

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ НА ПРОЦЕСС ГОРЯЧЕГО ИЗОСТАТИЧЕСКОГО ПРЕССОВАНИЯ ДЛИННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗАГОТОВКИ

Бочков А.В.¹, Козырев Ю.М.¹, Пономарев А.В.^{1,2}, Raisson G.³

¹*Российский Технологический Университет, г. Москва, Россия*

²*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

³*Consultant, Cournon D'Auvergne, France*

АННОТАЦИЯ

В настоящее время порошковая металлургия получает все большее распространение в силу строительства больших газостатов, позволяющих производить широкий спектр изделий больших геометрических размеров, обладающих высокими эксплуатационными характеристиками. В данной работе исследуется влияние вязкости на процесс горячего изостатического прессования длинной цилиндрической заготовки, который является одной из типовых задач, решаемых на производстве. Актуальность задачи обусловлена особенностями процесса горячего изостатического прессования, связанными со значительными искажениями формы изделия в ходе процесса, а также с высокой сложностью и стоимостью дальнейшей обработки. Также из-за высокой стоимости исходных материалов проведение натуральных экспериментов серьезно затруднено. В этих условиях важно учитывать все факторы, влияющие на конечную форму изделия, одним из которых является зависимость предела текучести от интенсивности скоростей деформаций, которая в работе предполагается заданной в степенной форме. Порошковый материал в работе рассматривается как единая пластически сжимаемая среда в условиях неоднородного нестационарного температурного поля. Рассматривается общая постановка, включающая в себя уравнение равновесия, уравнение поверхности текучести, ассоциированный закон течения, условие идеальной пластичности и условие несжимаемости, уравнение неразрывности. Также рассматривается задача горячего изостатического прессования длинной цилиндрической заготовки, представляющей собой капсулу с размещенным в ней порошковым материалом. При этом влиянием капсулы на торцах цилиндра пренебрегаем. В этой постановке для описания механических свойств порошкового материала используется условие текучести Грина. Получены соотношения, позволяющие оценить качественную картину процессов, проходящих на различных стадиях процесса горячего изостатического прессования (ГИП). Произведен расчет отношений начальных размеров цилиндра к конечным в зависимости от параметров.

Ключевые слова: процесс горячего изостатического прессования; порошковый материал; неоднородное температурное поле; условие Грина

EFFECT OF VISCOSITY ON HIP PROCESS OF LONG CYLINDRICAL BLANKS

Bochkov A.V.¹, Kozirev J.M.¹, Ponomarev A.V.^{1,2}, Raisson G.³

¹*MIREA, Moscow, Russia*

²*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

³*Consultant, Cournon D'Auvergne, France*

ABSTRACT

At present, powder metallurgy is becoming more and more widespread due to the construction of large gasostatic extruders, which make it possible to produce a wide range of products of large geometric dimensions with high performance characteristics. In this paper, we investigate the effect of viscosity on the process of hot isostatic pressing of a long cylindrical billet, which is one of the typical problems solved in production. The insistence of the problem is due to the peculiarities of the hot isostatic compaction process, associated with significant distortions in the shape of the product during the process, as well as the high complexity and cost of further processing. Also, because of the high cost of raw materials, carrying out field experiments is seriously hampered. Under these conditions, it is important to consider all the factors affecting the final form of the product, one of which is the dependence of the yield stress on the strain rate intensity, which is assumed to be given in power form in the work. Powder material in the work is considered as a single plastically compressible medium under conditions of an inhomogeneous non-stationary temperature field. A general formulation is considered that includes the equilibrium equation, the fluidity equation, the associated flow law, the ideal plasticity condition and the incompressibility condition, the continuity equation. The problem of hot isostatic pressing of a long cylindrical billet, which is a capsule with a powder material placed in it, is also considered. The influence of the capsule on the ends of the cylinder is neglected. In this formulation, the Green's fluidity condition is used to describe the mechanical properties of the powder material. Relations are obtained that make it possible to evaluate the qualitative picture of the processes occurring at different stages of the hot isostatic pressing process (HIP). Calculations are made for the ratio of the initial cylinder sizes to the final ones, depending on the parameters.

Keywords: HIP process; powder material; non-uniform temperature field; yield criterion of Green

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире при разработке сложных механизмов и конструкций требуется все больше деталей способных выдерживать большие механические нагрузки или эксплуатироваться в условиях агрессивных сред. Перспективным методом изготовления подобных деталей является порошковая металлургия. Однако детали, изготовленные данным методом трудны для последующей обработки, а их материал достаточно дорог, поэтому необходима высокая точность в производстве. Особенно это сказывается при мелкосерийном производстве крупногабаритных изделий, когда стоимость экспериментальных образцов может быть очень велика.

