

## ИЗГИБ УПРУГОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА\*

Старовойтов Э.И., Козел А.Г.

*Белорусский государственный университет транспорта, Республика Беларусь,  
г. Гомель*

### РЕЗЮМЕ

В связи с широким применением в строительстве и машиностроении композиционных, в том числе трехслойных, элементов конструкций возникает необходимость создания соответствующих математических моделей и методов расчета их напряженно-деформированного состояния в различных условиях эксплуатации. Здесь приведена постановка краевой задачи об осесимметричном деформировании упругой трёхслойной круговой пластины на двухпараметрическом основании Пастернака, что позволяет учитывать влияние сдвиговых свойств материала основания на напряженно-деформированное состояние рассчитываемой конструкции. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета пластины приняты гипотезы ломаной линии. В тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В относительно толстом несжимаемом по толщине заполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. На контуре предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. Неоднородная система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. Сформулированы три типа граничных условий. Решение краевой задачи сведено к нахождению трех искоемых функций – прогиба пластины, сдвига и радиального перемещения в заполнителе. Получено общее аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя. Проведен его численный анализ при равномерно распределенной нагрузке и жесткой заделке контура пластины. Численно исследовано влияние сдвиговых свойств основания на напряженно-деформированное состояние пластины при различных коэффициентах сжатия. Проведено сравнение расчетных значений перемещений и сдвига в заполнителе, полученных с использованием моделей Пастернака и Винклера.

**Ключевые слова:** упругость; трехслойная пластина; деформирование; основание Пастернака

## THE BENDING OF AN ELASTIC CIRCULAR SANDWICH PLATE ON THE PASTERNAK FOUNDATION

Starovoitov E.I., Kozel A.G.

*Belarusian State University of Transport, Belarus, Gomel*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований РБ (проект № Т18р-090).

## ABSTRACT

Due to the wide application of composite, including three-layer, structural elements in construction and machine building, it is necessary to create appropriate mathematical models and methods for calculating their stress-strain state under different operating conditions. Here is the statement of the boundary value problem of axisymmetric deformation of an elastic three-layer circular plate on the two-parameter basis of Pasternak. This allows the influence of shear properties of the base material on the stress-strain state of the calculated design to take into account. To describe kinematics of asymmetrical on the thickness of the plate pack is adopted the hypothesis of a broken line. The Kirchhoff hypothesis of incompressibility, straightness and perpendicular to the normal to the deformed median surface is valid in thin bearing layers. In a relatively thick incompressible thickness of the filler is performed Timoshenko hypothesis with a linear approximation of the displacements in the thickness of the layer. The contour assumes the presence of a rigid diaphragm that prevents the relative displacement of the layers. A non-uniform system of ordinary linear differential equations of equilibrium by the variational method is obtained. Three types of boundary conditions are formulated. The solution of the boundary value problem is reduced to finding three required functions – plate deflection, shear and radial displacement in the filler. The General analytical solution of the boundary value problem in Bessel functions is obtained. The numerical analysis is carried out at evenly distributed load and rigid filling of the plate contour. The influence of shear properties of the base on the stress-strain state of the plate at different compression ratios is studied numerically. The calculated values of displacements and shear in the filler obtained using Pasternak and Winkler models are compared.

**Key words:** elasticity; three-layer plate; deformation; Pasternak foundation

## ВВЕДЕНИЕ

Создание изделий, отвечающих всем современным требованиям строительства и машиностроения, в настоящее время связано с использованием новых конструкционных материалов и изделий. В связи с этим значительное распространение получили композитные элементы конструкций, имеющие слоистую структуру. Многослойные конструкции, при относительно малом весе, способны обеспечить не только хорошие звуко- и теплоизолирующие свойства, заданные показатели прочности и жёсткость, но и противостоять ряду других негативных воздействий.

Одна из расчётных моделей трёхслойных конструкций описывает деформирование круглой пластины на упругом основании. Поэтому возникает актуальная проблема разработки эффективных методик расчёта их напряжённо-деформированного состояния.

В монографиях [1-3] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования неоднородных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [4-12] исследовано динамическое деформирование композитных сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев и с использованием уравнений уточненной теории. Рассмотрено воздействие непрерывных и локальных нагрузок, температурных и радиационных полей. Работы [13,14] посвящены изучению несущей способности и продольно-поперечному изгибу анизотропных композитных плит. Циклическое квазистатическое деформирование упругопластических трехслойных стержней и пластин исследовалось в работах [15-17]. В статьях

[18-21] проведено исследование деформации изгиба сэндвич-пластин в зависимости от вида ячеистого заполнителя, наличия упругих опор, функционально-градиентных свойств. Результаты исследования термосилового деформирования трехслойных упругопластических стержней и круговых пластин с несжимаемым заполнителем содержатся в статьях [22-24].

