

УДК 539.3

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ\*

Столбова О.С.

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет,  
г. Пермь, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В рамках теории конечных деформаций построена модель поведения сплавов с памятью формы (СПФ) в условиях аустенитно-мартенситного фазового перехода и пластического деформирования. Все нелинейные соотношения, имеющие место при конечных деформациях, линеаризуются, для этого применяется подход, основанный на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Предполагается аддитивность скоростей изменения упругих, температурных, фазовых, структурных и пластических деформаций. Для описания изменения фазовых и структурных деформаций используется упрощенный вариант модели нелинейного деформирования СПФ, обобщенный на конечные деформации. Учитывается сдвиг характерных температур фазового перехода в нагруженном материале, а также зависимость упругих модулей от доли мартенситной фазы. Для описания упругого поведения материала используется упрощенный закон Синьборини.

Записана постановка для краевой задачи в дифференциальной форме и вариационная постановка в форме Лагранжа. В качестве краевых задач рассматриваются задачи об изгибе стержня прямоугольного сечения и кручении цилиндрического образца из СПФ. В начальный момент времени образцы, закрепленные с левого торца, находятся в аустенитном состоянии. К правому торцу прикладываются усилия, вызывающие изгиб/кручение, так, что в материале возникают упругие и, при достижении предела текучести, пластические деформации. После этого, при той же температуре образцы частично разгружаются, затем они охлаждаются под нагрузкой таким образом, что в материале происходит прямое фазовое превращение из аустенита в мартенсит и накопление фазовых и структурных деформаций. Задачи решены в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием процедуры пошагового нагружения. Получены распределения интенсивности пластических, фазовых и структурных деформаций, а также интенсивности напряжений.

**Ключевые слова:** конечные деформации; определяющие уравнения; сплавы с памятью формы; фазовый переход; конечно-элементный анализ

## NUMERICAL MODELING OF THE THERMOMECHANICAL BEHAVIOR OF SHAPE MEMORY ALLOYS UNDER FINITE DEFORMATIONS

Stolbova O.S.

*Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy  
of Sciences, Perm, Russia  
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-00161 мол\_а).

## ABSTRACT

In the framework of finite deformations theory a model of the behavior of shape-memory alloys (SMA) in view of the austenite-to-martensite phase transition and plastic deformation is constructed. All the nonlinear relations that occur under finite deformations are linearized, an approach based on the kinematics of superposition of small deformations on finite ones is used. It is assumed that the rates of change in the elastic, temperature, phase, structural and plastic deformations are additive. To describe the change in phase and structural deformations a simplified version of the model of nonlinear deformation of the SMA generalized to finite deformations is used. We take into account the shift of characteristic temperatures of the phase transition in the loaded material and also the dependence of the elastic moduli on the fraction of the martensitic phase. To describe the elastic behavior of the material a simplified Signorini law is used.

The statement for the boundary value problem in differential form and the variational formulation in the Lagrange form are obtained. As boundary value problems we consider problems on the cantilever beam bending and torsion of a cylindrical sample of SMA. At the initial time the samples clamped at the left end face are in the austenitic state. To the right end the forces causing bending/torsion are applied, so the elastic and after the yield point plastic deformations appear in the material. After that at the same temperature the samples are partially unloaded, then they are cooled under the load with the phase and structural strains occurred as a result of direct martensite transition. The problems are solved in three-dimensional formulation by the finite element method using the step-by-step procedure. The distributions of the intensity of plastic, phase and structural deformations and the intensity of stresses are obtained.

**Keywords:** finite strains; constitutive equations; shape memory alloys; phase transformation; finite element analysis

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует множество моделей, позволяющих описать термомеханическое поведение сплавов с памятью формы (СПФ) в рамках малых деформаций. Так, в работах [1-3] представлены соотношения для нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Данные уравнения позволяют описать накопление деформаций как в процессе прямого фазового превращения из аустенита в мартенсит, так и за счет переориентации ячеек мартенсита вследствие изменения внешней нагрузки, а также снятие этих деформаций в процессе обратного превращения (явление памяти формы). В работе [2] учитывается также возможность пластического деформирования СПФ в рамках модели, предполагающей наличие единой диаграммы пластического деформирования, при этом предполагается аддитивность упругих, фазово-структурных и пластических деформаций.

В ряде работ получены численные решения для краевых задач (рассматриваются задачи изгиба [1,4,5], кручения [6] образцов, нагружения толстостенного цилиндра [3] внутренним давлением) в рамках теории малых деформаций. Для нахождения решения применяется как метод конечных разностей (в этом случае обычно используется гипотеза Бернулли-Эйлера, рассматриваются малые значения изгибающего момента), так и метод конечных элементов [5].

В [7,8] представлены соотношения, описывающие прямой и обратный фазовый переход в рамках теории конечных деформаций, а также приведены результаты численного решения краевых задач (растяжение и кручение трубы, изгиб балки) методом конечных элементов. В этих работах в качестве неупругих

деформаций рассматриваются деформации, связанные с температурным расширением и с фазовым переходом аустенит-мартенсит. В работе [7] приведено сравнение решения задачи об изгибе балки, полученных в рамках малых и конечных деформаций и показано, что решение в рамках малых деформаций приводит к увеличению размеров конечных элементов на конце балки, поскольку в этом случае не учитывается квадратичное слагаемое в тензоре деформаций.

В настоящей работе строится модель термомеханического поведения СПФ при конечных деформациях в рамках формализованного подхода [9], позволяющего получать уравнения, удовлетворяющие принципам термодинамики и объективности, для сложных сред при конечных деформациях. Модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [1-3], закон пластического течения [10] и закон линейного температурного расширения обобщаются на случай конечных деформаций. Для решения краевых задач записывается вариационная постановка, которая реализуется методом конечных элементов.

Считается, что теплопроводность образца достаточно высокая, изменение однородной температуры окружающей среды происходит достаточно медленно, поэтому в любой момент времени температура материала также является однородной и равна температуре окружающей среды. Это позволяет не рассматривать процесс установления температуры, т.е. не решать уравнение теплопроводности.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Как известно, поведение среды при конечных деформациях может быть описано с помощью следующих характеристик процесса [11,12]:  $\kappa_0$  и  $\kappa$  – начальная (недеформированная) и текущая (актуальная) конфигурации,  $\mathbf{F}$  – градиент места, переводящий начальную конфигурацию в текущую,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$  и  $\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{g})/2$  – мера и тензор деформации Коши-Грина (здесь  $\mathbf{g}$  – метрический тензор).

