

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСЖИМАЕМЫХ УПРУГИХ КОМПОЗИТОВ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ

Димитриенко Ю.И.

*Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана,  
г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Предложен метод расчета эффективных диаграмм деформирования слоистых несжимаемых композитов с конечными деформациями. Метод основан на применении теории асимптотических разложений по малому геометрическому параметру к общей системе уравнений нелинейной теории упругости с конечными деформациями для неоднородных сред с периодической структурой. Использовано универсальное представление определяющих соотношений нелинейной упругости, предложенное ранее автором, которое в рамках единого подхода позволяет проводить построение и нахождение решения для широкого комплекса различных моделей несжимаемых сред с конечными деформациями. Получено решение локальных задач на ячейке периодичности в формально явной форме – в виде связанных между собой систем нелинейных алгебраических уравнений. Математически строго доказано утверждение, что если фазы композита являются несжимаемыми, то композит в целом также является несжимаемым материалом. Приведен пример численного расчета эффективных диаграмм деформирования многослойного композита, слои которого описываются моделью нелинейно-упругого несжимаемого материала типа Муни.

**Ключевые слова:** конечные деформации; слоистые композиты; несжимаемые среды; метод асимптотического осреднения

## MODELING OF INCOMPRESSIBLE ELASTIC COMPOSITES WITH FINITE DEFORMATIONS BY THE METHOD OF ASYMPTOTIC HOMOGENIZATION

Dimitrienko Yu.I.

*Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*

### ABSTRACT

The method of calculating the effective deformation diagrams for incompressible laminated composites with finite deformations are suggested. The method is based on the application of the theory of asymptotic expansions over small geometrical parameters to a general non-linear elasticity equations with finite deformations of inhomogeneous media with a periodic structure. It was used suggested earlier the universal representation of constitutive relations for nonlinear elastic compressible media with finite deformations. A solution of the local problems over the periodicity cell in a formal explicit form of interconnected systems of nonlinear algebraic equations was received. It was mathematically rigorously proved that if the phase of the composite are incompressible, the composite as a whole is also an incompressible material. The example of numerical calculation of the effective deformation diagrams multilayer

composite fibers are described by the model of nonlinear elastic incompressible material such as Money.

**Keywords:** finite deformation; laminated composites; incompressible media; asymptotic homogenization method; local problems; universal representation of constitutive relations

## ВВЕДЕНИЕ

Эластомерные несжимаемые композиционные материалы, образованные мягкой эластичной матрицей и жесткими армирующими наполнителями, активно применяют в промышленности. Эти материалы обладают такими ценными свойствами, как способность выдерживать большие деформации без разрушения, относительно высокой жесткостью в направлении армирования и очень низкой жесткостью в поперечном направлении и при сдвигах. Эти свойства позволяют создавать на основе эластомерных композитов такие важные для инженерной практики элементы как герметизирующие уплотнения, работающие при высокой нагрузке, амортизаторы самых различных типов, изделия шинной промышленности и многие другие ответственные детали. Особый интерес вызывают композиты, армированные перспективными высокомолекулярными волокнами, например, полиэтиленовыми и арамидными, и тканями на их основе, которые обладают высокими значениями модуля упругости и достаточно большими предельными деформациями разрушения, измеряемыми процентами [1]. Такие материалы проявляют нелинейные свойства во всех направлениях, даже в направлении армирования.

Методам расчета нелинейно-упругих свойств композитов посвящено относительно мало работ, отметим некоторые из них [2-12], хотя интерес к данной проблеме был обозначен достаточно давно. Приближенные инженерные методы расчета эффективных характеристик композитов, достаточно успешно применяемые для случаев материалов с малыми деформациями, не обеспечивают достаточной точности, ввиду наличия геометрической и физической нелинейности задачи. Численный конечно-элементный расчет характеристик композитов в рамках трехмерной постановки возможен, однако весьма трудоемок и не подходит для случая, когда необходимо многократно и быстро вычислять нелинейно-упругие свойства композита с достаточно высокой точностью. Такая проблема возникает, например, при расчете напряженно-деформированного состояния сложных пространственных элементов конструкций из эластомерных композитов тем же методом конечного элемента (КЭ). В этом случае, при рассмотрении композита как анизотропного гомогенизированного материала, необходимо в каждом узле КЭ сетки вычислять эффективные нелинейные свойства композита. Если эту задачу решать также методом КЭ, то объем вычислений становится чрезвычайно большим даже для современной высокопроизводительной техники.

В этой связи разработка метода, обладающего высокой точностью и вычислительной эффективностью, позволяющего рассчитывать нелинейно-упругие характеристики композитов с конечными деформациями, является весьма актуальной задачей. В настоящей работе для этой цели применяется метод асимптотического осреднения [13-19], который для периодических структур обладает высокой математической обоснованностью, и очень эффективен при расчете характеристик композитов с малыми деформациями, как в линейно-упругой, так и физически-нелинейной постановке [20,21].

Расчет эффективных характеристик композитов с конечными деформациями наталкивается еще на одну проблему – зависимости используемого метода решения от применяемой модели нелинейно-упругих свойств. Хорошо известно, что для конечных деформаций набор таких моделей гораздо более разнообразен, чем для физически-нелинейных сред с малыми деформациями. Для преодоления этой проблемы метод асимптотического осреднения в данной работе применен с использованием теории универсальных представлений моделей нелинейно-упругих сред с конечными деформациями, предложенной автором в работах [22-26], которая основана на едином представлении всех основных классов моделей нелинейно-упругих сред. В основе этого универсального представления лежит структуризация энергетических пар тензоров напряжений и деформаций.

## 1. ИСХОДНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТОВ С КОНЕЧНЫМИ ДЕФОРМАЦИЯМИ

Обозначим декартовы эйлеровы координаты материальных точек композита в отсчетной и актуальной конфигурациях как:  $x^k$  и  $x^k$ . Лагранжевы координаты материалы точек обозначим как  $X^i$ , и будем полагать их совпадающими в начальный момент времени  $t=0$  с декартовыми  $X^i = x^i$ . Композит рассмотрим как неоднородную среду, которая в отсчетной конфигурации  $K$  обладает периодической структурой и для нее можно выделить ячейку периодичности (ЯП)  $V_\xi$ , которая состоит из  $N$  компонентов (фаз композита)  $V_{\alpha\xi}, \alpha = 1, \dots, N$ . Все фазы композита будем полагать несжимаемыми.