В настоящее время деформированию круговых трехслойных пластин при опирании на однопараметрическое основание Винклера посвящены многие публикации, в том числе и [24,25]. Модель упругого основания с использованием двух коэффициентов постели, учитывающая его сжимаемость и связность, была предложена российским учёным П.Л. Пастернаком [26] при взаимодействии с однородными элементами конструкций. Предлагаемая работа распространяет эту модель на случай трехслойных пластин, взаимодействующих с двухпараметрическим основанием Пастернака, что позволяет учитывать влияние сдвиговых свойств материала основания на напряженно-деформированное состояние рассчитываемой конструкции.

## 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается осесимметричное деформирование поперечно нагруженной упругой трехслойной круговой пластины (радиуса  $R$ ), покоящейся на упругом основании (рис.1). Для изотропных несущих слоев толщиной  $h_1, h_2$  приняты гипотезы Кирхгофа о несжимаемости, прямолинейности и перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности. В несжимаемом по толщине заполнителе ( $h_3 = 2c$ ) деформированная нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ . Заполнитель считается легким, т.е. не учитывается его работа в тангенциальном направлении. На контуре пластины предполагается жесткая диафрагма, которая препятствует относительному сдвигу слоев. Решение задачи сводится к нахождению  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $w(r)$ .

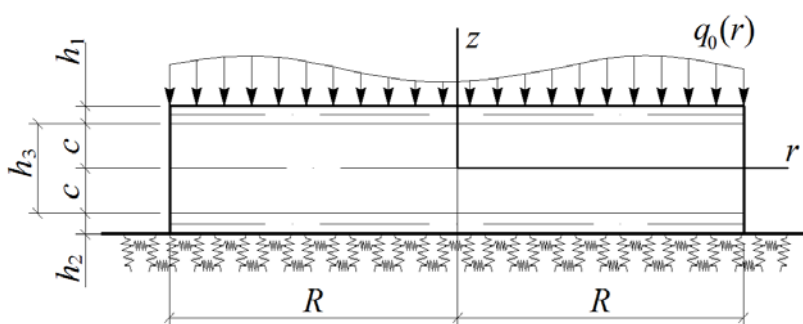


Рис.1.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной со срединной плоскостью заполнителя. На внешние слои стержня действует распределенная нагрузка  $q_0(r)$  и реакция основания, которая описывается моделью Пастернака [26]

$$q_R(r) = -\kappa_0 w + t_f \Delta w, \quad (1)$$

где  $w(r)$  – прогиб пластины;  $\kappa_0, t_f$  – коэффициенты сжатия и сдвига материала основания;  $\Delta$  – оператор Лапласа в полярной системе координат

$$\Delta w(r) = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}.$$

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя

$$2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z}^{(3)} + w_{,r} = \psi,$$

после интегрирования получим выражения радиальных перемещений  $u_r^{(k)}$  в слоях ( $k=1,2,3$  – номер слоя) через три искомые функции  $\psi(r)$ ,  $w(r)$  и  $u(r)$  – радиальное перемещение в заполнителе

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,r}, & (c \leq z \leq c + h_1), \\ u_r^{(3)} &= u + z\psi - zw_{,r}, & (-c \leq z \leq c), \\ u_r^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,r}, & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $(u + c\psi)$  – величина смещения внешнего несущего слоя за счет деформации заполнителя, для второго несущего слоя это смещение  $(u - c\psi)$ ,  $z$  – координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях следуют из (2) и соотношений Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(1)} &= u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\phi^{(1)} &= \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(2)} &= u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\phi^{(2)} &= \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(2)} &= 0, \\ \varepsilon_r^{(3)} &= u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr}, & \varepsilon_\phi^{(3)} &= \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}), & \varepsilon_{rz}^{(3)} &= \frac{1}{2}\psi. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя компоненты тензора напряжений  $\sigma_\alpha^{(k)}$  ( $\alpha = r, \phi$ ), введем обобщенные внутренние силы и моменты в пластине

$$\begin{aligned} T_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 T_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} dz, & M_\alpha &\equiv \sum_{k=1}^3 M_\alpha^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_\alpha^{(k)} z dz, \\ H_\alpha &= M_\alpha^{(3)} + c(T_\alpha^{(1)} - T_\alpha^{(2)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения равновесия круговой трехслойной пластины получим из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (5)$$

где  $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$  – вариация суммарной работы внешних нагрузок  $\delta A_1$  и контурных усилий  $\delta A_2$ ;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости.

Считаем, что к наружной поверхности несущего слоя 1 приложена поверхностная нагрузка  $q_0(r)$ , на контуре пластины действуют силы и моменты  $T_r^0, H_r^0, M_r^0, Q^0$ . Вариации работы внешней поверхностной нагрузки и реакции основания  $q_R$ , контурных нагрузок следующие ( $dS = r dr d\phi$ )

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\phi, \\ \delta A_2 &= \int_0^{2\pi} (T_r^0 \delta u + H_r^0 \delta \psi + M_r^0 \delta w_{,r} + Q^0 \delta w) d\phi. \end{aligned} \quad (6)$$

Вариация работы сил упругости будет

$$\delta W = \iint_S \left[ \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi, \quad (7)$$

где двойной интеграл берется по всей срединной поверхности заполнителя  $S$ .