Поскольку уравнения, описывающие поведение материалов при конечных деформациях, в общем случае нелинейные, используется один из наиболее распространенных подходов – линеаризация уравнений, что позволяет отслеживать всю историю рассматриваемого процесса. В работе [9] предложен подход, основанный на кинематике наложения малых деформаций на конечные. Для этого вводится промежуточная конфигурация  $\kappa^*$ , близкая к текущей. Близость промежуточной и текущей конфигураций формализуется соотношением  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_* + \varepsilon \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_*$  – радиус-векторы в конфигурациях  $\kappa$  и  $\kappa^*$  соответственно,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений из  $\kappa$  в  $\kappa^*$ , а  $\varepsilon$  – малая положительная величина, при этом все кинематические и определяющие соотношения записываются с точностью до линейных по  $\varepsilon$  слагаемых. Здесь и далее все величины, отмеченные “\*”, относятся к промежуточной конфигурации.

Таким образом, относительно промежуточной конфигурации градиент места записывается в следующем виде

$$\mathbf{F} = (\mathbf{g} + \varepsilon \mathbf{h}) \cdot \mathbf{F}_* = [\mathbf{g} + \varepsilon (\mathbf{e} + \mathbf{d})] \cdot \mathbf{F}_*$$

где  $\mathbf{F}_*$  – градиент места, переводящий начальную конфигурацию в промежуточную,  $\mathbf{h}$  – градиент вектора перемещений, связывающий конфигурации  $\kappa^*$  и  $\kappa$ ,  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{d}$  – тензоры малых деформаций и поворотов

относительно промежуточной конфигурации (симметричная и кососимметричная часть тензора  $\mathbf{h}$ ). Для меры и тензора деформации Коши-Грина относительно конфигурации  $\mathbf{k}^*$  будут справедливы следующие соотношения

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_* + 2\varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_*, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_* + \varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_* = \mathbf{E}_* + \Delta \mathbf{E}. \quad (1)$$

Осуществляя в (1) предельный переход  $\mathbf{k}_* \rightarrow \mathbf{k}$ , получаем, что

$$\dot{\mathbf{C}} = 2 \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{e}}$  – тензор деформации скорости.

Из эквивалентных форм представления определяющих соотношений для простого материала, удовлетворяющих принципу объективности [11], используем форму

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, \Theta) \cdot \mathbf{F}^T.$$

Здесь  $\mathbf{T}$  – тензор истинных напряжений,  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{C}_E, \Theta)$  – функция отклика материала на деформацию,  $\mathbf{C}_E = \mathbf{F}_E^T \cdot \mathbf{F}_E$  – мера упругих деформаций Коши-Грина,  $J = I_3(\mathbf{F})$  – третий инвариант градиента места  $\mathbf{F}$ ,  $\Theta$  – абсолютная температура. В этом соотношении  $\tilde{\mathbf{g}} \equiv \mathbf{P}_{II} = 2(\partial W / \partial \mathbf{C}_E)$  – второй (симметричный) тензор напряжений Пиола-Кирхгофа, а  $W(\mathbf{C}_E, \Theta)$  – упругий потенциал. Относительно промежуточной конфигурации тензор  $\mathbf{P}_{II}$  запишется в виде

$$\mathbf{P}_{II} = \mathbf{P}_{II*} + \tilde{\mathbf{L}}_*^{IV} \cdot \Delta \mathbf{E}_E, \quad (2)$$

где  $\tilde{\mathbf{L}}_*^{IV}$  – тензор четвертого ранга, определяющий отклик материала на приращение упругих деформаций,  $\mathbf{E}_E = (\mathbf{C}_E - \mathbf{g})/2$  – тензор упругих деформаций Коши-Грина. В результате предельного перехода в (2) получаем, что  $\dot{\mathbf{P}}_{II} = \tilde{\mathbf{L}}^{IV} \cdot \dot{\mathbf{E}}_E$ , где (см. [13])

$$\tilde{\mathbf{L}}^{IV} = 4 \frac{\partial^2 W(\mathbf{C}_E, \Theta)}{\partial \mathbf{C}_E^2} = 2 \frac{\partial \mathbf{P}_{II}(\mathbf{C}_E, \Theta)}{\partial \mathbf{C}_E}.$$

Для описания фазово-структурного перехода в сплавах с памятью формы представим кинематическое уравнение (аналогично [13,14]) в следующем виде (предполагается аддитивность скоростей изменения упругих, температурных, фазовых, структурных и пластических деформаций):

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_E + \dot{\mathbf{E}}_\Theta + \dot{\mathbf{E}}_{Ph} + \dot{\mathbf{E}}_{St} + \dot{\mathbf{E}}_P. \quad (3)$$

В этом соотношении  $\dot{\mathbf{E}}_E = \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{e}}_E \cdot \mathbf{F}$  – скорость изменения упругих деформаций,  $\dot{\mathbf{E}}_\Theta = \alpha \dot{\Theta} \mathbf{C} = \alpha \dot{\Theta} (2\mathbf{E} + \mathbf{g})$  – скорость изменения температурных деформаций (обобщение закона изотропного температурного расширения на случай конечных деформаций,  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения),  $\dot{\mathbf{E}}_{Ph}$  и  $\dot{\mathbf{E}}_{St}$  – скорости изменения фазовых и структурных деформаций,  $\dot{\mathbf{E}}_P = 3\dot{\sigma}_i / (2H\sigma_i) (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F})$  при  $\sigma_i \geq \sigma_T$  – скорость изменения пластических деформаций (обобщение закона пластического течения на случай конечных деформаций  $\mathbf{S}$  – девиатор  $\mathbf{T}$ ,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\sigma_T$  – предел текучести,  $H$  – модуль упрочнения).

Для описания изменения фазовых и структурных деформаций используется упрощенный вариант модели нелинейного деформирования СПФ для прямого фазового превращения, предложенный в [3], который может быть обобщен на конечные деформации следующим образом

$$\dot{\mathbf{E}}_{ph} = \left( \frac{3}{2} \rho_D \frac{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F})}{\sigma_i} F_1(\sigma_i) \right) \dot{\varphi}_M, \quad \dot{\varphi}_M > 0;$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{St} = \left( \frac{3}{2} \rho_D \frac{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F})}{\sigma_i} \varphi_{St} F_2'(\sigma_i) \right) \dot{\sigma}_i, \quad \dot{\sigma}_i > 0.$$

Здесь  $\rho_D$  – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового перехода;  $\varphi_M$  – объёмная доля мартенситной фазы в материале (изменяется от 0 в полностью аустенитном состоянии до 1 в полностью мартенситном);  $\varphi_{St} \leq \varphi_M$  – часть мартенсита представительного объема, испытывающая в рассматриваемый момент структурное превращение (увеличение степени ориентированности низкосимметричных мартенситных ячеек, происходящее при условии роста интенсивности напряжений выше максимального ранее достигнутого уровня). Алгоритм определения  $\varphi_{St}$  изложен в работе [1].