Традиционным методом получения изделий в порошковой металлургии является процесс горячего изостатического прессование (ГИП) порошковых материалов. Процесс ГИП представляет собой высокотемпературное (порядка 1000°C) уплотнение порошковых материалов под действием внешнего давления (порядка 1000 атмосфер). Заготовка для процесса ГИП представляет собой капсулу, заполненную порошковым материалом и, в случае необходимости, расположенными в определенных местах закладными элементами, которые в дальнейшем удаляются из готового изделия, оставляя пустоты необходимой формы. В ходе процесса ГИП заготовка искажается, принимая форму изделия. Именно сложность моделирования процесса искажение заготовки создает трудности получения изделия требуемой геометрии.

В связи с перечисленными выше трудностями возникает необходимость предварительного расчета геометрии полученного изделия, которое можно

осуществить методами математического моделирования, некоторые аспекты которого рассмотрены в работах [1,2]. В самом общем виде постановку задачи математического моделирования процесса ГИП можно сформулировать следующим образом: требуется спроектировать капсулу таким образом, чтобы конечная форма порошкового монолита, полученного после удаления капсулы, удовлетворяла требуемой геометрии. Отметим, что в силу специфики использования таких изделий, эти требования бывают достаточно жесткими.

Однако для качественного понимания различных аспектов процесса ГИП и дальнейшего сравнения с результатами численных экспериментов необходимо теоретическое исследование воздействия всевозможных факторов на процесс ГИП. В данной работе исследуется влияние вязкости на процесс ГИП длинной цилиндрической заготовки, который является одной из типовых задач, решаемых на производстве.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ГИП

Порошковый материал рассматривается как единая пластически сжимаемая среда. Исследуется задача прессования пластически сжимаемого материала в условиях неоднородного нестационарного температурного поля.

Общая математическая постановка задачи моделирования процесса ГИП включает следующее:

Уравнение равновесия

$$\operatorname{div} \bar{\sigma} = 0 \quad (1)$$

где $\bar{\sigma}$ – тензор напряжений.

Уравнение поверхности текучести в общем случае задается в виде

$$\Phi(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2)$$

Связь тензора напряжений σ_{ij} и тензора скоростей деформаций ε_{ij} определяется ассоциированным законом течения

$$\varepsilon_{ij} = \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3)$$

где ε_{ij} – тензор скоростей деформации.

Для описания поведения материала капсулы и закладного элемента используется условие идеальной пластичности и условие несжимаемости

$$S^2 = T^2 \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad (5)$$

где T – предел текучести, S^2 – интенсивность девиатора тензора напряжений.

Для определения плотности используется уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{u} = 0 \quad (6)$$

где \bar{u} – скорость перемещений.

Задача рассматривается в квазистатической постановке, процесс деформации считается достаточно медленным, поэтому ускорениями в уравнениях равновесия можно пренебречь. В задаче не учитывается температурное расширение материала.

2. ЗАДАЧА ГИП ДЛИННОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим процесс горячего изостатического прессования цилиндра, предполагая, что его высота существенно превышает радиус. Влиянием верхней и нижней крышек капсулы пренебрегаем.

Предположим, что ось Z направлена по оси цилиндра. Задача рассматривается в осесимметричной постановке в цилиндрической системе координат. Будем считать, что область $0 < r < R, 0 < z < H$ занята порошковым материалом, а область $R < r < R+h, 0 < z < H$ – капсулой.

Для описания механических свойств порошкового материала будем использовать условие текучести Грина [3,4]

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{S^2}{f_1^2} = Y^2 \tag{7}$$

где $\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z)$ – среднее напряжение; $S^2 = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})(\sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij})$ – интенсивность девиатора тензора напряжений; Y – предел текучести монолита; f_2 и f_1 – экспериментальные функции относительной плотности ρ .

Характерный вид этих функций представлен на рис.1.

