

УДК 539.37

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА РЕОНОМНЫХ МАТЕРИАЛОВ ОТ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННОГО СООТНОШЕНИЯ РАБОТНОВА\*

Хохлов А.В.

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Исследуется физически нелинейное (тензорно-линейное) определяющее соотношение Работнова с четырьмя произвольными материальными функциями для изотропных реономных материалов, пренебрегающее влиянием вида девиатора напряжений (третьего инварианта, параметра Лоде), с целью определения комплекса моделируемых реологических эффектов, границ и индикаторов его области применимости, сфер влияния материальных функций и разработки методик идентификации.

При минимальных ограничениях, наложенных на материальные функции, аналитически изучены общие свойства семейств кривых сдвиговой, объемной, продольной и поперечной ползучести, порождаемых соотношением при одноосном нагружении в сочетании с постоянным гидростатическим давлением и их зависимость от характеристик материальных функций и уровней осевого напряжения и давления. Показано, что наличие давления и учет объемной ползучести могут существенно изменить качественное поведение кривых осевой и поперечной ползучести, податливостей и коэффициента Пуассона (даже в предположении отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров). Доказано, что соотношение Работнова способно моделировать немонотонное изменение и знакопеременность поперечной деформации (даже при нулевом давлении) и осевой деформации при достаточно большом давлении, исследованы условия наличия у них точек экстремума. Выведена формула, связывающая коэффициент Пуассона и параметр вида деформированного состояния, исследовано выражение для коэффициента Пуассона через материальные функции, время и два параметра программы нагружения. Получены общие оценки для коэффициента Пуассона, условия его монотонности и немонотонности в зависимости от времени и критерий его отрицательности. Установлено, что при повышении уровня давления (и фиксированном растягивающем напряжении) кривые объемной, осевой и поперечной ползучести опускаются вниз, коэффициент Пуассона возрастает (в любой момент времени), а формы всех кривых зависят от соотношения уровней давления и осевого напряжения.

Обнаруженные свойства сопоставлены со свойствами кривых ползучести и коэффициента Пуассона при одноосном нагружении (при нулевом давлении) и с типичными качественными свойствами экспериментальных кривых вязкоупругопластичных материалов. Найдены специфические свойства теоретических кривых ползучести, которые удобно использовать как индикаторы (не)применимости соотношения Работнова в общем случае и в сочетании с гипотезой об упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения по серии кривых ползучести материала при совместном действии растягивающей силы и гидростатического давления.

---

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 17-08-01146\_a).

**Ключевые слова:** наследственность; физическая нелинейность; сжимаемость; объемная ползучесть; дисперсно наполненные полимеры; тензорно-линейное определяющее соотношение; среднее напряжение; интенсивность напряжений; немонотонность поперечной деформации; параметр вида деформированного состояния; знакопеременность коэффициента Пуассона

## **SIMULATION OF HYDROSTATIC PRESSURE INFLUENCE ON CREEP CURVES AND POISSON'S RATIO OF RHEONOMIC MATERIALS UNDER TENSION USING THE RABOTNOV NON-LINEAR HEREDITARY RELATION**

Khokhlov A.V.

*Lomonosov Moscow State University, Institute of mechanics, Moscow, Russia*

### **ABSTRACT**

The Rabotnov physically non-linear constitutive equation for non-aging elasto-viscoplastic materials with four material functions is studied analytically in order to outline the set of basic rheological phenomena which it can simulate, to clarify the material functions governing abilities, to indicate application field of the relation and to develop identification and verification techniques. The relation is quasi-linear, it doesn't involve the third invariants of stress and strain tensors and implies that their hydrostatic and deviatoric parts don't depend on each other.

Assuming minimal restrictions on material functions of the relation, general properties of the creep curves for shear, volumetric, axial and lateral strains generated by the model under uni-axial tension and constant hydrostatic pressure are analyzed. Conditions for creep curves monotonicity and for existence of extrema and sign changes of strains, the Poisson ratio (lateral contraction ratio in creep) evolution in time, evolution of the strain triaxiality ratio (which is equal to volumetric strain divided by deviatoric strain) and their dependences on pressure and tensile stress levels and material functions characteristics are studied. Taking into account the pressure influence and volumetric creep (governed by two material functions of the model) is proved to affect strongly the qualitative behavior and characteristic features of longitudinal creep curves and the Poisson ratio evolution and its range. In particular, it is proved that the Rabotnov relation is able to simulate non-monotone behavior and sign changes of lateral strain and Poisson's ratio under constant tensile load (even if the pressure is zero) and the longitudinal strain may start to decrease provided the pressure level is high enough. The expressions for Poisson's ratio via the strain triaxiality ratio and in terms of tensile stress and pressure levels and material functions of the model are derived. Assuming material functions are arbitrary, general bounds for the Poisson ratio range are obtained and the influence of pressure level is studied. Additional restrictions on material functions and stress levels are derived to provide negative values of Poisson's ratio. Conditions for its increase or decrease and for its non-dependence on time are found. It is proved that, for any fixed tensile load, the higher the pressure level is the more creep curves for volumetric, axial and lateral strains shift down along the strain axis and the Poisson ratio decreases at any time moment.

The qualitative properties of the theoretic creep curves families and Poisson's ratio produced by the constitutive equation are compared to typical properties of test creep curves of elasto-viscoplastic materials under hydrostatic pressure in order to reveal a set of necessary phenomenological restrictions which should be imposed on material functions to provide an adequate description of typical effects. A number of specific features and quantitative characteristics of the theoretic creep curves are found that can be employed as indicators of the constitutive relation applicability (or non-applicability) for simulation of a material behavior

which are convenient to check in creep tests with various levels of pressure and tensile stress. The specific properties and restrictions of the model with zero dilatational creep compliance which simulates a material exhibiting purely elastic volumetric deformation are considered.

**Keywords:** hereditary properties; physical non-linearity; compressibility; volumetric creep; filled polymers; quasi-linear stress-strain relation; mean stress; deviatoric stress; lateral contraction ratio in creep; non-monotone axial and lateral strains; strain triaxiality ratio; negative Poisson's ratio

## ВВЕДЕНИЕ

Анализ данных механических испытаний, микроскопии и рентгенографии разнообразных (даже изначально изотропных) материалов и практика разработки и применения технологий улучшения структуры и свойств материалов методами интенсивной пластической деформации и обработки давлением, показывают, что наложение всестороннего (гидростатического) давления оказывает сильное воздействие на структуру, фазовый состав, физические и механические свойства большинства материалов [1-55]. Оно влияет на процессы образования и роста нанокристаллической фазы в аморфных сплавах (металлических стеклах) и полимерах [3-7,11-18,20], процессы измельчения зерен и рекристаллизации в металлах и сплавах, на зарождение и эволюцию систем разных типов микродефектов, вызывает торможение роста трещин и пор и их залечивание [3-7,12-23] и т.д. На макроуровне у подавляющего большинства материалов с ростом давления расширяется область линейного поведения, возрастают пластичность (предельная деформация при разрушении и длина площадки текучести при деформировании с постоянной скоростью), касательный модуль (жесткость), предел текучести, предел прочности на растяжение, длительная прочность, коэффициент Пуассона, модуль релаксации, времена релаксации и вязкость, уменьшаются скорости ползучести и релаксации и податливость при ползучести [2-23,35-41]. Изменение объема при нагружении («разрыхление»), объемная ползучесть и релаксация, вид напряженно-деформированного состояния и его эволюция, влияние среднего напряжения (давления) и его истории на осевые и сдвиговые деформации и связанные с ними термомеханические эффекты весьма существенны при описании деформирования и прочности многих реономных материалов [3-9,19-44]. Они заметно влияют на проявление свойств (даже изотропных) материалов в одноосных испытаниях, на кривые релаксации, ползучести при растяжении-сжатии и сдвиге, длительной прочности, нагружения с постоянной скоростью и на поведение коэффициента Пуассона, а регистрация и адекватный учет подобных эффектов (или пренебрежение их влиянием) влияют на результаты обработки и интерпретации данных испытаний, достоверность определения механических свойств материалов, оценку скорости накопления повреждений и долговечности элементов конструкций.

К материалам, у которых эти эффекты влияния давления, сжимаемости и объемной ползучести ярко выражены (даже при малых деформациях), относятся, прежде всего, многие полимеры (полиэтилены, полипропилены, фторопласты и т.п.), дисперсно наполненные композиты (твердые топлива, асфальтобетоны, ударопрочный полистирол, АБС-пластики) прессованные порошковые композиты, сплавы, металлические и полимерные пены, льды, грунты, горные породы и т.п. Для них стандартные гипотезы (сильно упрощающие решения краевых задач и расчеты элементов конструкций) об объемной несжимаемости или упругой связи объемной деформации

со средним напряжением (об отсутствии объемной ползучести), о независимости этой связи от второго (и третьего) инварианта тензора напряжения и вида напряженного состояния, о постоянстве коэффициента Пуассона оказываются непригодными

[3-8,25-31,38-44]. Термомеханические и физические свойства (изотропных) полимерных и композиционных материалов (характер связи тензоров напряжений и деформаций, предел текучести, критерии пластичности и разрушения, температура стеклования и диапазон высокоэластичности, мгновенный и длительный модули, деформация при разрушении, предел прочности, скорость осевой и объемной ползучести, механизмы разрушения, скорость накопления поврежденности, равновесие фаз, структурные перестройки) особенно чувствительны к виду напряженного состояния, в частности, к величине среднего напряжения и истории его изменения. Все эти эффекты, конечно, зависят и от свойств матрицы, и от объемных долей (дисперсных) наполнителей, от форм и размеров их частиц, свойств адгезионных связей с матрицей, текущего уровня поврежденности, предыстории нагружения и многих иных факторов. Высокое давление вызывает и глубокие изменения в структуре полимеров, в частности, уменьшает свободный объем, подвижность сегментов макромолекул и скорости релаксационных процессов, вызывает рост количества межмолекулярных связей и дополнительную кристаллизацию, изменяет межплоскостные расстояния в кристаллических полимерах [3-7,20,23]. Это приводит к возникновению остаточных напряжений (растягивающих в кристаллической фазе) после снятия давления за счет разной сжимаемости аморфных и кристаллических областей и разной скорости и глубины восстановления. Эти явления также зависят от истории изменения давления или длительности действия постоянного давления. Аналогичные эффекты (с иными механизмами) наблюдаются при больших сдвиговых деформациях под высоким давлением в аморфных сплавах (металлических стеклах и т.п.): в них образуется нанокристаллическая фаза, и структура и свойства полученных аморфно-нанокристаллических сплавов (их можно рассматривать как дисперсно наполненные композиты) сильно отличаются от исходных [11-17].

Коэффициент Пуассона  $\nu = -\varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{\parallel}$  изотропных вязкоупругопластичных материалов при одноосном нагружении не постоянен, а зависит от времени (от продольной деформации  $\varepsilon_{\parallel}(t)$ ) и программы нагружения. Зависимости поперечной и объемной деформаций ( $\varepsilon_{\perp}$  и  $\theta$ ) от времени и осевой деформации  $\varepsilon_{\parallel}$ , характер изменения и диапазоны значений коэффициента Пуассона для упомянутых классов реономных материалов весьма разнообразны даже в случае одноосных нагружений, даже в испытаниях на ползучесть при постоянной нагрузке или на релаксацию [1-55]. У большинства металлов, многих стекол, полимеров (например, полиэтиленов высокой плотности) и порошковых композитов наблюдается монотонное возрастание  $\nu$  с ростом  $\varepsilon_{\parallel}(t)$  [32-37] (и порой – монотонное убывание объемной деформации при растяжении). У многих реономных материалов, как достаточно хрупких, так и высокоэластичных (твердое топливо, асфальтобетон, АБС-пластики, чугун и т.п.) наблюдается убывание  $\nu(t)$ , свидетельствующее о необратимом изменении объема при растяжении или сжатии [28,38-43]. У некоторых объемная деформация и коэффициента Пуассона меняются немонотонно и меняют знак

(например, у фторопласта и полиэтилена низкой плотности, наполненного мелом [44]). В последние три десятилетия обнаружены, активно конструируются и исследуются новые материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона [45-55].

Объемную ползучесть, изменение коэффициента Пуассона и вида напряженного или деформированного состояний, и типичные механические эффекты, связанные с ними, следует учитывать при обработке и интерпретации кривых испытаний наследственных материалов (в частности, методами индентирования) и при выборе и идентификации определяющего соотношения (ОС) для моделирования их поведения. Для выбора того или иного ОС для описания поведения некоторого материала (и дальнейшего совершенствования и обобщения ОС) важно знать, какие механические эффекты оно способно моделировать и при каких требованиях к материальным функциям (МФ), в частности, – какие из упомянутых эффектов, связанных с объемной и поперечной деформациями и влиянием всестороннего давления. Для этого необходимо системное *аналитическое* исследование общих свойств кривых релаксации, ползучести и деформирования, которые порождает применяемое ОС с произвольными МФ при разных типовых программах нагружения, и их зависимости от параметров программ нагружения и характеристик материальных функций.

Данная статья продолжает цикл работ [56-59] по системному исследованию нелинейного ОС вязкоупругости вида

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \Phi(L(t)) \sigma(t)^{-1} [\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}] + \frac{1}{3} \Phi_0(L_0(t)) \delta_{ij}, \quad (1)$$

$$L(t) = \Pi \sigma, \quad L_0(t) = \Pi_0 \sigma_0, \quad \Pi y = \int_0^t \Pi(t-\tau) dy(\tau), \quad \Pi_0 y = \int_0^t \Pi_0(t-\tau) dy(\tau), \quad (2)$$

с произвольными МФ  $\Pi(t)$ ,  $\Phi(x)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $\Phi_0(x)$ . Его цель – выявление комплекса моделируемых ОС (1) реологических эффектов и границ области применимости, сфер влияния его материальных функций и феноменологических ограничений на них, разработка способов идентификации, верификации и настройки ОС. Такой анализ до сих пор не был проведен для ОС (1). Тензорно линейное ОС (1) описывает изотермические процессы деформирования нестареющих изотропных вязкоупругих материалов, связывая истории изменения тензоров напряжений  $\sigma(t)$  и (малых) деформаций  $\varepsilon(t)$  в произвольной точке тела (в предположении независимости объемной деформации  $\theta = 3\varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}(t)$  от касательных напряжений, а сдвиговых деформаций – от среднего напряжения  $\sigma_0 = \sigma_{ii}(t)/3$ ). В (1)  $\varepsilon = (\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij})^{0.5}$ ,  $\sigma = (\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij})^{0.5}$  – интенсивности деформаций и напряжений (вторые инварианты девиаторов  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$ ), напряжение и время предполагаются обезразмеренными, входные процессы  $\sigma(t)$  – кусочно-гладкими при  $t \geq 0$ .