Для такой неоднородной среды запишем постановку задачи нелинейной теории упругости в лагранжевом описании

$$\nabla_i P^{ij} + \rho f^j = 0, \quad X^i \in V, \quad (1)$$

$$P^{ij} = -pF^{-1ij} + \mathcal{F}^{0ij}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in V \cup \Sigma, \quad (2)$$

$$F^k_l = \delta_l^k + \nabla_l u^k, \quad X^i \in V \cup \Sigma, \quad (3)$$

$$\det(F^k_l) = 1, \quad (4)$$

$$n_i [P^{ij}] = 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \Sigma_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

$$n_i P^{ij} = t_e^j, \quad X^i \in \Sigma_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \Sigma_2, \quad (6)$$

Здесь (1) – уравнения равновесия, (2) – определяющие соотношения нелинейно-упругой среды, (3) – кинематическое соотношение, (4) – условие несжимаемости, (5) – условия идеального контакта на поверхностях раздела  $\Sigma_{\alpha\beta}$   $\alpha$ -ой и  $\beta$ -ой компонент композита, (6) – граничные условия на частях  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  внешней поверхности композита ( $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial V$ ). Обозначен  $[P^{ij}]$  – скачок функций на границе раздела  $\Sigma_{\alpha\beta}$  компонент композита. Все компоненты векторов и тензоров отнесены к неподвижному ортонормированному базису  $e_k$  – отсчетной

конфигурации  $\overset{0}{K}$ . Введены обозначения для:  $\overset{0}{\rho}$  – плотности,  $p$  – гидростатического давления и компонент:  $P^{ij}$  – тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа,  $F^k_l$  – тензора градиента деформации,  $F^{-1ij}$  – обратного градиента деформации,  $u^k$  – вектора перемещений,  $n_i$  – вектора нормали к поверхности в  $\overset{0}{K}$ ,  $t_e^j$  – вектора поверхностных усилий,  $u_e^i$  – вектора заданных перемещений поверхности,  $f^j$  – вектора плотности массовых сил,  $\overset{0}{\nabla}_i = \frac{\partial}{\partial X^i}$  – набла-оператора, а также  $\mathcal{F}^{0ij}$  – тензора определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита, который в формулировке, предложенной в [26], с использованием универсальных моделей, так называемых моделей  $B_n$ , предложенных Димитриенко Ю.И., для несжимаемых упругих сред с конечными деформациями конечными деформациями имеет сложный неявно-заданный вид [24,25] и зависит от компонент градиента деформаций  $F^k_l$

и лагранжевых координат  $X^i$  (разрывным образом)

$$\mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, X^m) = \overset{0}{\rho}(X^m) E^{0ijsq}(F^k_l) \psi_{sq}(G^{pr}, X^m), \quad G^{pr} = \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_\gamma^{n-3} Q_\gamma^p Q_\gamma^r, \quad (7)$$

$$E^{0ijsq}(F^k_l) = \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 Q_\gamma^i Q_\omega^j Q_\omega^s Q_\gamma^q, \quad \psi_{sq}(G^{pr}, X^m) = \frac{\partial}{\partial G^{sq}} \psi(G^{pr}, X^m).$$

Здесь обозначен  $\psi(G^{pr}, X^m)$  – упругий потенциал (различный для каждого компонента композита, и поэтому зависящий явно от  $X^i$ ),  $G^{pr}$  – компоненты симметричного тензора энергетических мер деформации [25],  $n$  – номер энергетической пары тензоров напряжений – мер деформации  $T^{ij}$   $G^{pr}$ , соответствующий номеру класса  $B_n$  моделей несжимаемых сред, согласно общей универсальной классификации, предложенной в [24,25],  $E^{0ijsq}$  – компоненты тензора энергетической эквивалентности [24,25],  $Q_\gamma^i(F^k_l)$  и  $Q_\omega^j(F^k_l)$  – матрицы собственных векторов левого и правого тензора искажений (являются неявными функциями только от  $F^k_l$ ),  $E_{\gamma\omega}^0(\lambda_\gamma)$  – функции собственных значений  $\lambda_\gamma$  тензоров искажений, собственные значения  $\lambda_\gamma$  – являются также функциями только от компонент тензора  $F^k_l$ .

Определяющие соотношения (2) могут быть представлены также в виде соотношения между энергетическими тензорами напряжений  $T^{ij}$  и энергетическими мерами деформации  $G^{pr}$

$$T_{sq}^{(n)} = -\frac{p}{n-3} \left( G_{sq}^{(n)} \right)^{-1} + \overset{0}{\rho} \psi_{sq}(G^{pr}, X^m) \quad (8)$$

Решение нелинейной задачи механики (1)-(6) ищется относительно поля вектора перемещений  $u^k = u^k(X^i)$  и гидростатического давления  $p(X^i)$ , после

нахождения перемещений координаты произвольной точки композита вычисляются по формуле:  $x^k(X^i) = \overset{0}{x}{}^k(X^i) + u^k(X^i)$ .

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА

Рассмотрим случай слоистого композита, который в отсчетной конфигурации представляет собой систему параллельных слоев, ортогональных к направлению  $OX^3$ , и периодически повторяющихся таким образом, что можно ввести ЯП, как набор из конечного числа  $N$  слоев суммарной толщиной  $l$ . Введем малый параметр  $\kappa = l/L \ll 1$ , как отношение толщины ЯП  $l$  к общей толщине композита  $L$  (размеры определены для  $\overset{0}{K}$ ), а также введем локальную лагранжеву координату  $\xi$  в  $\overset{0}{K}$ , которая связана с  $X^i$  следующими соотношениями

$$\xi = \frac{\bar{X}^3}{\kappa}, \quad \bar{X}^i = \frac{X^i}{L}. \quad (9)$$

Полагаем, что локальная координата в ЯП изменяется в диапазоне:  $-0.5 \leq \xi^i \leq 0.5$ , а границы раздела слоев обозначим как  $\xi = \xi_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \dots N-1$ .

В силу периодичности структуры композита его плотность  $\overset{0}{\rho}$  и тензор определяющих соотношений  $\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}$  (6) можно рассматривать как периодические функции локальной координаты:  $\overset{(n)}{\mathcal{F}}{}^{0ij}(F^k_l, \xi)$ .

Решение задачи (1)-(6) относительно вектора перемещений и гидростатического давления  $p = p(X^i)$ , будем искать в виде периодических функций по локальной лагранжевой координате и зависящих от глобальных лагранжевых координат:

$$u^k = u^k(X^i, \xi), \quad u^k(X^i, \xi) = u^k(X^i, \xi + a), \quad (10)$$

где  $a$  – произвольное целое число.

Дифференцирование функций  $f^k(X^i, \xi)$  осуществляем по формальным правилам дифференцирования сложной функции, тогда с учетом (9) имеем

$$\overset{0}{\nabla}_i u^k = u^k_{,i} + \frac{1}{\kappa} u^k_{|\beta} \delta_{i\beta}, \quad \text{где } u^k_{,i} = \frac{\partial}{\partial X^i} u^k(X^l, \xi), \quad u^k_{|\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi} u^k(X^l, \xi) \quad (11)$$

Будем искать решение задачи (1)-(5) для композита периодической структуры в виде асимптотических разложений по параметру  $\kappa$

$$u^k(X^i, \xi) = u^{k(0)}(X^i) + \kappa u^{k(1)}(X^i, \xi) + \kappa^2 + \dots, \quad (12)$$

$$p(X^i, \xi^l) = p^{(0)}(X^i, \xi^l) + \kappa p^{(1)}(X^i, \xi^l) + \kappa^2 + \dots$$

Представление (11) означает, что в данной задаче допускаемые перемещения композита с периодической структурой, могут быть конечными только на «глобальных» расстояниях порядка  $L$ , а на расстояниях порядка  $l$ , т.е. в рамках каждой ЯП, допускаются только малые перемещения порядка  $O(\kappa)$ , однако деформации в ЯП могут быть уже конечными.