Вариации перемещений и деформаций в слоях пластины следуют из (2), (3). После необходимых преобразований выражение для виртуальной работы (6) приводим к виду

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^{2\pi} \left\{ r T_r \delta u + r H_r \delta \psi - r M_r \delta w_{,r} + [(r M_r)_{,r} - M_\varphi] \delta w \right\} d\varphi - \\ & - \int_{r \varphi} \left\{ [(r T_r)_{,r} - T_\varphi] \delta u + [(r H_r)_{,r} - H_\varphi] \delta \psi + [(r M_r)_{,rr} - M_{\varphi,r}] \delta w \right\} d\varphi dr. \quad (8) \end{aligned}$$

Следуя вариационному принципу Лагранжа (5) приравняем выражение (8) работе внешних и контурных усилий (6) и потребуем выполнения этого равенства при любых значениях варьируемых перемещений. Это возможно, если равны нулю коэффициенты при независимых вариациях искомых функций. Отсюда следует система дифференциальных уравнений в усилиях, описывающая равновесие круговой трехслойной пластины на упругом основании Пастернака

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -(q_0 - q_R). \quad (9) \end{aligned}$$

На контуре пластины ( $r = R$ ) должны выполняться силовые граничные условия

$$T_r = T_r^0, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \quad M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^0. \quad (10)$$

Полученные в усилиях уравнения равновесия (9) и граничные условия (10) являются исходными для постановки соответствующей краевой задачи в перемещениях.

Предполагается, что связь напряжений и деформаций в слоях описывается соотношениями линейной теории упругости

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k \varepsilon_\alpha^{(k)}, \quad \sigma^{(k)} = 3K_k \varepsilon^{(k)}, \quad (11)$$

где  $\sigma^{(k)}$ ,  $\varepsilon^{(k)}$ ,  $s_\alpha^{(k)}$ ,  $\varepsilon_\alpha^{(k)}$  – шаровые и девиаторные составляющие тензоров напряжений и деформаций,  $G_k$  – модуль сдвига,  $K_k$  – модуль объёмной деформации.

Подставив в (11) деформации (3) и воспользовавшись соотношениями (4), получим выражение обобщенных усилий  $T_\alpha$ ,  $M_\alpha$  и  $H_\alpha$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) через три искомые функции:  $u(r)$ ,  $\psi(r)$ ,  $w(r)$ . Например,  $T_r$ ,  $M_r$  будут

$$\begin{aligned} T_r = & \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \\ & - \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] w_{,rr} - \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{w_{,r}}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_r = & \left[ K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] u_{,r} + \left[ K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) \right] \frac{u}{r} + \\
 & + \left[ c K_1^+ h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^+ h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\
 & + \left[ c K_1^- h_1 \left( c + \frac{h_1}{2} \right) + c K_2^- h_2 \left( c + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\
 & - \left[ K_1^+ h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^+ h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\
 & - \left[ K_1^- h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^- h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где  $K_k + \frac{4}{3} G_k \equiv K_k^+$ ,  $K_k - \frac{2}{3} G_k \equiv K_k^-$ .

После подстановки выражений для обобщенных внутренних усилий и моментов  $T_\alpha$ ,  $M_\alpha$ ,  $H_\alpha$  ( $\alpha = r, \varphi$ ) через искомые функции в (9) с учетом реакции основания (1), получим в перемещениях следующую систему уравнений равновесия, описывающую изгиб круговой трехслойной пластины на упругом двухпараметрическом основании Пастернака

$$\begin{aligned}
 L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\
 L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\
 L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - \kappa_0 w + t_f \Delta w &= -q_0, \quad (13)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_i$  и линейные дифференциальные операторы  $L_k$  определяются формулами

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, \quad a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), \\
 a_3 &= h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ - h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+, \quad a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), \\
 a_5 &= c \left[ h_1 \left( c + \frac{1}{2} h_1 \right) K_1^+ + h_2 \left( c + \frac{1}{2} h_2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\
 a_6 &= h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\
 L_3(g) &\equiv \frac{1}{r} (r L_2(g))_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}, \\
 L_2(g) &\equiv \left( \frac{1}{r} (r g)_{,r} \right)_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g}{r^2}.
 \end{aligned}$$

Краевая задача по определению перемещений в круглой пластине на основании Пастернака замыкается присоединением к (13) силовых (10) или кинематических граничных условий. В частности, при жёсткой заделке контура пластины должны выполняться требования при  $r = R$

$$u = \psi = w = w_{,r} = 0. \quad (14)$$

При шарнирном опирании контура пластины

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = 0. \quad (15)$$

В случае свободного контура пластины

$$\psi = 0, \quad T_r = M_r = M_{r,r} = 0, \quad (16)$$

где внутренние усилия  $T_r$ ,  $M_r$  определяются формулами (12).