$F_1(\sigma_i)$  и  $F_2(\sigma_i)$  – материальные функции, интерпретируемые как функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное и мартенситное фазовое состояние соответственно), которые, в соответствии с характерной формой диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости, берутся в виде функции распределения Лапласа и функции распределения Вейбулла [3]

$$F_1(\sigma) = \Phi_1(\sigma / \sigma_{01}), \quad \Phi_1(x) = \sqrt{2/\pi} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt;$$

$$F_2(\sigma) = \Phi_2(\sigma / \sigma_{02}), \quad \Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^2).$$

В этих соотношениях  $\sigma_{01}$  и  $\sigma_{02}$  – параметры материала.

В процессе прямого фазового перехода ( $\dot{\varphi}_M > 0$ ) зависимость объёмной доли мартенситной фазы  $\varphi_M$  от температуры  $\Theta$  аппроксимируется следующим соотношением [15]

$$\varphi_M(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0; \\ 0.5(1 - \cos(\pi\xi)), & 0 < \xi < 1; \\ 1, & \xi \geq 1. \end{cases} \quad \xi = \frac{M_s - \Theta}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_f \leq \Theta \leq M_s. \quad (4)$$

Здесь  $M_s^0$  и  $M_f^0$  – температуры начала и завершения прямого мартенситного превращения при отсутствии напряжений. Если фазовый переход происходит в нагруженном материале, критические температуры фазового перехода сдвигаются согласно соотношению Клаузиуса-Клапейрона (см. [13])

$$M_s = M_s^0 + \frac{M_s^0}{[Q]} (\mathbf{P}_{II} \cdot \cdot [\mathbf{E}_{ph}]), \quad M_f = M_f^0 + \frac{M_f^0}{[Q]} (\mathbf{P}_{II} \cdot \cdot [\mathbf{E}_{ph}]), \quad (5)$$

где  $[Q]$  и  $[\mathbf{E}_{ph}]$  – выделившееся тепло и изменение фазовых деформаций в процессе прямого мартенситного превращения.

Для описания упругого поведения материала используется упрощенный закон Синьорини [12]

$$\mathbf{P}_{II} = J \left[ (k_1 + k_2) \mathbf{C}_E^{-1} - 2k_2 \mathbf{C}_E^{-2} \right],$$

$$k_1 = \Lambda(\varphi_M) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right] / 2 + (\Lambda(\varphi_M) + G(\varphi_M)) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right]^2 / 8,$$

$$k_2 = G(\varphi_M) - (\Lambda(\varphi_M) + G(\varphi_M)) \left[ 3 - I_1(\mathbf{C}_E^{-1}) \right] / 2,$$

в котором  $\Lambda(\varphi_M)$  и  $G(\varphi_M)$  – параметры материала, имеющие смысл параметра Ламе и модуля сдвига линейной теории упругости. Для этого закона тензор  $\tilde{\mathbf{L}}^{IV}$  записывается в следующем виде [13]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}^{IV} = J_E \left[ (k_1 + k_2) \mathbf{C}_E^{-1} \mathbf{C}_E^{-1} - 2k_2 \mathbf{C}_E^{-1} \mathbf{C}_E^{-2} + (\Lambda + G - 2k_2) \mathbf{C}_E^{-2} \mathbf{C}_E^{-1} - \right. \\ \left. - 2(k_1 + k_2) \mathbf{C}_E^{-1} \cdot \mathbf{C}_{II}^2 \cdot \mathbf{C}_E^{-1} + 4k_2 \left( (\mathbf{C}_E^{-1} \cdot \mathbf{C}_{II}^2 \cdot \mathbf{C}_E^{-1})^2 \cdot \mathbf{C}_E^{-1} + \mathbf{C}_E^{-1} \cdot (\mathbf{C}_E^{-1} \cdot \mathbf{C}_{II}^2 \cdot \mathbf{C}_E^{-1}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{C}_{II}$  – второй изотропный тензор четвертого ранга [12],  $\cdot$  – позиционное скалярное умножение тензора второго ранга справа на второй базисный вектор тензора четвертого ранга [16].

Предполагается, что зависимости упругих модулей материала от доли мартенситной фазы могут быть представлены в следующем виде (см. [17])

$$\frac{1}{G(\varphi_M)} = \frac{\varphi_M}{G_M} + \frac{1 - \varphi_M}{G_A}, \quad \frac{1}{E(\varphi_M)} = \frac{\varphi_M}{E_M} + \frac{1 - \varphi_M}{E_A}.$$

В этих соотношениях  $E_M$ ,  $G_M$ ,  $E_A$  и  $G_A$  – модули Юнга и модули сдвига для материала в полностью мартенситном и полностью аустенитном состоянии. Тогда для  $\Lambda(\varphi_M)$  справедливо соотношение

$$\Lambda(\varphi_M) = \frac{(E(\varphi_M) - 2G(\varphi_M))G(\varphi_M)}{3G(\varphi_M) - E(\varphi_M)}.$$

## 2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для описания квазистатических процессов записываются следующие соотношения:

1. уравнение равновесия

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{K} = 0,$$

где  $\tilde{\nabla}$  и  $\rho$  – оператор Гамильтона и плотность массы в текущей конфигурации,

$\mathbf{K}$  – вектор массовых сил, а  $\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_{II} \cdot \mathbf{F}^T$ ;

2. определяющее соотношение

$$\dot{\mathbf{P}}_{II} = \tilde{\mathbf{L}}^{IV} \cdot \dot{\mathbf{E}}_E,$$

в котором  $\dot{\mathbf{E}}_E = \dot{\mathbf{E}} - (\dot{\mathbf{E}}_\theta + \dot{\mathbf{E}}_{Ph} + \dot{\mathbf{E}}_{St} + \dot{\mathbf{E}}_P)$  согласно (3);

3. кинематические соотношения

$$\mathbf{E} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{g}) / 2, \quad \mathbf{F} = \mathbf{g} + (\nabla \mathbf{U})^T,$$

где  $\mathbf{U} = \mathbf{R} - \mathbf{r}$  – вектор перемещений из начальной конфигурации в текущую ( $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  – радиус-векторы в начальной и в текущей конфигурации соответственно),  $\nabla$  – оператор Гамильтона в начальной конфигурации;

4. граничные условия для перемещений, заданных на поверхности  $S_U$ , и для усилий, заданных на поверхности  $S_Q$

$$\mathbf{U}|_{S_U} = \tilde{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{T}|_{S_Q} = \mathbf{q},$$

где  $\mathbf{N}$  – внешняя единичная нормаль к поверхности тела в текущей конфигурации,  $\tilde{\mathbf{U}}$  и  $\mathbf{q}$  – заданные перемещения и усилия,  $S = S_U \cup S_Q$  – полная поверхность тела в текущей конфигурации;

5. начальные условия (предполагается, что в недеформированном состоянии в теле отсутствуют напряжения)

$$\mathbf{F}(t = 0) = \mathbf{g}, \quad \mathbf{T}(t = 0) = \mathbf{0}.$$

Применяя стандартную процедуру Галёркина к уравнению равновесия, граничным условиям для напряжений и учитывая связи, наложенные на перемещения, приходим к вариационной постановке краевой задачи для тела, ограниченного поверхностью  $S$  и занимающего в пространстве область  $V$ , в форме Лагранжа в текущей конфигурации, которая имеет следующий известный вид

$$\int_S \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS + \int_V \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV = \int_V \mathbf{T} \cdot \tilde{\nabla} \delta \mathbf{U} dV.$$

Здесь  $\mathbf{Q}$  – вектор поверхностных сил,  $\delta$  – символ вариации.