Цель данной статьи – вывод и исследование уравнений семейств кривых объемной, осевой и поперечной ползучести и выражения для коэффициента Пуассона, которые порождает ОС (1) с четырьмя произвольными МФ при одноосном нагружении постоянной нагрузкой и одновременном приложении постоянного всестороннего давления:

$$\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} h(t), \quad p(t) = \bar{p} h(t), \quad (3)$$

где  $h(t)$  – функция Хевисайда, обнаружение их характерных свойств и сопоставление со свойствами КП при одноосном нагружении (при  $\bar{p} = 0$ ) и с типичными качественными свойствами экспериментальных кривых.

## 1. СООТНОШЕНИЕ РАБОТНОВА И ЕГО МАТЕРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Одноосный вариант ОС (1) был предложен Ю.Н. Работновым [60-64] для описания нелинейной ползучести как обобщение одномерного линейного ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) = \mathbf{P}\sigma, \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau) = \mathbf{R}\varepsilon, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

посредством введения дополнительной МФ  $\varphi(u)$ :

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (5)$$

В (4) и (5) функции ползучести и релаксации  $\Pi(t)$ ,  $R(t)$ , связаны интегральным уравнением

$$\int_0^t R(t-\tau)\Pi(\tau) d\tau = t, \quad (6)$$

выражающим условие взаимной обратности операторов (4) (и (5)). В англоязычных работах ОС (5) именуется уравнением квазилинейной вязкоупругости («QLV»), а его автором считается Я.Ч. Фанг (Y.C. Fung) [67-70,8]. В работах [60-66] и др. ОС (5) прилагалось к описанию одномерного поведения стеклопластиков, графита, металлов и сплавов и композитов, а в [67-70,8] – связок, сухожилий и др. биологических тканей. Подробные обзоры литературы и областей приложения ОС (5) приведены в статьях [58,59].

Простейшее обобщение ОС Работнова (5) на сложное напряженное состояние получается в предположении изотропности и тензорной линейности материала, отсутствия взаимного влияния шаровых и девиаторных частей тензоров (независимости объемных деформаций от касательных напряжений и деформаций сдвига от среднего напряжения) и пренебрежения влиянием третьих инвариантов. Тогда истории первых инвариантов  $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_{ii} / 3$  и  $\sigma_0(t) = \sigma_{ii} / 3$  тензоров деформаций и напряжений, их интенсивностей  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  и компоненты девиаторов  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_0 \mathbf{I}$  и  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_0 \mathbf{I}$  связаны операторами, зависящими от двух пар МФ  $\Pi, \Phi$  и  $\Pi_0, \Phi_0$

$$\theta = 3\varepsilon_0 = \Phi_0(\mathbf{P}_0\sigma_0), \quad \varepsilon = \Phi(\mathbf{P}\sigma), \quad e_{ij}(t) = \frac{2}{3}\varepsilon(t)\sigma(t)^{-1}s_{ij}(t) \quad (7)$$

где  $\Phi = \varphi^{-1}$ ,  $\Phi_0 = \varphi_0^{-1}$ , а  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{P}_0$  обозначают линейные интегральные операторы (2). В итоге, компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij}$  связаны с  $\sigma_{ij}(t) = s_{ij} + \sigma_0\delta_{ij}$  соотношением (1).

В одномерном случае (5) обратное ОС имеет вид  $\sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon)$  (композиция нелинейного оператора действия функции  $\varphi$  и линейного интегрального оператора  $\mathbf{R}$  вида (4). Обращение трехмерного ОС (7) (т.е. (1)) для любых возрастающих МФ  $\Phi$  и  $\Phi_0$ , имеет вид

$$\sigma_0 = \mathbf{R}_0\varphi_0(\theta), \quad \sigma = \mathbf{R}\varphi(\varepsilon), \quad s_{ij}(t) = \frac{2}{3}\sigma(t)\varepsilon(t)^{-1}e_{ij}(t), \quad (8)$$

где функции релаксации  $R(t)$  и  $R_0(t)$  связаны с  $\Pi$  и  $\Pi_0$  интегральными уравнениями вида (6).

Из трех материальных функций  $\varphi$ ,  $\Pi$ ,  $R$  в ОС (5) лишь две независимы, а в ОС (1) – четыре независимых МФ. На функции ползучести и релаксации в ОС (5) и (1) наложим те же минимальные ограничения, что и в линейной теории вязкоупругости:  $\Pi(t)$ ,  $\Pi_0(t)$ ,  $R(t)$ ,  $R_0(t)$  предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ , функции  $\Pi$  и  $\Pi_0$  – возрастающими и выпуклыми вверх [71,72], а  $R$  и  $R_0$  – убывающими и выпуклыми вниз на  $(0; \infty)$ ,  $R(t)$  и  $R_0(t)$  могут иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t=0$  (слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ ,  $\delta(t)$  – дельта-функция). Из этих условий следует существование пределов  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ ,  $R(0) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0) = +\infty$ , если  $R(t)$  не ограничена сверху) и  $\Pi(0) = \inf \Pi(t) \geq 0$  ( $y(0) := y(0+) -$  обозначение предела функции  $y(t)$  справа в т.  $t=0$ ). Например, семейство функций ползучести

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta], \quad (9)$$

удовлетворяет этим ограничениям. В случае  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , оно порождает все четыре структурно различные (но эквивалентные) четырехзвенные модели из двух пружин и двух демпферов (они регулярны, т.е. у них  $\Pi(0) \neq 0$ , а  $R = E_1 e^{-\mu_1 t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$  и  $R(+\infty) = 0$ ), а при  $\alpha = 0$  – трехзвенные модели Кельвина и Пойнтинга-Томпсона с одним демпфером (они регулярны,  $R = E e^{-\mu t} + r$  и  $R(+\infty) = r > 0$ ). Т.к.  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , то семейство (9) порождает нерегулярные модели лишь в случае  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda\beta = 0$  – ньютоновскую жидкость ( $R = \eta\delta(t)$ ), при  $\alpha = 0$  – модель Фойгта ( $R = \eta\delta(t) + r$ ), при  $\alpha > 0$  – обе трехзвенные модели с одной пружиной и двумя демпферами ( $R = \eta\delta(t) + E e^{-\mu t}$ ,  $R(+\infty) = 0$ ). При  $\gamma = 0$  (9) даёт модель Максвелла ( $R = E e^{-\mu t}$ ). В случае  $\gamma < 0$  нарушается ограничение  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  (и порождаемые линейным ОС (4) кривые обратной ползучести возрастают, что противоречит экспериментальным данным).

На функцию  $\varphi$  и  $\varphi_0$  в ОС (5) и (8) и на МФ  $\Phi(x)$  и  $\Phi_0(x)$  в ОС (1) наложим следующие минимальные требования [56-59]: функция  $\varphi(u)$  непрерывно дифференцируема и строго возрастает на  $(0; \omega)$ ,  $\omega > 0$ , а  $\varphi_0(u)$  – на множестве  $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$  (где  $\omega_- \omega_+ < 0$ ), причем  $\varphi(0+) = 0$  и  $\varphi_0(0+) = \varphi_0(0-) = 0$  (иначе входному процессу  $\varepsilon(t) \equiv 0$  соответствует ненулевой отклик  $\sigma(t)$ ). Из возрастания  $\varphi(u)$  и  $\varphi_0(u)$  следует существование и возрастание (и непрерывная дифференцируемость) обратных функций  $\Phi(x) = \varphi^{-1}$ ,  $x \in (0; X)$ ,  $X := \sup \varphi(u)$ , и  $\Phi_0(x) = \varphi_0^{-1}$ ,  $x \in (\underline{x}; \bar{x})$ , где  $\underline{x} = \inf \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_- + 0)$ ,  $\bar{x} = \sup \varphi_0(u) = \varphi_0(\omega_+ - 0)$ , и обратимость ОС (1). Аналогично, обратимость ОС (1) следует из возрастания  $\Phi$  и  $\Phi_0$ . Величины  $\bar{x}, \underline{x}$  и  $X$ , их конечность или бесконечность, – важные характеристики МФ, существенно влияющие на свойства теоретических кривых ОС (1) [56-59]. Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии функции  $\Phi_0$  и  $\varphi_0$  нечетны и  $\underline{x} = -\bar{x}$ ,  $\omega_- = -\omega_+$ .

МФ  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , в принципе, можно найти по известной зависимости скорости

ползучести (сдвиговой или объемной) материала от уровня напряжения  $\bar{\sigma}$  [56]: если известна зависимость  $\dot{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})$ , то функция  $\Phi = \varphi^{-1}$  в ОС (5) находится из задачи Коши  $x\Phi'(x) = r(x)$ ,  $\Phi(0) = 0$ . Например, для дробно-линейной зависимости Шестерикова-Юмашевой  $r(\bar{\sigma}) = A\bar{\sigma}(\sigma_* - \bar{\sigma})^{-1}$ ,  $\bar{\sigma} \in [0; \sigma_*)$  ( $\sigma_*$  – предел прочности) получаем  $\Phi'(x) = A(\sigma_* - x)^{-1}$  и

$$\Phi(x) = A \ln[\sigma_* / (\sigma_* - x)], \quad x \in [0; \sigma_*), \quad \bar{x} = \sigma_* < \infty; \quad \varphi(u) = \sigma_*(1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0. \quad (10)$$

Примечательно, что  $\varphi$  из (10) совпадает с функцией ползучести модели Фойгта. Если материал по-разному сопротивляется растяжению и сжатию, то МФ  $\varphi_0(u)$  можно склеить из двух ветвей с разными парами параметров  $A$  и  $\sigma_*$  при  $u > 0$  и  $u < 0$ .

Для задания выпуклой вверх МФ  $\varphi$  и  $\varphi_0$  с конечным  $\bar{x}$  удобно использовать суммы линейные комбинации функций вида (10) (ряды Прони)

$$\varphi(u) = w \sum_1^m \gamma_k \varphi_k(u) = w \sum_1^m \gamma_k (1 - e^{-\lambda_k u}), \quad w^{-1} = \sum_1^m \gamma_k \lambda_k$$

(множитель  $w$  введен для выполнения условия нормировки  $\varphi'(0) = 1$ ). При  $\lambda_k > 0$ ,  $\gamma_k > 0$  все ограничения на МФ  $\varphi$  выполнены, т.к. они выполнены для каждого слагаемого  $\varphi_k(u)$  и сохраняются для комбинаций с положительными коэффициентами. Для задания выпуклой вниз МФ  $\varphi$  можно использовать суммы с положительными показателями экспоненты.

В принципе, для дилатирующих сред можно учесть в ОС (1) влияние гидростатического давления на деформации сдвига и касательных напряжений на объемную деформацию, вводя в МФ  $\Phi$  и  $\Phi_0$  зависимость от второго аргумента  $\sigma_0$  или  $\sigma$ , или вводя в интегральные операторы  $\Pi$  и  $\Pi_0$  зависимость квазидеформаций  $\varphi(\varepsilon)$  и  $\varphi_0(\theta)$  от предыстории инвариантов  $\sigma_0(t)$  и  $\sigma(t)$ , соответственно (точнее – от функций  $\psi_0(\sigma_0(t))$  и  $\psi_0(\sigma(t))$ , где  $\psi_0(x)$  и  $\psi(x)$  – дополнительные МФ), или от параметра вида напряженного состояния  $\xi = \sigma_0(t) / \sigma(t)$ . Влияние давления на формоизменение зависит от истории его изменения (в частности, от продолжительности действия постоянного давления) [3-7,19-22]. Поэтому давление должно входить в ОС не только текущим значением, но с учетом его истории или хотя бы в виде скалярного параметра (параметров), характеризующего историю изменения давления. Однако варианты выбора указанной связи и анализ его следствий (свойств и возможностей построенного ОС) – тема других работ.