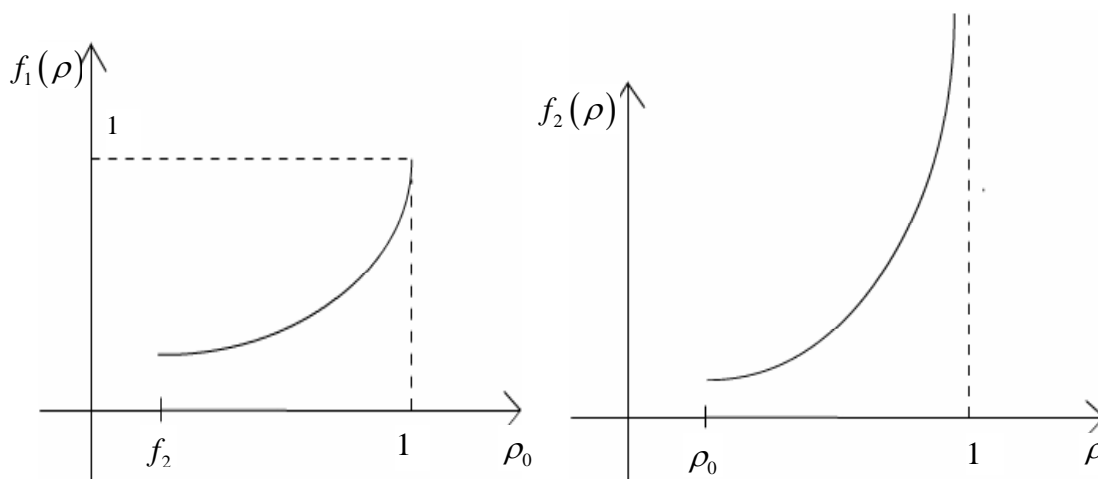


Рис.1. Характерный вид функций f_1 и f_2 .

Используя формулы (3) и (7), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \omega \left[\left(\frac{2}{9f_2^2} + \frac{2}{f_1^2} \right) \sigma_r + \left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_\varphi + \left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_z \right] \\ \varepsilon_\varphi &= \omega \left[\left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_r + \left(\frac{2}{9f_2^2} + \frac{2}{f_1^2} \right) \sigma_\varphi + \left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_z \right] \\ \varepsilon_z &= \omega \left[\left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_r + \left(\frac{2}{9f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) \sigma_\varphi + \left(\frac{2}{9f_2^2} + \frac{2}{f_1^2} \right) \sigma_z \right] \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \omega \left[\frac{3}{f_1^2} \sigma_{r\varphi} \right], \quad \varepsilon_{rz} = \omega \left[\frac{3}{f_1^2} \sigma_{rz} \right], \quad \varepsilon_{\varphi z} = \omega \left[\frac{3}{f_1^2} \sigma_{\varphi z} \right] \end{aligned} \tag{8}$$

Рассматривая (8) как систему уравнений относительно напряжений, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{18} \right) \varepsilon_r + \left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_\varphi + \left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_z \right] \\
\sigma_\varphi &= \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_r + \left(\frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{18} \right) \varepsilon_\varphi + \left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_z \right] \\
\sigma_z &= \frac{1}{\omega} \left[\left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_r + \left(\frac{9f_2^2 - 2f_1^2}{18} \right) \varepsilon_\varphi + \left(\frac{9f_2^2 + 4f_1^2}{18} \right) \varepsilon_z \right] \\
\sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{\omega} \left[\frac{f_1^2}{3} \varepsilon_{r\varphi} \right], \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{f_1^2}{3} \varepsilon_{rz} \right], \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{1}{\omega} \left[\frac{f_1^2}{3} \varepsilon_{\varphi z} \right]
\end{aligned} \tag{9}$$

Подставляя полученные выражения в условие текучести Грина (8), получаем

$$\frac{1}{\omega} = \frac{6Y}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{r\varphi}^2 + 2\varepsilon_{\varphi z}^2 + 2\varepsilon_{rz}^2)}} \tag{10}$$

Мощность внутренних сил в единице объема вычисляется согласно формуле

$$w = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \tag{11}$$

Согласно этому для порошкового материала получим

$$w = \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2 + \varepsilon_{\varphi z}^2 + \varepsilon_{rz}^2)} \tag{12}$$

Для капсулы, используя (3)-(4), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \omega [2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z] \\
\varepsilon_\varphi &= \omega [2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z] \\
\varepsilon_r &= \omega [2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r] \\
\varepsilon_{r\varphi} &= \omega [3\sigma_{r\varphi}], \quad \varepsilon_{rz} = \omega [3\sigma_{rz}], \quad \varepsilon_{\varphi z} = \omega [3\sigma_{\varphi z}]
\end{aligned} \tag{13}$$

Полагая $\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = -3p$, с учетом того, что $\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0$, получим

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -p + \frac{1}{3\omega} \varepsilon_r, \quad \sigma_\varphi = -p + \frac{1}{3\omega} \varepsilon_\varphi, \quad \sigma_z = -p + \frac{1}{3\omega} \varepsilon_z \\
\sigma_{r\varphi} &= \frac{1}{3\omega} \varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{rz} = \frac{1}{3\omega} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{1}{3\omega} \varepsilon_{\varphi z}
\end{aligned} \tag{14}$$

С учетом (4) можно записать

$$\frac{1}{\omega} = \frac{T\sqrt{6}}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{r\varphi}^2 + 2\varepsilon_{\varphi z}^2 + 2\varepsilon_{rz}^2)}} \tag{15}$$

Откуда мощность внутренних сил в единице объема капсулы

$$w = T \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2 + 2\varepsilon_{r\varphi}^2 + 2\varepsilon_{\varphi z}^2 + 2\varepsilon_{rz}^2)} \tag{16}$$

Обозначим через U_r радиальные и U_z осевые скорости.

