

УДК 539.376

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЕЙ С ТОНКИМИ АРМИРОВАННЫМИ НЕСУЩИМИ СЛОЯМИ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А.Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

На основе метода шагов по времени сформулирована задача о неустановившейся ползучести изгибаемых сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями. Ослабленное сопротивление заполнителя поперечным сдвигам учитывается в рамках теории Рейсснера. Механическое поведение материалов компонентов композиции слоев моделируется соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Работнова. Показано, что в дискретные моменты времени механическое состояние таких конструкций формально описывается определяющими уравнениями для композитных слоистых пластин из нелинейно-упругих анизотропных материалов с известным начальным напряженным состоянием. Линеаризация поставленной задачи на каждом шаге по времени осуществляется методом последовательных приближений. В случае цилиндрического изгиба исследована неустановившаяся ползучесть прямоугольных удлиненных композитных сэндвич-панелей со слабым сотовым заполнителем. Проведен анализ зависимости податливости таких пластин от параметров армирования несущих слоев при кратковременном и длительном нагружениях. Показано, что использование классической теории изгиба слоистых пластин приводит к предсказанию неоправданно заниженной податливости композитных сэндвич-панелей, особенно в условиях длительного их нагружения. Обнаружено, что при учете ослабленного сопротивления заполнителя поперечным сдвигам могут реализоваться два разных механизма изгибного деформирования трехслойных пластин: «классический», когда превалирует изгибное деформированное состояние, и «неклассический», когда основное влияние на прогиб оказывает поперечный сдвиг заполнителя. В последнем случае в окрестности опорных кромок пластины могут возникнуть краевые эффекты, характеризующие «срез» сэндвич-панели в поперечном направлении.

Ключевые слова: трехслойная пластина; армирование слоев; неупругое деформирование; неустановившаяся ползучесть; ослабленное сопротивление поперечному сдвигу; влияние структуры армирования; сотовый заполнитель

MODELING OF UNSTEADY CREEP OF SANDWICH PANELS WITH THIN REINFORCED BEARING LAYERS OF NONLINEAR HEREDITARY MATERIALS

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

ABSTRACT

On the basis of the method steps in time the problem of unsteady creep are formulated for the bending sandwich panels with thin reinforced bearing layers. The weakened resistance of the filler to transverse shears is taken into account in the framework of the Reissner theory. The mechanical behavior of the component materials of the composition of the layers is modeled by the ratio of the nonlinear hereditary Rabotnov theory of creep. It is shown that in discrete moments of time the mechanical condition of such structures are formally described by the defining equations for composite laminated plates of nonlinear-elastic anisotropic materials with known initial states of stress. The linearization of the formulated problem at each time step is carried out by the method of successive approximations. In the case of cylindrical bending the unsteady creep of elongated rectangular composite sandwich panel with weak honeycomb core are investigated. At short-term and long-term loadings of such plates, the analysis is held for the dependence of flexibility on the parameters of the reinforcement bearing layers. It is shown that using the classical theory of bending of layered plates leads to the prediction of an unjustifiably low flexibility of composite sandwich panels, especially under conditions of long-term loading. It was obtained that when the account of weakened resistance of the filler to the transverse shifts, the two different mechanisms of flexural deformation of three-layer plates can be realized: "classic", when the flexural strain state prevails, and "non-classical", when the transverse shear of the filler has a main influence on the deflection. In the latter case, in the vicinity of the supported edges of plate the edge effects, describing a shift of the sandwich panels in the cross direction may arise.

Keywords: three-layered plate; sandwich plate; reinforcement of layers; inelastic deformation; unsteady creep; weakened resistance to the transverse shear; influence of structure of reinforcement; honeycomb core

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при изгибе тонкостенных конструкций рациональной является трехслойная структура с внешними несущими слоями и внутренним наполнителем [1,2], поэтому в последние десятилетия изучению проблемы деформирования сэндвич-панелей посвящено большое число работ [2-8], в подавляющем большинстве из которых рассматривается лишь линейно-упругое поведение трехслойных конструкций, в том числе и из композиционных материалов (КМ). Публикации, в которых исследуется неупругое поведение сэндвич-панелей, касаются в основном конструкций, выполненных из однородных и изотропных материалов [4-6]. Изучение же проблемы неупругого изгиба трехслойных пластин, изготовленных из армированных слоев, находится в состоянии становления. Так, в работе [8] в рамках теории пластичности деформационного типа [9] исследовалось упругопластическое изгибное поведение сэндвич-панелей с армированными несущими слоями. В [8] было показано, что в силу большой жесткости несущих КМ-слоев в случае слабого наполнителя сэндвич-конструкция при неупругом кратковременном ее изгибе может вести себя совсем не так, как это принято считать, исходя из анализа решений соответствующих линейно-упругих задач.

Так как все материалы проявляют реономные свойства [9-11], то актуальной является проблема математического моделирования изгибного деформирования сэндвич-панелей из КМ в условиях ползучести. На сегодняшний день отсутствуют структурные модели металлокомпозитных армированных сред, построенные на технических теориях ползучести [9,11]. Однако в [12,13] было показано, как можно моделировать реономное поведение армированных

волокнами или ребристыми элементами сред, механическое поведение компонентов композиции которых описывается нелинейно-наследственной теорией ползучести Работнова [10,11]. Эта теория удовлетворительно описывает ползучесть как полимеров, так и некоторых металлов [10,11,14,15], что позволяет с единых позиций моделировать реономное поведение трехслойных КМ-конструкций, содержащих полимерные и металлические компоненты [4].

В связи с вышеизложенным настоящая работа посвящена моделированию ползучести изгибаемых сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями, механическое поведение компонентов композиции слоев которых описывается соотношениями нелинейно-наследственной теории Работнова.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехслойную пластину, состоящую из заполнителя и двух несущих слоев. Пронумеруем слои снизу вверх. Толщина заполнителя $h^{(2)} = 2h$, а несущих слоев $h^{(1)}$ и $h^{(3)}$. (Здесь и далее индекс в скобках означает номер слоя.) Несущие слои предполагаются тонкими ($\max(h^{(1)}, h^{(3)}) \ll h$). Свяжем с сэндвич-панелью декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox_3 была направлена в поперечном направлении, а отсчетная плоскость Ox_1x_2 ($x_3 = 0$) совпадала со срединной плоскостью заполнителя (рис.1).

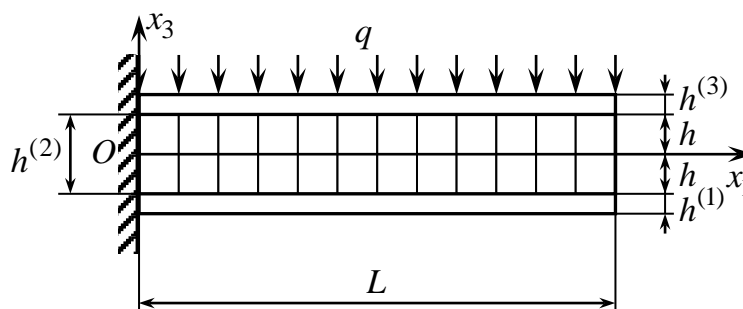


Рис.1. Консольная прямоугольная удлиненная сэндвич-панель (вид сбоку).