Так как поверхность  $S$  и объем  $V$  в текущей конфигурации неизвестны до решения задачи, вариационное уравнение приводится к какой-либо известной конфигурации, и, в частности, в начальной оно будет иметь следующий вид

$$\int_{S_0} J \sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{n}} \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{U} dS_0 + \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{U} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{P}_{II} \cdot \delta \mathbf{E} dV_0. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя единичная нормаль к поверхности тела в начальной конфигурации,  $\rho_0$  – плотность массы в начальной конфигурации.

Поскольку  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_* + \varepsilon \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{U}_*$  – вектор перемещений из начальной конфигурации в промежуточную, то  $\delta \mathbf{U} = \varepsilon \delta \mathbf{u}$ . Из соотношений (1) следует, что

$$\delta \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{F}_*^T \cdot \delta \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_* = \delta \Delta \mathbf{E}, \quad \text{где } \delta \mathbf{e} = \left( \nabla^* \delta \mathbf{u} + (\nabla^* \delta \mathbf{u})^T \right) / 2, \quad \nabla^* \text{ – оператор Гамильтона}$$

в промежуточной конфигурации  $k^*$ . Для решения краевой задачи все величины в вариационном уравнении (6) представляются относительно промежуточной конфигурации  $k^*$ , что приводит к линеаризации вариационного уравнения. Определяющее соотношение относительно  $k^*$  будет иметь следующий вид

$$\mathbf{P}_{II} = \mathbf{P}_{II^*} + \tilde{\mathbf{L}}_*^{IV} \cdot \left[ \Delta \mathbf{E} - \alpha (2\mathbf{E}_* + \mathbf{g}) \Delta \Theta - \frac{3}{2} \rho_D \frac{(\mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{F}_*)}{\sigma_{i^*}} F_1(\sigma_{i^*}) \Delta \varphi_M - \frac{3}{2} \rho_D \frac{(\mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{F}_*)}{\sigma_{i^*}} \varphi_{St} F_2'(\sigma_{i^*}) \Delta \sigma_i - \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{F}_*^T \cdot \mathbf{S}_* \cdot \mathbf{F}_*)}{H \sigma_{i^*}} \Delta \sigma_i \right],$$

где

$$\Delta \varphi_M = \varphi_M(\mathbf{P}_{II}, \Theta) - \varphi_M(\mathbf{P}_{II^*}, \Theta_*), \quad \Delta \sigma_i = \frac{3}{2} \frac{(\mathbf{T} - \mathbf{T}_*) \cdot \mathbf{S}_*}{\sigma_{i^*}}, \quad \text{а } \varphi_M \text{ находится}$$

по соотношениям (4) и (5).

В качестве краевых задач рассматриваются задачи об изгибе стержня прямоугольного сечения (рис.1а) и кручении цилиндрического образца (рис.1б) из СПФ. В начальный момент времени образцы, закрепленные с левого торца, находятся в аустенитном состоянии. К правому торцу прикладываются усилия, вызывающие изгиб/кручение, так, что в материале возникают упругие и,

при достижении предела текучести, пластические деформации. После этого, при той же температуре образцы частично разгружаются, после чего охлаждаются под нагрузкой таким образом, что в материале происходит прямое фазовое превращение из аустенита в мартенсит и накопление фазовых и структурных деформаций.

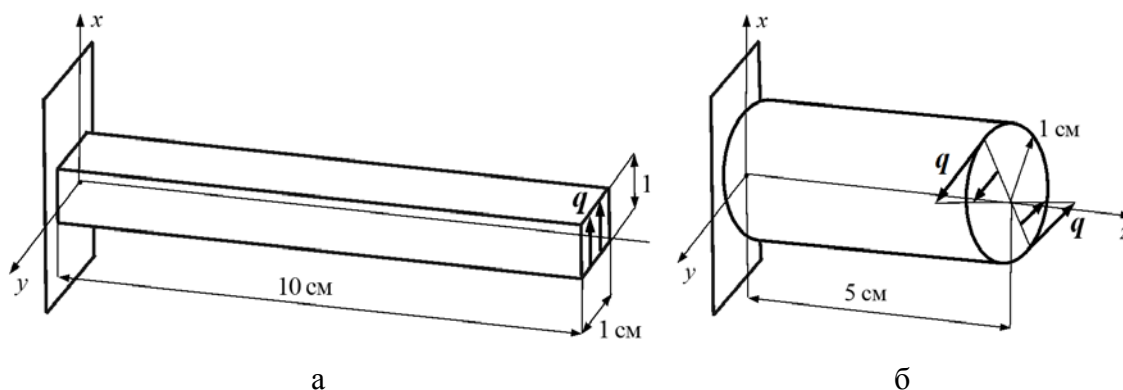


Рис.1. Схемы нагружения: изгиб стержня прямоугольного сечения (а) и кручение цилиндрического образца (б).

### 3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Численное решение краевых задач в трехмерной постановке получено с помощью пакета FEnicCS (<http://fenicsproject.org>). FEnicCS – это платформа с открытыми исходными кодами, позволяющая решать уравнения в частных производных методом конечных элементов. В данной работе используются тетрагональные конечные элементы, линейная аппроксимация для перемещений и кусочно-постоянная для напряжений и деформаций. Доля мартенситной фазы  $\varphi_M$  также является конечно-элементной функцией, поскольку определяется не только текущей температурой (однородно распределенной на каждом шаге), а зависит от напряжений и фазовых деформаций.

При численном решении задач для упрощения вычислений рассмотрен частный случай, когда  $F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i) = \Phi(\sigma/\sigma_0)$  (этот случай рассмотрен в работе [1]), при этом в качестве функции распределения микронапряжений использована функция  $\Phi(x) = 1 - \exp(-x^2)$ .

Линеаризация вариационного уравнения позволяет использовать процедуру пошагового нагружения на каждом этапе решения задачи. Процессы нагружения образца и его последующее охлаждение в интервале температур прямого фазового перехода разбиваются на ряд достаточно малых шагов, на каждом шаге задается приращение усилия на торце  $\Delta \mathbf{q}$  ( $\mathbf{q} = \mathbf{q}_* + \Delta \mathbf{q}$ ) или изменение температуры  $\Delta \Theta$  ( $\Theta = \Theta_* + \Delta \Theta$ ), где  $\mathbf{q}_*$  и  $\Theta_*$  – усилия и температура на предыдущем шаге. В результате решения вариационной задачи на каждом шаге находится приращение вектора перемещений  $\mathbf{u}$ , вектор полных перемещений  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_* + \varepsilon \mathbf{u}$ , а также вычисляются все кинематические и силовые характеристики ( $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\sigma_i$ ,  $\mathbf{P}_{II}$ ). Полученные величины являются накопленными для следующего шага:  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{E}_* = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{S}_* = \mathbf{S}$ ,  $\sigma_{i*} = \sigma_i$ ,  $\mathbf{P}_{II*} = \mathbf{P}_{II}$ . На первом шаге  $\mathbf{F}_* = \mathbf{F}_0 = \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{P}_{II*} = \mathbf{P}_{II0} = \mathbf{0}$ ,  $\Theta_* = \Theta_0 > M_s$ .