Будем считать, что скорость деформации по оси симметрии Z постоянна по всему объему порошкового материала и капсулы, и равна

$$U_z = -\varepsilon z \tag{17}$$

В порошковом материале радиальные скорости задаются в виде

$$U_r = -Ar \tag{18}$$

В силу условия несжимаемости (5) в материале капсулы

$$\frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r} - \varepsilon = 0 \quad (19)$$

откуда

$$U_r = \frac{1}{2} \varepsilon r + \frac{C}{r} \quad (20)$$

Из условия непрерывности радиальной скорости при $r = R$ получим

$$C = -\frac{1}{2} \varepsilon R^2 - AR^2 \quad (21)$$

Таким образом, скорости равны

1) при $0 < r < R, 0 < z < H$ (порошок)

$$U_z = -\varepsilon z, U_r = -Ar \quad (22)$$

2) при $R < r < R+h, 0 < z < H$ (капсула)

$$U_z = -\varepsilon z, U_r = \frac{1}{2} \varepsilon r - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{R^2}{r} - A \frac{R^2}{r} \quad (23)$$

При этом скорости деформаций равны

1) при $0 < r < R, 0 < z < H$ (порошок)

$$\varepsilon_z = -\varepsilon, \varepsilon_r = -A, \varepsilon_\phi = -A \quad (24)$$

2) при $R < r < R+h, 0 < z < H$ (капсула)

$$\varepsilon_z = -\varepsilon, \varepsilon_r = \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon \frac{R^2}{r^2} + A \frac{R^2}{r^2}, \varepsilon_\phi = \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon \frac{R^2}{r^2} - A \frac{R^2}{r^2} \quad (25)$$

В этом случае, согласно (12), мощность внутренних сил в единице объема в порошковом материале w_p равна

$$w_p = \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} \quad (26)$$

Тогда полная мощность внутренних сил в порошковом материале равна

$$W_p = \pi R^2 H \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} \quad (27)$$

Мощность внутренних сил в единице объема в капсулы w_c , согласно (16) равна

$$w_c = T \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon^2 + 2 \left(A + \frac{1}{2} \varepsilon \right)^2} \frac{R^4}{r^4} \quad (28)$$

а полная мощность внутренних сил в капсуле

$$W_c = 2\pi HT \sqrt{\frac{2}{3}} \int_R^{R+h} \sqrt{\frac{3}{2} \varepsilon^2 + 2 \left(A + \frac{1}{2} \varepsilon \right)^2} \frac{R^4}{r^4} r dr \quad (29)$$

Вычисляя данный интеграл, и обозначая $R_1 = R + h$, получаем

$$W_c = \pi HR^2 T \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \sqrt{3\varepsilon^2 \frac{R_1^4}{R^4} + (2A + \varepsilon)^2} - \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2} + \right. \\ \left. + (2A + \varepsilon) \ln \left[\frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{(2A + \varepsilon) + \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2}}{(2A + \varepsilon) + \sqrt{3\varepsilon^2 \frac{R_1^4}{R^4} + (2A + \varepsilon)^2}} \right] \right\} \quad (30)$$

При $h \ll R$ (тонкая капсула) получим

$$W_c = 2\pi HRhT \sqrt{\frac{1}{3} \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2}} \quad (31)$$

Внешнее давление полагаем равным P . В этом случае мощность внешних на границах капсулы сил можно выразить следующим образом:

- 1) Поскольку $U_z = 0$ при $z = 0$ (нижняя граница), то $N_1 = 0$.
- 2) Поскольку $U_z = -\varepsilon H$ при $z = H$ (верхняя граница), то $N_2 = P\pi R_1^2 H \varepsilon$.
- 3) Поскольку $U_r = \frac{1}{2}\varepsilon R_1 - \frac{1}{2}\varepsilon \frac{R^2}{R_1} - A \frac{R^2}{R_1}$ при $r = R_1$ (боковая граница), то

$$\begin{aligned} N_3 &= -P2\pi R_1 H \left(\frac{1}{2}\varepsilon R_1 - \frac{1}{2}\varepsilon \frac{R^2}{R_1} - A \frac{R^2}{R_1} \right) = \\ &= -P2\pi H \left(\frac{1}{2}\varepsilon R_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon R^2 - AR^2 \right) \end{aligned}$$

Тогда полная мощность внешних сил $N = N_1 + N_2 + N_3$ может быть записана в виде

$$N = P\pi HR^2 (\varepsilon + 2A) \quad (32)$$

С учетом того, что $N = W_p + W_c$, после преобразования получим

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(\varepsilon + 2A)} \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} + \right. \\ &+ T \sqrt{\frac{1}{3}} \left[\sqrt{3\varepsilon^2 \frac{R_1^4}{R^4} + (2A + \varepsilon)^2} - \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2} + \right. \\ &\left. \left. + (2A + \varepsilon) \ln \frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{(2A + \varepsilon) + \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2}}{(2A + \varepsilon) + \sqrt{3\varepsilon^2 \frac{R_1^4}{R^4} + (2A + \varepsilon)^2}} \right] \right\} \quad (33) \end{aligned}$$