## 2. КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ОС (1) ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Рассмотрим мгновенное одноосное нагружение  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma}h(t)$ ,  $h(t)$  – функция Хевисайда (ее в дальнейшем будем опускать, полагая, что  $t > 0$ ), т.е.  $\sigma_{11}(t) = \bar{\sigma} = \text{const}$ , а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда  $\sigma_0 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)$ , девиатор напряжений – диагональный тензор  $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t) \mathbf{diag}(2, -1, -1)$ , а интенсивность равна  $\sigma = |\bar{\sigma}|h(t)$ . Вычисление операторов (7) дает  $L(t) := \Pi\sigma = |\bar{\sigma}|\Pi h = |\bar{\sigma}|\Pi(t)$ ,  $L_0(t) := \Pi_0\sigma_0 = \frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)$  и



$$\varepsilon(t; \bar{\sigma}) = \Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)), \quad \theta(t; \bar{\sigma}) = \Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)), \quad t > 0. \quad (11)$$

Так как девиаторы в ОС (7) пропорциональны, то девиатор деформаций – тоже диагональный тензор  $\mathbf{e} = z\varepsilon(t)\mathbf{diag}(1; -0.5; -0.5)$ , где  $z = \text{sgn } \bar{\sigma} = \pm 1$ , и у тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0\delta_{ij}$  в любой момент времени отличны от нуля только диагональные компоненты  $\varepsilon_{ii}$

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}) = z\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)), \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}) = -\frac{1}{2}z\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)). \quad (13)$$

Уравнения (11)-(13) задают семейства кривых сдвиговой, объемной, осевой и поперечной ползучести. Из возрастания МФ  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(t)$ ,  $\Phi_0(x)$  и  $\Pi_0(t)$  следует, что для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения, т.е.  $z = 1$ )  $\varepsilon(t)$ ,  $\theta(t)$  и  $\varepsilon_{11}(t)$  положительны и монотонно возрастают. Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}(t)$  и ее модуль не обязаны быть монотонными функциями: они могут убывать на всем интервале  $t > 0$  (например, при  $\Pi_0(t) = c = \text{const}$ , т.е. в случае упругой зависимости объемной деформации от среднего напряжения, когда  $\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C$ ,  $C := \Phi_0(\frac{1}{3}c\bar{\sigma}) > 0$ ), могут иметь точки экстремума и менять знак (например, в случае  $C > \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0))$ ). Поскольку из (13)

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{9}\Phi'_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t), \quad (14)$$

то (при  $\bar{\sigma} > 0$ ) условие возрастания  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале времени имеет вид

$$\Phi'_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))\dot{\Pi}_0(t) > \frac{3}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\dot{\Pi}(t).$$

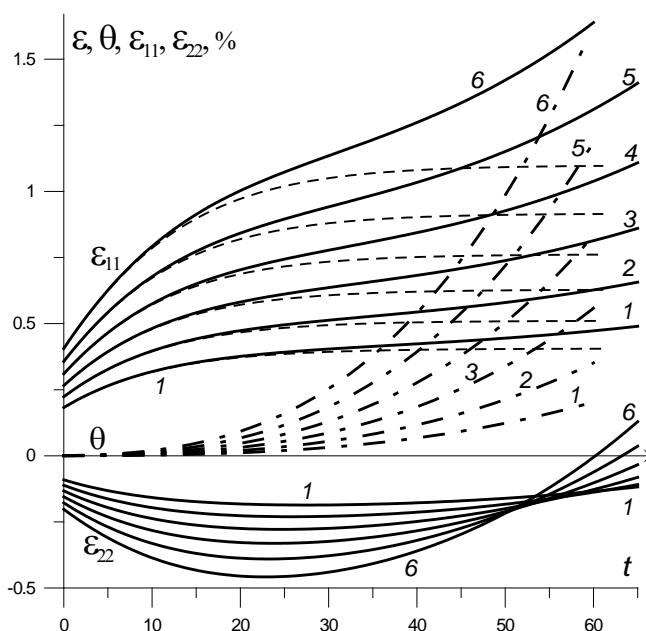


Рис.1. Кривые ползучести (11)-(13) модели (15) при  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$  (КП 1-6).

На рис.1 приведены КП  $\varepsilon_{11}(t)$  (сплошные кривые 1-6 в верхней части рис.),  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (сплошные кривые 1-6 в нижней части рис.),  $\varepsilon(t)$  (штриховые линии),  $\theta(t)$

(штрихпунктирные) при одноосном растяжении для шести разных уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$  (КП I-б), порожденные ОС (1) с МФ

$$\Phi(x) = A \ln[\sigma_* / (\sigma_* - x)], \quad \Phi_0(x) = A_0 x |x|^{m-1},$$

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0(t) = \alpha_0 t + \beta_0 \quad (15)$$

при  $A = 0.01$ ,  $\sigma_* = 1.5$ ,  $A_0 = 0.20$ ,  $m = 3$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $\beta_0 = 0.1$  (отношение  $A_0 / A$ , регулирующее относительный вклад объемной деформации, специально выбрано утрированно большим, чтобы сделать изучаемые эффекты более выраженными и заметными при малых временах). Осевые и объемные деформации монотонно возрастают (КП такой формы, с медленным нарастанием  $\theta(t)$  в окрестности нуля, наблюдаются у многих дисперсно наполненных композитов, твердых топлив и др. высоконаполненных эластомеров [3-6,39-43]). Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  имеет точку максимума и становится положительной при достаточно большом  $t$ . Интенсивность деформаций  $\varepsilon(t) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t))$  (и все компоненты девиатора деформаций) возрастают, но стабилизируются, т.к. при  $\alpha = 0$  функция ползучести (модели Кельвина) имеет горизонтальную асимптоту при  $t \rightarrow +\infty$ :  $\varepsilon(\infty) = \Phi(\bar{\sigma} \Pi(\infty)) = \Phi(\beta \bar{\sigma})$ ,  $\dot{\varepsilon}(\infty) = 0$ . Этот пример, в частности, показывает, что учет объемной сжимаемости и ползучести существенно изменяет качественное поведение кривых (осевой) ползучести (по сравнению с  $\varepsilon(t)$  и сдвиговыми КП) даже в случае простейших МФ вида (9) и (10).

### 3. СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

Из уравнений кривых ползучести (12), (13) (с  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $z = 1$ ) найдем коэффициент Пуассона  $\nu(t) = -\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}) / \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma})$  в условиях ползучести

$$\nu(t; \bar{\sigma}) = 0.5 - \frac{3\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))}{6\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + 2\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))}, \quad (16)$$

или 
$$\nu(t; \bar{\sigma}) = 0.5 - \frac{3\xi}{6 + 2\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2\xi}, \quad (17)$$

$\xi(t; \bar{\sigma}) := \theta / \varepsilon = \Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)) / \Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))$  – параметр вида деформированного состояния. Так как  $\Phi_0(x) > 0$  при  $x > 0$ , то  $\theta > 0$ ,  $\xi > 0$  и  $\nu(t) < 0.5$  при  $t > 0$ . Из  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  следует оценка  $\nu(t) > -1$  при всех  $t > 0$ , справедливая для любых МФ и любого  $\bar{\sigma}$ . Для моделей с  $\Pi(0) = 0$  (нерегулярных) и  $\Pi_0(0) \neq 0$  формула (16) дает в пределе при  $t \rightarrow 0$   $\nu(0+) = -1$  для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (ибо  $\Phi(0) = 0$ ), а для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  имеем  $\nu(0+) = 0.5$  (т.к.  $\Phi_0(0) = 0$ ), т.е. двусторонняя оценка  $-1 < \nu(t) < 0.5$  точна.

Коэффициент Пуассона (16) может быть отрицательным, поскольку возможно  $\varepsilon_{\perp}(t) > 0$ . *Критерий отрицательности  $\nu(t)$*  на некотором интервале времени при растяжении имеет вид

$$\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)) > \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)). \quad (18)$$

Из (13) (и сказанного выше) следует, что кривые ползучести в продольном и поперечном направлении, вообще говоря, не подобны, т.е. коэффициент

Пуассона  $\nu(t)$  не постоянен. Критерий постоянства  $\nu(t)$  при одноосном растяжении (т.е. постоянства  $\xi(t)$  в силу (17)) налагает связь на пары МФ ОС (1), управляющими сдвиговыми и объемными деформациями

$$\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)) = k \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)), \quad k = 3(0.5 - \nu)(1 + \nu)^{-1}, \quad t > 0. \quad (19)$$

В частности, тождество (19) выполняется для несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ), когда  $\nu(t) \equiv 0.5$  по (16), но никогда не выполняется при всех  $t > 0$  (хотя бы при некотором  $\bar{\sigma}$ ) для реономного материала с упругим изменением объема ( $\Pi_0(t) = c > 0$ ,  $\Pi(t) \neq \text{const}$ ).

Коэффициент Пуассона не обязан быть монотонной функцией. Поскольку из (17)

$$\dot{\nu}(t) = -\frac{18\dot{\xi}(t)}{(6 + 2\xi(t))^2}, \quad (20)$$

то знаки  $\dot{\nu}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $\nu(t)$  и  $-\xi(t)$ ;

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-2} [\Phi'_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))\frac{1}{3}\bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t)\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)]$$

Так как для  $\bar{\sigma} > 0$   $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t)) > 0$  при всех  $t > 0$ , то критерий возрастания коэффициента Пуассона (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид

$$\Phi'_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))\Phi_0(\frac{1}{3}\bar{\sigma}\Pi_0(t))^{-1}\frac{1}{3}\bar{\sigma}\dot{\Pi}_0(t) < \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1}\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t).$$

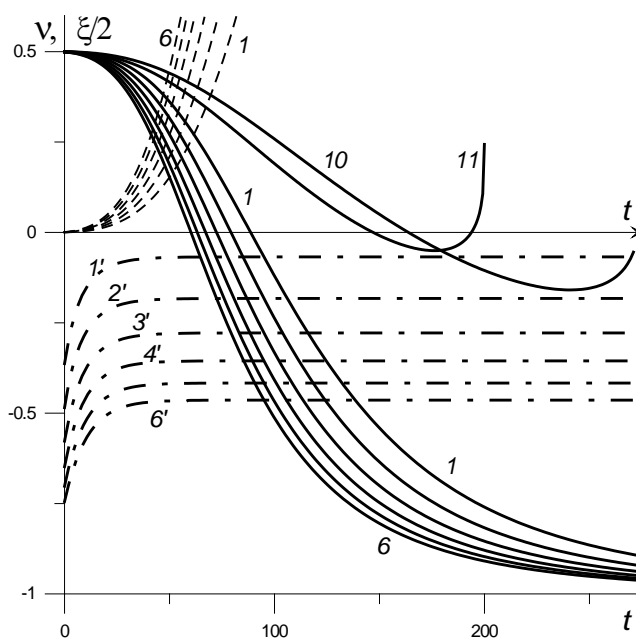


Рис.2. Графики коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  и параметра  $\xi(t)$  модели (15) с  $\alpha_0 = 0.02$  (кривые 1-6) и с  $\alpha_0 = 0$  (штрих-пунктирные линии 1'- 6') при  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$ .

На рис.2 приведены графики коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  модели (15) (кривые 1-6) и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)/2$  (штриховые кривые 1-6) для тех же уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$ , что и на рис.1.  $\nu(t)$  убывает от  $\nu(0) = 0.5$  до  $\nu(\infty) = -1$ . Для сравнения приведены графики

$\nu(t)$  (штрих-пунктирные линии 1'-6') для другой модели, отличающейся от модели (15) только тем, что  $\alpha_0 = 0$  и  $\Pi_0(t) = \beta_0 = \text{const}$ ,  $\beta_0 = 2$  (такая функция ползучести моделирует упругое изменение объема); коэффициент Пуассона в этом случае ведет себя совсем иначе:  $\nu(t)$  возрастает (оставаясь отрицательным), а не убывает, и диапазон его изменения для каждого  $\bar{\sigma}$  значительно уже, чем  $(-1; 0.5]$ ,  $\nu(0)$  и  $\nu(\infty)$  зависят от  $\bar{\sigma}$ . Кроме того, все КП и параметр  $\xi(t)$  ограничены (ибо обе функции ползучести ограничены), а  $\xi(t)$  убывает от  $\xi(0) = \Phi_0(\beta_0 \bar{\sigma} / 3) / \Phi((\beta - \gamma) \bar{\sigma})$  до  $\xi(\infty) = \Phi_0(\beta_0 \bar{\sigma} / 3) / \Phi(\beta \bar{\sigma})$ , а не возрастает.

Если рассмотреть модель (15) с  $\alpha = 0.01$ , вместо  $\alpha = 0$ , то получим пример немонотонности  $\nu(t)$  (кривые 10, 11 для  $\bar{\sigma} = 0.4; 0.5$ ).

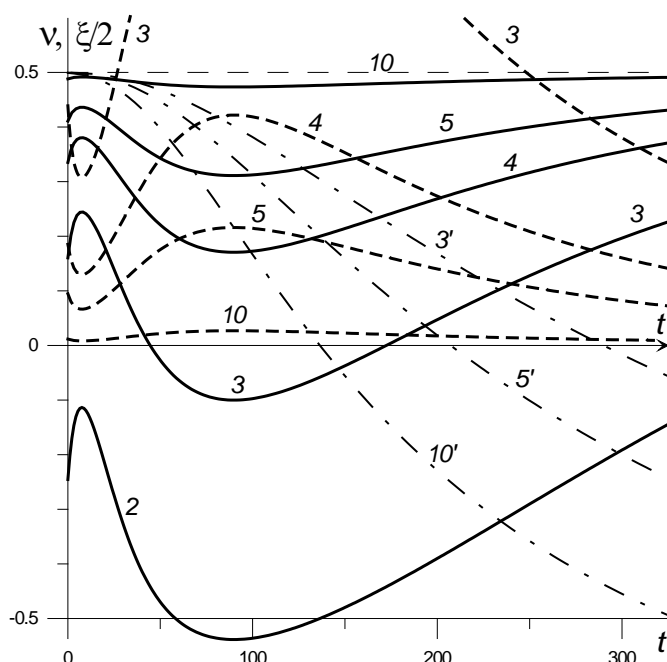


Рис.3. Графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  модели (21) при  $\bar{\sigma} = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 1.0$  (кривые 2,3,4,5,10).

На рис.3 приведены графики  $\nu(t)$  (сплошные линии) и  $\xi(t)/2$  (штриховые) модели с МФ

$$\Phi(x) = Ax^n, \quad \Phi_0(x) = A_0 x^m, \quad \Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \Pi_0(t) = \alpha_0 t + \beta_0 \quad (21)$$

при  $A = 0.01$ ,  $n = 6$ ,  $A_0 = 0.1$ ,  $m = 3$ ,  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\alpha_0 = 0.02$ ,  $\beta_0 = 0.1$  (она отличается от модели (15) только видом функции  $\Phi(x)$ ) для уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 1.0$  (кривые 2-5,10). В этом случае графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  имеют точки максимума и минимума и горизонтальную асимптоту:  $\nu(t) \rightarrow 0.5$  и  $\xi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;  $\xi(0) = A_0(\beta_0(\bar{\sigma}/3))^m / A((\beta - \gamma)\bar{\sigma})^n = A_0 A^{-1} 3^{-m} \beta_0^m (\beta - \gamma)^{-n} \bar{\sigma}^{m-n}$ . Чем больше  $\bar{\sigma}$ , тем выше лежит график  $\nu(t)$  и ниже  $\xi(t)$ , поскольку  $n > m$  (график  $\xi(t)$  для  $\bar{\sigma} = 0.2$  не изображен, т.к. значения  $\xi(t)$  слишком велики). Поведение  $\nu(t, \bar{\sigma})$  и  $\xi(t, \bar{\sigma})$  модели (21) с показателями  $n < m$  совсем иное (на рис.3 приведены штрих-пунктирные кривые 3',5',10' для модели с  $n = 2 < m = 3$  при  $\bar{\sigma} = 0.3; 0.5; 1.0$ ):

$\xi(0) = 0$ ,  $\xi(t)$  возрастает по  $t$  и  $\bar{\sigma}$ ,  $\nu(t)$  монотонно убывает от  $\nu(0) = 0.5$  до асимптоты  $\nu(\infty) = -1$  и, чем больше  $\bar{\sigma}$ , тем ниже лежит график  $\nu(t)$  (как и на рис.2).

#### 4. ВЛИЯНИЕ ВСЕСТОРОННЕГО ДАВЛЕНИЯ НА КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ОС (1)

Рассмотрим испытания цилиндрического образца на растяжение постоянной нагрузкой в сочетании с всесторонним давлением, т.е. нагружение вида (3) в точке рабочей части образца. Очевидно, девиатор и интенсивность напряжений не меняются при наложении давления на одноосное нагружение:  $\mathbf{s} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}h(t)\mathbf{diag}(2, -1, -1)$  и  $\sigma = |\bar{\sigma}|h(t)$ . В силу тензорной линейности ОС (7) не изменятся и интенсивность деформаций  $\varepsilon(t) = \Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))$ , и девиатор деформаций  $\mathbf{e} = z\varepsilon(t)\mathbf{diag}(1; -0.5; -0.5)$ , где  $z = \text{sgn } \bar{\sigma} = \pm 1$ . Изменяется только шаровая часть тензора  $\boldsymbol{\sigma}$  (среднее напряжение  $\sigma_0 = \bar{\sigma}/3 - p$ ,  $p$  – краткое обозначение  $\bar{p}$ ) и объемная деформация

$$\theta(t; \bar{\sigma}, p) = \Phi_0(\sigma_0 \Pi_0(t)) = \Phi_0\left(\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t)\right). \quad (22)$$

У тензора деформаций  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}$  отличны от нуля только диагональные компоненты:

$$\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) = z\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t)\right), \quad (23)$$

$$\varepsilon_{22}(t; \bar{\sigma}, p) = \varepsilon_{33}(t; \bar{\sigma}, p) = -\frac{1}{2}z\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + \frac{1}{3}\Phi_0\left(\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t)\right) \quad (24)$$

Так как  $\Pi_0(t) > 0$  и функция  $\Phi_0(x)$  возрастает, то для любого  $\bar{\sigma} > 0$  (будем для определенности рассматривать случай растяжения, когда  $z = 1$ ), семейства функций (22)-(24) убывают по параметру  $p$  (в любой фиксированный момент времени): чем выше уровень давления, тем ниже вдоль оси деформации (объемной, осевой или поперечной) расположены все кривые ползучести (22)-(24), тем больше давление тормозит осевую и объемную ползучесть по сравнению с одноосным растяжением (что и наблюдается в испытаниях материалов).

Из возрастания МФ  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(t)$ ,  $\Phi_0(x)$  и  $\Pi_0(t)$  следует, что при  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  объемная и осевая деформации (22) и (23) положительны и монотонно возрастают по  $t$  на полуоси  $t > 0$  (как и в случае одноосного растяжения). При  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $\theta(t) \equiv 0$  (в силу ограничения  $\Phi_0(0) = 0$ ),  $\varepsilon_{11}(t) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$  и возрастает, а поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp}(t) = \varepsilon_{22} = -\frac{1}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$  убывает. Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta(t; \bar{\sigma}, p)$  и второе слагаемое в (23) отрицательны (ибо  $\Phi_0(x) < 0$  при  $x < 0$ ) и убывают по  $t$ , и потому возможны как отрицательность  $\varepsilon_{11}(t)$  на некоторых интервалах времени (в частности, в окрестности начального момента  $t = 0$ , если выполнено неравенство  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) < -\frac{1}{3}\Phi_0\left(\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(0)\right)$ , – например, в случае  $\Pi(0) = 0$ ,  $\Pi_0(0) \neq 0$ ), так и нарушение монотонности  $\varepsilon_{11}(t)$ . Скорость осевой ползучести

$$\dot{\varepsilon}_{11}(t) = \Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}\Phi'_0\left(\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\Pi_0(t)\right)\left(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p\right)\dot{\Pi}_0(t),$$

поэтому при достаточно большом давлении возможно  $\dot{\varepsilon}_{11}(t) < 0$ , если только  $\Pi_0(t) \neq \text{const}$  (если объемные деформации не упруги). Условие наличия точки экстремума  $\dot{\varepsilon}_{11}(t) = 0$  на КП – существование решения уравнения

$$9\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\dot{\Pi}(t) = (3p\bar{\sigma}^{-1} - 1)\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))\dot{\Pi}_0(t). \quad (25)$$

В зависимости от соотношения между парами МФ, управляющими сдвиговыми и объемными деформациями, КП (23) может иметь точку максимума (в случае возрастания  $\varepsilon_{11}(t)$  в правой окрестности  $t = 0$ ) или минимума (в случае убывания  $\varepsilon_{11}(t)$  в правой окрестности  $t = 0$ ). Поперечная деформация (24), наоборот, убывает на всем интервале  $t > 0$  для любых МФ в случае  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (т.к.  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) < 0$ ) и отрицательна (и потому  $|\varepsilon_{\perp}(t)|$  монотонно возрастает при  $t > 0$ ). А в случае  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  деформация  $\varepsilon_{\perp}(t)$  и  $|\varepsilon_{\perp}(t)|$  не обязаны быть монотонными функциями: они могут убывать на всем интервале  $t > 0$  (например,  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает при  $\Pi_0(t) = c = \text{const}$ , т.е. в случае упругой зависимости объемной деформации от давления, когда  $\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C$ ,  $C := \Phi_0(c(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p))$ ), могут иметь точки экстремума, а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может менять знак (например, в случае  $C > \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0))$ , когда  $\varepsilon_{\perp}(0) > 0$  и  $\nu(0) < 0$ ). Поскольку из (23)

$$\dot{\varepsilon}_{\perp}(t) = -\frac{1}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t) + \frac{1}{3}\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\dot{\Pi}_0(t), \quad (26)$$

то при  $\bar{\sigma} > 0$  условие убывания  $\varepsilon_{\perp}(t)$  на некотором интервале имеет вид

$$(\frac{1}{3} - p/\bar{\sigma})\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))\dot{\Pi}_0(t) < \frac{3}{2}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\dot{\Pi}(t).$$

При  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  оно выполнено при любых МФ, ибо левая часть отрицательна, а правая положительна (в силу  $\Phi'_0(x) > 0$ ,  $\Phi'(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ).

Если ФП  $\Pi(t)$  ограничена (например, ФП (9) с  $\alpha = 0$ ), то  $\varepsilon(\infty) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty)) < \infty$ , если  $\Pi_0(t)$  ограничена, то объемная деформация ограничена ( $\theta(\infty) = \frac{1}{3}\Phi_0(\sigma_0\Pi_0(\infty))$ ),  $\sigma_0 = p - \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , если обе ФП ограничены, то обе КП (23), (24) тоже имеют при  $t \rightarrow \infty$  горизонтальные асимптоты:

$$\varepsilon_{11}(\infty) = z\Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty)) + \frac{1}{3}\Phi_0(\sigma_0\Pi_0(\infty)), \quad \varepsilon_{\perp}(\infty) = -\frac{1}{2}z\Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty)) + \frac{1}{3}\Phi_0(\sigma_0\Pi_0(\infty)).$$

Отметим, что КП (22)-(24) могут иметь точки перегиба и стадию ускоренной ползучести при надлежащем выборе МФ [56].

На рис.4,а приведены КП (22)-(24) той же модели (15), что и на рис.1, при фиксированном  $p = 0.25$  и шести уровнях напряжения  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$  (КП 1-6, обозначения те же, что и на рис.1,б). В отличие от случая  $p = 0$  (рис.1), при  $p > \bar{\sigma}/3$  объемная деформация (штрих-пунктирные КП) отрицательна, а любая осевая КП имеет точку максимума (см. КП 1-3). Поперечная деформация  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{22}$  имеет точку минимума (и меняет знак) лишь при  $p < \bar{\sigma}/3$  (см. КП 4-6), а при  $p > \bar{\sigma}/3$   $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает, оставаясь отрицательной. Времена, соответствующие точкам экстремума и смены знака, могут быть велики или могут превышать время разрушения образца, и экстремумы могут не наблюдаться в испытаниях.

На рис.4,б приведены КП (22)-(24) той же модели (15), что и на рис.1, при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления:  $p = 0; 0.1; 0.2; \frac{1}{3}; 0.5; 0.6; 1.0$  (КП 0,1,2,3,5,6,10). Только КП при  $p = \bar{\sigma}/3$  (тогда  $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{11}(t) = \varepsilon(t) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) = -2\varepsilon_{22}(t)$ ) ограничены и имеют горизонтальные асимптоты при  $t \rightarrow \infty$  (кривые 3). Любая осевая КП при  $p > \bar{\sigma}/3$  имеет точку максимума и интервал убывания (см. КП 5,6,10). Податливость при осевой ползучести:

$\kappa := \varepsilon_{11}(t) / \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1} [\Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) + \frac{1}{3} \Phi_0(\sigma_0 \Pi_0(t))]$ . Характер зависимости  $\kappa(t, \bar{\sigma}, p)$  от аргументов  $t$  и  $p$  такой же, как у КП (23), в частности,  $\kappa$  убывает с ростом  $p$  (что и наблюдается в испытаниях материалов [3-6]). А зависимость  $\kappa$  от  $\bar{\sigma}$  уже не обязана быть возрастающей (как и при одноосной ползучести, как и зависимость сдвиговой податливости  $S = \varepsilon(t) / \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1} \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t))$ ), и может вести себя по-разному (что и наблюдается в испытаниях разных материалов: например, у полиметилметакрилата  $\kappa(\bar{\sigma})$  убывает, а у полиэтилена высокой плотности – возрастает [6, с.164]). В самом деле,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\sigma}} = \bar{\sigma}^{-2} [\bar{\sigma} \Pi(t) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t)) + \frac{1}{9} \bar{\sigma} \Pi_0(t) \Phi'_0(\sigma_0 \Pi_0(t)) - \Phi(\bar{\sigma} \Pi(t)) - \frac{1}{3} \Phi_0(\sigma_0 \Pi_0(t))],$$

где первые два слагаемых положительны, третье отрицательно, а знак последнего совпадает со знаком параметра  $\sigma_0 = p - \frac{1}{3} \bar{\sigma}$ .

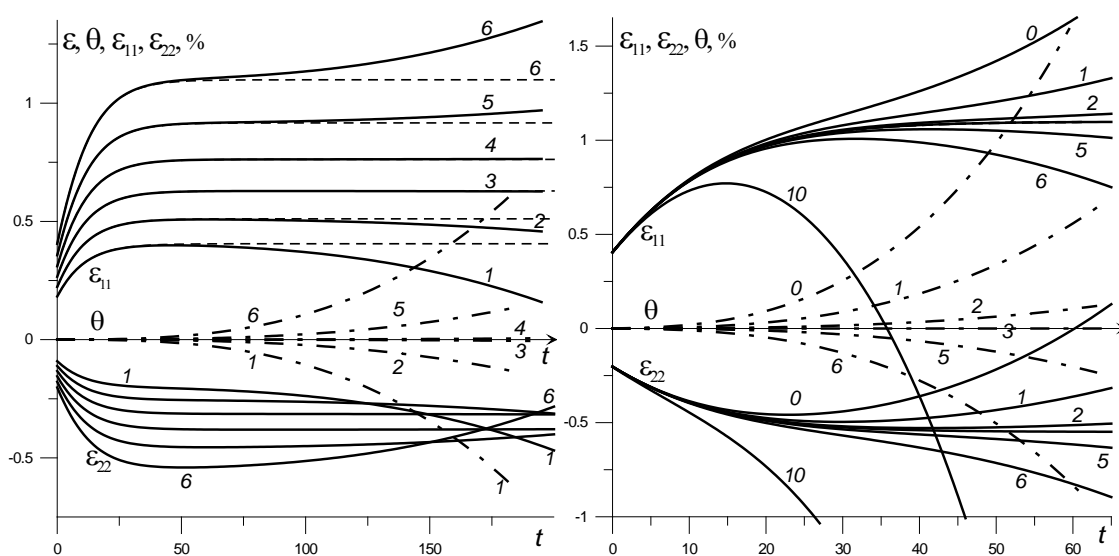


Рис.4. Кривые ползучести (22)-(24) модели (15): а – при фиксированном  $p = 0.25$  и разных  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$  (КП 1-6); б – при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных давлениях  $p = 0; 0.1; 0.2; \frac{1}{3}; 0.5; 0.6; 1.0$  (КП 0,1,2,3,5,6,10).

На рис.5,а,б приведены графики податливостей  $\varepsilon_{11}(t) / \bar{\sigma}$  (сплошные кривые 1-6 в верхней части рис.),  $\varepsilon_{\perp}(t) / \bar{\sigma}$  (сплошные кривые 1-6 в нижней части рис.),  $\varepsilon(t) / \bar{\sigma}$  (штриховые линии),  $\theta(t) / \bar{\sigma}$  (штрихпунктирные) той же модели (15) для тех же уровней напряжения  $\bar{\sigma} = 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 0.9; 1$  (КП 1-6), что и на рис.4,а. На рис.5,а – для одноосного растяжения (для  $p = 0$ ): все податливости возрастают по  $\bar{\sigma}$ , как и семейство КП на рис.1; их сильная зависимость от  $\bar{\sigma}$  свидетельствует о выраженной нелинейности поведения модели при ползучести (в случае линейного ОС вязкоупругости (4) податливости не зависят от  $\bar{\sigma}$ ). На рис.5,б – для  $p = 0.25$  (величина давления близка к средней величине  $\bar{\sigma} / 3$  для рассматриваемого диапазона  $\bar{\sigma}$ ). Сравнение рис.5,а,б показывает, что приложение давления может существенно изменить характер зависимостей податливостей от времени (прежде всего, за счет смены знака  $\theta(t)$  при  $p > \frac{1}{3} \bar{\sigma}$  и влияния объемной ползучести на осевую).

Объемная податливость  $w := \theta(t)/p = p^{-1}\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))$  тоже может быть и убывающей, и возрастающей, и немонотонной по  $p$  (что и наблюдается в испытаниях материалов). В самом деле,  $\partial w / \partial p = p^{-2}[-p\Pi_0(t)\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) - \Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))]$ , и  $\partial w / \partial p < 0$  в случае  $0 < p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (ибо  $\Pi_0(t) > 0$ ,  $\Phi'_0(x) > 0$ ,  $\Phi_0(x) > 0$  при  $x > 0$ ), а в случае  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  второе слагаемое положительно и возможно  $\partial w / \partial p > 0$ , если  $p\Pi_0(t)\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) + \Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) < 0$ , т.е. если  $-\Phi_0(x)/\Phi'_0(x) > p\Pi_0(t)$ , где  $x := (\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t) < 0$ . Например, для моделей с нечетной МФ  $\Phi_0(x) = A_0x|x|^{m-1}$ ,  $m > 0$  (нечетность  $\Phi_0$  означает, что объемная сжимаемость материала не зависит от знака среднего напряжения), будет  $\Phi_0(x)/\Phi'_0(x) = m^{-1}x|x|^{m-1}/|x|^{m-1} = m^{-1}x$ , и критерий возрастания  $w(p)$  примет вид  $-m^{-1}(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t) > p\Pi_0(t)$ , т.е.  $\bar{\sigma}/p < 3(1-m)$  (это условие не зависит от  $t$  и ФП  $\Pi_0$ ). Т.к.  $0 < \bar{\sigma}/p < 3$ , это неравенство совместно лишь при  $m \in (0;1)$ , и в этом случае  $w(p)$  возрастает при любом  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}/(1-m)$  и всех  $t > 0$  (а при  $p \in (\frac{1}{3}\bar{\sigma}, \frac{1}{3}\bar{\sigma}(1-m)^{-1})$   $w(p)$  убывает, как и при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ ).

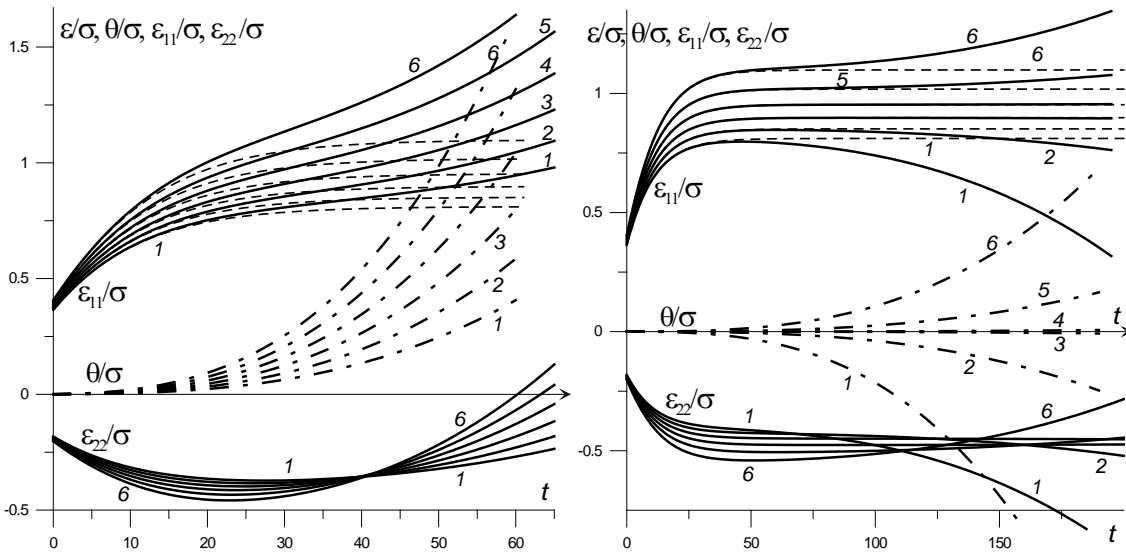


Рис.5. Податливости модели (15) (КП (22)-(24), деленные на  $\bar{\sigma}$ ): а – при  $p = 0$ , б – при  $p > 0$ .

## 5. ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ КОЭФФИЦИЕНТА ПУАССОНА ОТ ДАВЛЕНИЯ

Из уравнений кривых ползучести (23) и (24) найдем коэффициент Пуассона  $\nu = -\varepsilon_{\perp} / \varepsilon_{11}$

$$\nu(t; \bar{\sigma}, p) = 0.5 - \frac{3\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))}{6z\Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t)) + 2\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))}, \quad (27)$$

$$\nu(t; \bar{\sigma}, p) = f(\xi(t; \bar{\sigma}, p)), \quad f(\xi) := 0.5 - \frac{3z\xi}{6 + 2z\xi} = -1 + \frac{9}{6 + 2z\xi}, \quad \xi \neq -3, \quad (28)$$



где  $z = \operatorname{sgn} \bar{\sigma} = \pm 1$ ,  $\xi(t; \bar{\sigma}, p) := \theta / \varepsilon = \Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) / \Phi(|\bar{\sigma}|\Pi(t))$  – параметр вида деформированного состояния. Аналогичный параметр вида напряженного состояния  $\xi_\sigma := 3\sigma_0(t) / \sigma(t) = (\bar{\sigma} - 3p) / \bar{\sigma} = 1 - 3p / \bar{\sigma}$  не зависит от времени; это верно и для параметров Лоде тензоров напряжений и деформаций, равных  $-1$  при любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ ,  $t > 0$

$$\mu_\varepsilon = (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3) / (\varepsilon_1 - \varepsilon_3) = (\varepsilon_\perp - \varepsilon_{11}) / (\varepsilon_{11} - \varepsilon_\perp) = -1, \quad \mu_\sigma = -\sigma_{11} / \sigma_{11} = -1.$$

В дальнейшем будем для определенности рассматривать случай  $\bar{\sigma} > 0$  ( $z = 1$ ). В случае  $p \in [0; \frac{1}{3}\bar{\sigma})$  имеем  $\theta(t) > 0$ ,  $\xi(t) > 0$  и  $\nu(t) < 0.5$  при  $t > 0$ , а возрастание  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(t)$  и  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  влечет неравенство  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > \Phi(\bar{\sigma}\Pi(0))$  и оценку снизу для коэффициента Пуассона (27)  $\nu(t) > 0.5 - 3\theta(t)[6\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) + 2\theta(t)]^{-1}$  (она учитывает специфику МФ и программы нагружения). Из  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  следует универсальная (но более грубая) оценка снизу  $\nu(t) > -1$ , справедливая при всех  $t > 0$  для любых МФ и любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ . Для моделей с  $\Pi(0) = 0$  и  $\Pi_0(0) \neq 0$  формула (27) дает в пределе при  $t \rightarrow 0$  начальное значение  $\nu(0+) = -1$  для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$ , а для моделей с  $\Pi_0(0) = 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  имеем  $\nu(0+) = 0.5$ .

Коэффициент Пуассона (27) может быть отрицательным, поскольку при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  возможно  $\varepsilon_\perp(t) > 0$ . Критерий отрицательности  $\nu(t)$  на некотором интервале времени имеет вид

$$\xi(t) > 1.5, \quad \text{или} \quad \Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) > \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)), \quad (29)$$

С ростом параметра  $p$  область отрицательности  $\nu(t)$  на оси времени сужается (ибо левая часть (29) убывает), а если  $p \geq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\nu(t) > 0$  при  $t > 0$ . Если  $\Pi(0) = 0$ , а  $\Pi_0(0) \neq 0$ , то при всех  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  множество решений (29) содержит правую окрестность точки  $t = 0$ , поскольку  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) = 0$ , а  $\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(0)) > 0$ . Если  $\Pi(t)$  ограничена, а  $\Pi_0(t)$  и  $\Phi_0(x)$  не ограничены, то при любом  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  множество решений (29) содержит луч  $[T; +\infty)$ , где  $t = T$  – решение уравнения  $\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) = \frac{3}{2}\Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty))$  (с неограниченно возрастающей левой частью).

Докажем, что коэффициент Пуассона (27) (в случае  $\bar{\sigma} > 0$ ) возрастает по параметру  $p$  в любой момент времени (что и наблюдается в испытаниях материалов). Функция  $f = -1 + 4.5(3 + \xi)^{-1}$ , из (28) (и обратная ей функция  $\xi(v) = \frac{3}{2}(1 - 2v) / (1 + v)$ ,  $v \neq -1$ ) убывает на интервалах  $(-\infty, -3)$  и  $(-3, +\infty)$  (рис.6),  $f(0) = 0.5$  и при  $\xi \rightarrow \pm\infty$  имеем  $v \rightarrow -1$ ,  $\varepsilon / \varepsilon_{11} \rightarrow 0$  и  $\theta / \varepsilon_{11} \rightarrow 3$ . Так как  $\xi(t; \bar{\sigma}, p)$ , очевидно, убывает по  $p$  (в силу  $\Pi_0(t) > 0$  и  $\Phi'_0(x) > 0$ ), то из убывания функции  $f(\xi)$  следует, что  $\nu(t; \bar{\sigma}, p)$  возрастает по  $p$ . В случае  $0 \leq p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  имеем  $\theta(t) > 0$ ,  $\xi(t) > 0$  (т.к.  $\Phi_0(x) > 0$  при  $x > 0$ ) и  $-1 < \nu(t) < 0.5$ ; при  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $\theta(t) \equiv 0$ ,  $\xi(t) \equiv 0$ ,  $\nu(t) \equiv 0.5$ , а если  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\theta < 0$ ,  $\xi(t) < 0$  и  $\nu(t) > 0.5$ , пока  $\xi(t) > -3$  (а в случае  $\xi(t) < -3$ , т.е. когда  $\varepsilon_{11}(t) < 0$ , нарушается неравенство  $\nu(t) > -1$ ).

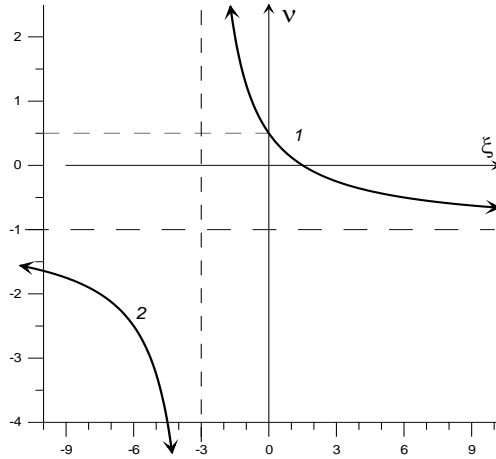


Рис.6. График зависимости  $v = f(\xi)$  из (28).

Исследуем интервалы монотонности  $v(t)$ . Дифференцируя (28), получим формулу (20). Знаки  $\dot{v}(t)$  и  $-\dot{\xi}(t)$  одинаковы, и потому совпадают интервалы монотонности  $v(t)$  и  $-\xi(t)$ . Т.к.

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-2}[\Phi'_0(\sigma_0\Pi_0(t))\sigma_0\dot{\Pi}_0(t)\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \Phi_0(\sigma_0\Pi_0(t))\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)],$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\bar{\sigma} - p,$$

то при  $p = \frac{1}{3}\bar{\sigma}$   $\dot{\xi}(t) \equiv 0$  и  $\dot{v}(t) \equiv 0$  (т.к.  $\Phi_0(0) = 0$ ), а при  $p \neq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  критерий возрастания коэффициента Пуассона (убывания  $\xi(t)$ ) на некотором интервале времени имеет вид

$$\Phi'_0(\sigma_0\Pi_0(t))\sigma_0\dot{\Pi}_0(t)\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) < \Phi_0(\sigma_0\Pi_0(t))\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\bar{\sigma}\dot{\Pi}(t)].$$

Поскольку  $\sigma_0\Phi_0(\sigma_0\Pi_0(t))\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) > 0$  для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \neq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  и всех  $t > 0$  (из ограничений, наложенных на МФ следует, что  $x\Phi_0(x) > 0$  при  $x \neq 0$ ), то поделив неравенство на это выражение, получим критерий возрастания  $v(t)$  при  $p \neq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  в форме с разделенными парами МФ, управляющими сдвиговыми и объемными деформациями

$$\Phi'_0(\sigma_0\Pi_0(t))\Phi_0(\sigma_0\Pi_0(t))^{-1}\dot{\Pi}_0(t) < \bar{\sigma}\sigma_0^{-1}\dot{\Pi}(t)\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1}.$$

Случай равенства дает уравнение для точек экстремума

$$\Phi'_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t))^{-1}\dot{\Pi}_0(t) = \bar{\sigma}(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)^{-1}\dot{\Pi}(t)\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))^{-1}.$$

На рис.7,а приведены графики  $v(t)$  и  $\xi(t)$  модели (15) (той же, что и на рис.2 и 4) при фиксированном  $\bar{\sigma} = 1$  и разных величинах давления:  $p = 0; 0.1; 0.2; \frac{1}{3}; 0.4; 0.5; 0.6$  (кривые 0-6,  $\xi(t)$  – штриховые линии). При  $p < \bar{\sigma}/3$   $\xi(t)$  возрастает, а  $v(t)$  убывает; при  $p = \bar{\sigma}/3$   $v(t) \equiv 0.5$  и  $\xi(t) \equiv 0$ . При  $p > \bar{\sigma}/3$   $\xi(t)$  убывает (кривые 4-6), а причиной отрицательности коэффициента Пуассона может быть смена знака осевой деформации (рис. 4), а не только поперечной; в момент  $t = \hat{t}(p, \bar{\sigma})$ , когда  $\varepsilon_{11}(t) = 0$  (т.е.  $\xi(t) = -3$ ), очевидно,  $v(t)$  имеет разрыв второго рода и возрастает на каждом из интервалов  $(0; \hat{t})$ ,  $(\hat{t}; +\infty)$ . В случае  $p \neq \bar{\sigma}/3$  при  $t \rightarrow \infty$   $\xi(t) \rightarrow \pm\infty$  (знак совпадает с  $\text{sgn}(\bar{\sigma}/3 - p)$ ) и  $v(t) \rightarrow -1$ .

Как было показано выше, коэффициент Пуассона  $v(t)$  и параметр вида деформированного состояния  $\xi(t)$  могут быть немонотонными. На рис.7,б

приведены графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  модели (21) (той же, что и на рис.3; она отличается от модели (15) только видом  $\Phi(x)$ ) для  $\bar{\sigma} = 0.3$  и разных давлений:  $p = 0; 0.01; 0.03; 0.05; 0.1; 0.15; 0.18$  (кривые 0, 1, 3, 5, 10, 15, 18,  $\xi(t)$  – штриховые линии). В этом случае все графики  $\nu(t)$  и  $\xi(t)$  имеют точки максимума и минимума и горизонтальную асимптоту:  $\nu(t) \rightarrow 0.5$  и  $\xi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ;  $\xi(0) = A_0(\beta_0(\bar{\sigma}/3 - p)^m / A((\beta - \gamma)\bar{\sigma})^n$ . При  $p = \bar{\sigma}/3$  (кривые 10)  $\nu(t) \equiv 0.5$ ,  $\xi(t) \equiv 0$ . Чем выше уровень давления  $p$ , тем выше лежит график  $\nu(t)$  и ниже –  $\xi(t)$ .

В силу (28) критерий постоянства коэффициента Пуассона равносителен постоянству параметра  $\xi(t)$ , он налагает связь на пары МФ ОС (1), управляющими сдвиговыми и объемными деформациями

$$\Phi_0((\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)\Pi_0(t)) = k \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)), \quad k = 3(0.5 - \nu)(1 + \nu)^{-1}, \quad t > 0. \quad (30)$$

Тождество (30) не может выполняться при всех  $p$  (для некоторого фиксированного  $\bar{\sigma}$ ), если  $\nu$  не зависит от  $p$ , за исключением случая несжимаемого материала (с  $\Pi_0(t) \equiv 0$ ,  $\nu = 0.5$ ).

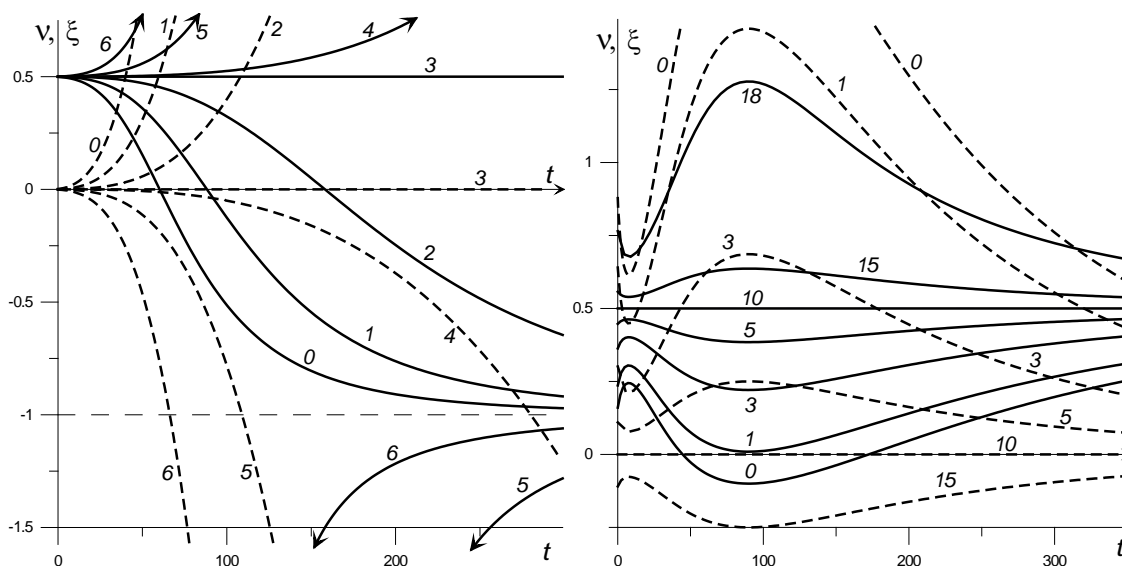


Рис.7. Графики коэффициента Пуассона  $\nu(t)$  и параметра вида деформированного состояния  $\xi(t)$  при фиксированном  $\bar{\sigma}$  и разных величинах давления  $p$ : а – для модели (15), б – для модели (21).

### 6. СЛУЧАЙ УПРУГОЙ ЗАВИСИМОСТИ ОБЪЕМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ОТ СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ

В случае модели с  $\Pi_0(t) = c = \text{const} > 0$ , т.е. когда объемная ползучесть считается отсутствующей (это предположение часто применяется для упрощения краевых задач), имеем

$$\theta = C(\bar{\sigma}, p), \quad C = \Phi_0(c(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p)), \quad \varepsilon_{11} = z\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C, \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\perp} = -\frac{1}{2}z\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C,$$

$$\nu(t; \bar{\sigma}, p) = 0.5 - \frac{3C}{6z\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + 2C}, \quad \xi(t; \bar{\sigma}, p) = \frac{C}{\Phi(|\bar{\sigma}\Pi(t)|)}, \quad (32)$$

Для любых  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $p \geq 0$  деформация  $\varepsilon_{11}(t)$  возрастает, а  $\varepsilon_{\perp}(t)$  убывает при  $t > 0$ , ибо  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$  возрастает (в силу возрастания МФ  $\Phi(x)$  и  $\Pi(t)$ ). Если  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (тогда  $C > 0$ ), то  $\xi(t) > 0$  и убывает,  $\nu(t)$  возрастает при  $t > 0$ , как и при одноосном растяжении, а модуль  $\varepsilon_{\perp}(t)$  может быть немонотонным, если выполнено неравенство  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) < \frac{2}{3}C < \Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty))$  (означающее, что  $\varepsilon_{\perp}(0) > 0$  и  $\varepsilon_{\perp}(\infty) < 0$ ). Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  (тогда  $C < 0$ ), то  $\xi(t) < 0$  и возрастает при  $t > 0$ , а  $\nu(t)$  убывает на каждом из интервалов  $(0; \hat{t})$ ,  $(\hat{t}; +\infty)$ , где момент  $t = \hat{t}(p, \bar{\sigma})$  – решение уравнения  $\xi(t) = -3$ , т.е.  $3\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) = -C$  (решение существует, если  $3\Phi(\bar{\sigma}\Pi(0)) < -C < 3\Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty))$ ). Критерий постоянства коэффициента Пуассона (30) выполняется только при  $c = 0$  (несжимаемый материал) или  $\Pi(t) = \text{const}$  (упругий материал).

Критерий отрицательности коэффициента Пуассона (29) принимает вид  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) < \frac{2}{3}C$  (и может выполняться только при  $p < \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ ). Если это неравенство справедливо в некоторый момент времени  $t = t_-$ , то  $\nu(t) < 0$  при всех  $t \in [0; t_-)$  (в силу возрастания  $\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t))$ ).

Из (32) следует, что при  $t \rightarrow \infty$   $\nu(t)$  стремится к пределу

$$\nu_{\infty} = (3L - 2C) / (6L + 2C), \quad L = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(\infty)) \leq \infty.$$

Если  $L < \infty$ , то  $\nu_{\infty} < 0,5$ , а если  $L = +\infty$  (т.е. когда МФ обладают свойствами  $\Phi(\bar{x} - 0) = \infty$  и  $\Pi(\infty) = \infty$  или  $\bar{\sigma}\Pi(\infty) > \bar{x}$ ), то  $\nu_{\infty} = 0,5$ . Податливость  $\kappa = \varepsilon_{11}(t) / \bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-1}[\Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) + \frac{1}{3}C]$  при осевой ползучести может и возрастать, и убывать по  $\bar{\sigma}$ , и быть немонотонной:  $\partial\kappa / \partial\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{-2}[\bar{\sigma}\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(t))\Pi(t) - \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) - \frac{1}{3}C]$ , и знак  $\partial\kappa / \partial\bar{\sigma}$  совпадает со знаком функции  $x\Phi'(x) - \Phi(x) - \frac{1}{3}C$ ,  $x := \bar{\sigma}\Pi(t)$ .

Зависимость КП (22)-(24) от уровня давления для моделей с  $\Pi_0(t) = \text{const}$  упрощается. Как и в общем случае,  $\xi(t; \bar{\sigma}, p)$  и семейства КП  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$  убывают по параметру  $p$  (поскольку  $C(\bar{\sigma}, p)$  убывает), а  $\nu(t; \bar{\sigma}, p)$  возрастает. Но так как объемная деформация  $\theta(t) = C(\bar{\sigma}, p)$  не зависит от времени, то и разность любых двух КП (31) (осевых или поперечных) с одинаковым  $\bar{\sigma}$ , но разными давлениями  $p_1, p_2 > 0$ , не зависит от времени: для любых  $\bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и  $t > 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p_1) &= \delta(\bar{\sigma}, p_1, p_2), \\ \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p_2) - \varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p_1) &= \delta(\bar{\sigma}, p_1, p_2), \end{aligned} \quad (33)$$

где  $\delta := \frac{1}{3}[C(\bar{\sigma}, p_2) - C(\bar{\sigma}, p_1)] = \frac{1}{3}[\theta(t; \bar{\sigma}, p_2) - \theta(t; \bar{\sigma}, p_1)]$ , т.е. КП с разными уровнями давления получаются друг из друга сдвигом вдоль оси деформации  $\varepsilon_{11}$  или  $\varepsilon_{\perp}$  (причем на одинаковую величину для осевых и поперечных деформации).

Указанные свойства, особенно тождество (33) с разными значениями  $t, \bar{\sigma}, p_1, p_2 > 0$  и тождество  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p) = C(\bar{\sigma}, p)$  (в частности, независимость от времени его левой части), можно (и удобно) использовать как индикаторы применимости гипотезы об упругой (обратимой) зависимости объемной деформации от среднего напряжения в сочетании с ОС (1) по кривым

ползучести  $\varepsilon_{11}(t; \bar{\sigma}, p)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t; \bar{\sigma}, p)$  в серии испытаний материала при совместном действии растягивающей силы и давления с разными уровнями  $p$  и  $\bar{\sigma}$ . МФ  $\Phi_0(x)$  легко находится по данным таких испытаний из соотношения  $\theta(t; \bar{\sigma}, p) = \Phi_0(c(\frac{1}{3}\bar{\sigma} - p))$  по измеренным величинам  $\theta(\bar{\sigma}, p) = \varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) + 2\varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p)$ . МФ  $\Phi(x)$ ,  $\Pi(t)$  можно найти из уравнения КП (23) или из тождества  $\varepsilon_{11}(t, \bar{\sigma}, p) - \varepsilon_{\perp}(t, \bar{\sigma}, p) = 1.5 z \Phi(|\bar{\sigma}| \Pi(t))$ . Однако разработка методик идентификации ОС (1) – тема других статей.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически изучены уравнения (22)-(24) семейств кривых объемной, продольной и поперечной ползучести, порождаемых ОС (1) с четырьмя произвольными материальными функциями при одноосном нагружении в сочетании с постоянным гидростатическим давлением, характерные качественные свойства кривых ползучести  $\theta(t)$ ,  $\varepsilon_{11}(t)$ ,  $\varepsilon_{\perp}(t)$  (интервалы монотонности и выпуклости, точки экстремума, асимптотика и т.п.) и их зависимость от параметров  $p$  и  $\bar{\sigma}$  программы нагружения (3) и от общих (минимальных) ограничений, наложенных на материальные функции. Показано, что учет сжимаемости и объемной ползучести может существенно изменить качественное поведение кривых осевой и поперечной ползучести  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , податливостей  $\varepsilon_{11}(t)/\bar{\sigma}$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)/\bar{\sigma}$  и коэффициента Пуассона  $\nu = -\varepsilon_{\perp}(t)/\varepsilon_{11}(t)$ . Доказано, что ОС (1) способно моделировать немонотонное изменение и знакопеременность осевой и поперечной деформаций  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $\varepsilon_{\perp}(t)$ , исследованы условия наличия у них точек экстремума. Выведена формула (28), связывающая коэффициент Пуассона и параметр вида деформированного состояния  $\xi = \theta(t)/\varepsilon(t)$ , исследовано выражение (27) для коэффициента Пуассона через материальные функции, время и параметры нагружения (3). Установлено, что объемная, осевая и поперечная деформации убывают с ростом давления (в любой фиксированный момент времени), коэффициент Пуассона возрастает и формы всех кривых изменяются в зависимости от соотношения уровней давления и осевого напряжения. Доказано, что для любых МФ в случае одноосного нагружения (при  $p = 0$ ) и при наложении достаточно малого давления (при  $0 < p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ ) осевая деформация монотонно возрастает во времени, коэффициент Пуассона в условиях ползучести может изменяться в диапазоне от  $-1$  до  $0.5$  (но не обязан быть монотонной функцией или сохранять знак), а параметр вида деформированного состояния  $\xi(t)$  изменяется от нуля до бесконечности (при этом параметр вида напряженного состояния и параметры Лоде тензоров напряжений и деформаций остаются постоянными). Если же  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ , то  $\xi(t) < 0$ , осевая деформация  $\varepsilon_{11}(t)$  может иметь точку максимума и интервал убывания, а коэффициент Пуассона выходит за границы отрезка  $[-1; 0.5]$ :  $\nu(t) > 0.5$ , пока  $\xi(t) \in (-3; 0)$ , и  $\nu(t) < -1$ , когда  $\xi(t) < -3$ . Получены условия монотонности и немонотонности  $\xi(t)$  и  $\nu(t)$ , критерий отрицательности коэффициента Пуассона при нагружении (3), критерий его постоянства. В частности, доказано, что в случае упругой связи между объемной деформацией и средним напряжением коэффициент Пуассона (32) моделируемых реономных

материалов не может быть постоянным и не может иметь точек экстремума: он строго возрастает при  $0 < p \leq \frac{1}{3}\bar{\sigma}$  и строго убывает при  $p > \frac{1}{3}\bar{\sigma}$ .

Найдены специфические свойства КП, которые удобно использовать как индикаторы (не)применимости ОС (1) в сочетании с гипотезой об упругой (нелинейной) зависимости объемной деформации от среднего напряжения по данным серии испытаний материала на ползучесть при совместном действии растягивающей силы и гидростатического давления.