Для корректного решения системы уравнений на каждом шаге делается последовательность итераций для уточнения получаемых величин, т.к. доля мартенситной фазы  $\varphi_M$  зависит от текущих напряжений, которые, в свою очередь, зависят от  $\varphi_M$ . Отсутствие итераций на каждом шаге приводит к осцилляциям и плохой сходимости решений.

#### 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для численного расчета использовались следующие параметры материала, соответствующие никелиду титана:  $E_A = 84$  ГПа,  $E_M = 28$  ГПа, коэффициент Пуассона для аустенитной и мартенситной фазы  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_T = 720$  МПа,  $H = 150$  МПа,  $M_s^0 = 313$  К,  $M_f^0 = 293$  К,  $\rho_D = 0,08$ ,  $\sigma_0 = 150$  МПа,  $[Q] = 122$  МДж/м<sup>3</sup>,  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

На рис.2 представлены истории нагружения для задач об изгибе стержня прямоугольного сечения (рис.2а) и кручении цилиндрического образца (рис.2б) из СПФ.

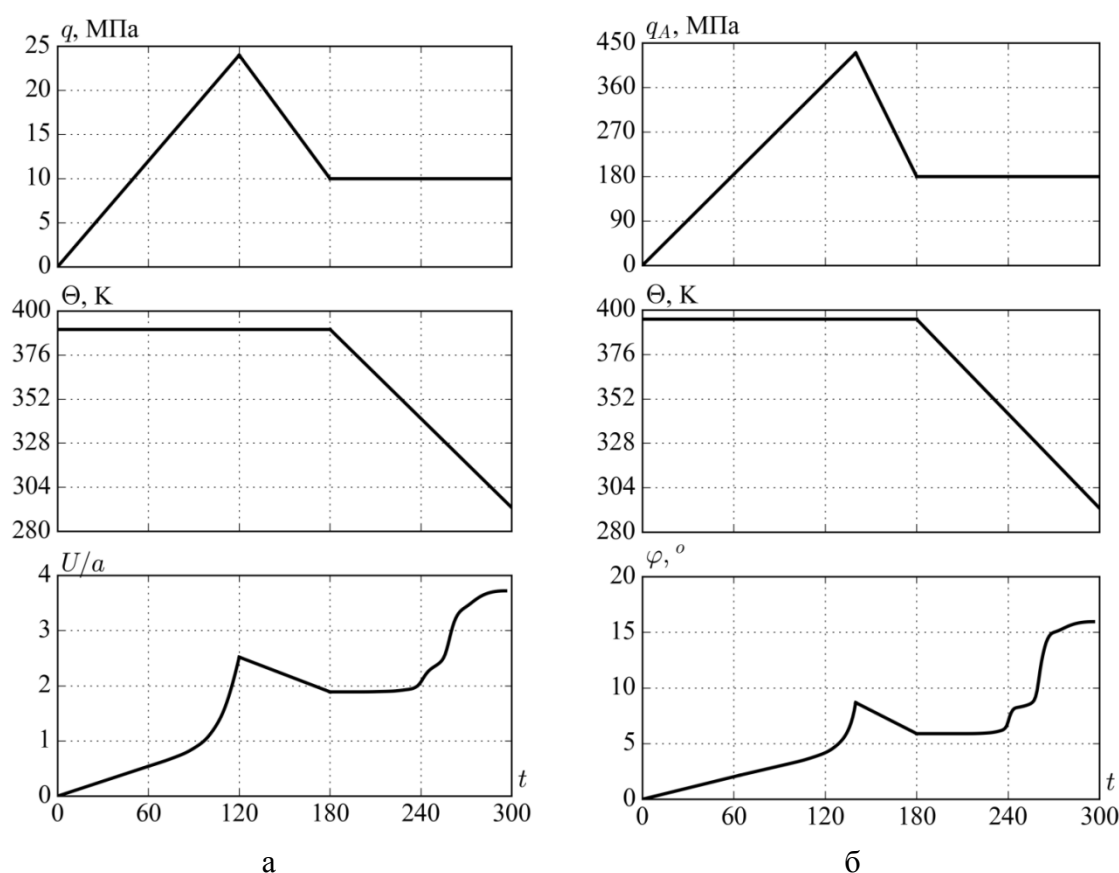


Рис.2. Истории нагружения: изгиб стержня прямоугольного сечения (а) и кручение цилиндрического образца (б)

Задается изменение усилия, вызывающие изгиб/кручение ( $q$  – изгибающее усилие,  $q_A$  – максимальное значение усилия при кручении) и изменение температуры  $\Theta$ . В результате получены зависимости перемещения свободного конца балки  $U/a$  ( $U$  – перемещение вдоль оси  $y$ ,  $a$  – толщина балки) и угла

закрутки  $\varphi$  от шага  $t$ . На первом этапе (120 шагов для задачи об изгибе и 140 шагов для задачи о кручении) происходит нагружение образцов в аустенитном состоянии, при этом накапливаются упругие и, при достижении предела текучести, пластические деформации. На втором этапе (до 180 шага) образцы частично разгружаются. На третьем этапе (шаги от 180 до 300) происходит охлаждение образцов в интервале температур прямого фазового перехода, при этом происходит накопление фазовых и структурных деформаций.

На рис.3 показано движение фронта пластических деформаций (рис.3а), распределение интенсивности пластических деформации (рис.3б) и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  в МПа (рис.3в) по образцу в конце первого этапа для задачи об изгибе балки. При изгибающем усилии  $q = 24$  МПа максимальное значение интенсивности пластической деформации 6,97%. Наибольшие пластические деформации возникают в области заделки, там, где напряжения максимальны.



Рис.3. Движение фронта (а), распределение интенсивности пластических деформаций (б) и напряжений (в) для задачи об изгибе балки.

Рис.4 иллюстрирует влияние остаточных напряжений в материале, вызванных накопленной до начала охлаждения пластической деформацией, на характер движения фронта фазовых деформаций в процессе перехода аустенит-мартенсит. На рис.4а представлен фронт движения фазовых деформаций при отсутствии пластических деформаций, а на рис.4б при их наличии, при этом фазовые деформации начинают возникать в областях с максимальной интенсивностью напряжений.