При $h \ll R$ (тонкая капсула) получим

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{(\varepsilon + 2A)} \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{h}{R} T \sqrt{\frac{1}{3} \sqrt{3\varepsilon^2 + (2A + \varepsilon)^2}} \right\} \quad (34) \end{aligned}$$

Значения ε и A определяются из условия минимума функции (33). Поскольку скорости определены с точностью до постоянного множителя, полагая $(\varepsilon + 2A) = 1$, получим

$$P(\varepsilon, A) = \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} + \right.$$

$$+T\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}-\sqrt{3\varepsilon^2+1}+\ln\frac{R_1^2}{R^2}\cdot\frac{1+\sqrt{3\varepsilon^2+1}}{1+\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}}\right] \quad (35)$$

которая при $h \ll R$ (тонкая капсула) имеет вид

$$P(\varepsilon, A) = \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)} + 2\frac{h}{R}T\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{3\varepsilon^2+1} \right\} \quad (36)$$

С учетом того, что $A = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$, получаем

$$P(\varepsilon) = \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)} + T\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}-\sqrt{3\varepsilon^2+1}+\ln\frac{R_1^2}{R^2}\cdot\frac{1+\sqrt{3\varepsilon^2+1}}{1+\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}}\right] \right\} \quad (37)$$

Тогда

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = Y \cdot \frac{f_1^2(3\varepsilon - 1)}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)}} + T\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\frac{3\varepsilon\frac{R_1^4}{R^4}}{1+\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}} - \frac{3\varepsilon}{1+\sqrt{3\varepsilon^2+1}}\right] \quad (38)$$

а при $h \ll R$ функция $P(\varepsilon)$ имеет вид

$$P(\varepsilon) = \left\{ \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)} + 2\frac{h}{R}T\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{3\varepsilon^2+1} \right\} \quad (39)$$

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = Y \cdot \frac{f_1^2(3\varepsilon - 1)}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)}} + 2\frac{h}{R}T\frac{\sqrt{3\varepsilon}}{\sqrt{3\varepsilon^2+1}} \quad (40)$$

Из условия $\frac{dP}{d\varepsilon} = 0$ получаем уравнение для определения ε , которое имеет вид

$$Y \cdot \frac{f_1^2(3\varepsilon - 1)}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)}} + T\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\frac{3\varepsilon\frac{R_1^4}{R^4}}{1+\sqrt{3\varepsilon^2\frac{R_1^4}{R^4}+1}} - \frac{3\varepsilon}{1+\sqrt{3\varepsilon^2+1}}\right] = 0 \quad (41)$$

а при $h \ll R$ получим

$$Y \cdot \frac{f_1^2(3\varepsilon - 1)}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2) + 3f_1^2((1 - \varepsilon)^2 + 2\varepsilon^2)}} + 2\frac{h}{R}T\frac{\sqrt{3\varepsilon}}{\sqrt{3\varepsilon^2+1}} = 0 \quad (42)$$

Заметим, что $\varepsilon \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$:

- 1) при $f_1 \rightarrow 0$ значение $\varepsilon \rightarrow 0$ – плоская деформация.
- 2) при $f_2 \rightarrow \infty$ значение $\varepsilon \rightarrow 0$ – плоская деформация.
- 3) при $h \rightarrow 0$ значение $\varepsilon \rightarrow \frac{1}{3}$ – равномерное всестороннее сжатие.

Это отчасти объясняет причину трудности предсказания характера процесса на начальном этапе. С одной стороны капсула тонкая, с другой стороны при начальных плотностях f_1 мало. Поскольку ε достаточно мало, то получаем приближенное уравнение для определения ε

$$\varepsilon = \frac{Y}{\left\{ Y \cdot \frac{3f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} + \frac{1}{2} T \sqrt{3} \left[\frac{R_1^4}{R^4} - 1 \right] \right\}} \cdot \frac{f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} \quad (43)$$

При $h \ll R$ это уравнение принимает вид

$$\varepsilon = \frac{Y}{\left\{ Y \cdot \frac{3f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} + 2\sqrt{3} \frac{h}{R} T \right\}} \cdot \frac{f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} \quad (44)$$

Поскольку $\frac{d\rho}{dt} = -\rho(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)$, то с учетом (24) и нашего предположения $(\varepsilon + 2A) = 1$, получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \quad (45)$$

Так как $\frac{dH}{dt} = -\varepsilon H$, для определения H имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{Y}{\left\{ Y \cdot \frac{3f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} + 2\sqrt{3} \frac{h}{R} T \right\}} \cdot \frac{f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} H$$