Подставляя (12) в (3) с учетом (11), находим асимптотическое разложение для градиента деформации

$$\begin{aligned} F^k_l &= F^{k(0)}_l(X^i, \xi) + \kappa F^{k(1)}_l(X^i, \xi) + \kappa^2 + \dots, \\ F^{k(0)}_l(X^i, \xi) &= \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l} + u^{k(1)}_{/3} \delta_{l3}, \quad F^{k(1)}_l = u^{k(1)}_{,l} + u^{k(2)}_{/3} \delta_{l3} \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя разложение (12) в (2), и используя формулу Тейлора, находим асимптотические разложения определяющих соотношений и тензора Пиолы-Кирхгофа

$$\begin{aligned} P^{ij} &= P^{ij(0)}(X^k, \xi) + \kappa P^{ij(1)}(X^k, \xi) + \kappa^2 + \dots, \\ P^{ij(0)} &= -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} + \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{k(0)}_l, \xi), \\ P^{ij(1)} &= -p^{(0)}(F^{-1})^{(1)ij} - p^{(1)}(F^{-1})^{(0)ij} + \frac{\partial}{\partial F^{k(0)}_l} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{k(0)}_l, \xi) F^{k(1)}_l. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя разложение (13) в уравнение (4), с использованием формулы Тейлора, получаем

$$\det(F^{(0)k}_l) + \kappa \frac{\partial}{\partial F^{k(0)}_l} \det(F^{(0)p}_r) F^{k(1)}_l + \kappa^2 + \dots = 1 \quad (15)$$

После подстановки разложения (14) в уравнения равновесия (1), контактные (5) и граничные условия (6), с учетом (11), получаем асимптотическое разложение уравнений равновесия, контактных и граничных условий

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa} P^{ij(0)}_{/3} \delta_{i3} + (P^{ij(0)}_{,i} + P^{ij(1)}_{/3} \delta_{i3} + \rho f^j) + \kappa (P^{ij(1)}_{,i} + P^{ij(2)}_{/3} \delta_{i3}) + \kappa^2 + \dots &= 0, \\ n_3 [P^{3j(0)}] + \kappa n_3 [P^{3j(1)}] + \kappa^2 + \dots &= 0, \quad [u^{k(0)}] + \kappa [u^{k(1)}] + \kappa^2 + \dots = 0, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\ n_3 P^{3j(0)} + \kappa n_3 P^{3j(1)} + \kappa^2 + \dots &= t_e^j, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_1, \quad u^{k(0)} + \kappa u^{k(1)} + \kappa^2 + \dots = u_e^i, \quad X^i \in \overset{0}{\Sigma}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

### 3. ЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Приравнивая в (14)-(16) члены при одинаковых степенях  $\kappa$  к нулю, получаем рекуррентную последовательность  $L_\kappa$  локальных задач геометрически нелинейной упругости. Задача  $L_0$  имеет следующий вид

$$\begin{aligned} P^{3j(0)}_{/3} &= 0, \\ P^{ij(0)} &= -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} + \mathcal{F}^{(n)0ij}(F^{k(0)}_l, \xi), \\ F^{k(0)}_l(X^i, \xi) &= \bar{F}^k_l + u^{k(1)}_{/3} \delta_{l3}, \\ \det(F^{(0)k}_l) &= 1, \\ [P^{3j(0)}] &= 0, \quad [u^{k(1)}] = 0, \quad \xi = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1 \dots n-1, \\ \langle u^{k(1)} \rangle &= 0, \quad \left[ [u^{k(1)}] \right]_3 = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь введена операция осреднения по ЯП  $\overset{0}{V}_\xi \langle u^{k(1)} \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} u^{k(1)} d\xi$  и обозначен

средний градиент деформации композита

$$\bar{F}^k_l = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}. \quad (18)$$

Наличие условия  $\langle u^{k(1)} \rangle = 0$  вызвано требованием единственности задачи на ячейке и делает эту задачу интегро-дифференциальной. Двойными квадратными скобками  $\llbracket [u^{k(1)}] \rrbracket_3$  обозначена разность значений неизвестных функций на противоположных границах ЯП:  $\llbracket [u^{k(1)}] \rrbracket_3 = u^{k(1)}|_{\xi=0.5} - u^{k(1)}|_{\xi=-0.5}$ . Задача  $L_0$  рассматривается относительно неизвестных перемещений  $u^{k(1)}$ . Средний тензор-градиент  $\bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}$ , рассматривается как «входные данные» локальной задачи  $L_0$ .

Локальная задача  $L_1$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 P^{ij(0)}_{,i} + P^{ij(1)}_{/3} \delta_{i3} + \rho f^j &= 0, \\
 P^{ij(1)} &= -p^{(0)}(F^{-1})^{(1)ij} - p^{(1)}(F^{-1})^{(0)ij} + \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \mathcal{F}^{(n)0ij}(F_l^{k(0)}, \xi) F_l^{k(1)}, \\
 F_l^{k(1)} &= u^{k(1)}_{,l} + u^{k(2)}_{/3} \delta_{i3}, \\
 \frac{\partial}{\partial F_l^{k(0)}} \det(F^{(0)p_r}) F_l^{k(1)} &= 0, \\
 [P^{3j(1)}] &= 0, \quad [u^{k(1)}] = 0, \quad \xi = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1..n-1, \\
 \langle u^{k(2)} \rangle &= 0, \quad \llbracket [u^{k(2)}] \rrbracket_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Эта система уравнений рассматривается относительно перемещений  $u^{k(2)}$ . Она является линейной относительно  $u^{k(2)}$ .

#### 4. ОСРЕДНЕННАЯ ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТА

В силу периодичности функций на ЯП имеет место соотношение

$$\langle P^{3j(0)}_{/3} \rangle = P^{3j(0)}|_{\xi=0.5} - P^{3j(0)}|_{\xi=-0.5} = 0. \tag{20}$$

Осредняя систему уравнений (16), (14) с учетом (20), получаем осредненную задачу нелинейной упругости для композита

$$\begin{aligned}
 \langle P^{ij(0)} \rangle_{,i} + \langle \rho f^j \rangle &= 0, \\
 \langle P^{ij(0)} \rangle &= - \langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle + \langle \mathcal{F}^{(n)0ij}(F_l^{k(0)}, \xi) \rangle, \\
 \langle F_l^{k(0)} \rangle &= \delta_l^k + u^{k(0)}_{,l}, \\
 n_i \langle P^{ij(0)} \rangle &= \langle t_e^j \rangle, \quad X^i \in \Sigma_1, \quad u^{k(0)} = \langle u_e^i \rangle, \quad X^i \in \Sigma_2.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Осредненный градиент деформации  $\langle F_l^k \rangle$ , в силу периодичности функций  $u^{k(1)}$ , совпадает со средним градиентом деформаций  $\bar{F}_l^k$ . Для доказательства вычислим детерминант градиента деформации  $F^{(0)k}_l$ . С учетом (13) и (17), получаем

$$\det(F^{(0)k}_l) = \det(\bar{F}_l^k + u^{k(1)}_{/3} \delta_{l3}) = \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 & \bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3} \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 & \bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3} \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 & \bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3} \end{pmatrix} \quad (22)$$

Вычисляя детерминант матрицы разложением по третьему столбцу, получаем следующее выражение, в которое частные производные  $u^{j(1)}_{/3}$  входят в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} \det(F^{(0)k}_l) = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}) - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}) + \\ & + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} (\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}). \end{aligned} \quad (23)$$

Осредним теперь соотношение (23) по ЯП и примем во внимание, что детерминанты матрицы размером  $2 \times 2$  в этом выражении от  $\xi$  не зависят, а  $\langle u^{j(1)}_{/3} \rangle = u^{j(1)} \Big|_{\xi=0.5} - u^{j(1)} \Big|_{\xi=-0.5} = 0$  в силу периодичности  $u^{j(1)}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \det(F^{(0)k}_l) \rangle = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3} \rangle - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3} \rangle + \\ & + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \langle \bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3} \rangle = \\ = & \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^1 - \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^3 & \bar{F}_2^3 \end{pmatrix} \bar{F}_3^2 + \det \begin{pmatrix} \bar{F}_1^1 & \bar{F}_2^1 \\ \bar{F}_1^2 & \bar{F}_2^2 \end{pmatrix} \bar{F}_3^3 = \det(\bar{F}_l^k). \end{aligned} \quad (24)$$

В силу того, что все компоненты композита являются несжимаемыми:  $\det(F^{(0)k}_l) = 1$ , поэтому с учетом (24), получаем, что

$$\det(\bar{F}_l^k) = 1, \quad (25)$$

то есть композит в целом также является несжимаемым материалом.

Перемещение  $u^{k(1)}$ , являющееся решением задачи  $L_0$  (17), может быть представлено как функция локальных координат и «входных данных задачи» – среднего градиента деформаций  $\bar{F}_l^k$ . Тогда в виде такой же зависимости может быть представлен и градиент  $F_l^{k(0)}(X^i, \xi)$  нулевого приближения, т.е.

$$u^{k(1)} = u^{k(1)}(\bar{F}_s^m, \xi), \quad F_l^{k(0)} = F_l^{k(0)}(\bar{F}_s^m, \xi). \quad (26)$$

Подставляя (26) в (21), получаем усредненные определяющие соотношения композита, записанные в неявной форме

$$\begin{aligned} \langle P^{ij(0)} \rangle = & - \langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle + \bar{\mathcal{F}}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k), \\ \bar{\mathcal{F}}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k) = & \langle \mathcal{F}^{0ij(n)}(\bar{F}_l^k + u^{k(1)}(\bar{F}_r^p, \xi^m)_{/3} \delta_{l3}) \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Вычислим компоненты тензора  $\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle$ . Так как  $\det(F^{(0)ij}) = 1$ , то компоненты обратного тензора  $(F^{-1})^{(0)ij}$ , вычисленные через алгебраические дополнения элементов  $F^{(0)ij}$ , в явном виде могут быть записаны следующим образом



$$\begin{aligned}
 (F^{-1})^{(0)11} &= \bar{F}_2^2(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) - \bar{F}_2^3(\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}), \\
 (F^{-1})^{(0)22} &= \bar{F}_1^1(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) - \bar{F}_1^3(\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \quad (F^{-1})^{(0)33} = \bar{F}_1^1\bar{F}_2^2 - \bar{F}_1^2\bar{F}_2^1, \\
 (F^{-1})^{(0)12} &= -\bar{F}_2^1(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) + \bar{F}_2^3(\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \\
 (F^{-1})^{(0)21} &= -\bar{F}_1^2(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}) + \bar{F}_1^3(\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}), \\
 (F^{-1})^{(0)13} &= \bar{F}_2^1(\bar{F}_3^2 + u^{2(1)}_{/3}) - \bar{F}_2^2(\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}), \quad (F^{-1})^{(0)31} = \bar{F}_1^2\bar{F}_2^3 - \bar{F}_1^3\bar{F}_2^2, \\
 (F^{-1})^{(0)23} &= \bar{F}_2^2(\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}) - \bar{F}_1^1(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3}), \quad (F^{-1})^{(0)32} = \bar{F}_2^1\bar{F}_1^3 - \bar{F}_1^1\bar{F}_2^3.
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

Часть этих компонент  $(F^{-1})^{(0)ij}$  не зависит от координаты  $\xi$  и совпадает с соответствующими компонентами обратного осредненного тензора  $(\bar{F}^{-1})^{ij}$ , а остальные компоненты  $(F^{-1})^{(0)ij}$  являются линейными функциями от частных производных  $u^{k(1)}_{/3}$ . Тогда при усреднении компонент из первой группы, умноженных на  $p^{(0)}(X^k, \xi)$ , получаем

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)3j} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{3j}. \tag{29}$$

При осреднении компонент из второй группы, умноженных на  $p^{(0)}(X^k, \xi)$ , получаем выражения следующей структуры

$$\begin{aligned}
 \langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)23} \rangle &= \langle p^{(0)}(\bar{F}_2^2(\bar{F}_3^1 + u^{1(1)}_{/3}) - \bar{F}_1^1(\bar{F}_3^3 + u^{3(1)}_{/3})) \rangle = \\
 &= \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}_2^2\bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1\bar{F}_3^3) + \langle p^{(0)}u^{1(1)}_{/3} \rangle \bar{F}_2^2 - \langle p^{(0)}u^{3(1)}_{/3} \rangle \bar{F}_1^1.
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

Очевидно, что  $(\bar{F}_2^2\bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1\bar{F}_3^3) = (\bar{F}^{-1})^{23}$ . Положим далее, что ЯП обладает симметрией относительно плоскости  $\xi = 0$ , тогда в силу периодичности функции  $p^{(0)}, u^{k(1)}$  являются симметричными по координате  $\xi$ :  $p^{(0)}(X^k, \xi) = p^{(0)}(X^k, -\xi)$ ,  $u^{k(1)}(X^k, \xi) = u^{k(1)}(X^k, -\xi)$ . Производные  $u^{k(1)}_{/3}$  от симметричной функции являются антисимметричными:  $u^{k(1)}_{/3}(X^k, \xi) = -u^{k(1)}_{/3}(X^k, -\xi)$ . Антисимметричными будут и произведения функций  $p^{(0)}(X^k, \xi)u^{k(1)}_{/3}(X^k, \xi) = -p^{(0)}(X^k, -\xi)u^{k(1)}_{/3}(X^k, -\xi)$ . Тогда интегралы по ЯП от антисимметричных функций обращаются в ноль

$$\langle p^{(0)}u^{k(1)}_{/3} \rangle = \int_{-0.5}^0 p^{(0)}u^{k(1)}_{/3}d\xi + \int_0^{0.5} p^{(0)}u^{k(1)}_{/3}d\xi = 0. \tag{31}$$

Следовательно, в выражениях (31) все слагаемые, содержащие множители  $\langle p^{(0)}u^{k(1)}_{/3} \rangle$ , равны нулю и получаем

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)23} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}_2^2\bar{F}_3^1 - \bar{F}_1^1\bar{F}_3^3) = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{23}. \tag{32}$$

Аналогично преобразуются все остальные компоненты тензора  $\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle$  второй группы компонент

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)Ij} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{Ij}, \quad I = 1, 2. \tag{33}$$

Объединяя формулы (29) и (33), получаем, что для всех компонент обратного тензора  $(F^{-1})^{(0)ij}$  имеют место соотношения

$$\langle p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} \rangle = \langle p^{(0)} \rangle (\bar{F}^{-1})^{ij}$$

Тогда усредненные определяющие соотношения (27) для композита можно записать в следующем виде

$$\langle P^{ij(0)} \rangle = -\bar{p}(\bar{F}^{-1})^{ij} + \bar{\mathcal{F}}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k), \quad \bar{p} = \langle p^{(0)} \rangle, \tag{34}$$

то есть осредненные соотношения имеют стандартный вид для несжимаемых упругих сред, ввиду наличия слагаемого с гидростатическим усредненным давлением, хотя, в отличие от исходных компонент композита, соответствуют нелинейно-упругой анизотропной гомогенизированной среде.

Формула (27) позволяет записать представление определяющих соотношений для эффективного тензора истинных напряжений Коши  $\bar{T}^{ij} = \bar{F}^{im} \langle P^{mj(0)} \rangle$  в следующем виде

$$\bar{T}^{ij} = -\bar{p}\delta^{ij} + \mathcal{F}^{(n)0ij}(\bar{F}_l^k), \quad \mathcal{F}^{(n)ij}(\bar{F}_l^k) = \bar{F}^{im} \mathcal{F}^{(n)0mj}(\bar{F}_l^k). \quad (35)$$

## 5. РЕШЕНИЕ ЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Задача (17) является нелинейной, но одномерной, в ней все функции зависят только от  $\xi$ , тогда можно найти формальное решение этой задачи.

Интегрируя уравнения равновесия в этой системе (17), получаем, что напряжения  $P^{3j(0)}$  постоянны на ЯП

$$P^{3j(0)} = C^j = const, \quad (36)$$

где  $C^j$  – постоянные интегрирования.

Из уравнения (13) следуют, что из 9 компонент градиента деформаций  $F_l^{k(0)}$  от координаты  $\xi$  зависят только 3 компоненты

$$F_3^{k(0)} = \bar{F}_3^k + u^{k(1)}_{/3}, \quad (37)$$

а остальные 6 совпадают с компонентами усредненного градиента

$$F_L^{k(0)} = \bar{F}_L^k, \quad L=1,2. \quad (38)$$

Тогда, подставляя (36) в выражение (14) для напряжений  $P^{ij(0)}$ , вместе с условием несжимаемости получаем систему 4-х нелинейных алгебраических уравнений, которую можно рассматривать относительно 3-х компонент  $F_3^{k(0)}$  и  $p^{(0)}$

$$C^j = -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)3j} + \mathcal{F}^{(n)03j}(F_3^{k(0)}, \bar{F}_L^k, \xi), \quad \det(F^{(0)k}_l) = 1. \quad (39)$$

Запишем формальное решение этой системы в виде

$$F_3^{k(0)} = \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi), \quad p^{(0)} = \mathcal{P}(C^j, \bar{F}_L^k, \xi). \quad (40)$$

Тогда, подставляя первую формулу (40) в выражение (37), получаем систему 3-х обыкновенных линейных дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u^{k(1)}$

$$\bar{F}_3^k + u^{k(1)}_{/3} = \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi), \quad (41)$$

интегрируя которую, находим перемещения первого приближения

$$u^{k(1)} = \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi - \bar{F}_3^k \xi + B^k, \quad (42)$$

где  $B^k$  – константы интегрирования.

Условия идеального контакта в системе (17):  $[P^{3j(0)}] = 0$ ,  $[u^{k(1)}] = 0$  автоматически выполняются. Подставляя (42) в условие  $\langle u^{k(1)} \rangle = 0$ , обеспечивающее единственность решения системы (17), находим константы  $B^k$

$$B^k = \langle \int_{-0.5}^{\xi} \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) d\xi \rangle. \tag{43}$$

После подстановки выражения (42) в условие периодичности системы (17), получаем следующее уравнение

$$\langle \mathcal{G}^k(C^j, \bar{F}_L^k, \xi^m) \rangle = \bar{F}_3^k, \tag{44}$$

которое представляет собой систему 3-х нелинейных алгебраических уравнений относительно 3-х констант  $C^j$ .

Запишем формальное решение этой системы уравнений в виде

$$C^j = \mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k). \tag{45}$$

Подставляя (45) в (40) и (41), находим

$$\begin{aligned} F_3^k(0) &= \mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi), \\ p^{(0)} &= \mathcal{P}(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi), \\ u^{k(1)}_{/3} &= \mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) - \bar{F}_3^k, \end{aligned} \tag{46}$$

После подстановки третьего выражения (46) в третье уравнение системы (17), получаем соотношение между градиентом  $F_l^{k(0)}$  и усредненным градиентом  $\bar{F}_j^k$

$$F_l^{k(0)} = \bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}. \tag{47}$$

Подставляя это выражение и выражение (46) для  $p^{(0)}$  в определяющие соотношения системы (17), находим компоненты тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа в нулевом приближении

$$P^{ij(0)} = -\mathcal{P}(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi)(F^{-1})^{(0)ij} + \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}, \xi) \tag{48}$$

Для того чтобы найти усредненные напряжения  $\bar{P}^{ij}$ , нужно усреднить соотношения (48)

$$\begin{aligned} \bar{P}^{ij} &= -\bar{p}(F^{-1})^{ij} + \langle \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k + (\mathcal{G}^k(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) - \bar{F}_3^k) \delta_{l3}, \xi) \rangle, \\ \bar{p} &= \langle \mathcal{P}(\mathcal{S}^j(\bar{F}_3^k, \bar{F}_L^k), \bar{F}_L^k, \xi) \rangle \end{aligned} \tag{49}$$

Здесь учтено свойство (33). Формула (50) получена из условия несжимаемости компонентов композита. Вместо нее может быть использовано условие несжимаемости (25) композита в целом, которое является следствием несжимаемости отдельных компонентов.

Численная реализация полученного решения осуществлялась путем решения 2-х связанных систем нелинейных алгебраических уравнений (39) и (44), для которых применялся метод многомерной минимизации невязки [27].

## 6. МОДЕЛЬ $V_V$ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ СЛОЕВ КОМПОЗИТА

Рассмотрим в качестве примера случай, когда все слои композита соответствуют модели  $V_V$  ( $n=5$ ), согласно классификации, предложенной в [24,25], которая соответствует модели Муни. Эта же модель возникает

при использовании определяющих соотношений К.Ф. Черных [28]. Тогда определяющие соотношения (8) для всех слоев принимают следующий вид

$$\begin{aligned} T_{sq}^{(v)} &= -\frac{p}{2} \left( G_{sq}^{(v)} \right)^{-1} + \rho \psi_{sq}^0 \\ \rho \psi_{sq}^0 &= 4\mu \left( \left( \frac{1+\beta}{2} + (1-\beta) I_1(G_{ij}^{(v)}) \right) \delta_{sq} - (1-\beta) G_{sq}^{(v)} \right) \end{aligned} \quad (51)$$

где  $\mu(\xi), \beta(\xi)$  – константы модели, различные для каждого слоя композита,  $I_1(G_{ij}^{(v)})$  – первый инвариант тензора деформаций Коши-Грина  $G_{ij}^{(v)}$ , для которого имеют место следующие соотношения [25]

$$G_{ij}^{(v)} = \frac{1}{2} F_i^m F_j^s \delta_{ms} \quad (52)$$

Определяющие соотношения (2) для модели Муни записываются следующим образом

$$P_{ij} = -p(F^{-1})_{ij} + \rho \psi_{ik} F_{jk} \quad (53)$$

## 7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для модели  $V_v$  были проведены численные расчеты согласно разработанному методу. В первой серии расчетов ячейка периодичности состояла из 3-х слоев, каждый из которых описывается моделью  $V_v$ . Константы  $\mu(\xi), \beta(\xi)$  слоев были выбраны следующими: слои 1 и 3 были одинаковы и имели значения  $\mu = 0.7 \text{ МПа}, \beta = 1$ , а для слоя 2 упругие константы –  $\mu = 1.4 \text{ МПа}, \beta = 0.9$ . Относительные толщины  $h_1, h_3$  слоев 1 и 3 совпадали, что являлось необходимым для соблюдения симметрии ЯП.

Рассматривался случай одноосного растяжения прямоугольного бруса в направлении  $X^1$ , при этом предполагалась заданной компонента осредненного градиента деформации  $\bar{F}_{11}$ , а 2 другие ненулевые компоненты  $\bar{F}_{22}, \bar{F}_{33}$  вычислялись из условия несжимаемости (25):  $\bar{F}_{22} = \bar{F}_{33} = 1 / \sqrt{\bar{F}_{11}}$ .

На рис.1 показаны графики функций (53) в виде зависимости компоненты усредненного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа  $\bar{P}_{11}$  от компоненты  $\bar{F}_{11}$  усредненного градиента деформаций, которая изменялась в диапазоне от 1 до 1.8, построенные с помощью описанного выше алгоритма для 3-х слойного композита с различным сочетанием относительных толщин слоев  $h_1, h_2$ .

Функция  $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$ , представляющая собой диаграмму деформирования, для композита располагается между соответствующими функциями для отдельных его слоев: слоя 1 с более высокой жесткостью и слоя 2 с меньшей жесткостью, чем сам композит.

Были также проведены расчеты для 5-слойного композита, слои 1 и 5, а также 2 и 4 располагались симметрично относительно плоскости  $\xi = 0$ , слой 3 находился между слоями 2 и 4 также был симметричен. Упругие характеристики слоев 1 и 5 совпадали между собой и были равны:  $\mu = 0.7 \text{ МПа}, \beta = 1$ ,

характеристики слоев 2 и 4 также совпадали:  $\mu = 1.4 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 0.9$ , характеристики слоя 3 были выбраны следующими  $\mu = 0.7 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 0.9$ .

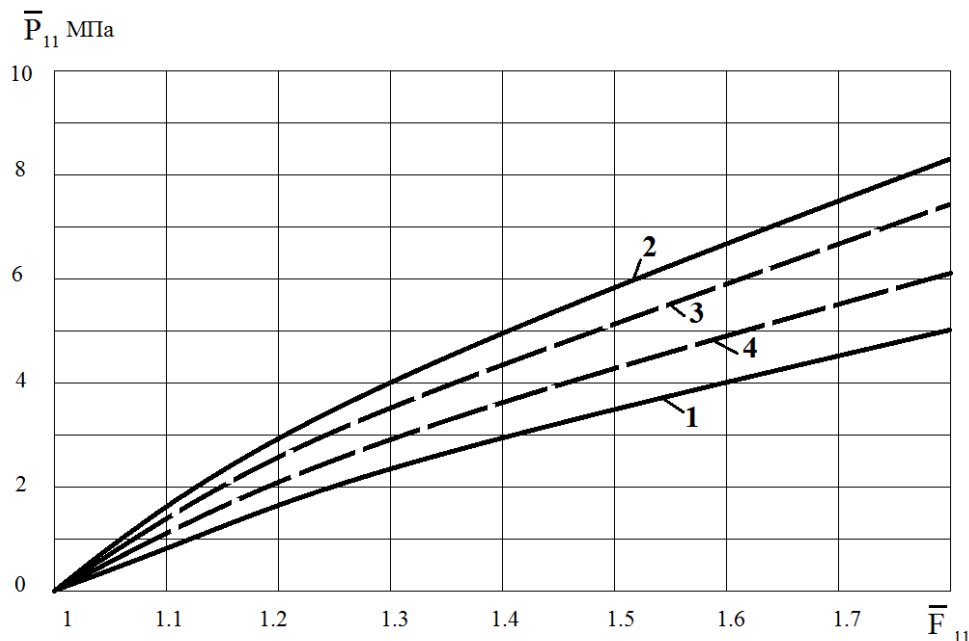


Рис.1. Диаграммы деформирования  $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$  при одноосном растяжении для несжимаемого материала 1 (кривая 1), материала 2 (кривая 2) и для 3-х слойного композита, состоящего из материалов 1 и 2, относительные толщины слоев которого находятся в соотношениях:  $h_1=h_3=0.2$ ,  $h_2=0.6$  (кривая 3) и  $h_1=h_3=0.4$ ,  $h_2=0.2$  (кривая 4).

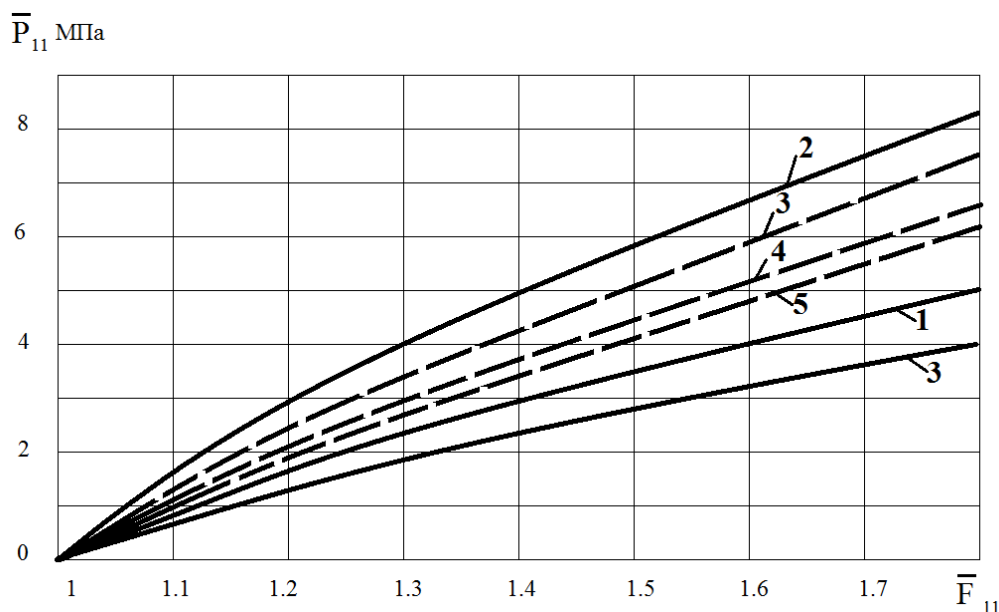


Рис.2. Диаграммы деформирования  $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$  при одноосном растяжении для несжимаемого материала 1 (кривая 1), материала 2 (кривая 2), материала 3 (кривая 2) и для 5-и слойного композита, состоящего из материалов 1, 2 и 3, относительные толщины слоев которого находятся в соотношениях:  $h_1=h_5=0.05$ ,  $h_2=h_4=0.4$ ,  $h_3=0.05$  (кривая 3),  $h_1=h_5=0.1$ ,  $h_2=h_4=0.3$ ,  $h_3=0.2$  (кривая 4),  $h_1=h_5=0.15$ ,  $h_2=h_4=0.25$ ,  $h_3=0.2$  (кривая 4).

На рис.2 показаны графики функций  $\bar{P}_{11}(\bar{F}_{11})$  для 5-и слойного композита с различным сочетанием относительных толщин слоев  $h_1...h_5$  и для отдельных слоев 1, 2 и 3. Увеличение относительной толщины более жестких слоев 2 и 4 приводит, как и в случае 3-х слойного композита к повышению жесткости композита, его диаграмма деформирования приближается к диаграмме деформирования материала 2.

Таким образом, разработанный метод позволяет рассчитывать эффективные диаграммы деформирования несжимаемых слоистых композитов при конечных деформациях, при произвольном количестве слоев в ячейке периодичности.

## ВЫВОДЫ

Предложен вариант метода асимптотического усреднения для слоистых несжимаемых нелинейно-упругих композитов с конечными деформациями и периодической структурой. Использовано универсальное представление определяющих соотношений для комплекса различных моделей несжимаемых сред с конечными деформациями. Метод асимптотического усреднения позволяет получать эффективные определяющие соотношения и напряжения в компонентах нелинейно-упругого композита, обеспечивая математическую обоснованность и точность аппроксимации по отношению к общей исходной постановке задачи, как неоднородной среды.

Получено решение локальных задач на ячейке периодичности в формально явной форме – в виде связанных между собой систем нелинейных алгебраических уравнений. Разработанный метод решения этих систем позволяет вычислять диаграммы деформирования слоистых нелинейно-упругих композитов с минимальными временными затратами, что чрезвычайно важно при использовании этого метода для расчета элементов конструкций из таких композитов.

Показано, что метод асимптотического осреднения обеспечивает выполнение условия несжимаемости композита, если фазы композита являются несжимаемыми. Следствием этого утверждения получено общее представление эффективных определяющих соотношений для несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями, содержащее член с гидростатическим давлением.

В качестве примера приведены численные расчеты эффективных диаграмм деформирования многослойного композита, слои которого описываются моделью нелинейно-упругого несжимаемого материала типа Муни.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Димитриенко Ю.И., Димитриенко И.Д. *Моделирование динамических процессов деформирования гибких тканевых композиционных материалов* // Инженерный журнал: наука и инновации (Электронное научно-техническое издание). – 2014. – №5(29). – С.6.
2. DeBotton G., Hariton I., Socolsky E.A. *Neo-Hookean fiber-reinforced composites in finite elasticity* // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006. – Vol.54. – Pp.533-559.

3. Qingsheng Yang, Fang Xu *Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law* // *Frontiers of Mechanical Engineering in China*. – 2009. – Vol.4. – Iss.3. – Pp.284-288.
4. Aboudi J. *Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites* // *Int. J. Multiscale Comput. Engrg.* – 2008. – Vol.6. – Pp.411-434.
5. Bin Zhang, Xiaoming Yu, Boqin Gu *Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension* // *Polym. Compos.* – 2015. DOI:10.1002/pc.23596.
6. Ge Qi, Luo Xiaofan, Iversen Ch.B., Nejad Hossein Birjandi, Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. *A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape polymeric composites based on dual thermal transitions* // *Intern. J. of Solids and Structures*. – 2014. – Vol.51. – Pp.2777-2790.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. – New York: John Wiley & Sons, 1979. – 324 p.
8. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Корнев Ю.В., Карнет Ю.Н. *Оценка механических свойств гиперупругих композитов с малыми добавками дисперсных наполнителей* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №3. – С.352-359.
9. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Карнет Ю.Н. *Оценка механических свойств гиперупругих полимерных композитов с малыми добавками наноразмерных частиц наполнителей и учёт влияния их агрегации* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2016. – Т.22. – №2. – С.213-224.
10. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Карнет Ю.Н., Гамлицкий Ю.А., Мудрук В.И. *Оценка механических свойств гиперупругих композитных материалов с малыми добавками минеральных дисперсных наполнителей. Часть 1. Аппроксимация потенциала гиперупругой матрицы* // *Каучук и резина*. – 2016. – №6. – С.6-9.
11. Гамлицкий Ю.А., Левин В.А., Филипенко Е.В., Яковлев М.Я. *К вопросу о постановке задачи расчета поля напряжений элементарной ячейки эластомерного нанокомпозита* // *Каучук и резина*. – 2010. – №4. – С.22-25.
12. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. *Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains* // *Composite Structures*. – 2015. – Vol.131. – Pp.25-36.
13. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 356 с.
14. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 324 с.
15. Dimitrienko Yu.I. *A Structural Thermo-mechanical Model of textile Composite Materials at High temperatures* // *Composites Science and Technology*. – 1999. – Vol.59. – No.7. – Pp.1041-1053.
16. Dimitrienko Y. *Modeling of the Mechanical Properties of Composite Materials at High Temperatures: Part 1. Matrix and Fibers* // *Applied Composite Materials*. – 1997. – Vol.4. – No.4. – Pp.219-237.
17. Dimitrienko Yu.I. *Mechanics of Porous media with phase transitions and Periodical structures 1. Method of Asymptotic Averaging* // *European J. of Mechanics – A/Solids*. – 1998. – Vol.17. – No.2. – Pp.305-319.
18. Dimitrienko Y.I. *Modeling of the mechanical properties of Composite Materials at High temperatures. Part 3. Textile Composites* // *Applied Composite Materials*. – 1998. – Vol.5. – No.4. – Pp.257-272.

19. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород.* – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
20. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Сборщиков С.В. *Многомасштабное моделирование упруго-пластических композитов с учетом повреждаемости* // Математическое моделирование и численные методы. – 2016. – №2(10). – С.3-24.
21. Димитриенко Ю.И., Иванов М.Ю. *Моделирование нелинейных динамических процессов переноса в пористых средах* // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана. Серия: Естественные науки. – 2008. – №1. – С.24-39.
22. Dimitrienko Yu.I. *Novel viscoelastic Models for elastomers under finite deformations* // European J. of Mechanics – A/Solids. – 2002. – Vol.21. – No.1. – Pp.133-150.
23. Димитриенко Ю.И., Даштиев И.З. *Модели вязкоупругого поведения эластомеров при конечных деформациях* // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана. Серия: Естественные науки. – 2000. – №1. – С.21-41.
24. Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations.* – Springer, 2010. – 722 p.
25. Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т.2. Универсальные законы механики и электродинамики сплошной среды.* – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2011. – 560 с.
26. Димитриенко Ю.И. *Механика сплошной среды. Т.4. Основы механики твердого тела.* – М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2013. – 624 с.
27. Черных К.Ф. *Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах.* – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
28. Пантелеев А.В., Летова Т.А. *Методы оптимизации в примерах и задачах.* – М.: Высшая школа, 2008. – 544 с.

## REFERENCES

1. Dimitrienko Yu.I., Dimitrienko I.D. *Modelirovanie dinamicheskikh protsessov deformirovaniya gibkikh tkanevykh kompozitsionnykh materialov [Simulation of dynamic deformation processes in flexible textile composites].* Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii, 2014, No.5(29), P.6.
2. DeBotton G, Hariton I, Socolsky E.A. *Neo-Hookean fiber-reinforced composites in finite elasticity.* J. of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, Vol.54, Pp.533-559.
3. Qingsheng Yang, Fang Xu *Numerical modeling of nonlinear deformation of polymer composites based on hyperelastic constitutive law.* Frontiers of Mechanical Engineering in China, 2009, Vol.4, Iss.3, Pp.284-288.
4. Aboudi J. *Finite strain micromechanical modeling of multiphase composites.* Int. J. Multiscale Comput. Engrg, 2008, Vol.6, Pp.411-434.
5. Bin Zhang, Xiaoming Yu, Boqin Gu *Micromechanical modeling of large deformation in sepiolite reinforced rubber sealing composites under transverse tension.* Polym. Compos., 2015. DOI:10.1002/pc.23596.
6. Ge Qi, Luo Xiaofan, Iversen Ch.B., Nejad Hossein Birjandi, Mather P.T., Dunn M.L., Qi H.J. *A finite deformation thermomechanical constitutive model for triple shape*



- polymeric composites based on dual thermal transitions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2014, Vol.51, Pp.2777-2790.
7. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York, John Wiley & Sons., 1979, 324 p.
  8. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B., Yanovsky Yu.G., Kornev Yu.V., Karnet Yu.N. *Otsenka mekhanicheskikh svojstv giperuprugikh kompozitov s malymi dobavkami dispersnykh napolnitelej [Evaluation of mechanical properties of hyperelastic composites with small additions of dispersed fillers]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.3. Pp.352-359.
  9. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B., Karnet Yu.N. *Otsenka mekhanicheskikh svojstv giperuprugikh polimernykh kompozitov s malymi dobavkami nanorazmernykh chastits napolnitelej i uchyot vliyaniya ikh agregatsii [Evaluation of mechanical properties of hyperelastic polymer composites with small additions of nanosized filler particles and the effects of their aggregation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.2, Pp.213-224.
  10. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B., Karnet Yu.N., Gamlicky Yu.A., Mudruk V.I. *Otsenka mekhanicheskikh svojstv giperuprugikh kompozitnykh materialov s malymi dobavkami mineral'nykh dispersnykh napolnitelej. Chast' I. Approksimatsiya potentsiala giperuprugoj matritsy [Evaluation of the mechanical properties of hyperelastic composite materials with small additions of mineral dispersed fillers. Part 1. Approximation of the potential of a hyperelastic matrix]*. // Kauchuk i rezina, 2016, No.6, Pp.6-9.
  11. Gamlicky Yu.A., Levin V.A., Filipenko E.V., Yakovlev M.Ya. *K voprosu o postanovke zadachi rascheta polya napryazhenij ehlementarnoj yachejki ehlastomernogo nanokompozita [To the question of the formulation of the problem of calculating the stress field of an elementary cell of an elastomeric nanocomposite]*. Kauchuk i rezina, 2010, No.4, Pp.22-25.
  12. Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. *Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains*. Composite Structures, 2015, Vol.131, Pp.25-36.
  13. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Averaging processes in periodic media*. Springer, 1992, 356 p.
  14. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, 1984, 324 p.
  15. Dimitrienko Yu.I. *A Structural Thermo-mechanical Model of textile Composite Materials at High temperatures*. Composites Science and Technology, 1999, Vol.59, No.7, Pp.1041-1053.
  16. Dimitrienko Y. *Modeling of the Mechanical Properties of Composite Materials at High Temperatures: Part 1. Matrix and Fibers*. Applied Composite Materials, 1997, Vol.4, No.4, Pp.219-237.
  17. Dimitrienko Yu.I. *Mechanics of Porous media with phase transitions and Periodical structures 1. Method of Asymptotic Averaging*. European J. of Mechanics – A/Solids, 1998, Vol.17, No.2, Pp.305-319.
  18. Dimitrienko Y.I. *Modeling of the mechanical properties of Composite Materials at High temperatures. Part 3. Textile Composites*. Applied Composite Materials, 1998, Vol.5, No.4, Pp.257-272.
  19. Vlasov A.N., Merzljakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svojstv v mekhanike skal'nykh porod [Averaging of deformation and strength*

- properties in rock mechanics*]. Moskva, Izdatel'stvo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
20. Dimitrienko Y., Gubareva E., Sborschikov S. *Multiscale modeling of elastic-plastic composites with an allowance for fault probability*. Mathematical Modeling and Computational Methods, 2016, No.2(10), Pp.3-23.
  21. Dimitrienko Yu.I., Ivanov M.Yu. *Modelirovanie nelinejnykh dinamicheskikh protsessov perenosa v poristyykh sredakh [Modeling of Nonlinear Dynamical Processes of Transfer in Porous Media]*. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Estestvennye nauki, 2008, No.1, Pp.39-56.
  22. Dimitrienko Yu.I. *Novel viscoelastic Models for elastomers under finite deformations*. European J. of Mechanics – A/Solids, 2002, Vol.21, No.1, Pp.133-150.
  23. Dimitrienko Yu.I., Dashtiev I.Z. *Modeli vyazkouprugogo povedeniya ehlastomerov pri konechnykh deformatsiyakh porod [Viscoelastic behavior models for elastomers at finite deformations]*. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Estestvennye nauki, 2000, No.1, Pp.21-41.
  24. Dimitrienko Yu.I. *Nonlinear Continuum Mechanics and Large Inelastic Deformations*. Springer, 2010, 722 p.
  25. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T.2. Universal'nye zakony mekhaniki i ehlektrodinamiki sploshnoj sredy [Continuum Mechanics. Vol.2. Universal laws of continuum mechanics and electrodynamics]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2011, 560 p.
  26. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika sploshnoj sredy. T.4. Osnovy mekhaniki tverdogo tela [Continuum Mechanics. Vol.4. Bases of Solid Mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2013, 624 p.
  27. Chernyh K.F. *Nelinejnaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh raschetakh [Nonlinear theory of elasticity in engineering calculations]*. Leningrad, Mashinostroenie, 1986, 336 p.
  28. Panteleev A.V., Letova T.A. *Metody optimizatsii v primerakh i zadachakh [Optimization methods in examples and tasks]*. Moskva, Vysshaya shkola, 2008, 544 p.

Поступила в редакцию 14 февраля 2018 года.

---

Сведения об авторе:

Димитриенко Юрий Иванович – д.ф.-м.н., проф., директор Научно-образовательного центра «Суперкомпьютерное инженерное моделирование и разработка программных комплексов» МГТУ им. Н.Э. Баумана; зав. каф. «Вычислительная математика и математическая физика», Московский Государственный Технический Университет им.Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия; e-mail: [dimit.bmstu@gmail.com](mailto:dimit.bmstu@gmail.com)