## 2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим процедуру решения этой системы уравнений. В силу линейности системы дифференциальных уравнений (13), с помощью первого уравнения исключаем из второго и третьего уравнений функцию  $u$ . Использование полученного второго уравнения позволяет исключить из первого и третьего функцию  $\psi$ . После двукратного интегрирования полученных первых двух уравнений и некоторых преобразований третьего получим

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \\ \psi &= b_2 w_{,r} + C_3 r + \frac{C_4}{r}, \\ w_{,rrrr} + \frac{2}{r} w_{,rrr} - \frac{1}{r^2} w_{,rr} + \frac{1}{r^3} w_{,r} - t_f D(w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r}) + \kappa_0 D w &= q_0 D, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – константы интегрирования, определяемые из граничных условий (14)-(16); коэффициенты  $q = q_0 D$ ,  $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$

$$b_1 = \frac{a_1 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad D = \frac{a_1 (a_1 a_4 - a_2^2)}{(a_1 a_6 - a_3^2)(a_1 a_4 - a_2^2) - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2}.$$

Получим решение однородного уравнения, соответствующего третьему уравнению в (17). Для этого приравняем левую часть уравнения нулю и введем замену переменной  $x = kr$ . В результате приходим к уравнению вида

$$w_{,xxxx} + \frac{2}{x} w_{,xxx} - \frac{1}{x^2} w_{,xx} + \frac{1}{x^3} w_{,x} - 2t_0^2 (w_{,xx} + \frac{1}{x} w_{,x}) + w = 0$$

или в операторном виде

$$\Delta^2 w - 2t_0^2 \Delta w + w = 0, \quad (18)$$

где  $2t_0^2 = t_{f1}/\kappa^2$ ,  $t_{f1} = t_f D$ ,  $\kappa^4 = \kappa_0 D$ ,  $\Delta w(x) = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x \frac{dw}{dx} \right)$ .

Уравнение (18) может быть приведено к системе эквивалентных ему двух уравнений второго порядка. Пусть  $w = w(x)$  – некоторое частное решение однородного уравнения (17), удовлетворяющее в то же время уравнению

$$\Delta w + \lambda w = 0, \quad (19)$$

где  $\lambda$  – константа, подлежащая определению.

Исходя из уравнения (19), имеем

$$\begin{aligned} \Delta w &= -\lambda w, \\ \Delta^2 w &= \lambda^2 w. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив теперь выражения (20) в исходное уравнение (18), получим относительно  $\lambda$  характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2t_0^2 \lambda + 1 = 0. \quad (21)$$

Значения корней уравнения (21) определяются формулами

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -t_0^2 + \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}, \\ \lambda_2 &= -t_0^2 - \sqrt{(t_0^2)^2 - 1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Следует отметить, что если в качестве упругого основания рассматриваются реальные грунты, то значение интегральной характеристики  $t_0$  находится в пределах  $0 \leq t_0^2 \leq 1$  [26]. Случай  $t_0^2 = 0$  соответствует отсутствию сдвига в упругом основании  $t_f = 0$ .

Таким образом, корни характеристического уравнения (22) можно рассматривать как комплексно сопряженные величины

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a = -a_1 + ib_1, \\ \lambda_2 &= \bar{a} = -a_1 - ib_1,\end{aligned}\quad (23)$$

где  $a_1 = t_0^2$ ,  $b_1 = \sqrt{1 - (t_0^2)^2}$ .

Из уравнения (19), следует, что двум комплексно сопряженным корням (23) соответствуют два линейно независимых уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}w_{1,xx} + \frac{1}{x} w_{1,x} + aw_1 &= 0, \\ w_{2,xx} + \frac{1}{x} w_{2,x} + \bar{a}w_2 &= 0.\end{aligned}\quad (24)$$

Общий интеграл основного дифференциального уравнения (17) можно представить в виде

$$w = w_1 + w_2 + w_p, \quad (25)$$

где  $w_p$  – частное решение уравнения (17),  $w_1$  и  $w_2$  – фундаментальная система частных интегралов, удовлетворяющая уравнениям (24).

Решение уравнений (24) можно записать в виде [27]

$$\begin{aligned}w_1(x) &= C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}), \\ w_2(x) &= C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}),\end{aligned}\quad (26)$$

где  $J_0(\sqrt{ax})$ ,  $J_0(\sqrt{\bar{a}x})$  – функции Бесселя первого рода, нулевого порядка, комплексных аргументов  $\sqrt{ax}$  и  $\sqrt{\bar{a}x}$ ;  $H_0^{(1)}(\sqrt{ax})$ ;  $H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x})$  – функции Ханкеля первого и второго рода, нулевого порядка от тех же аргументов.