которое можно записать в виде

$$\frac{dH}{d\rho} = - \frac{Y}{\left\{ Y \cdot \frac{3f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} + 2\sqrt{3} \frac{h}{R} T \right\}} \cdot \frac{f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} \frac{H}{\rho} \quad (46)$$

Обозначая H_0 значение H и R_0 значение R при $\rho = \rho_0$, получим

$$H(\rho) = H_0 \exp \left\{ - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{Y}{\left\{ Y \cdot \frac{3f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} + 2\sqrt{3} \frac{h}{R} T \right\}} \cdot \frac{f_1^2}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)}} \frac{d\rho}{\rho} \right\} \quad (47)$$

Значение $R(\rho)$ определяется соотношением

$$R^2(\rho) = R_0^2 \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{H_0}{H}$$

Заметим, что конечная геометрия существенно зависит от отношения предела текучести порошкового материала и предела текучести капсулы. В реальных процессах предел текучести капсулы существенно зависит от скорости деформации. Исследуем на конкретном примере влияние этого фактора.

Пусть предел текучести капсулы зависит от скорости деформации и имеет вид

$$T = B(e_u)^\alpha \quad (48)$$

Здесь, согласно (25), можно записать

$$e_u = \frac{3}{2} \sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon A + A^2}$$

Для порошкового материала, согласно (24) можно записать

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + f_1^2)A + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} \\ \sigma_z &= -\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 - 2f_1^2)A + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} \end{aligned} \quad (49)$$

а для капсулы, согласно (25) получим

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p + T \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}} \varepsilon_r \\ \sigma_\varphi &= -p + T \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}} \varepsilon_\varphi \\ \sigma_z &= -p + T \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}} \varepsilon_z \end{aligned} \quad (50)$$

Полагая $h \ll R$, можно считать

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= -\varepsilon, \quad \varepsilon_r = \varepsilon + A, \quad \varepsilon_\varphi = -A \\ \sigma_r - \sigma_\varphi &= T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} (\varepsilon + 2A) \\ \sigma_r - \sigma_z &= T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} (2\varepsilon + A) \end{aligned} \quad (51)$$

Так как, в силу уравнения равновесия, $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}$, то при $r > R$ (капсула) получим

$$\sigma_r = -\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + f_1^2)A + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} -$$

$$-T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(\varepsilon + 2A)}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} \ln \frac{r}{R} \quad (52)$$

Поскольку на внешней границе при $r = R + h$ имеем $\sigma_r = -P$, то

$$\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + f_1^2)A + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} +$$

$$+T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(\varepsilon + 2A)}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} \frac{h}{R} = P \quad (53)$$

С учетом (51), (52) можно записать

$$\sigma_z = -\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + 4f_1^2)A + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} -$$

$$-T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(\varepsilon + 2A)}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} \ln \frac{r}{R} - T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} (2\varepsilon + A)$$

А, так как $2\pi \int_0^{R+h} \sigma_z r dr = -P\pi(R+h)^2$, то, пренебрегая слагаемыми порядка выше

чем $\frac{h}{R}$, получаем

$$P \left(1 + 2\frac{h}{R}\right) = \frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 - 2f_1^2)A + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} +$$

$$+ \frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + f_1^2)A + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} 2\frac{h}{R} +$$

$$+T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(2\varepsilon + A)}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} 2\frac{h}{R} \quad (54)$$

Преобразуя систему уравнений (53), (54) имеем

$$\frac{Y}{3} \frac{6f_1^2[A - \varepsilon]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon)^2 + 6f_1^2(2A^2 + \varepsilon^2)}} - T \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{3\varepsilon}{\sqrt{(A^2 + A\varepsilon + \varepsilon^2)}} \frac{h}{R} = 0 \quad (55)$$

Пусть

$$P = P_0 t$$

$$T = B \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^\alpha (\varepsilon^2 + \varepsilon A + A^2)^{\frac{\alpha}{2}} = B \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^\alpha A^\alpha (x^2 + x + 1)^{\frac{\alpha}{2}}$$

где $x = \frac{\varepsilon}{A} \leq 1$.

Тогда, согласно (55), получим

$$\frac{Y}{3} \frac{6f_1^2 [1-x]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2+x)^2 + 6f_1^2(2+x^2)}} -$$

$$-B \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^\alpha A^\alpha (x^2 + x + 1)^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{3x}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \frac{h}{R} = 0 \quad (56)$$

А согласно (53) будем иметь

$$\frac{Y}{3} \frac{[2(9f_2^2 + f_1^2) + (9f_2^2 - 2f_1^2)x]}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(2+x)^2 + 6f_1^2(2+x^2)}} +$$

$$+B \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \right)^\alpha A^\alpha (x^2 + x + 1)^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(x+2)}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \frac{h}{R} = P_0 t \quad (57)$$

Уравнения (56), (57) определяют x и A как функции t .

Приняв безразмерное обозначение времени τ согласно формуле $t = \frac{Y}{P_0} \tau$

и безразмерное обозначение \bar{A} по формуле $A = \frac{P_0}{Y} \bar{A}$ (в дальнейшем черту опускаем), система (56), (57) примет вид

$$\frac{2f_1^2 [1-x]}{\sqrt{9f_2^2 (2+x)^2 + 2f_1^2 (1-x)^2}} -$$

$$-\gamma A^\alpha (x^2 + x + 1)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \frac{h}{R} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{1}{3} \frac{[9f_2^2 (2+x) + 2f_1^2 (1-x)]}{\sqrt{9f_2^2 (2+x)^2 + 2f_1^2 (1-x)^2}} +$$

$$+\gamma A^\alpha (x^2 + x + 1)^{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{(x+2)}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \frac{h}{R} = \tau \quad (59)$$

где $\gamma = \frac{B}{Y} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{P_0}{Y} \right)^\alpha$ характеризует скорость нагружения и α определяет характер зависимости предела текучести от скорости деформаций.

Для определения плотности имеем уравнение $\frac{d\rho}{d\tau} = \rho A(2+x)$, которое вместе с системой уравнений (58), (59) и соответствующими начальными условиями определяет решение задачи – функции $A(\tau)$, $\rho(\tau)$, $x(\tau)$. Получим

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \left[\frac{2f_1^2}{\gamma\sqrt{3}} \cdot \frac{R}{h} \cdot \frac{1-x}{x} \frac{1}{\sqrt{9f_2^2(2+x)^2 + 2f_1^2(1-x)^2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (60)$$

$$\frac{1}{3} \frac{[9f_2^2(2+x) + 2f_1^2(1-x)]}{\sqrt{9f_2^2(2+x)^2 + 2f_1^2(1-x)^2}} + \left[\frac{2f_1^2(1-x)(x+2)}{3\gamma x \sqrt{(1+x+x^2)}} \frac{1}{\sqrt{9f_2^2(2+x)^2 + 2f_1^2(1-x)^2}} \right] = \tau \quad (61)$$

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \rho A(2+x) \quad (62)$$

Изменение радиуса определяется соотношением $\frac{dR}{d\tau} = -AR$, тогда

$$R = R_0 \exp\left(-\int_0^\tau A(\tau) d\tau\right) \quad (63)$$

где R_0 – начальный радиус.

Из закона сохранения массы порошка $\pi\rho_0 R_0^2 H_0 = \pi\rho R^2 H$, тогда

$$H = H_0 \frac{\rho_0 R_0^2}{\rho R^2}$$

где H_0 – начальная высота.

С учетом (63) можно записать

$$H = H_0 \frac{\rho_0}{\rho} \exp\left(2\int_0^\tau A(\tau) d\tau\right) \quad (64)$$

Из закона сохранения объема капсулы $2\pi R_0 h_0 H_0 = 2\pi R h H$, тогда

$$h = h_0 \frac{R_0 H_0}{R H}$$

где h_0 – начальная толщина стенок капсулы.

Используя (63), (64), получим

$$h = h_0 \frac{\rho}{\rho_0} \exp\left(-\int_0^\tau A(\tau) d\tau\right) \quad (65)$$

Согласно (60), (62)-(65), получаем

$$A = \frac{1}{\sqrt{(1+x+x^2)}} \left[\frac{2f_1^2}{\gamma\sqrt{3}} \cdot \frac{R_0}{h_0} \cdot \frac{\rho_0}{\rho} \cdot \frac{1-x}{x} \frac{1}{\sqrt{9f_2^2(2+x)^2 + 2f_1^2(1-x)^2}} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (66)$$

Система (61)-(66) с соответствующими начальными условиями определяет решение задачи.

Для качественного анализа функции $f_1(\rho)$ и $f_2(\rho)$ представим в виде

$$f_1^2(\rho) = \frac{3}{2 + \rho^2} \cdot \left(\frac{\rho - \rho_p}{1 - \rho_p} \right)^m; \quad f_2^2(\rho) = \frac{1}{3(1 - \rho^2)} \cdot \left(\frac{\rho - \rho_p}{1 - \rho_p} \right)^m$$

Ниже приведена таблица усадок – отношений начальных размеров к конечным в зависимости от параметров: R_f конечное значение радиуса (при плотности равной единице), H_f конечное значение высоты (при плотности равной единице), $e_r = \frac{R_0}{R_f}$, $e_z = \frac{H_0}{H_f}$. Расчеты проведены при $m = 2$, $h_0 / R_0 = 0.025$.

Таблица 1.

Отношений начальных размеров к конечным.

| № | γ | α | e_r | e_z | $\frac{e_z}{e_f}$ |
|----|----------|----------|-------|-------|-------------------|
| 1 | 10 | 0.1 | 1.199 | 1.043 | 0.870 |
| 2 | | 0.2 | 1.192 | 1.055 | 0.885 |
| 3 | | 0.3 | 1.189 | 1.061 | 0.892 |
| 4 | 5 | 0.1 | 1.184 | 1.071 | 0.904 |
| 5 | | 0.2 | 1.180 | 1.078 | 0.914 |
| 6 | | 0.3 | 1.176 | 1.084 | 0.922 |
| 7 | 2 | 0.1 | 1.167 | 1.102 | 0.945 |
| 8 | | 0.2 | 1.164 | 1.107 | 0.951 |
| 9 | | 0.3 | 1.161 | 1.112 | 0.957 |
| 10 | 1 | 0.1 | 1.157 | 1.120 | 0.967 |
| 11 | | 0.2 | 1.156 | 1.123 | 0.972 |
| 12 | | 0.3 | 1.154 | 1.127 | 0.976 |
| 13 | 15 | 0.1 | 1.214 | 1.017 | 0.838 |
| 14 | | 0.2 | 1.201 | 1.041 | 0.866 |
| 15 | | 0.3 | 1.196 | 1.048 | 0.876 |
| 16 | 20 | 0.1 | 1.211 | 1.023 | 0.845 |
| 17 | | 0.2 | 1.203 | 1.037 | 0.863 |
| 18 | | 0.3 | 1.200 | 1.042 | 0.868 |
| 19 | 25 | 0.1 | 1.220 | 1.008 | 0.827 |
| 20 | | 0.2 | 1.206 | 1.032 | 0.856 |
| 21 | | 0.3 | 1.203 | 1.036 | 0.862 |

ВЫВОДЫ

В рамках исследования процесса ГИП длинной цилиндрической заготовки получены аналитические соотношения, позволяющие оценить качественную картину процессов, проходящих на различных этапах деформации цилиндра. Исследовано влияние вязких свойств капсулы на конечную геометрию изделия. Произведен расчет отношений начальных размеров цилиндра к конечным в зависимости от параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анохина А.В., Головешкин В.А., Самаров В.Н., Селиверстов Д.Г., Raison G. *Математическая модель расчета процесса горячего изостатического прессования деталей сложной формы при наличии периодической структуры закладных элементов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №2. – С.245-254.
2. Бочков А.В., Головешкин В.А., Козырев Ю.М., Пономарев А.В., Самаров В.Н. *Особенности процесса уплотнения порошковых материалов в неоднородном нестационарном температурном поле* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №3. – С.401-410.
3. Друянов Б.А. *Прикладная теория пластичности пористых тел.* – М.: Машиностроение, 1989. – 164 с.
4. Грин Р. Дж. *Теория пластичности пористых тел* // Механика. – 1973. – № 4. – С.109-120.

REFERENCES

1. Anokhina A.V., Goloveshkin V.A., Samarov V.N., Seliverstov D.G., Raison G. *Matematicheskaya model' rascheta protsesssa goryachego izostaticheskogo pressovaniya detalej slozhnoj formy pri nalichii periodicheskoy struktury zakladnykh ehlementov [Mathematical model for calculating the process of hot isostatic pressing of details of complex shape in the presence of a periodic structure of embedded elements. Mechanics of composite materials and structures]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. 2002, Vol.8, No.2, Pp.245-254.*
2. Bochkov A.V., Goloveshkin V.A., Kozyrev Yu.M., Ponomarev A.V., Samarov V.N. *Osobennosti protsesssa uplotneniya poroshkovykh materialov v neodnorodnom nestatsionarnom temperaturnom pole [Features of the process of compaction of powder materials in an inhomogeneous nonstationary temperature field]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii. 2011, Vol.17, No.3, Pp.401-410.*
3. Druyanov B.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti poristykh tel [Applied theory of plasticity of porous bodies]. Moskva, Mashinostroenie, 1989, 164 p.*
4. Grin R.Dzh. *Teoriya plastichnosti poristykh tel [Theory of plasticity of porous bodies]. Mekhanika. 1973, No.4, Pp.109-120.*

Поступила в редакцию 22 марта 2018 года.

Сведения об авторах:

Бочков Андрей Валерьевич – асп., "МИРЭА - Российский технологический университет", г. Москва, Россия; e-mail: andrey.bochkov@gmail.com

Козырев Юрий Михайлович – асп., "МИРЭА - Российский технологический университет", г. Москва, Россия; e-mail: gmile88@mail.ru

Пономарев Антон Васильевич – к.ф.-м.н., доц., доцент Кафедры высшей математики, "МИРЭА - Российский технологический университет", г. Москва, Россия; e-mail: aypon@yandex.ru

Gerard Raison – Dr., Consultant, Cournon D’Auvergne, France