Заполнитель может представлять собой ребристую конструкцию периодической структуры, например, сотовой (рис.2), или более сложной структуры [13], причем пустоты в ячейках заполнителя могут быть заполнены пенопластмассой [4]. Силовой набор заполнителя – цилиндрические оболочечные элементы толщиной δ_i (здесь i – номер силового элемента ячейки периодичности; на рис.2 изображен случай $i = 1, 2$), образующие которых параллельны оси Ox_3 . С репрезентативной ячейкой заполнителя, имеющей размеры $a \times b \times 2h$, свяжем локальную декартову прямоугольную систему координат $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ так, чтобы оси Ox_3 и $\bar{O}\bar{x}_3$ совпадали по направлению. Ячейка периодичности заполнителя может быть повернута относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$ на некоторый угол вокруг оси $Ox_3 = \bar{O}\bar{x}_3$.

Несущие слои перекрестно армированы в своей плоскости $K^{(1)}$ и $K^{(3)}$ семействами волокон. Структура армирования m -го несущего слоя

квазиоднородна по толщине и характеризуется плотностями $\omega_k^{(m)}$ и углами $\psi_k^{(m)}$ (отсчитываемыми от направления Ox_1) армирования ($1 \leq k \leq K^{(m)}, m = 1, 3$).

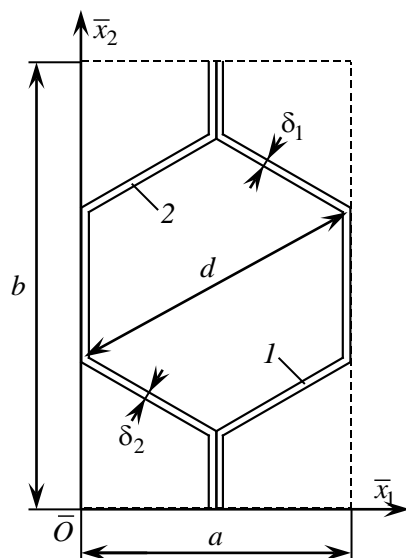


Рис.2. Ячейка периодичности сотового заполнителя.

Задача рассматривается в геометрически линейной постановке (прогибы и деформации малы). Учет деформаций поперечного сдвига заполнителя производится на основе кинематической гипотезы теории Рейсснера [2,16,17], поэтому тангенциальные перемещения его точек аппроксимируются так

$$u_i^{(2)}(\mathbf{r}, t) = (u_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) - u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t))x_3 / h^{(2)} + (u_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t)) / 2, \quad (1)$$

$$|x_3| \leq h, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

где $u_i^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ – перемещение точек m -го тонкого несущего слоя ($m = 1, 3$) в направлении x_i ($i = 1, 2$); G – область, занимаемая пластиной в плане; t – время.

Материалы компонентов композиции слоев сэндвич-панели однородны и изотропны, а их механическое поведение описывается определяющими соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Работнова (см. равенства (3), (4) в [12] и (1)-(3) в [13]), которые, в частности, позволяют учитывать разностойкость материалов, наиболее ярко проявляющуюся именно при ползучести [10,11,18].

Для решения рассматриваемой задачи используем метод шагов по времени [18]. Предполагаем, что в дискретные моменты времени t_l ($l = 0, 1, 2, \dots, n$) решение уже известно, т.е. в каждой точке трехслойной пластины на макроуровне известны напряжения и деформации в компонентах композиции. Как показано в [12,13], при этих условиях можно построить определяющие уравнения для КМ-среды m -го слоя сэндвич-панели в текущий момент времени $t_{n+1} = t_n + \Delta_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где Δ_{n+1} – шаг по времени. При этом дополнительно предполагаем, что нелинейно-наследственные соотношения Работнова можно линеаризовать при $t = t_{n+1}$, используя метод последовательных приближений, достаточные условия сходимости которого приведены на стр.199 в [18] и который качественно аналогичен методу переменных параметров упругости [9]. Повторяя рассуждения

из [12,13], получим линеаризованные определяющие уравнения для каждого компонента композиции m -го слоя, которые на каждой итерации в момент времени t_{n+1} формально совпадают с соотношениями для линейно-упругой среды с заданным начальным напряженным состоянием. Согласно [12,13] на основе этих соотношений при $t = t_{n+1}$ на текущей итерации метода последовательных приближений получим линейные определяющие соотношения для композиции каждого слоя сэндвич-панели, которые в тензорной форме запишутся так (здесь и далее все рассуждения относятся к текущему моменту времени t_{n+1} , поэтому для сокращения записи он не указывается)

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) &= c_{ijkl}^{(2)}(\mathbf{r})\varepsilon_{kl}^{(2)}(\mathbf{r}) + p_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}), & \sigma_{i3}^{(2)}(\mathbf{r}) &= 2c_{i3k3}^{(2)}(\mathbf{r})\varepsilon_{k3}^{(2)}(\mathbf{r}) + p_{i3}^{(2)}(\mathbf{r}), \\ \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}) &= c_{ijkl}^{(m)}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}^{(m)}(\mathbf{x}) + p_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}), & |x_3| &\leq h, \mathbf{x} \in G, i, j = 1, 2, m = 1, 3,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\sigma_{ij}^{(m)}$ – осредненные напряжения в композиции m -го слоя; $c_{ijkl}^{(m)}$, $c_{i3k3}^{(2)}$ – эффективные жесткости композиции m -го слоя ($m = \overline{1, 3}$) на текущей итерации, которые при $m = 2$ определяются механическими характеристиками компонентов композиции ячейки периодичности заполнителя, ее размерами и геометрией армирующих элементов и вычисляются по структурным формулам [13], при $m = 1$ и $m = 3$ эти величины определяются механическими характеристиками компонентов композиции несущих слоев и параметрами их армирования $\omega_k^{(m)}$, $\psi_k^{(m)}$ ($1 \leq k \leq K^{(m)}$, $m = 1, 3$) и вычисляются по структурным формулам [12]; $p_{ij}^{(m)}$ – компоненты «начальных напряжений» в композиции m -го слоя сэндвич-панели ($m = \overline{1, 3}$), которые определяются по структурным формулам [12,13] и зависят от механических свойств компонентов композиции, структуры армирования и предыстории нагружения элемента композиции m -го слоя.

Соотношения (2) записаны при учете традиционной для тонкостенных конструкций силовой гипотезы $\sigma_{33}^{(m)} \approx 0$, с помощью которой из рассмотрения исключены деформации $\varepsilon_{33}^{(m)}$, $m = \overline{1, 3}$ [2]. В равенствах (2) и далее по повторяющимся нижним индексам производится суммирование от 1 до 2. Два первых равенства в (2) записаны в предположении, что материал заполнителя является ортотропным, так как это наиболее часто встречающийся на практике случай. Эффективные жесткости $c_{ijkl}^{(m)}$, $c_{i3k3}^{(2)}$ и «начальные напряжения» в композиции m -го слоя $p_{ij}^{(m)}$ ($m = \overline{1, 3}$) в (2) предполагаются известными в момент времени t_{n+1} из решения рассматриваемой задачи на предыдущей итерации.