Используя решение (26), перепишем общее решение (25) в окончательной форме

$$w = C_5 J_0(\sqrt{ax}) + C_6 H_0^{(1)}(\sqrt{ax}) + C_7 J_0(\sqrt{\bar{a}x}) + C_8 H_0^{(2)}(\sqrt{\bar{a}x}) + w_p. \quad (27)$$

Вид частного решения  $w_p$  зависит от вида правой части уравнений (17), т.е. внешней нагрузки  $q_0$ .

### 3. СЛУЧАЙ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим расположенную на упругом однослойном основании круглую трёхслойную пластину радиуса  $R$ , находящуюся под действием равномерно распределённой нагрузки –  $q_0$ . Дифференциальное уравнение изгиба (17) для такой пластины может быть записано в виде

$$\Delta^2 w_1 - 2t_0^2 \Delta w_1 + w_1 = \frac{q_0}{\kappa_0}. \quad (28)$$



Общее решение дифференциального уравнения для прогиба (27) и остальные искомые функции системы (17), с учетом ограниченности решения в начале координат ( $C_2 = C_4 = C_6 = C_8 = 0$ ), в этом случае могут быть представленными в виде

$$u = -\kappa b_1 (C_5 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r)) + C_1 r,$$

$$\psi = -\kappa b_2 (C_5 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r) + C_7 \sqrt{a} J_1(\sqrt{a} \kappa r)) + C_3 r,$$

$$w = C_5 J_0(\sqrt{a} x) + C_7 J_0(\sqrt{a} x) + \frac{q_0}{\kappa_0},$$

где  $q_0/\kappa_0$  – частный интеграл неоднородного дифференциального уравнения (28);  $C_1, C_3, C_5, C_7$  – произвольные постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (13)-(15).

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численный параметрический анализ проведен для защемлённой по контуру пластины единичного радиуса  $R=1$  м, слой которой набраны из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т [28]. Принимались: величина интенсивности поверхностной нагрузки  $q_0 = -1$  МПа; толщины слоёв  $h_1 = h_2 = 0,04$  м,  $h_3 = 0,4$  м; отношение коэффициентов, согласно рекомендациям Пастернака [26],  $t_f/\kappa_0 < 1$ . Градация оснований по жесткости в дальнейшем принята следующая: при  $\kappa_0 \leq 30$  МПа/м – основания малой жесткости (легкие);  $30 \leq \kappa_0 \leq 650$  МПа/м – основания средней жесткости;  $\kappa_0 \geq 650$  МПа/м – основания высокой жесткости.

В случае основания малой жесткости ( $\kappa_0 = 5$  МПа/м) на рис.2 а,б показано изменение прогиба  $w$  и сдвига в заполнителе  $\psi$  вдоль радиуса рассматриваемой трехслойной пластины при различных коэффициентах сдвига основания  $t_f$ , МПа·м: 1 –  $t_f = 0$ , 2 –  $t_f = 0,1$ , 3 –  $t_f = 1$ . При значениях коэффициента сдвига  $t_f \leq 0,1$  МПа·м его влияние на перемещения в пластине не превышают 2,5% и в инженерных расчетах это можно не учитывать. Уменьшение максимумов перемещений достигает 20% при  $t_f = 1$  МПа·м.

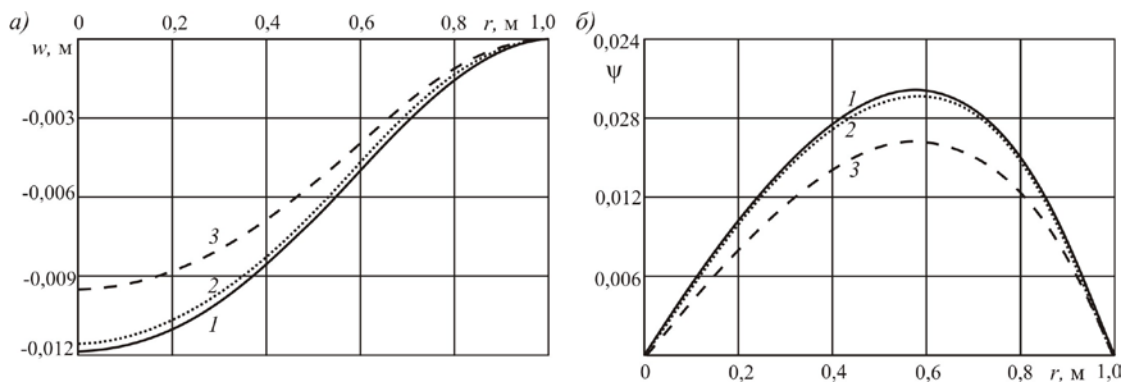


Рис.2.

На рис.3 *a,б* показано изменение прогиба  $w$  и сдвига в заполнителе  $\psi$  вдоль радиуса рассматриваемой пластины при основании средней жёсткости ( $\kappa_0 = 100$  МПа/м) и различных коэффициентах сдвига основания  $t_f$ , МПа·м: 1 –  $t_f = 0$ , 2 –  $t_f = 1$ , 3 –  $t_f = 10$ . С ростом коэффициента  $t_f$  уменьшается прогиб пластины и сдвиг в заполнителе. Здесь также при малых значениях  $t_f < 0,1$  МПа·м изменения не существенные и сдвиговой деформацией основания можно пренебречь. При увеличении коэффициента сдвига до 1 МПа·м прогиб уменьшается на 5%, в случае  $t_f = 10$  МПа·м прогиб уменьшается на 37%. Аналогично ведёт себя сдвиг в заполнителе.