В дальнейшем будут изучены общие качественные свойства кривых нагружения с постоянными скоростями, порождаемых ОС (1) с произвольными материальными функциями при растяжении с наложением всестороннего давления, исследованы возможности моделирования разносопротивляемости растяжению-сжатию и эффектов влияния давления и его скачков на кривые нагружения, наблюдаемых в испытаниях разных материалов, и разработаны методики идентификации ОС (1) по испытаниям с разными программами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бриджмен П. *Исследование больших пластических деформаций и разрыва*. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 445 с.
2. Береснев Б.И., Мартынов Е.Д., Родионов К.П. *Пластичность и прочность твердых тел при высоких давлениях*. – М.: Наука, 1970. – 581 с.
3. Айнбиндер С.Б., Алксне К.И., Тюнина Э.Л., Лака М.Г. *Свойства полимеров при высоких давлениях*. – М.: Химия, 1973. – 192 с.
4. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л., Цируле К.И. *Свойства полимеров в различных напряженных состояниях*. – М.: Химия, 1981. – 232 с.
5. Гольдман А.Я. *Объемная деформация пластмасс*. – Л.: Машиностроение, 1984. – 232 с.
6. Гольдман А.Я. *Прогнозирование деформационно-прочностных свойств полимерных и композиционных материалов*. – Л.: Химия, 1988. – 272 с.
7. Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К. и др. *Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов*. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1997. – 508 с.
8. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. – 462 p.
9. Локощенко А.М. *Ползучесть и длительная прочность металлов*. М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
10. Малинин Н.Н. *Ползучесть в обработке металлов давлением*. – М.: Машиностроение, 1986. – 221 с.
11. Татьянанин Е.В., Курдюмов В.Г., Федоров В.Б. *Получение аморфного сплава TiNi при деформации сдвигом под давлением // Физика металлов и металловедение*. – 1986. – Т.62. – №1. – С.133-137.
12. Валиев Р.З., Исламгалиев Р.К. *Структура и механическое поведение ультрамелкозернистых металлов и сплавов, подвергнутых интенсивной пластической деформации // Физика металлов и металловедение*. – 1998. – Т.85. – Вып.3. – С.161-177.
13. Глезер А.М., Пермякова И.Е., Громов В.Е., Коваленко В.В. *Механическое поведение аморфных сплавов*. – Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, 2006. – 416 с.
14. Валиев Р.З., Александров И.В. *Объемные наноструктурные металлические*

- материалы: получение, структура и свойства.* – М.: Академкнига, 2007. – 398 с.
15. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation.* – N.Y.: Nova Science Pub. Inc., 2010. – 542 p.
  16. Валиев Р.З., Еникеев Н.А., Мурашкин М.Ю., Александров С.Е., Гольдштейн Р.В. *Сверхпрочность ультрамелкозернистых алюминиевых сплавов, полученных интенсивной пластической деформацией* // Докл. РАН. – 2010. – Т.432. – №6. – С.757-760.
  17. Валиев Р.З., Еникеев Н.А., Мурашкин М.Ю., Утяшев Ф.З. *Использование интенсивных пластических деформаций для получения объемных наноструктурных металлических материалов* // Изв. РАН. МТТ. – 2012. – №4. – С.109-122.
  18. Ефимов О.Ю., Громов В.Е., Иванов Ю.Ф. *Формирование структуры, фазового состава и свойств сталей и сплавов в упрочняющих технологиях обработки давлением.* – Новокузнецк: Сиб. гос. индустр. ун-т, 2012. – 345 с.
  19. Лака М.Г., Дзенис А.А. *Влияние гидростатического давления на прочностные свойства полимерных материалов при растяжении* // Механика полимеров. – 1967. – №6. – С.1043-1047.
  20. Просвирин В.И., Молчанов Ю.М. *Изменение тонкой структуры поликапролактама при всестороннем сжатии* // Механика полимеров. – 1968. – №4. – С.579-585.
  21. Ольховик О.Е., Гольдман А.Я. *Ползучесть фторопласта при совместном действии растяжения и гидростатического давления* // Механика полимеров. – 1977. – №3. – С.434-438.
  22. Ольховик О.Е., Гольдман А.Я. *Ползучесть фторопласта при сдвиге с наложением гидростатического давления* // Механика полимеров. – 1977. – №5. – С.812-818.
  23. Ольховик О.Е., Баранов В.Г. *Влияние температуры, давления и объема на релаксационные свойства полиэтилена низкой плотности при растяжении* // Высокомолекулярные соединения. – 1981. – Т.(А)23. – №7. – С.1443-1452.
  24. Knauss W.G., Emri I. *Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers* // Polym. Eng. Sci. – 1987. – Vol.27. – Pp. 86-100.
  25. Tschoegl N.W. *Time Dependence in Material Properties: An Overview* // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 1997. – Vol.1. – No.1. – Pp. 3-31.
  26. Hilton H.H. *Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity* // J. Elast. – 2001. – Vol.63. – Pp. 221-251.
  27. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review* // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2002. – Vol.6. – No.1. – Pp.3-51.
  28. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
  29. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. *Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy* // Experimental mechanics. – 2007. – Vol.47. – Pp.237-249.
  30. Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R.W. *Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories* // Mechanics of Time-Dependent Materials. – 2011. – Vol.15. – No.1. – Pp.15-28.
  31. Kastner M., Obst M., Brummund J. et al. *Inelastic material behavior of polymers* –

- Experimental characterization, formulation and implementation of a material model*  
// Mechanics of Materials. – 2012. – Vol.52. – Pp.40-57.
32. Жуков А.М. *О коэффициенте Пуассона в пластической области* // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. – 1954. – №12. – С.86-91.
  33. Брехова В.Д. *Исследование коэффициента Пуассона при сжатии некоторых кристаллических полимеров постоянной нагрузкой* // Механика полимеров. – 1965. – №4. – С.43-46.
  34. Дзене И.Я., Пуганс А.В. *Коэффициент Пуассона при одномерной ползучести полиэтилена* // Механика полимеров. – 1967. – №5. – С.947-949.
  35. Калинин А.Е., Вахрушев А.В. *О соотношении поперечной и продольной деформаций при одноосной ползучести разносопротивляющихся материалов* // Механика композитных материалов. – 1985. – №2. – С.351-354.
  36. Савиных А.С., Гаркушин Г.В., Разоренов С.В., Канель Г.И. *Продольная и объемная сжимаемость натриево-известкового стекла при давлениях до 10 GPa* // Журнал технической физики. – 2007. – Т.77. – Вып.3. – С.38-42.
  37. Кожевникова М.Е. *Характер изменения границы зоны пластичности и коэффициента Пуассона в зависимости от пластического разрыхления* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №6. – С.59-66.
  38. Ломакин Е.В. *Нелинейная деформация материалов, сопротивление которых зависит от вида напряженного состояния* // Изв. АН СССР. МТТ. – 1980. – №4. – С.92-99.
  39. Щербак В.В., Гольдман А.А. *Объемные изменения дисперсно наполненных композитов при испытании в условиях ползучести* // Механика композитных материалов. – 1982. – №3. – С.549-552.
  40. Ozupek S., Becker E.B. *Constitutive Equations for Solid Propellants* // J. Engng. Mater. Technol. – 1997. – Vol.119. – No.2. – Pp.125-132.
  41. Быков Д.Л., Пелешко В.А. *Определяющие соотношения деформирования и разрушения наполненных полимерных материалов в процессах преобладающего осевого растяжения в различных баротермических условиях* // Изв. РАН. МТТ. – 2008. – №6. – С.40-65.
  42. Shekhar H., Sahasrabudhe A.D. *Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing* // Propellants Explosives Pyrotechnics. – 2011. – Vol.36. – No.6. – Pp.558-563.
  43. Cui H.R., Tang G.J., Shen Z.B. *Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method* // Propellants Explosives Pyrotechnics. – 2016. – Vol.41. – No.5. – Pp.835-843.
  44. Дзене И.Я., Крегерс А.Ф., Вилкс У.К. *Особенности процесса деформирования при ползучести и повторной ползучести полимеров в условиях одноосного растяжения. Часть I* // Механика полимеров. – 1974. – №3. – С.399-405.
  45. Lakes R. *Foam structure with a negative Poisson's ratio* // Science. – 1987. – Vol.235. – Pp.1038-1040.
  46. Friis E.A., Lakes R.S., Park. J.B. *Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials* // J. Mater. Sci. – 1988. – Vol.23. – Pp.4406-4414.
  47. Берлин Ал.Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. *Структура изотропных материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона* // Высокомолек. соед. Б. – 1991. – Т.33. – №8. – С.619-621.
  48. Берлин Ал.Ал., Ротенбург Л., Басэрт Р. *Особенности деформации неупорядоченных полимерных и неполимерных тел* // Высокомолек. соед. Б. –



1992. – Т.34. – №7. – С.6-32.
49. Milton G.W. *Composite materials with Poisson's ratios close to  $-1$*  // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – Vol. 40. – Pp.1105-1137.
50. Lakes R.S., Elms K. *Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams* // J. Composite Materials. – 1993. – Vol.27. – Pp.1193-1202.
51. Caddock B.D., Evans K.E. *Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses* // Biomaterials. – 1995. – Vol.16. – Pp.1109-1115.
52. Chan N., Evans K.E. *Indentation resilience of conventional and auxetic foams* // J. Cell. Plastics. – 1998. – Vol.34. – Pp.231-260.
53. Alderson K.L., Fitzgerald A., Evans K.E. *The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene* // J. Mater. Sci. – 2000. – Vol.35. – Pp.4039-4047.
54. Конёк Д.А., Войцеховски К.В., Плескачевский Ю.М., Шилько С.В. *Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (ОБЗОР)* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №1. – С.35-69.
55. Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T., Greaves G.N. *Poisson's ratio and modern materials* // Nature Materials. – 2011. – Vol.10. – No.11. – Pp.823-837.
56. Хохлов А.В. *Кривые ползучести и релаксации нелинейного определяющего соотношения Ю.Н. Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Вып.78. – №4. – С.452-466.
57. Хохлов А.В. *Асимптотика кривых ползучести, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова при кусочно-постоянных нагружениях, и условия затухания памяти* // Вестник Московского ун-та. Серия 1: Математика. Механика. – 2017. – №5. – С.26-31.
58. Хохлов А.В. *Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругопластичных материалов* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – №3. – С.93-123.
59. Хохлов А.В. *Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией ramp-деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Работнова* // Механика композитных материалов. – 2018. – Т.54. – №4. – С.687-708.
60. Работнов Ю.Н. *Равновесие упругой среды с последствием* // ПММ. – 1948. – Т.12. – №1. – С.53-62.
61. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
62. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. *Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах* // Механика полимеров. – 1971. – №1. – С.74-87.
63. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. *Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории* // ПМТФ. – 1971. – №2. – С.76-82.
64. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
65. Суворова Ю.В. *О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях* // Известия АН СССР. МТТ. – 2004. – №1. – С.174-181.
66. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. *Анализ вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями* // Композиты и

наноструктуры. – 2011. – №2. – С.28-39.

67. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation* / In: *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* (ed. by Fung Y.C. et al.). New Jersey: Prentice-Hall, 1972. – Pp.181-208.
68. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. – N.-Y.: Springer, 1993. – 568 p.
69. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model* // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. – 2007. – Vol.6. – No.4. – Pp.245-251.
70. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model* // *Proc. R. Soc. A*. – 2014. – Vol.470. – 20140058.
71. Хохлов А.В. *Анализ свойств кривых ползучести с произвольной начальной стадией нагружения, порождаемых линейной теорией наследственности* // *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки*. – 2018. – Т.22. – №1. – С.65-95.
72. Хохлов А.В. *Двусторонние оценки для функции релаксации линейной теории наследственности через кривые релаксации при ramp-деформировании и методики её идентификации* // *Изв. РАН. МТТ*. – 2018. – №3. – С.81-104.

## REFERENCES

1. Bridgman P.W. *Studies in Large Plastic Flow and Fracture With Special Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure*. New York, McGraw-Hill, 1952, 362 p.
2. Beresnev B.I., Martynov E.D., Rodionov K.P. *Plastichnost' i prochnost' tverdykh tel pri vysokikh davleniiakh [Plasticity and Strength of Solids under High Pressure]*. Moskva, Nauka, 1970, 581 p.
3. Ainbinder S.B., Alksne K.I., Tiunina E.L., Laka M.G. *Svoistva polimerov pri vysokikh davleniiakh [Properties of Polymers under High Pressure]*. Moskva, Khimiya, 1973, 192 p.
4. Ainbinder S.B., Tiunina E.L., Tsirole K.I. *Svoistva polimerov v razlichnykh napriazhennykh sostoianiyakh [Properties of Polymers under various stress states]*. Moskva, Khimiya, 1981, 232 p.
5. Gol'dman A.Ya. *Ob'emnaia deformatsiia plastmass [Volumetric deformation of plastics]*. Leningrad, Mashinostroenie, 1984, 232 p.
6. Gol'dman A.Ya. *Prognozirovaniye deformatsionno-prochnostnykh svoistv polimernykh i kompozitsionnykh materialov [Prediction of deformation and strength properties of polymeric and composite materials]*. Leningrad, Khimiya, 1988, 272 p.
7. Moshev V.V., Svistkov A.L., Garishin O.K. et al. *Strukturnye mekhanizmy formirovaniia mekhanicheskikh svoistv zernistykh polimernykh kompozitov [Structure mechanisms of formation of prescribed properties of grained polymeric composite materials]*. Ekaterinburg, Izdatel'stvo UrO RAN, 1997, 508 p.
8. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2009, 462 p.
9. Lokoshchenko A.M. *Creep and Long-Term Strength of Metals*. Boca-Raton–London–N.Y., CRC Press, 2018, 546 p.
10. Malinin H.N. *Polzuchest' v obrabotke metallov davleniem [Creep in metals processing by pressure]*. Moskva, Mashinostroenie, 1986, 221 p.
11. Tat'ianin E.V., Kurdiunov V.G., Fedorov V.B. *Poluchenie amorfnogo splava TiNi pri deformatsii sdvigom pod davleniem [Creation of an amorphous TiNi alloy by*

- shear under pressure*]. Fizika metallov i metallovedenie, 1986, Vol.62, No.1, Pp.133-137.
12. Valiev R.Z., Islamgaliev R.K. *Struktura i mekhanicheskoe povedenie ul'tramelkozernistykh metallov i splavov, podvergnutykh intensivnoi plasticheskoi deformatsii [Structure and Mechanical behavior of ultrafine-grained metals and alloys subjected to severe plastic deformation]*. Fizika metallov i metallovedenie, 1998, Vol.85, Iss.3, Pp.161-177.
  13. Glezer A.M., Permiakova I.E., Gromov V.E., Kovalenko V.V. *Mekhanicheskoe povedenie amorfnykh splavov [Mechanical behavior of amorphous alloys]*. Novokuznetsk, Sib. gos. industr. un-t, 2006. 416 p.
  14. Valiev R.Z., Aleksandrov I.V. *Ob'emnye nanostrukturnye metallicheskie materialy: poluchenie, struktura i svoistva [Bulk nanocrystalline metallic materials: synthesis, structure and properties]*. Moskva, Akademkniga, 2007, 398 p.
  15. Segal V.M., Beyerlein I.J., Tome C.N., Chuvil'deev V.N., Kopylov V.I. *Fundamentals and Engineering of Severe Plastic Deformation*. N.Y., Nova Science Pub. Inc., 2010, 542 p.
  16. Valiev R.Z., Enikeev N.A., Murashkin M.Yu., Aleksandrov S.E., Gol'dshtein R.V. *Sverkhprochnost' ul'tramelkozernistykh aliuminievykh splavov, poluchennykh intensivnoi plasticheskoi deformatsiei [Superstrength of ultrafine-grained alumina alloys manufactured by severe plastic deformation]*. Doklady RAN, 2010, Vol.432, No.6, Pp.757-760.
  17. Valiev R.Z., Enikeev N.A., Murashkin M.Yu., Utiashev. *Using intensive plastic deformations for manufacturing bulk nanostructure metallic materials*. Mechanis of Solids, 2012, No.4, Pp.463-474.
  18. Efimov O.Yu., Gromov V.E., Ivanov Yu.F. *Formirovanie struktury, fazovogo sostava i svoistv stalei i splavov v uprochniaiushchikh tekhnologiiakh obrabotki davleniem [Formation of structure, phase composition and properties of steels and alloys in processing by pressure]*. Novokuznetsk, Sib. gos. industr. un-t, 2012, 345 p.
  19. Laka M.G., Dzenis A.A. *Effect of hydrostatic pressure on the tensile strength of polymer materials*. Polimer mechanics, 1967, No.6, Pp.685-687.
  20. Prosvirin V.I., Molchanov Yu.M. *Changes in the fine structure of polycaprolactam induced by hydrostatic pressure*. 1968, No.4, Pp.443-448.
  21. Ol'khovik O.E., Gol'dman A.Ya. *Creep of fluoroplastic under the joint action of tension and hydrostatic pressure*. Polimer mechanics, 1977, No.3, Pp.370-374.
  22. Ol'khovik O.E., Gol'dman A.Ya. *Creep of fluoroplastic in shear with application of hydrostatic pressure*. Polimer mechanics, 1977, No.5, Pp.679-684.
  23. Ol'khovik O.E., Baranov V.G. *Vliyanie temperatury, davleniya i ob'ema na relaksatsionnye svoistva polietilena nizkoi plotnosti pri rastiashenii [Temperature, pressure and volume influence on properties of LDPE under tension]*. Vysokomolekuliarnye soedineniya, 1981, Vol.(A)23, No.7, Pp.1443-1452.
  24. Knauss W.G., Emri I. *Volume change and the nonlinearly thermoviscoelastic constitution of polymers*. Polym. Eng. Sci., 1987, Vol.27, Pp.86-100.
  25. Tschoegl N.W. *Time Dependence in Material Properties: An Overview*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 1997, Vol.1, No.1, Pp.3-31.
  26. Hilton N.N. *Implications and constraints of time-independent Poisson's Ratios in linear isotropic and anisotropic viscoelasticity*. J. Elast., 2001, Vol.63, Pp.221-251.
  27. Tschoegl N.W., Knauss W.G., Emri I. *Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2002, Vol.6, No.1, Pp.3-51.

28. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
29. O'Brien D.J., Sottos N.R., White S.R. *Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy*. Experimental mechanics, 2007, Vol.47, Pp.237-249.
30. Tscharnuter D., Jerabek M., Major-Z., Lang R.W. *Time-dependent Poisson's ratio of polypropylene compounds for various strain histories*. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2011, Vol.15, No.1, Pp.15-28.
31. Kastner M., Obst M., Brummund J. et al. *Inelastic material behavior of polymers – Experimental characterization, formulation and implementation of a material model*. Mechanics of Materials, 2012, Vol.52, Pp.40-57.
32. Zhukov A.M. *O koeffitsiente Puassona v plasticheskoi oblasti [On Poisson's Ratio in plastic domain]*. Izvestiia AN SSSR. Otd. Tekhn. Nauk, 1954, No.12, Pp.86-91.
33. Brekhova V.D. *Investigation of the Poisson's ratio of certain crystalline polymers under a constant compressive load*. Polimer mechanics, 1965, No.4, Pp.23-24.
34. Dzene I.Ya., Putans A.V. *Poisson's ratio of polyethylene in one-dimensional creep*. Polimer mechanics, 1967, No.5, Pp.626-627.
35. Kalinnikov A.E., Vakhrushev A.V. *O sootnoshenii poperechnoi i prodol'noi deformatsii pri odnoosnoi polzuchesti raznosoprotivliaiushchikhsia materialov [Relation between lateral and longitudinal strains in materials with tension-compression asymmetry under uniaxial creep]*. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1985, No.2, Pp.351-354.
36. Savinykh A.S., Garkushin G.V., Razorenov S.V., Kanel' G.I. *Longitudinal and bulk compressibility of soda-lime glass at pressures to 10 GPa*. Technical Physics, 2007, Vol.52, No.3, Pp.329-332.
37. Kozhevnikova M.E. *Plastic Zone Boundary and Poisson's Ratio Depending on Plastic Loosening*. Physical Mesomechanics, 2013, Vol.16, No.2. Pp.162-169.
38. Lomakin E.V. *Nelineinaia deformatsiia materialov, soprotivlenie kotorykh zavisiat ot vida napriazhennogo sostoiianiia [Non-linear deformation of materials with stress-state dependent properties]*. Izv. AN SSSR, Mekhanika tverdogo tela, 1980, No.4, Pp.92-99.
39. Shcherbak V.V., Gol'dman A.Ya. *Ob"emnye izmeneniia dispersno napolnennykh kompozitov pri ispytanii v usloviakh polzuchesti [Volume changes in dispersely filled composites under creep tests]*. Mekhanika kompozitnykh materialov, 1982, No.3, Pp.549-552.
40. Ozupek S., Becker E.B. *Constitutive Equations for Solid Propellants*. J. Engng. Mater. Technol., 1997. Vol.119, No.2, Pp.125-132.
41. Bykov D.L., Peleshko V.A. *Constitutive Relations for Strain and Failure of Filled Polymer Materials in Dominant Axial Tension Processes under Various Barothermal Conditions*. Mechanics of Solids, Vol.43, No.6, Pp.870-891.
42. Shekhar H., Sahasrabudhe A.D. *Longitudinal Strain Dependent Variation of Poissons Ratio for HTPB Based Solid Rocket Propellants in Uni-axial Tensile Testing*. Propellants Explosives Pyrotechnics, 2011, Vol.36, No.6, Pp.558-563.
43. Cui H.R., Tang G.J., Shen Z.B. *Study on viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method*. Propellants Explosives Pyrotechnics, 2016, Vol.41, No.5, Pp.835-843.
44. Dzene I.Ya., Kregers A.F., Vilks U.K. *Characteristic features of the deformation process on creep and secondary creep of polymers under conditions of uni-axial tension. Part I*. Polimer mechanics, 1974, No.3, Pp.337-342.

45. Lakes R. *Foam structure with a negative Poisson's ratio*. Science, 1987, Vol.235, Pp.1038-1040.
46. Friis E.A., Lakes R.S., Park. J.B. *Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials*. J. Mater. Sci., 1988, Vol.23, Pp.4406-4414.
47. Berlin Al.Al., Rotenburg L., Basert R. *Struktura izotropnykh materialov s otritsatel'nykh koeffitsientom Puassona [Structure of isotropic materials with a negative Poisson's ratio]*. Vysokomolekuliarnye soedineniya. B, 1991, Vol.33, No.8, Pp.619-621.
48. Berlin Al.Al., Rotenburg L., Basert R. *Osobennosti deformatsii neuporiadochennykh polimernykh i nepolimernykh tel [Specific features of deformation of non-ordered polymeric and non-polymeric solids]*. Vysokomolekuliarnye soedineniya. B, 1992, Vol.34, No.7, Pp.6-32.
49. Milton G.W. *Composite materials with Poisson's ratios close to -1*. J. Mech. Phys. Solids, 1992, Vol.40, Pp.1105-1137.
50. Lakes R.S., Elms K. *Indentability of conventional and negative Poisson's ratio foams*. J. Composite Materials, 1993, Vol.27, Pp.1193-1202.
51. Saddock B.D., Evans K.E. *Negative Poisson ratios and strain-dependent mechanical properties in arterial prostheses*. Biomaterials, 1995, Vol.16, Pp.1109-1115.
52. Chan N., Evans K.E. *Indentation resilience of conventional and auxetic foams*. J. Cell. Plastics, 1998, Vol.34, Pp.231-260.
53. Alderson K.L., Fitzgerald A., Evans K.E. *The strain dependent indentation resilience of auxetic microporous polyethylene*. J. Mater. Sci., 2000, Vol.35, Pp.4039-4047.
54. Konek D.A., Voitsekhovski K.V., Pleskachevskii Iu.M., Shil'ko S.V. *Materialy s otritsatel'nykh koeffitsientom Puassona (OBZOR) [Materials with negative Poisson's ratio. A review]*. Mekhanika kompozitnykh materialov i konstruksii, 2004, Vol.10, No.1, Pp.35-69.
55. Greer A.L., Lakes R.S., Rouxel T., Greaves G.N. *Poisson's ratio and modern materials*. Nature Materials, 2011, Vol.10, No.11, Pp.823-837.
56. Khokhlov A.V. *Krivyye polzuchesti i relaksatsii nelineynogo opredelyayushchego sootnosheniya Y.N. Rabotnova dlya vyazkouprugoplastichnykh materialov [Creep and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear constitutive relation for viscoelastoplastic materials]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2016, Iss.78, No.4, Pp.452-466.
57. Khokhlov A.V. *Asymptotic behavior of creep curves in the Rabotnov nonlinear heredity theory under piecewise constant loadings and memory decay conditions*. Moscow University Mechanics Bulletin, 2017, Vol.72, No.5, Pp.103-107.
58. Khokhlov A.V. *Analysis of General Properties of Creep Curves Generated by the Rabotnov Nonlinear Hereditary Relation under Multi-Step Loadings*. Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki, 2017, No.3, Pp.93-123.
59. Khokhlov A.V. *Analysis of properties of ramp stress relaxation curves produced by the Rabotnov non-linear hereditary theory*. Mechanics of Composite Materials, 2018, Vol.54, No.4, Pp.473-486.
60. Rabotnov Yu.N. *Ravnovesiye uprugoy sredy s posledeystviyem [Equilibrium of elastic medium with heredity]*. Prikladnaya matematika i mekhanika, 1948, Vol.12, No.1, Pp.53-62.
61. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy [Creep problems in structural members]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.

62. Rabotnov Yu.N., Papernik L.K., Stepanychev Y.I. *Application of the nonlinear theory of heredity to the description of time effects in polymeric material*. Polymer mechanics, 1971, Vol.7, No.1, Pp.63-73.
63. Dergunov N.N., Papernik L.H., Rabotnov Yu.N. *Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Analysis of the behavior of graphite on the basis of the non-linear hereditary theory]*. Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika, 1971, No.2, Pp.76-82.
64. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel [Introduction to hereditary mechanics of solids]*. Moskva, Nauka, 1977, 384 p.
65. Suvorova Y.V. *O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Y.N. Rabotnova i yego prilozheniyakh [On the Yu. N. Rabotnov nonlinear hereditary equation and its applications]*. Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.1, Pp.174-181.
66. Alekseyeva S.I., Fronya M.A., Viktorova I.V. *Analiz vyazkouprugikh svoystv polimernykh kompozitov s uglerodnymi nanonapolnitelyami [Analysis of the viscoelastic properties of polymer composites with carbon fillers]*. Kompozity i nanostruktury, 2011, No.2, Pp.28-39.
67. Fung Y.C. *Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation*. In: Biomechanics, Its Foundations and Objectives (ed. by Fung Y.C. et al.). New Jersey, Prentice-Hall, 1972, Pp.181-208.
68. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. N.-Y., Springer, 1993, 568 p.
69. De Frate L.E., Li G. *The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model*. Biomechanics and Modeling in Mechanobiology, 2007, Vol.6, No.4, Pp.245-251.
70. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. *On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model*. Proc. R. Soc. A, 2014, Vol.470, 20140058.
71. Khokhlov A.V. *Analiz svoystv krivykh polzuchesti s proizvol'noy nachal'noy stadiyey nagruzheniya, porozhdayemykh lineynoy teoriyey nasledstvennosti [Analysis of properties of creep curves generated by the linear viscoelasticity theory under arbitrary loading programs at initial stage]*, Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki, 2018, Vol.22, No.1, Pp.65-95.
72. Khokhlov A.V. *Dvustoronniye otsenki dlya funktsii relaksatsii lineynoy teorii nasledstvennosti cherez krivyey relaksatsii pri ramp-deformirovaniy i metodiki yeye identifikatsii [Two-sided bounds for relaxation modulus in the linear viscoelasticity via relaxation curves at ramp strain histories and identification techniques]*, Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2018, No.3, Pp.81-104.

*Поступила в редакцию 29 июля 2018 года.*

---

Сведения об авторе:

Хохлов Андрей Владимирович – к.т.н., с.н.с., Лаборатория упругости и пластичности НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова; доц., Кафедра механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)