Уравнения равновесия сэндвич-панели имеют вид [16,18] (задача исследуется в квазистатической постановке)

$$F_{ij,j} = -X_i(\mathbf{x}), \quad M_{lj,j} - F_{l3} = -m_l(\mathbf{x}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad l = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad (3)$$

где F_{ij} , F_{l3} – мембранные и перерезывающие силы; M_{lj} – изгибающие и крутящие моменты; X_i – приведенная распределенная внешняя нагрузка, действующая в направлении x_i ($i = \overline{1, 3}$), порожденная объемной и поверхностными нагрузками, приложенными к лицевым поверхностям

пластины (на рис.1 изображен случай $X_1 = X_2 = 0$ и $X_3 = -q = \text{const}$); m_i – приведенные распределенные внешние моменты, порожденные теми же нагрузками; индекс после запятой означает частное дифференцирование по координате x_j ($j = 1, 2$).

Используя дифференциальные соотношения Коши и традиционную для тонкостенных конструкций гипотезу $u_3(\mathbf{r}) = w(\mathbf{x})$ [2,16], где w – прогиб, на основании (1) получаем выражения для осредненных деформаций в слоях сэндвич-панели (см. (2) в [8]), подстановка которых в (2) позволяет традиционным путем выразить все силовые факторы, действующие в пластине, через кинематические переменные w , $u_i^{(m)}$, $i = 1, 2$, $m = 1, 3$ [2]. Подстановка выраженных таким образом силовых факторов F_{ij} , F_{i3} и M_{ij} в соотношения (3) приводит к следующей системе разрешающих уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} & \left(A_{ijkl}^{(3)} u_{l,k}^{(3)} + A_{ijkl}^{(1)} u_{l,k}^{(1)} \right)_{,j} = -X_i(\mathbf{x}) - F_{ij,j}^0(\mathbf{x}), \quad \left(B_{ijkl}^{(3)} u_{l,k}^{(3)} + B_{ijkl}^{(1)} u_{l,k}^{(1)} \right)_{,j} - \\ & - D_{i3k3} \left[w_{,k} + (u_k^{(3)} - u_k^{(1)}) / h^{(2)} \right] = -m_i(\mathbf{x}) - M_{ij,j}^0(\mathbf{x}) + F_{i3}^0(\mathbf{x}), \\ & \left\{ D_{j3k3} \left[w_{,k} + (u_k^{(3)} - u_k^{(1)}) / h^{(2)} \right] \right\}_{,j} = -X_3(\mathbf{x}) - F_{j3,j}^0(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (4)$$

где (см. (2))

$$\begin{aligned} F_{ij}^0(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h p_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) dx_3 + \sum_{m=1,3} h^{(m)} p_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad F_{i3}^0(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h p_{i3}^{(2)}(\mathbf{r}) dx_3, \\ M_{ij}^0(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h p_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) x_3 dx_3 + h \sum_{m=1,3} z(m) h^{(m)} p_{ij}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad z(m) = \begin{cases} -1 & \text{при } m = 1, \\ +1 & \text{при } m = 3; \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

коэффициенты $A_{ijkl}^{(m)}$, $B_{ijkl}^{(m)}$, D_{i3k3} определены равенствами (5) в [8]. Согласно (5) F_{ij}^0 , F_{i3}^0 , M_{ij}^0 – известные на текущей итерации при $t = t_{n+1}$ функции переменных x_1 и x_2 , которые можно трактовать как «начальные силовые факторы», действующие в сэндвич-панели. Выражения (5) получены при учете предположения о тонкости несущих слоев.

Для однозначного интегрирования системы (4) на одной части кромки пластины (обозначим ее Γ_p) должны быть заданы общеизвестные статические (см. (8) в [8]), а на другой части (обозначим ее Γ_u) кинематические (см. (1))

$$u_i^{(m)} = u_{i0}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad w = w_0(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad m = 1, 3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (6)$$

граничные условия. Здесь $u_{i0}^{(m)}$ – заданные на контуре Γ_u перемещения точек несущих слоев в тангенциальных направлениях x_i ($i = 1, 2$, $m = 1, 3$); w_0 – заданный на Γ_u прогиб.

Подстановка силовых факторов, выраженных через кинематические переменные, в статические граничные условия приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
& (A_{ijkl}^{(3)}u_{l,k}^{(3)} + A_{ijkl}^{(1)}u_{l,k}^{(1)})n_j = P_i(\mathbf{x}) - n_j F_{ij}^0(\mathbf{x}), \quad (B_{ijkl}^{(3)}u_{l,k}^{(3)} + B_{ijkl}^{(1)}u_{l,k}^{(1)})n_j = \\
& = M_i(\mathbf{x}) - n_j M_{ij}^0(\mathbf{x}), \quad n_j D_{j3k3} [w_{,k} + (u_k^{(3)} - u_k^{(1)})/h^{(2)}] = P_3(\mathbf{x}) - n_j F_{i3}^0(\mathbf{x}), \\
& i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_p, \quad n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma,
\end{aligned}
\tag{7}$$

где P_i , P_3 – заданные на контуре Γ_p мембранные и поперечная силы; M_i – заданные на Γ_p моменты; γ – угол внешней нормали к контуру Γ_p . В равенствах (4) и (7) в правые части перенесены известные «начальные силовые факторы».

Таким образом, в каждый момент времени t_{n+1} на текущей итерации метода последовательных приближений необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений десятого порядка (4), поэтому для однозначного решения соответствующей граничной задачи в каждой точке контура $\Gamma = \Gamma_p \cup \Gamma_u$ должны быть заданы пять граничных условий (6) или (7), или пять смешанных из (6) и (7) условий, например в случае шарнирного опирания кромки [2]. Так как система уравнений (4) и соответствующие ей граничные условия (6) и (7) на каждой итерации формально совпадают с уравнениями и граничными условиями изгиба термоупругих неоднородных пластин, получаемых в рамках теории Рейсснера [16], то для интегрирования поставленной граничной задачи в момент времени t_{n+1} на данной итерации можно использовать численные методы, разработанные на основе уравнений этой теории (в частности, МКЭ [16,17]).

Если граничная задача (4), (6) и (7) при $t = t_{n+1}$ уже решена методом последовательных приближений, то решение рассматриваемой задачи для момента времени t_{n+2} строится по схеме, подробно описанной в [12,13], и т.д.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

Для наглядной демонстрации особенностей реономного поведения трехслойной пластины с армированными несущими слоями исследуем простые случаи ее цилиндрического изгиба, т.е. рассмотрим прямоугольную удлиненную сэндвич-панель, ориентированную вдоль оси Ox_2 и имеющую ширину L . Пластина жестко закреплена на продольной кромке $x_1 = 0$ и свободна от нагружения на другой продольной кромке $x_1 = L$ (рис.1) или шарнирно оперта вдоль удлиненных кромок $x_1 = 0, L$ (этот случай на рис.1 не изображен). Конструкция квазистатически нагружена равномерным давлением $q(t)$ со стороны верхней лицевой поверхности ($X_3(t) = -q(t) = \text{const}$, $X_i \equiv 0$, $m_i \equiv 0$, $i = 1, 2$). Структуры армирования несущих слоев в продольном направлении Ox_2 не изменяются, поэтому решение такой задачи приближенно соответствует случаю цилиндрического изгиба, т.е. не зависит от координаты x_2 . В рассматриваемых случаях задача является статически определимой, поэтому силовые факторы F_{ij} , F_{i3} и M_{ij} могут быть заранее определены непосредственно из уравнений (3) при соответствующих граничных условиях, что существенно упрощает построение решения.

В качестве конкретных примеров исследуем изгибное деформирование трехслойных КМ-пластин с толщиной заполнителя $h^{(2)} = 13$ мм и несущих слоев $h^{(1)} = h^{(3)} = 1$ мм [1]. Ширина L прямоугольных удлиненных сэндвич-панелей может быть разной. Легкий заполнитель представляет собой сотовую конструкцию (рис.2): диаметр сотовой ячейки $d = 8$ мм, а толщина стенок соты $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$ мм [1]. Сотовый заполнитель изготовлен из высокопрочного алюминиевого сплава Д16Т, несущие слои выполнены из того же сплава и армированы одинаково и однородно двумя семействами углеродных волокон марки Торнел-75 ($\omega_k^{(1)} = \omega_k^{(3)} = \omega_k$, $\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$, $\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(3)} = \psi_k$, $\psi_1 = -\psi_2 = \text{const}$). Для каждого из компонентов композиции связь между шаровыми тензорами напряжений и деформаций предполагается линейно-упругой [9,18]. Реономное поведение сплава Д16Т описывается определяющими соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Работнова с механическими характеристиками [11]

$$g_*(\varepsilon_*) = \frac{2}{3} A (\varepsilon_*)^{\mu-1}, \quad B_*(t) = b_*(1-\alpha) = \text{const}, \quad E = 64 \text{ ГПа},$$

$$\nu = 0,31, \quad A = 30,55 \text{ ГПа}, \quad b_* = 0,119 \text{ ч}^{1-\alpha}, \quad \alpha = 0,635, \quad \mu = 0,87,$$

где ε_* – интенсивность деформаций [9]; g_* – коэффициент связи между девиаторами деформаций и модифицированных напряжений [10]; α – показатель слабой сингулярности ядра ползучести; B_* – регулярная составляющая ядра ползучести (см. (1)-(3) в [13]); μ – показатель нелинейности определяющих соотношений; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона.

Углеродные волокна Торнелл-75 ведут себя линейно-упруго и имеют характеристики $E = 525$ ГПа, $\nu = 0,25$ [19].

Как уже отмечалось, сэндвич-панели нагружены только поперечной, равномерно распределенной нагрузкой q , которая условно прикладывается в виде функции класса Хевисайда (см. рис.1)

$$q(t) = q_0 \times \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad q_0 = \text{const} > 0. \quad (8)$$

Податливость изгибаемых сэндвич-панелей будем оценивать величиной

$$w_m(t) = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |w(x_1, t)|, \quad t > 0, \quad (9)$$

а для сравнения расчетных значений податливости трехслойных пластин, рассчитанных по классической и неклассической теориям, используем величину

$$\delta w_m(t) = \frac{w_m^N(t) - w_m^C(t)}{w_m^N(t)} \cdot 100 \%, \quad t > 0, \quad (10)$$

где w_m^C, w_m^N – значения величины (9), определенные в момент времени t по классической и неклассической теориям соответственно. Решение по классической теории получается, если в равенствах (2) перейти к предельному случаю $c_{i3k3}^{(2)} \rightarrow \infty$, откуда следует $\varepsilon_{k3}^{(2)} \rightarrow 0$, $p_{i3}^{(2)} \rightarrow 0$, $F_{i3}^0 \rightarrow 0$, $i, k = 1, 2$ (см. (5)).

Согласно соотношению (9), в случае консольной конструкции (рис.1) $w_m(t) = |w(L, t)|$, а в случае шарнирно опертой прямоугольной удлиненной пластины $w_m(t) = |w(L/2, t)|$.

Для удобства дальнейшего изложения введем в рассмотрение параметр n_h , условно задающий ориентацию сотовой ячейки заполнителя относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной с сэндвич-панелью: если $n_h = 1$, то локальная ось \bar{Ox}_2 , связанная с ячейкой периодичности заполнителя (рис.2), совпадает с осью Ox_1 глобальной системы координат (рис.1); если $n_h = 2$, то локальная ось \bar{Ox}_2 совпадает с глобальной осью Ox_2 .

На рис.3 изображены зависимости $w_*(t) = w(L, t)$, полученные по разным теориям при разных структурах армирования несущих слоев консольной сэндвич-панели (рис.1).

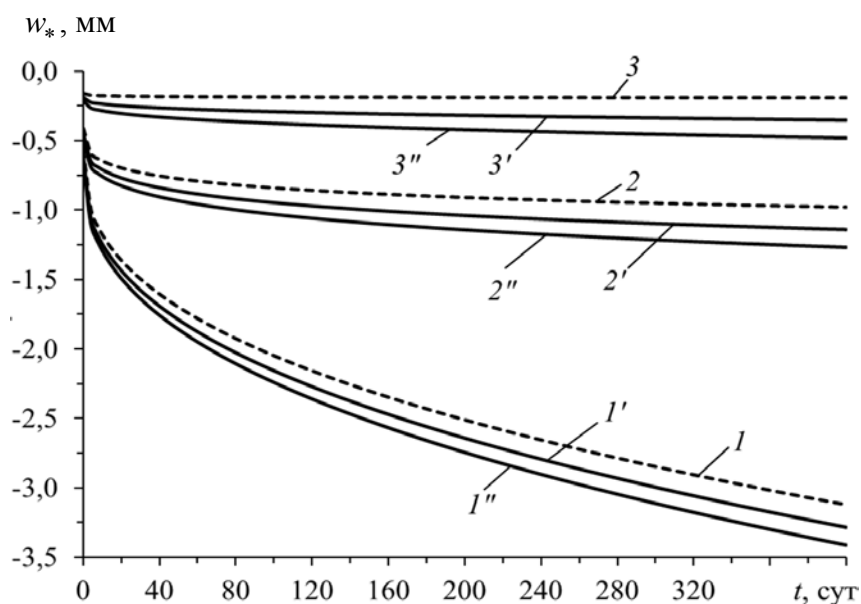


Рис.3. Зависимость прогиба свободной кромки консольной сэндвич-панели с армированными несущими слоями от времени, рассчитанная по двум теориям.

Расчеты проводились при $L = 40$ см и $q_0 = 2$ кПа (см. (8)). Несущие слои армированы вдоль оси Ox_1 ($\psi_1 = -\psi_2 = 0$) с разными значениями суммарной плотности армирования $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 2\omega_1$. Штриховые кривые на рис.3, номера которых не помечены штрихами, рассчитаны по классической теории изгиба пластин. Сплошные кривые, номера которых помечены одним штрихом, определены по неклассической теории при $n_h = 1$, а двумя штрихами – при $n_h = 2$. Кривые с номерами 1 получены при отсутствии армирования несущих слоев ($\omega = 0$), линии с номерами 2 – при усилении этих слоев с суммарной плотностью армирования $\omega = 0,1$, а кривые 3 – при $\omega = 0,7$, что на практике соответствует предельно допустимому значению.

В таблице (а) приведены результаты расчетов величин (9) и (10) в момент времени $t = 400$ сут для рассматриваемой консольной сэндвич-панели. Сравнение сплошных и штриховых линий с одинаковыми номерами на рис.3 и результатов расчетов, представленных в таблице (а), свидетельствуют о том, что классическая теория изгиба слоистых пластин при их длительном нагружении не гарантирует

получения традиционной 5%-й инженерной точности расчетов по прогибу сэндвич-панелей как с армированными, так и неармированными несущими слоями. Еще в большей степени отклонение расчетов по классической теории от расчетов по неклассической теории проявляется в случае шарнирно опертой трехслойной пластины. Так, в таблице (б) приведены значения величин (9) и (10), полученные для такой пластины при $q_0 = 15$ кПа, $L = 40$ см и прежних структурах армирования несущих слоев. При этом относительная толщина рассматриваемых сэндвич-панелей имеет порядок 1/30: $H/L = 1,5/40 = 0,0375$, где $H = h^{(1)} + h^{(2)} + h^{(3)}$ – общая толщина слоистого пакета. (Поведение зависимостей $w_*(t) = w(L/2, t)$ для шарнирно опертой пластины, качественно аналогично кривым, изображенным на рис.3, поэтому они здесь не приводятся.)

Таблица.

Максимальные по модулю прогибы сэндвич-панелей, рассчитанные по разным теориям при $t = 400$ сут .

ω	n_h	w_m^N , мм	w_m^C , мм	δw_m , %
а) консольная пластина (рис.1) при $L = 40$ см и $q_0 = 2$ кПа				
0,0	1	3,2842	3,1235	4,9
0,0	2	3,4126	3,1235	8,5
0,1	1	1,1394	0,9787	14,1
0,1	2	1,2678	0,9787	22,8
0,7	1	0,3518	0,1911	45,7
0,7	2	0,4801	0,1911	60,2
б) шарнирно опертая пластина при $L = 40$ см и $q_0 = 15$ кПа				
0,0	1	3,1855	2,8184	11,5
0,0	2	3,4787	2,8184	19,0
0,1	1	1,1646	0,7975	31,5
0,1	2	1,4579	0,7975	54,7
0,7	1	0,5176	0,1506	70,9
0,7	2	0,8109	0,1506	81,4
в) шарнирно опертая пластина при $L = 1$ м и $q_0 = 0,6$ кПа				
0,0	1	3,6449	3,5798	1,8
0,0	2	3,6968	3,5798	3,2
0,1	1	1,2379	1,1729	5,3
0,1	2	1,2899	1,1729	9,1
0,7	1	0,2974	0,2324	21,9
0,7	2	0,3494	0,2324	33,5

Представляет интерес сравнить величины (9) и (10) для весьма тонких трехслойных пластин. Так, в таблице (в) приведены результаты расчетов для шарнирно опертой сэндвич-панели, полученные при $q_0 = 0,6$ кПа, $L = 1$ м и тех же структурах армирования несущих слоев. При этом относительная толщина пластины имеет порядок 1/70: $H/L = 1,5/100 = 0,015$, т.е. весьма мала.

Значения величин δw_m , приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что в случаях армированных несущих слоев классическая теория не позволяет получать расчетные значения прогибов сэндвич-панели в условиях ее

длительного нагружения даже с грубой 20%-й (а в ряде случаев и с 50%-й) точностью. Кроме того, кривая 3 на рис.3 визуально практически не отличается от горизонтальной линии, т.е. в рамках расчетов по классической теории при $\omega = 0,7$ наблюдается ложный эффект «абсолютного армирования» рассматриваемых композитных сэндвич-панелей, работающих в условиях ползучести. В том смысле, что, согласно классической теории, такие трехслойные конструкции почти не ползут. Однако поведение кривых 3' и 3'' свидетельствует о том, что, согласно неклассической теории, такие сэндвич-панели все-таки ползут, причем прогибы при длительном их нагружении накапливаются в основном именно в процессе ползучести. Поэтому далее будем обсуждать результаты расчетов, выполненных в рамках неклассической теории.

Сравнение сплошных кривых на рис.3 с одинаковыми номерами и результатов расчетов, представленных в таблице, показывает, что податливость сэндвич-панелей с армированными несущими слоями существенно зависит от ориентации сотовых ячеек заполнителя относительно направления опорных кромок пластины, т.е. от значения параметра n_h . Эта зависимость проявляется тем ярче, чем больше суммарная плотность армирования несущих слоев.

Кривые 2' и 2'' на рис.3 лежат существенно выше линий 1' и 1'', что свидетельствует о значительном уменьшении податливости сэндвич-панелей даже при достаточно малой плотности армирования их несущих слоев ($\omega = 0,1$). Кривые 3' и 3'' хоть и лежат выше линий 2' и 2'', однако эффект от значительного (в семь раз) увеличения плотности армирования здесь не проявляется уже столь существенно, как при переходе от кривых 1' и 1'' к линиям 2' и 2''. Следовательно, податливость сэндвич-панелей нелинейно зависит от суммарной плотности армирования несущих слоев. В связи с этим целесообразно проследить за изменением величины w_m (см. (9)) в зависимости от суммарной плотности армирования несущих слоев.

На рис.4 представлены зависимости $w_m(\omega)$, рассчитанные для консольной композитной сэндвич-панели при $q_0 = 2$ кПа и $L = 40$ см (те же условия, что и в случае рис.3) в начальный момент времени $t = +0$ (кривые 1–3) и при $t = 400$ сут (кривые 1'–3' и 1''–3''). Качественно аналогичные зависимости $w_m(\omega)$ получаются и для шарнирно опертой трехслойной пластины при $q_0 = 15$ кПа и $L = 40$ см. На рис.4 они не изображены, чтобы его не загромождать. Кривые с разными номерами на рис.4 получены при разных углах армирования ψ_k : линии 1, 1' и 1'' определены при $\psi_1 = -\psi_2 = 0$ (тот же тип армирования, что и в случае рис.3); кривые 2, 2' и 2'' – при $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/4$ (ортогональное армирование, когда структура армирования повернута на угол $\pi/4$ относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$); линии 3, 3' и 3'' – при $\psi_1 = -\psi_2 = \pi/2$ (продольное армирование, т.е. вдоль оси Ox_2 , перпендикулярной плоскости рис.1). Сплошные кривые (номера их помечены штрихом) рассчитаны при значении параметра $n_h = 1$, а штриховые линии (номера их помечены двумя штрихами) – при $n_h = 2$. При использованном на рис.4 масштабе по оси ординат, сплошные и штриховые кривые, определенные при $t = +0$ (см. линии 1–3), визуально практически не различаются, поэтому для них не введена отдельная нумерация. Однако

и в этом случае штриховые линии лежат несколько выше соответствующих сплошных кривых, как это имеет место для кривых $1'-3'$, $1''-3''$.

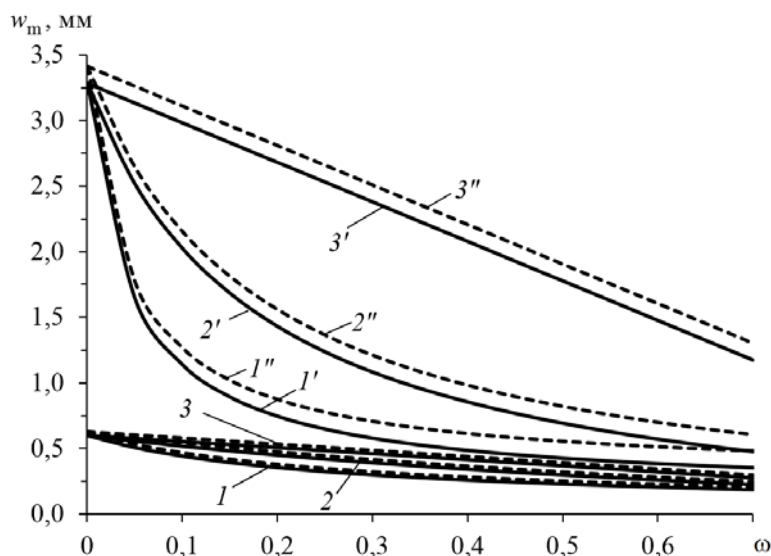


Рис.4. Зависимость максимального по модулю прогиба консольной сэндвич-панели от суммарной плотности армирования несущих слоев.

Все кривые на рис.4 монотонно убывают, что свидетельствует об уменьшении податливости сэндвич-панели при увеличении плотностей армирования ее несущих слоев при разных направлениях их армирования как при кратковременном, так и длительном нагружении. Однако если линии $3, 3'$ и $3''$ визуально практически неотличимы от прямых, то кривые $1, 1', 1''$ и $2, 2', 2''$ имеют тенденцию к выполаживанию, т.е. при соответствующих направлениях армирования с увеличением ω эффект уменьшения податливости сэндвич-панели за счет усиления ее несущих слоев постепенно убывает. При этом изменчивость кривых $1', 1''$ и $2', 2''$ существенно больше изменчивости кривых 1 и 2 соответственно, т.е. эффект уменьшения податливости за счет увеличения плотностей армирования несущих слоев в значительно большей степени сказывается при работе сэндвич-панели в условиях длительного нагружения. Так, согласно поведению кривой $1'$, при $t = 400$ сут податливость консольной сэндвич-панели уменьшается в 6,3 раза при увеличении суммарной плотности армирования несущих слоев ω от нуля до 0,35 и всего в 1,5 раза при увеличении ω от 0,35 до 0,7 (при этом расход волокон увеличивается в два раза). Следовательно, в рассматриваемом случае целесообразно ставить вопрос о рациональном сочетании надежной работы композитной сэндвич-панели, например, по критерию минимума ее податливости, с экономией расхода арматуры в ее несущих слоях.

Все штриховые линии на рис.4 лежат выше сплошных кривых с теми же номерами, поэтому с точки зрения минимизации податливости сэндвич-панелей по-прежнему существенным фактором является ориентация репрезентативной ячейки заполнителя относительно глобальной системы координат $Ox_1x_2x_3$. В рассматриваемых случаях ячейку периодичности заполнителя целесообразно сориентировать так, чтобы локальная ось $\bar{O}\bar{x}_2$ (рис.2) совпадала с осью Ox_1 (рис.1) глобальной системы координат (при этом $n_n = 1$). Особенно ярко это

сказывается при плотностях армирования, близких к предельно допустимым значениям ($\omega \approx 0,7$).

Выше рассматривались зависимости податливости сэндвич-пластин от суммарной плотности армирования несущих слоев ω при трех фиксированных углах армирования. Представляет интерес и рассмотрение зависимостей податливости таких панелей от углов армирования несущих слоев $\psi_1 = -\psi_2$ при фиксированных плотностях армирования ($\omega_1 = \omega_2 = \text{const}$). Согласно поведению кривых на рис.4, наименьшей податливостью обладают сэндвич-панели при армировании их несущих слоев с суммарной плотностью $\omega = 0,7$. В связи с этим в последующих расчетах примем $\omega_1 = \omega_2 = 0,35$, т.е. $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 0,7$.

На рис.5 изображены зависимости $w_m(\psi_1)$ (см. (9)), рассчитанные в начальный момент времени $t = +0$ (кривые $1'$ и $1''$) и при $t = 400$ сут (кривые $2'$ и $2''$) для консольной сэндвич-панели ($q_0 = 2$ кПа и $L = 40$ см).

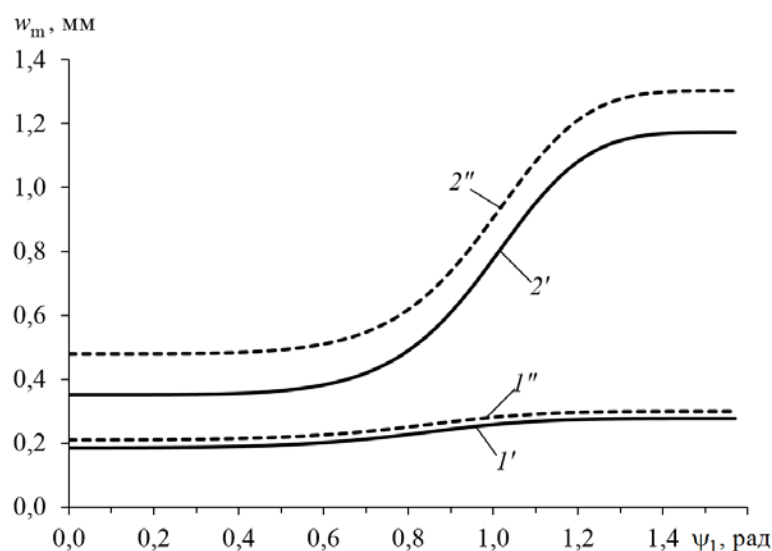


Рис.5. Зависимость максимального по модулю прогиба консольной сэндвич-панели от угла армирования несущих слоев.

Штрихи у номеров кривых на рис.5 имеют тот же смысл, что и на рис.3 и 4. Все кривые на рис.5 монотонно возрастают, однако изменчивость кривых $2'$ и $2''$ значительно больше, чем линий $1'$ и $1''$. Поведение кривых на рис.5 вновь подтверждает тот факт, что изменение структуры армирования несущих слоев сэндвич-панели влияет на изменение ее податливости в гораздо большей степени в условиях длительной эксплуатации конструкции, чем при кратковременном ее нагружении. Следовательно, проблема рационального и оптимального армирования тонкостенных элементов конструкций, работающих в условиях ползучести, является даже более актуальной, чем аналогичная проблема, традиционно решаемая в предположении о кратковременном их нагружении. (Зависимости $w_m(\psi_1)$, качественно аналогичные кривым, изображенным на рис.5, получаются и для шарнирно опертых трехслойных пластин, поэтому они не изображены.)

Чтобы объяснить, почему с увеличением суммарной плотности армирования несущих слоев ω при длительном нагружении композитных сэндвич-панелей

точность расчетов по классической теории резко уменьшается (см. значения δw_m в таблице), рассмотрим эпюры прогибов $w(x_1, t)$ таких конструкций, рассчитанные в разные моменты времени t . На рис.6 приведены зависимости $w(x_1, t)$ ($0 \leq x_1 \leq L$), определенные для консольной пластины (рис.1) при $L = 40$ см, $\psi_1 = -\psi_2 = 0$, $\omega = 0,7$ и разных значениях интенсивности внешней нагрузки q_0 (см. (8)).

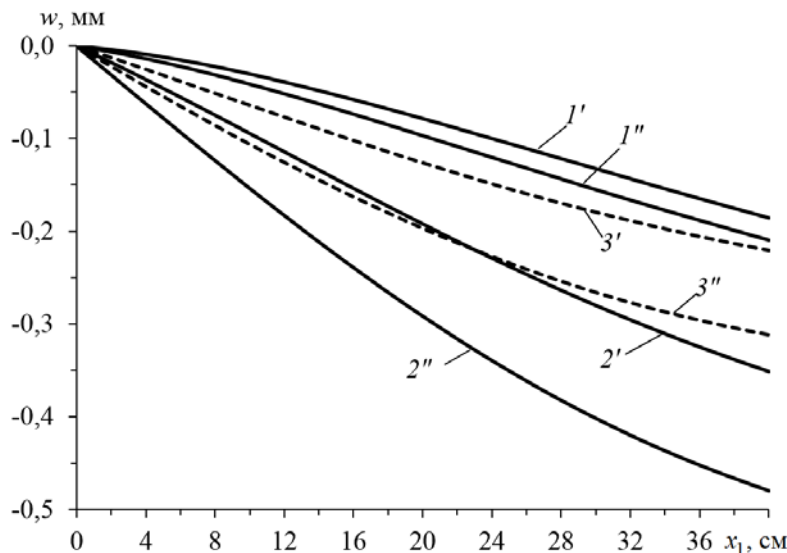


Рис.6. Зависимость прогиба композитной консольной сэндвич-панели от пространственной координаты x_1 в разные моменты времени.

Кривые $1'$, $1''$, $2'$ и $2''$ рассчитаны при $q_0 = 2$ кПа, что соответствует случаю кривых $3'$ и $3''$ на рис.3. Линии $1'$ и $1''$ соответствуют начальному моменту времени ($t = +0$), а кривые $2'$ и $2''$ определены при $t = 400$ сут. Штрихи при номерах кривых имеют тот же смысл, что и на рис.3-5. Кривые $1'$ и $1''$ качественно подобны, причем они при $x_1 = 0$ имеют касательные, близкие к горизонтальным линиям, что свидетельствует о наличии малых поперечных сдвигов в заполнителе ($\varepsilon_{13}^{(2)} \approx 0$) при кратковременном нагружении такой сэндвич-панели. Действительно, дополнительные расчеты, проведенные по классической теории, показали, что при $t = +0$ величины (10) имеют значения $\delta w_m = 15\%$ и $\delta w_m = 25,3\%$, соответствующие кривым $1'$ и $1''$ на рис.6, что существенно меньше аналогичных значений, приведенных в таблице (а) при $\omega = 0,7$ и соответствующих кривым $2'$ и $2''$ на рис.6.

Кривые $2'$ и $2''$ отличаются от $1'$ и $1''$ не только количественно, но и качественно: правые участки этих кривых имеют кривизну разных знаков. Поведение кривых $2'$ и $2''$ в окрестности опорной кромки ($x_1 \approx 0$) свидетельствует о том, что согласно неклассической теории в заполнителе такой композитной сэндвич-панели при ее длительном нагружении развиваются значительные деформации поперечного сдвига $\varepsilon_{13}^{(2)}$, которые и определяют в основном нарастание по модулю прогибов в процессе ползучести такой конструкции. При

увеличении уровня внешней нагрузки q_0 (т.е. при более интенсивном неупругом деформировании) «неклассическое» поведение эпюры прогибов при длительном нагружении сэндвич-панели сказывается еще более ярко. Так, кривые 3' и 3'' на рис.6 рассчитаны при $q_0 = 11$ кПа и $t = 400$ сут (ординаты точек этих кривых уменьшены в 10 раз); их качественное поведение в еще большей степени отличается от поведения линий 1' и 1'', чем кривых 2' и 2'', рассчитанных при существенно меньшей нагрузке ($q_0 = 2$ кПа).

Очевидно, что дальнейшее уменьшение податливости трехслойных пластин в условиях ползучести возможно за счет усиления заполнителя, в частности за счет армирования стенок силовых элементов ячеек.

Все приведенные выше результаты были получены для сэндвич-панелей, выполненных из высокопрочного алюминиевого сплава Д16Т. Однако использование низкопрочного сплава (например, АДМ, предел текучести которого на порядок меньше, чем у сплава Д16Т [19]) может привести к тому, что даже при кратковременном неупругом деформировании сэндвич-панели с армированными несущими слоями поведут себя совсем не так, как это традиционно принято считать. Так, в [8] показано, что в трехслойных пластинах тех же размеров, что и выше, но изготовленных из алюминиевого сплава АДМ, с несущими слоями, армированными борными волокнами [19], в окрестности опорных кромок могут возникнуть ярко выраженные краевые эффекты по прогибу, т.е. в этих случаях сэндвич-панели как бы «срезаются» на опорных кромках в поперечном направлении (см. рис. 5 в [8]), причем вклад в величину (9) от такого «среза» может являться доминирующим. Согласно результатам проведенных выше исследований, можно предположить, что в условиях длительного нагружения такой механизм деформирования сэндвич-панелей будет проявляться еще ярче, чем при кратковременном их деформировании. Однако в открытой печати отсутствуют данные о реономном поведении сплава АДМ, что не позволяет выполнить расчеты таких сэндвич-панелей при ползучести.

Выше предполагалось, что силовые элементы заполнителя (например, стенки сотовой ячейки) не теряют устойчивости. Учет возможности потери их устойчивости и закритического поведения выходит за рамки настоящей работы. Однако в [7] показано, что при потере устойчивости стенок сотового заполнителя в случае его поперечного сдвига значения секущих модулей $c_{i3k3}^{(2)}$ (см. (2)) резко уменьшаются. Следовательно, нужно ожидать, что при этом неклассический механизм деформирования сэндвич-панелей с армированными несущими слоями будет реализовываться чаще, а краевые эффекты будут проявляться более ярко, чем это наблюдалось выше и в [8].

ВЫВОДЫ

Применение метода шагов по времени с привлечением структурных моделей механики соответствующих композитных сред позволило решить задачу о неустановившейся ползучести сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями из нелинейно-наследственных материалов.

Проведенный анализ неупругого поведения композитных сэндвич-панелей показывает, что классическая теория изгиба слоистых пластин не пригодна для расчета таких конструкций как при кратковременном, так и при длительном их нагружении. При длительном нагружении в заполнителе сэндвич-панелей

с армированными несущими слоями активно развиваются деформации поперечного сдвига, что с течением времени приводит к изменению механизма деформирования такой конструкции: «классическое» изгибное деформирование сменяется «неклассическим», в котором доминируют поперечные сдвиги заполнителя, а не изгибная составляющая линейных деформаций. С возрастанием длительности времени эксплуатации изгибаемых сэндвич-панелей наблюдается существенное увеличение зависимости их податливости от параметров структуры армирования несущих слоев.

Неклассический механизм деформирования композитной сэндвич-панели может проявляться и при кратковременном нагружении, если заполнитель изготовлен из материала с низким пределом текучести. В этом случае в окрестности опорных кромок трехслойной пластины проявляются ярко выраженные краевые эффекты, характеризующие «срез» сэндвич-панели в поперечном направлении. Классическая теория изгиба слоистых пластин эти краевые эффекты не выявляет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брюккер Л.Э., Ракин А.С. *Испытания трехслойных стержней при нормальных и повышенных температурах* / Динамика и прочность авиационных конструкций: Межвуз. сб. научн. трудов. – Новосибирск: Изд-во НГУ, НЭТИ, 1978. – Вып. 4. – С.73-79.
2. Панин В.Ф., Гладков Ю.А. *Конструкции с заполнителем. Справочник*. – М.: Машиностроение, 1991. – 272 с.
3. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. *Computational models for sandwich panels and shells* // Appl. Mech. Rew. – 1996. – Vol.49. – No.3. – Pp.155-199.
4. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J.W. *Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores* // J. of Mechanics of Materials and Structures. – 2006. – Vol.1. – No.1. – Pp.97-127.
5. Zhu F., Wang Z., Lu G., Nurick G. *Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading* // Intern. J. of Impact Engineering. – 2010. – Vol.37. – Pp.625-637.
6. Wilbert A., Jang W.-Y., Kyriakides S., Floccari J.F. *Buckling and progressive crushing of laterally loaded honeycomb* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. Pp.803-816.
7. Акишев Н.И., Закиров И.И., Паймушин В.Н., Шишов М.А. *Теоретико-экспериментальный метод определения усредненных упругих и пространственных характеристик сотового заполнителя трехслойных конструкций* // Механика композитных материалов. – 2011. – Т.47. – №4. – С.543-556.
8. Янковский А.П. *Моделирование упругопластического изгиба сэндвич-панелей с тонкими армированными несущими слоями* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2018. – №1(42). – С.72-80.
9. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
10. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
11. Никитенко А.Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. – 278 с.

12. Янковский А.П. *Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов* // Конструкции из композиционных материалов. – 2012. – №2. – С.12-25.
13. Янковский А.П. *Моделирование ползучести ребристо-армированных композитных сред из нелинейно-наследственных фазовых материалов. 1. Структурная модель* // Механика композитных материалов. – 2015. – Т.51. – №1. – С.3-26.
14. Goldhoff R.M. *The application of Rabotnov's creep parameter* // Proc. ASTM. – 1961. – Vol.61.
15. Turner F.H., Blomquist K.E. *A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy* // JAS. – 1956. – Vol.23. – No.12.
16. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
17. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 336 с.
18. Ильюшин А.А. *Труды. Т.3. Теория термовязкоупругости*. – М.: Физматлит, 2007. – 288 с.
19. *Композиционные материалы: Справочник* / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

REFERENCES

1. Bryukker L.E., Rakin A.S. *Ispytaniya trekhslojnykh sterzhnej pri normal'nykh i povyshennykh temperaturakh [Testing of sandwich cores at normal and elevated temperatures]*. Dinamika i prochnost' aviatsionnykh konstruksij, Mezhvuz. Sb. Nauchn. Trudov, Novosibirsk, Izd-vo NGU, NETI, 1978, Iss.4, Pp.73-79.
2. Panin V.F., Gladkov Yu.A. *Konstruksii s zapolnitelem. Spravochnik [Structures with a filler. Reference Book]*. Moskva, Mashinostroenie, 1991, 272 p.
3. Noor A.K., Burton W.S., Bert Ch.W. *Computational models for sandwich panels and shells*. Appl. Mech. Rew., 1996, Vol.49, No.3, Pp.155-199.
4. Vaziri A., Xue Z., Hutchinson J.W. *Metal sandwich plates with polymer foam-filled cores*. J. of Mechanics of Materials and Structures, 2006, Vol.1, No.1, Pp.97-127.
5. Zhu F., Wang Z., Lu G., Nurick G. *Some theoretical considerations on dynamic response of sandwich structures under impulsive loading*. Intern. J. of Impact Engineering, 2010, Vol.37, Pp.625-637.
6. Wilbert A., Jang W.-Y., Kyriakides S., Floccari J.F. *Buckling and progressive crushing of laterally loaded honeycomb*. Intern. J. of Solids and Structures, 2011, Vol.48, Pp.803-816.
7. Akishev N.I., Zakirov I.I., Paimushin V.N., Shishov M.A. *Theoretical-experimental method for determining the averaged elastic and strength characteristics of a honeycomb core of sandwich designs*. Mech. Compos. Mater., 2011, Vol.47, No.4, Pp.377-386.
8. Yankovskii A.P. *Modeling of elastic-plastic bending of sandwich panels with thin reinforced bearing layers*. Mechanics of machines, mechanisms and materials, 2018, No.1(42), Pp.72-80.
9. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti [The applied theory of plasticity and creep]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 400 p.

10. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel [Elements of hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Fizmatgiz, 1977, 384 p.
11. Nikitemko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov [Creep and creep rupture strength metallic materials]*. Novosibirsk, NSUCE Publ., 1997, 278 p.
12. Yankovskii A.P. *Modeling the mechanical behavior of composites with a spatial reinforcement of nonlinear hereditary materials*. Struct. Compos. Mater., 2012, No.2, Pp.12-25.
13. Yankovskii A.P. *Modeling the creep of rib-reinforced composite media from nonlinear hereditary phase materials. 1. Structural model*. Mech. Compos. Mater., 2015, Vol.51, No.1, Pp.1-16.
14. Goldhoff R.M. *The application of Rabotnov's creep parameter*. Proc. ASTM, 1961, Vol.61.
15. Turner F.H., Blomquist K.E. *A study of the applicability of Rabotnov's creep parameter for aluminium alloy*. JAS, 1956, Vol.23, No.12.
16. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt, Pergamon Press, 1982.
17. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelinejnoe deformirovanie i ustojchivost' uprugikh obolochek neodnorodnoj struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennye i novye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]*. Moskva, Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.
18. Il'yushin A.A. *Trudy. Tom 3. Teoriya termovyazkouprugosti [Works. Vol.3. The theory of thermo-visco-elastic]*. Moskva, Fizmatlit, 2007, 288 p.
19. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Ed. D.M. Karpinos, Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.

Поступила в редакцию 30 января 2018 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, yankovsky_ap@rambler.ru