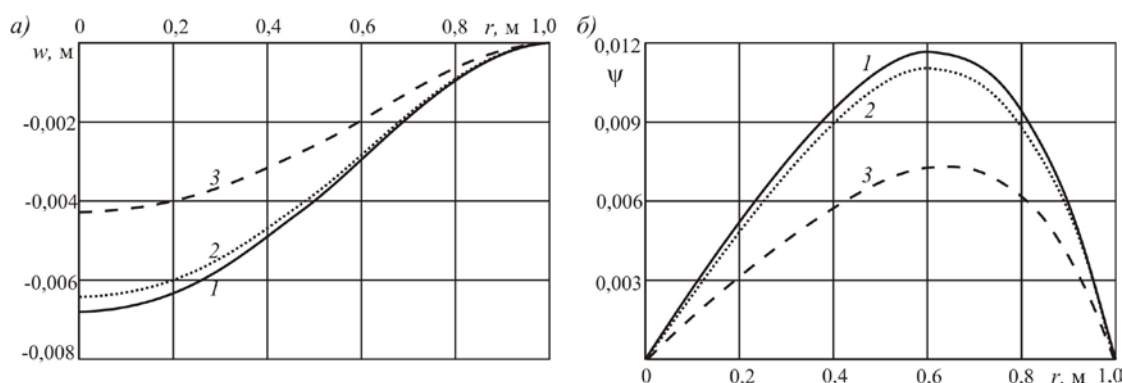


Рис.3.

На рис.4 *a,б* приведены прогиб  $w$  и сдвиг в заполнителе  $\psi$  рассматриваемой пластины при коэффициенте высокой жёсткости основания  $\kappa_0 = 1000$  МПа/м и различных коэффициентах сдвига основания  $t_f$ , МПа·м: 1 –  $t_f = 0$ , 2 –  $t_f = 1$ , 3 –  $t_f = 10$ . Здесь влияние коэффициента сдвига основания проявляется при  $t_f = 10$ , при этом наблюдается уменьшение максимальных значений перемещений на 5%. При  $t_f = 10$  перемещения уменьшаются примерно на 23%.

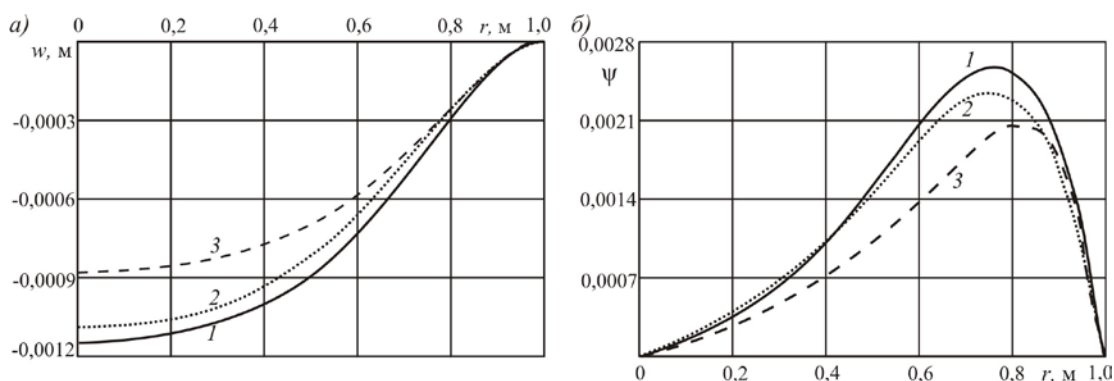


Рис.4.

При весьма жёстких основаниях ( $\kappa_0 \geq 5000$  МПа/м) соответствующие графики перемещений (рис.5 *a,б*) при различных  $t_f$  (МПа·м) будут: 1 –  $t_f = 0$ , 2 –  $t_f = 10$ , 3 –  $t_f = 100$ . При меньших значениях коэффициента  $t_f$  максимум

прогиба сдвигается из центра пластины к сечению  $r = 0,45$ , сдвиг в заполнителе меняет знак вдоль радиуса. Увеличение коэффициента до  $t_f = 100$  МПа·м приводит к монотонному уменьшению исследуемых перемещений вдоль радиуса пластины, как это было и ранее (см. рис.2-4).