Распределения интенсивности фазовых и структурных деформаций после перехода материала в полностью мартенситное состояние представлены на рис.5. Пластические деформации практически не влияют на величину и распределение фазовых деформаций в конце прямого перехода (максимальное значение 4,65% при охлаждении под нагрузкой  $q = 10$  МПа), однако влияют на максимальное значение структурных деформаций (1,04% при отсутствии и 1,63% при наличии пластических деформаций).

На рис.6 показано движение фронта пластических деформаций (рис.6а), распределение интенсивности пластических деформации (рис.6б) и интенсивности напряжений  $\sigma_i$  в МПа (рис.6в) по образцу в конце первого этапа

для задачи о кручении цилиндрического образца (показано осевое сечение). При усилии  $q_A = 430$  МПа максимальное значение интенсивности пластической деформации 1,55%. Наибольшие пластические деформации возникают на внешней поверхности цилиндра в области максимальной интенсивности напряжений.

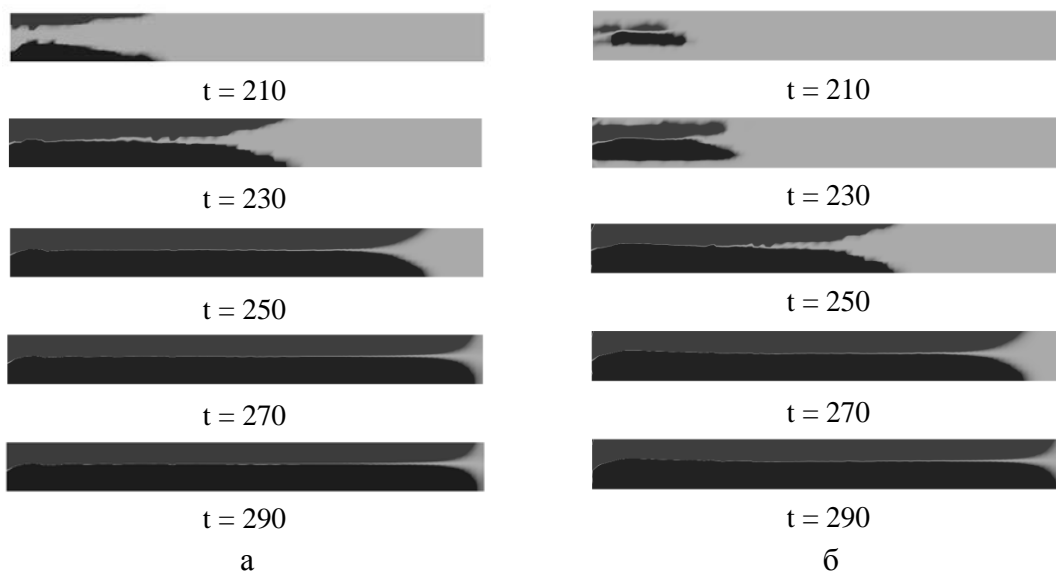


Рис.4. Движение фронта фазовых деформаций для задачи об изгибе балки: а – без пластических деформаций; б – с пластическими деформациями.

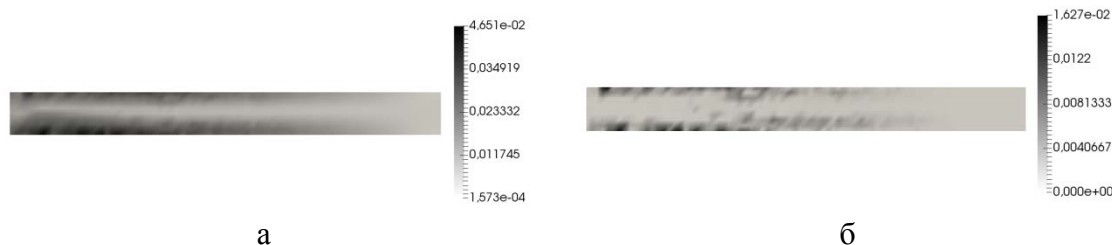


Рис.5. Распределение интенсивности деформаций в мартенситном состоянии для задачи об изгибе балки: а – фазовых; б – структурных.

Сравнение движения фронта фазовых деформаций в процессе перехода аустенит-мартенсит для задачи о кручении цилиндрического образца при наличии и отсутствии остаточных напряжений в материале, вызванных пластическими деформациями, представлено на рис.7. На рис.7а показан фронт движения фазовых деформаций при отсутствии пластических деформаций, а на рис.7б при их наличии, при этом фазовые деформации также начинают возникать в областях с максимальной интенсивностью напряжений.

Распределения интенсивности фазовых и структурных деформаций после перехода материала в полностью мартенситное состояние представлены на рис.8. Пластические деформации практически не влияют на величину и распределение фазовых деформаций в конце прямого перехода (максимальное значение 4,75% при охлаждении под нагрузкой с  $q_A = 180$  МПа), но влияют на максимальное значение структурных деформаций (1,23% при отсутствии и 1,93% при наличии пластических деформаций).

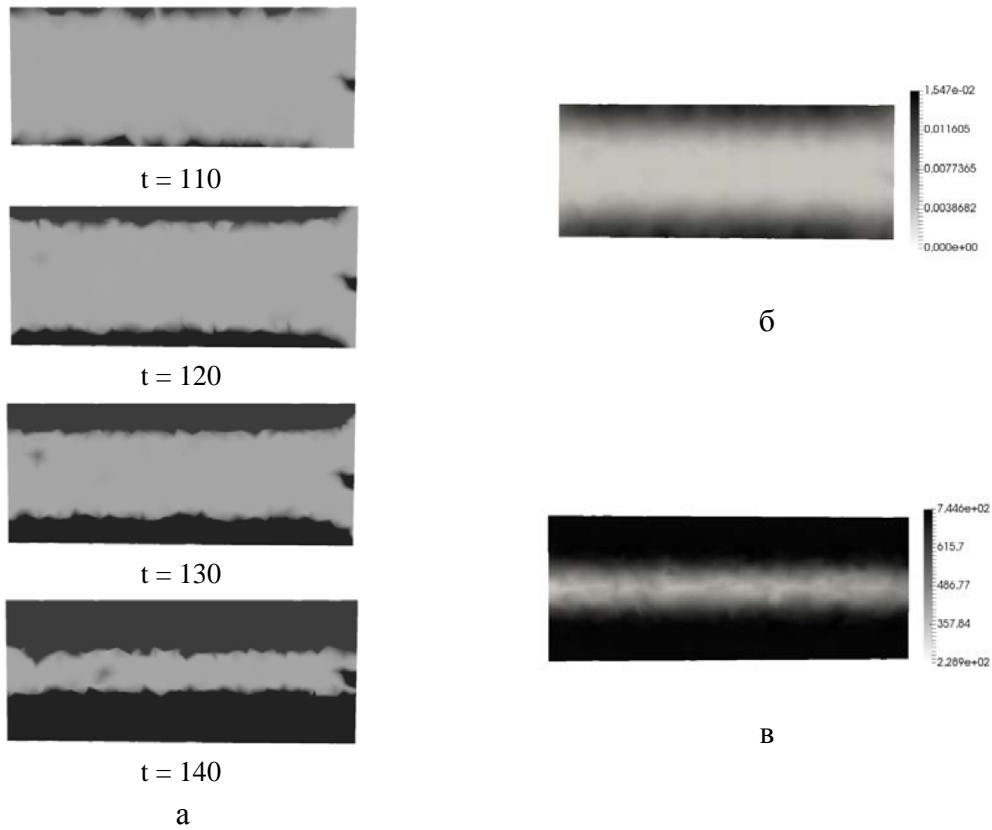


Рис.6. Движение фронта (а), распределение интенсивности пластических деформаций (б) и напряжений (в) для задачи о кручении.

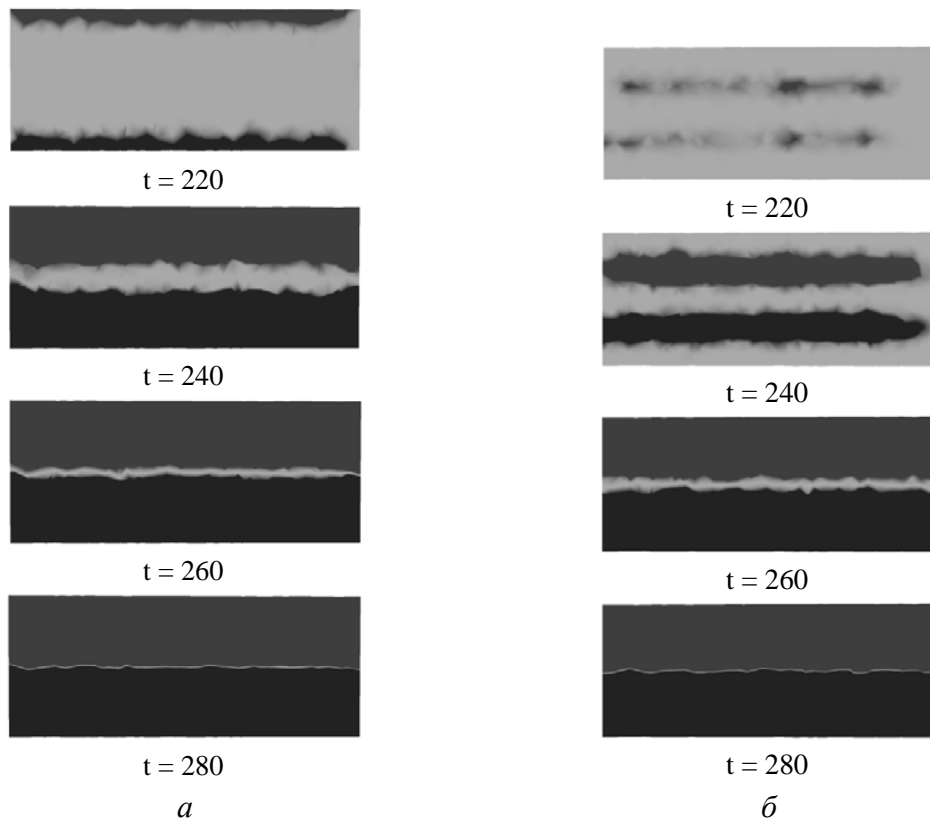


Рис.7. Движение фронта фазовых деформаций для задачи о кручении: а – без пластических деформаций; б – с пластическими деформациями.

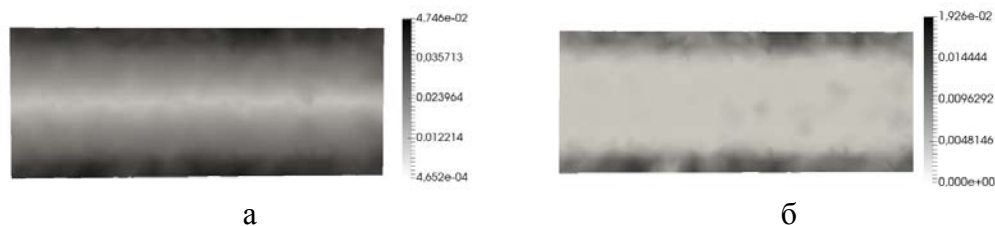


Рис.8. Распределение интенсивности деформаций в мартенситном состоянии для задачи о кручении: а – фазовых; б – структурных.

Максимальное значение полной деформации в рассмотренной задаче об изгибе стержня прямоугольного сечения – 13,27%, в задаче о кручении цилиндрического образца – 8,25%. Необходимо отметить, что при таких деформациях расчет задач в рамках малых деформаций приводит к некорректному решению. На рис.9 показаны конфигурации образцов, полученные при решении задач в рамках конечных (рис.9а и рис.9в) и малых (рис.9б и рис.9г) деформаций. Как видно из этих рисунков, при решении задач в рамках малых деформаций, происходит увеличение конечных элементов в области приложения нагрузки, чего не наблюдается в рамках конечных деформаций.

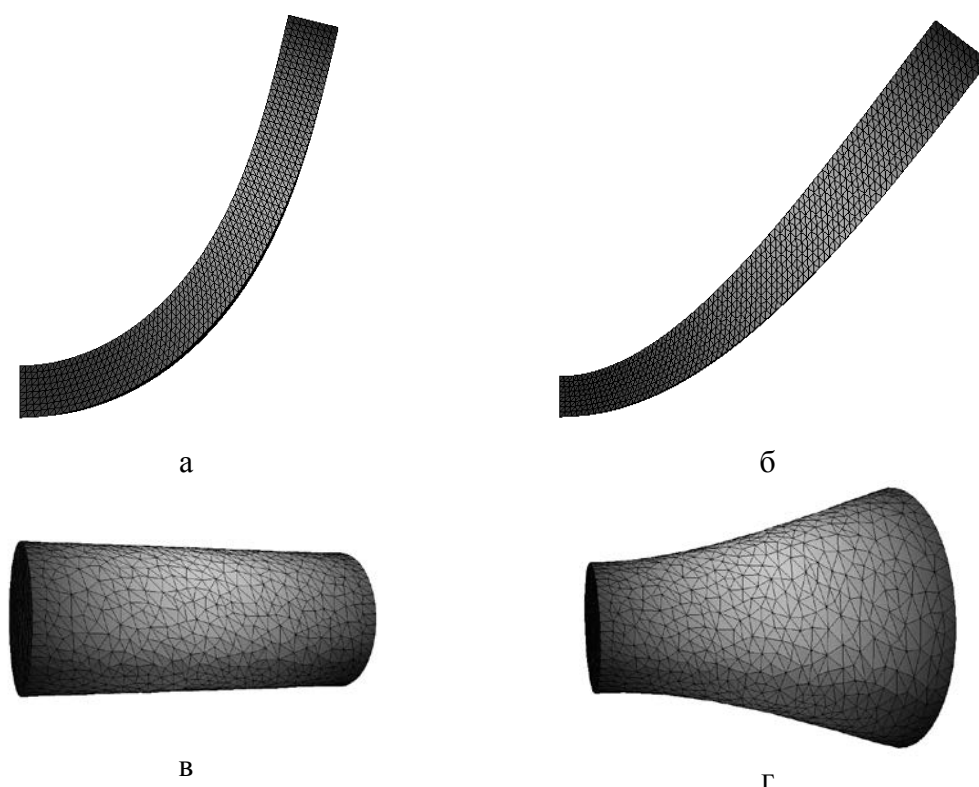


Рис.9. Конфигурации образцов: а – после изгиба (конечные деформации); б – после изгиба (малые деформации); в – после кручения (конечные деформации); г – после кручения (малые деформации).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модель термомеханического поведения сплава с памятью формы при конечных деформациях, позволяющая учитывать

накопление фазовых и структурных деформаций в процессе прямого фазового перехода аустенит—мартенсит. Задачи об изгибе стержня прямоугольного сечения и кручении цилиндрического образца из СПФ с последующим охлаждением решены в трехмерной постановке методом конечных элементов. Исследовано влияние предварительно накопленных пластических деформаций на возникающие фазово-структурные, а также показана необходимость решения рассмотренных краевых задач в рамках конечных деформаций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
2. Мовчан А.А., Кузнецова Н.С. *Моделирование процесса развития реактивных напряжений при обратном превращении в стержне из сплава с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.393-411.
3. Машихин А.Е., Мовчан А.А. *Краевые задачи термомеханики для цилиндра и сферы из сплава с памятью формы* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №3. – С.113-128.
4. Gordaninejad F., Wu W. *A two-dimensional shape memory alloy/elastomer actuator* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3393-3409.
5. Yang S.-B., Xu M. *Finite element analysis of 2D SMA beam bending* // Acta Mech. Sin. – 2001. – Vol.27. – Pp.738-748.
6. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars* // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol.42. – Pp.797-806.
7. Reese S., Christ D. *Finite deformation pseudo-elasticity of shape memory alloys – Constitutive modelling and finite element implementation* // Intern. J. of Plasticity. – 2008. – Vol.24. – Pp.455-482.
8. Thamburaja P.A. *Finite-deformation-based phenomenological theory for shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2010. – Vol.26. – Pp.1195-1219.
9. Rogovoy A.A. *Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2012. – Vol.24. – No.2. – Pp.81-114.
10. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
11. Трудселл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред*. – М.: Мир, 1975. – 585 с.
12. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
13. Rogovoy A., Stolbova O. *Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys* // Intern. J. of Plasticity. – 2016. – Vol.85. – Pp.130-155.
14. Столбова О.С. *Определяющие соотношения для сплавов с памятью формы в условиях фазового перехода и пластического деформирования* // Прикладная математика и вопросы управления. – 2016. – №3. – С.67-78.
15. Мовчан А.А., Чжо Т.Я. *Решение начально-краевых задач о прямом и обратном превращении в рамках нелинейной теории деформирования сплавов с памятью*

- формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.13. – №4. – С.452-468.
16. Роговой А.А. *Дифференцирование скалярных и тензорных функций тензорного аргумента* // Вестник ПермГТУ. Динамика и прочность машин. – 2001. – №2. – С.83-90.
17. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. –1998. – №1. –С.79-90.

## REFERENCES

1. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
2. Movchan A.A., Kuznetsova N.S. *Modelirovanie protsessa razvitiia reaktivnykh napriazhenii pri obratnom prevrashchenii v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy [Simulation of reactive stress evolution during inverse phase transition in beam from shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.3, Pp.393-411.
3. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Thermomechanical boundary problems for a cylinder and sphere made of shape memory alloy*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, No.3, Pp.113-128.
4. Gordaninejad F., Wu W. *A two-dimensional shape memory alloy/elastomer actuator*. Intern. J. of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.3393-3409.
5. Yang S.-B., Xu M. *Finite element analysis of 2D SMA beam bending*. Acta Mech. Sin., 2001, Vol.27, Pp.738-748.
6. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars*. Mechanics of Materials, 2010, Vol.42, Pp.797-806.
7. Reese S., Christ D. *Finite deformation pseudo-elasticity of shape memory alloys – Constitutive modelling and finite element implementation*. Intern. J. of Plasticity, 2008, Vol.24, Pp.455-482.
8. Thamburaja P.A. *Finite-deformation-based phenomenological theory for shape-memory alloys*. Intern. J. of Plasticity, 2010, Vol.26, Pp.1195-1219.
9. Rogovoy A.A. *Formalized approach to construction of the state equations for complex media under finite deformations*. Continuum Mechanics and Thermodynamics, 2012, Vol.24, No.2, Pp.81-114.
10. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti [The base of the plasticity theory]*. Moskva, Nauka, 1969. 420 p.
11. Trusdell C.A. *A First course in rational continuum mechanics*. Baltimore, J. Hopkins Univ., 1972.
12. Lur'e A.I. *Nelineinaia teoriia uprugosti [Nonlinear elasticity theory]*. Moskva, Nauka, 1980, 512 p.
13. Rogovoy A., Stolbova O. *Modeling the magnetic field control of phase transition in ferromagnetic shape memory alloys*. Intern. J. of Plasticity, 2016, Vol.85, Pp.130-155.
14. Stolbova O.S. *Opredelianiushchie sootnosheniia dlia splavov s pamiat'iu formy v usloviakh fazovogo perekhoda i plasticheskogo deformirovaniia [Determining relationships for alloys with shape memory under conditions of phase transition and*

- plastic deformation*]. *Prikladnaia matematika i voprosy upravleniia*, 2016, No.3, Pp.67-78.
15. Movchan A.A., Chzho T.Ja. *Reshenie nachal'no-kraevykh zadach o prjamom i obratnom prevrashhenii v ramkah nelinejnoj teorii deformirovaniia splavov s pamjat'ju formy [Solution of boundary problems of forward and inverse transformations in the framework of nonlinear deformation theory of shape memory alloys]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii*, 2007, Vol.13, No.4, Pp.452-468.
  16. Rogovoy A.A. *Differentsirovanie skaliarnykh i tenzornykh funktsii tenzornogo argumenta [Differentiation of the scalar and tensor function of the tensor argument]*. *Vestnik PermGTU. Dinamika i prochnost' mashin*, 2001, No.2, Pp.83-90.
  17. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys*. *Mechanics of Solids*, 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.

*Поступила в редакцию 24 апреля 2018 года.*

---

Сведения об авторе:

Столбова Ольга Серафимовна – к.ф.-м.н., н.с., Лаборатория нелинейной механики деформируемого твердого тела, ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [sos@icmm.ru](mailto:sos@icmm.ru)