают значений, необходимых для наличия структурного перехода. Таким образом, разноспротивляемость в данных зонах сечения балки снова учитывается, а нейтральная плоскости вновь стремится отдалиться от плоскости симметрии.

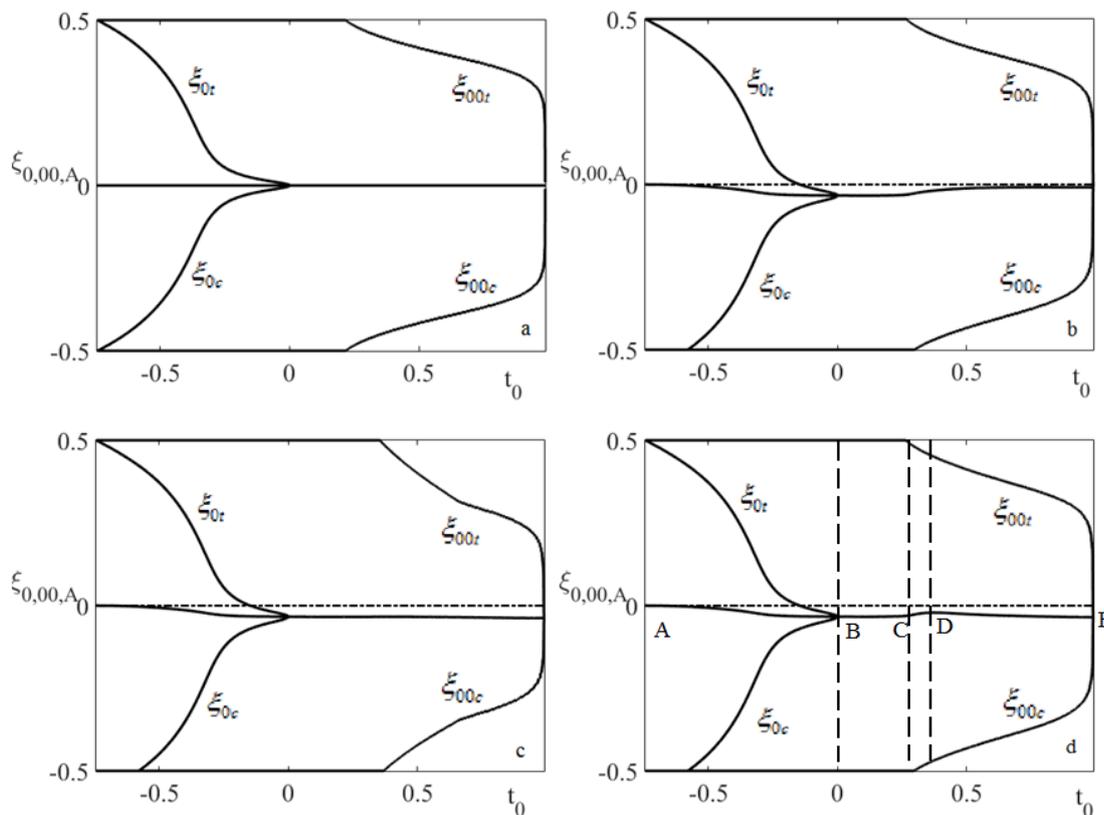


Рис.7. Границы ФП, ξ_{0r} , ξ_{0c} , ξ_{00r} , ξ_{00c} , положение нейтральной плоскости ξ_A .

На рис.8а показано стремление решения задачи согласно модели 4 в связанной постановке, кривая 1, к решению аналогичной задачи, но уже в несвязанной постановке, линия 2, [17]. Снижение связности постановки достигается путем увеличения значения скачка безразмерной объёмной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния к аустенитному δS . Из соотношений (1.4) видно, что увеличение значения данного параметра δS приводит к ослаблению влияния напряжений на характерные температуры протекания фазовых переходов. На рис.8б показано аналогичное стремление зависимости $s = s(\xi)$ для связанной постановки ($\delta S = 0.0509$), кривая 1, к решению задачи в несвязанной постановке, кривая 2. Промежуточные штриховые кривые отвечают значениям $\delta S = 0.075$ и $\delta S = 1.5$.

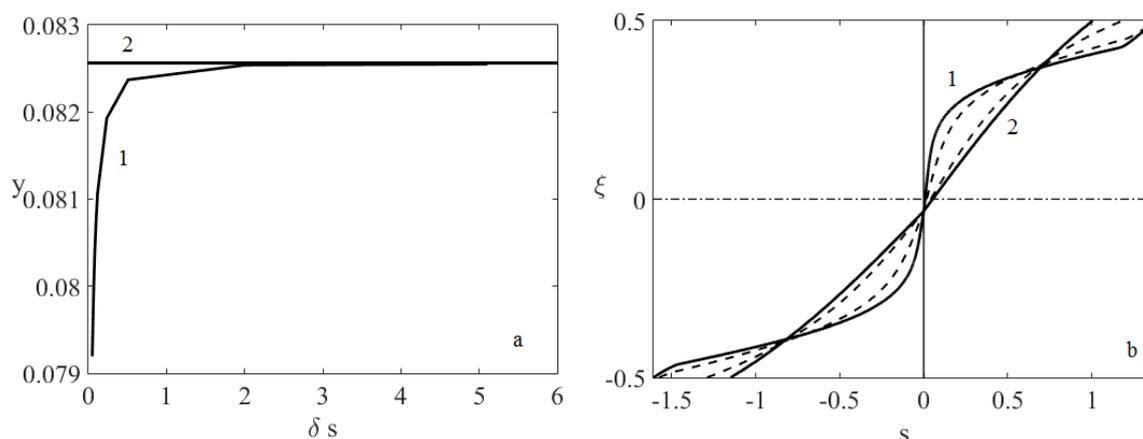


Рис.8. Кривая $y = y(\delta S)$. Кривые $s = s(\xi)$ для различных δS .

ВЫВОДЫ

Получено численное решение задачи о прямом термоупругом фазовом превращении в балке из СПФ под действием постоянного изгибающего момента в связанной постановке. Выполнен учет явления разносопротивляемости растяжению и сжатию этих материалов, а также показано влияние однородного и неоднородного упрочнения представительного объема СПФ при фазовом превращении на решение задачи. Рассуждения построены на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях.

Установлено, что разносопротивляемость СПФ приводит к значительному смещению нейтральной плоскости (плоскость в сечении балки, на которой отсутствуют продольные деформации) от плоскости симметрии в сторону сжатых волокон. В ходе численного решения задачи установлено, что на нейтральной плоскости балки отсутствуют продольные напряжения. Это способствует одновременному достижению границами начала ФП ξ_{0r}, ξ_{0c} и окончания ФП ξ_{00r}, ξ_{00c} положения нейтральной плоскости в моменты $T = M_s^0$ и $T = M_f^0$ соответственно. Показано, что эпюра нормальных напряжений в сечении балки при решении задачи в связанной постановке сильно отличается от аналогичной эпюры, полученной при решении задачи в несвязной постановке [17]. Распределение параметра фазового состава по сечению балки для различных t_0 имеет сильно нелинейный характер, в то время как при решении аналогичной задачи в несвязной постановке зависимость $q = q(\xi)$ принималась линейной.

Учет неоднородности упрочнения представительного объема СПФ при фазовом превращении оказывает значительное влияние на решение задачи только для средних значений изгибающего момента. Аналогичные выводы получены при решении задачи о кручении трубок из СПФ [31].

Полученное решение задачи о ПП в балке из СПФ в связанной постановке демонстрирует стремление к решению аналогичной задачи в несвязной постановке [17] при увеличении численного значения параметра δS , отвечающего за термомеханическую связность постановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties* // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – Pp.339-350.
3. Yong Liu, Xie Z., Van Humbeeckd J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta mater. – 1998. – Vol.46. – №12. – Pp.4325-4338.
4. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.83-93.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2018. – №12. – С.2-11.
6. Sehitoglu Huseyin, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys* / IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids. – 2002. – Pp.103-109.
7. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture* // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol.49. – Pp.709-737.
8. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear* // Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol.643. – Pp.194-202.
9. Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – Pp.85-92.
10. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.613-626.
11. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.48-55.
12. Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л. *Выбор аппроксимаций диаграммы прямого превращения никелида титана при растяжении и сжатии* // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2018. – Т.23. – №123-1. – С.459-463.
13. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression* // Construction and Building Materials. – 2017. – Vol.155. – Pp.348-362.
14. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A., Gall K. *On superelastic bending of shape memory alloy beams* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50. – Pp.1664-1680.

15. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12(6). – Pp.805-842.
16. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material* // Intern. J. of Plasticity – 2000. – Vol.16(10). – Pp.1309-1343.
17. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-90.
18. Сафронов П.А. *Цилиндрический изгиб пластинок из сплава с памятью формы с учетом разнсопротивляемости этого материала* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №2. – С.186-206.
19. Сафронов П.А. *Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.2. – №1. – С.114-127.
20. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №3. – С.118-130.
21. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
22. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
23. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
24. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
25. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.
26. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
27. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. *Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
28. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.164-173.

29. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
30. Казарина С.А., Сильченко А.Л., Мовчан А.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое описание процесса доориентации мартенсита после прямого фазового превращения в сплаве с памятью формы* // Вестник Тамбовского университета. – 2016. – Т.21. – №3. – С.787-790.
31. Саганов Е.Б. *Учет неоднородности упрочнения сплава с памятью формы в задаче о прямом мартенситном превращении в стержне круглого поперечного сечения при кручении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2018. – Т.24. – №1. – С.82-92.
32. Мовчан А.А. *Выбор аппроксимации фазовой диаграммы и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
33. Мовчан А.А., Со Ньюнт *Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса* // Прикладная механика и техническая физика. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
34. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. *Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.

REFERENCES

1. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties*. Adv. Structur. Materials, 2011, Vol.7, Pp.339-350.
3. Yong Liu, Xie Z., Van Humbeeckd J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta mater., 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
4. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Diagrammy martensitnoj neuprugosti nikelida titana pri rastyazhenii, szhatii i szhatii posle rastyazheniya [Nitinol's martensite inelasticity diagramm for tension, compression and tension after compression]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.83-93.
5. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Eksperimental'naya identifikaciya modeli nelinejnogo deformirovaniya splavov s pamyat'yu formy pri fazovyh i strukturnyh prevrashcheniyah [Experimental identification of model of nonlinear deformation of shape memory alloys during phase transitions and structural transformations]*. Deformaciya i razrushenie materialov, 2018, No.12, Pp.2-11.
6. Sehitoglu Huseyin, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys*. IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids, 2002, Pp.103-109.
7. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture*. J. Mech. Phys. Solids, 2001, Vol.49, Pp.709-737.
8. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension*,

- compression and compression-shear*. Materials Science and Engineering, 2015, Vol.643, P.194-202.
9. Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.317, Pp.85-92.
 10. Lexcelent Ch., M.L. Boubakar, Ch. Bouvet, S. Calloch *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.
 11. Sittner P., Novak V., *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol., 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.
 12. Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A.L. *Vybor approksimacij diagrammy pryamogo prevrashcheniya nikelida titana pri rastyazhenii i szhatii [Choice of approximations of direct transformation diagrams of nickel-titanium under tension and compression]*. Vestnik tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki, 2018, Vol.23, No.123-1, Pp.459-463.
 13. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression*. Construction and Building Materials, 2017, Vol.155, Pp.348-362.
 14. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A., Gall K. *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. Intern. J. of Solids and Structures, 2013, Vol.50, Pp.1664-1680.
 15. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12(6), Pp.805-842.
 16. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. Intern. J. of Plasticity, 2000, Vol.16(10), Pp.1309-1343.
 17. Safronov P.A. *Reshenie zadach o martensitnoj neuprugosti i pryamom fazovom prevrashchenii v balke iz splava s pamyat'yu formy s uchetom uprugih deformacij i raznosoprotivlyaemosti ehtih splavov [Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating in solution the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under beand]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-90.
 18. Safronov P.A. *Cilindricheskij izgib plastinok iz splava s pamyat'yu formy s uchetom raznosoprotivlyaemosti ehtogo materiala [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of cylindrical bend of the plate from shape memory alloy]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2018, Vol.24, No.2, Pp.186-206.
 19. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivliaemosti splavov s pamiat'iu formy pri reshenii zadach o martensitnoi neuprugosti i priamom prevrashchenii v balke, nakhodiashcheisia pod deistviem izgibaiushchego momenta [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.

20. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
21. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
22. Mishustin I.V., Movchan A.A., Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
23. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
24. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchetsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
25. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of direct martensite transformation in a thick-walled cylinder made of shape memory alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
26. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchetsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
27. Movchan A.A., Tant Zin Aung, Movchan I.A. *Reshenie zadach izgiba balok iz splavov s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov pri fazovykh i strukturnykh prevrashcheniiah. [Solution of beam bending problems for shape memory alloys in framework of non-linear straining model of this material in phase and structure transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2009, Vol.15, No.3, Pp.422-436.
28. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
29. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Kraevye zadachi termomekhaniki dlia tsilindra i sfery iz splava s pamiat'iu formy [Thermomechanical boundary problems for a cylinder and sphere made of shape memory alloys]*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, No.3, Pp.113-128.
30. Kazarina S.A., Silchenko A.L., Movchan A.A. *Eksperimental'noe issledovanie i teoreticheskoe opisaniie protsessa doorientatsii martensita posle priamogo fazovogo prevrashcheniia v splave s pamiat'iu formy [Experimental investigation and theoretical description of the martensite inelasticity loading proceses after direct phase transformation in shape memory alloys]*. Tambov University Review, 2016, Vol.21, No.3, Pp.787-790.
31. Saganov E.B. *Uchet neodnorodnosti uprochneniya splava s pamiat'iu formy v zadache o pryamom martensitnom prevrashchenii v sterzhne kruglogo poperechnogo secheniya pri kruchenii [Account of heterogeneous hardening of shape memory alloy in the problem of direct martensite transformation in torque rod]*

- with circular cross section*]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2018, Vol.24, No.1, Pp.82-92.
32. Movchan A.A. *The selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys*. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, Vol.36, No.2, Pp.300-306.
33. Movchan A.A., Nyunt Soe *Thermodynamic description of the behavior of shape memory alloys by an additive gibbs potential*. *Applied Mechanics and Technical Physics*, 2006, Vol.47, No.4, Pp.542-546.
34. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mishustin I.V., Movchan I.A. *Termodinamicheskoe obosnovanie modeli nelinejnogo defomipovaniya splavov s pamyat'yu fopmy pri fazovyh i stpuktupnyh ppevpashcheniyah [Thermodynamic justification of the model of nonlinear deformation of shape memory alloys during phase and structural transitions]*. *Deformaciya i razrushenie materialov*, 2009, No.8, Pp.2-9.

Поступила в редакцию 6 октября 2018 года.

Сведения об авторе:

Сафронов Павел Андреевич – асп., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: www-midnight-express@yandex.ru