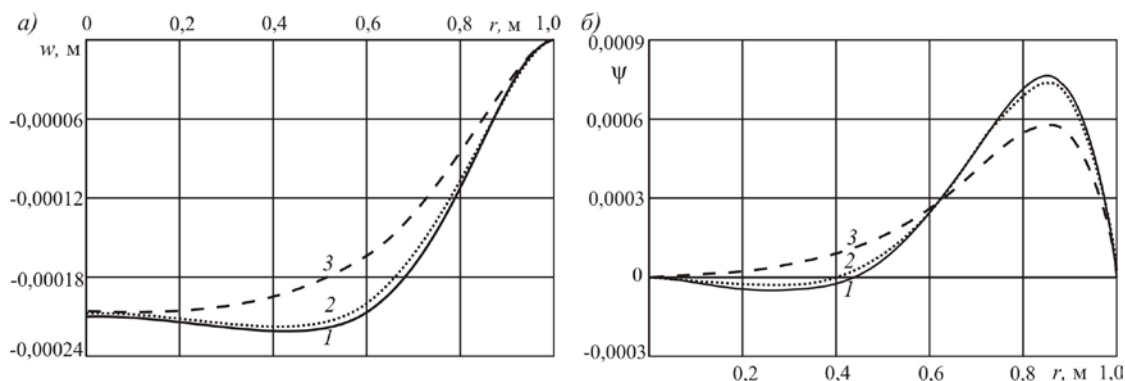


Рис.5.

Таким образом, как показывают графики на рис.2-5, с увеличением коэффициента жёсткости основания примерно в такой же степени уменьшается влияние коэффициента сдвига на величину перемещений.

Следует отметить, что в случае модели основания Винклера решение аналогичной краевой задачи получено в функциях Кельвина [27]. При использовании модели Пастернака этот случай соответствует решению в функциях Бесселя с коэффициентом сдвига основания  $t_f = 0$ . Были проведены соответствующие сравнительные расчеты по этим обоим решениям: в функциях Кельвина и в функциях Бесселя при  $t_f = 0$ . Полученные численные результаты в обоих случаях совпали с точностью до 12-го знака при различных значениях коэффициента сжатия  $\kappa_0$ . Следовательно, несмотря на то, что аналитические решения для перемещений в пластине на основаниях Винклера и Пастернака имеют различный аналитический вид и получены в функциях Кельвина и Бесселя соответственно, совпадение численных результатов при  $t_f = 0$  подтверждают преимущество моделей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная в работе математическая модель, общее и частное решения краевой задачи могут использоваться для исследования напряженно-деформированного состояния симметричного изгиба трёхслойной круговой пластины при ее взаимодействии с упругим основанием Пастернака.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андриюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 408 с.

3. Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. *Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках*. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
4. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates* // Composite Structures. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
5. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates* // Aerospace Science and Technology. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
6. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection* // Acta Mechanica. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
7. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
8. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads* // Strength of Materials. – 2003. – Vol.35. – No.4. – Pp.346-352.
10. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces* // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol.41. – No.7. – Pp.809-816.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation* // International Applied Mechanics. – 2011. – Vol.47. – No.5. – Pp.580-589.
12. Паймушин В.Н., Иванов В.И., Хусаинов В.Р. *Анализ свободных и собственных колебаний трехслойной пластины на основе уравнений уточненной теории* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №4. – С.543-554.
13. Джагангиров А.А. *Несущая способность кольцевой трехслойной волокнистой композитной пластинки, свободно опертой по внутренней и заземленной по внешней кромкам* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.35-43.
14. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Метод асимптотического расщепления в задачах продольно-поперечного изгиба анизотропных слоистых плит* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.13. – №4. – С.548-580.
15. Старовойтов Э.И. *О переменном нагружении вязкопластических трехслойных пологих оболочек* // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 1980. – №2. – С.92-96.
16. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. *К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях* // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – №1. – С.116-121.
17. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Циклические нагружения упругопластических тел в нейтральном потоке* // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – №1. – С.79-85.

18. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels* // Mater. Sci. Appl. – 2013. – Vol.4. – No.8. – Pp.471-477.
19. Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates* // AIAA J. – 2007. – Vol.45. – No.9. – Pp.2312-2322.
20. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads* // Mech. Adv. Mater. Struct. – 2010. – Vol.17. – No.6. – Pp.419-432.
21. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Термоупругопластическое деформирование трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.419-434.
22. Starovoitov E.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a step composite beam in a temperature field* // J. of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol.88. – No.4. – Pp.1023-1029.
23. Старовойтов Э.И. *Упругопластическое деформирование трехслойных стержней в температурном поле* // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2012. – №3. – С.91-98.
24. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation* // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol.43. – No.4. – Pp.451-459.
25. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В. *Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – №2 (17). – С.209-219.
26. Пастернак П.Л. *Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели.* – М.: Гос. изд-во литературы по строительству и архитектуре. – 1954. – 55 с.
27. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1976. – 576 с.
28. Старовойтов Э.И. *К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов* // Пробл. прочности. – 1988.– №4. – С.11-15.

## REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslnoykh konstruktсии [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Solomonov Iu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ia., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]*. Moskva, FIZMATLIT, 2014, 408 p.
3. Golovko K.G., Lugovoi P.Z., Meish V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh [The dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads]*. Kiev, Kievskii un-t, 2012, 541 p.
4. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates.* Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
5. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates.* Aerospace Science and Technology. 2016, No.52, Pp.41-51.

6. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541 .
7. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhsloinoi tsilindricheskoi obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
8. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniia trekhsloinoi tsilindricheskoi obolochki s uprugim napolnitele [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads*. Strength of Materials, 2003, Vol.35, No.4, Pp.346-352.
10. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Vibrations of a sandwich rod under local and impulsive forces*. International Applied Mechanics, 2005, Vol.41, No.7, Pp.809-816.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation International*. International Applied Mechanics, 2011, Vol.47, No.5, Pp.580-589.
12. Paimushin V. N., Ivanov V.I., Khusainov V.R *Analiz svobodnykh i sob-stvennykh kolebaniy trekhsloinoi plastiny na osnove uravnenii utochnennoi teorii [Analysis of free and natural oscillations of a three-layer plate on the basis of the equations of the refined theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2002, Vol.8, No.4, Pp.543-554.
13. Jahangirov A.A. *Nesuschaya sposobnost koltsevoy trekhsloinoi voloknistoy kompozitnoy plastinki, svobodno opertoy po vnutrenney i zaschemlennoy po vneshney kromkam [Load-carrying capacity of a fiber - reinforced annular tree layer composite plate, free supported on internal and clamped on external contours]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.35-43.
14. Gorynin G.L., Nemirovskii Iu.V. *Metod asimptoticheskogo rasshchep-leniia v zadachakh prodol'no-poperechnogo izgiba anizotropnykh sloistykh plit [Method of asymptotic splitting in problems of longitudinal-transverse bending of anisotropic layered plates]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2007, Vol.13, No.4, Pp.548-580.
15. Starovoitov E.I. *O peremennom nagruzhении viazkoplasticheskikh trekh-sloinykh pologikh obolochek [On variable loading of viscoplastic three-layered shallow shells]*. Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika, Mekhanika, 1980, No.2, Pp. 92-96.
16. Moskvitin V.V., Starovoitov E.I. *K issledovaniuu napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia dvukhsloinykh metallopolimernykh plastin pri tsiklicheskiikh nagruzheniiax [To the study of the stress-strain state of two-layer metal-polymer plates under cyclic loading ]*. Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela, 1986, No.1, Pp.116-121.
17. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux*. Mechanics of Solids, 2001, Vol.36, No.1, Pp.64-69.
18. Yang L., Harrysson O., West H., Cormier D.A. *Comparison of Bending Properties for Cellular Core Sandwich Panels*. Mater. Sci. Appl., 2013, Vol.4, No.8, Pp.471-477.

19. Lee C. R., Sun S. J., Kam T. Y. *System parameters evaluation of flexibly supported laminated composite sandwich plates*. AIAA J., 2007, Vol.45, No.9, Pp.2312-2322.
20. Zenkour A.M., Alghamdi N.A. *Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates under the Effect of Mechanical and Thermal Loads*. Mech. Adv. Mater. Struct., 2010, Vol.17, No.6, Pp.419-432.
21. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Termouprugoplasticheskoe deformirovanie trekhsloinogo sterznya so sjimaemym zapolnitelem [Thermoelastoplastic deformation of a three-layer bar with a compressible filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.419-434.
22. Starovoitov E.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a step composite beam in a temperature field*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, Vol.88, No.4, Pp.1023-1029.
23. Starovoitov E.I. *Elastoplastic deformation of three-layer beam in a temperature field*. Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii, 2012, No.3, Pp.91-99. (In Russ.).
24. Starovoitov É.I., Leonenko D.V., Yarovaya A.V. *Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation*. International Applied Mechanics, 2007, Vol.43, No.4, Pp.451-459.
25. Pleskachevskii Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Panin S.V. *Termoplasticheskii izgib krugovykh kompozitnykh plastin na osnovanii Vinklera [Thermoplastic bending of circular composite plates based on Winkler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.2, Pp.209-219
26. Pasternak, P.L. *Osnovy novogo metoda rascheta fundamentov na uprugom osnovanii pri pomoshchi dvukh koeffitsientov posteli [Fundamentals of a New Method of Elastic Foundation Analysis by Means of Two-constants]*. Moskva, Gos. Izd. Literatury po stroitelstvu i arkhitekture, 1954, 55 p.
27. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam [Handbook of ordinary differential equations]*. Moskva, Nauka, 1976, 576 p.
28. Starovoitov E.I. *K opisaniyu mekhanicheskikh svoystv nekotorykh konstruktsionnykh materialov [To the description of thermomechanical properties of some structural materials]*. Strength of Materials, 1988, No.4, Pp.11-15.

*Поступила в редакцию 18 мая 2018 года.*

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав. каф., Кафедра «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

Козел Анастасия Григорьевна – асп., Кафедра «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь