

УДК 519.711.2:539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ СРЕД*

Басистов Ю.А., Власов А.Н., Карнет Ю.Н.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, Россия, г. Москва

АННОТАЦИЯ

В работе используется нелинейная вязкоупругая модель среды с ассоциативной и наследственной памятью в виде системы интегро-дифференциальных уравнений. Наследственная память (долгое время) содержится в интегральном операторе Вольтерра, а ассоциативная (кратковременная) определяется дифференциальным оператором. Идентификация модели решается с помощью нейронных сетей в версии конечномерного приближения с дискретным временем для композиционного материала на основе матрицы натурального каучука (полиизопрена), заполненной 20% по массе сажей марки 330. Исследование проводится как в режиме малых деформаций, так и в режиме конечных деформаций. В работе исследуется точность воспроизведения моделью реальной функции нелинейности и её способность обобщать экспериментальный материал на основе обучающей выборки. Идентификация этой модели показала хорошее воспроизведение фактической функции нелинейности реального вязкоупругого материала в режиме конечной деформации.

Ключевые слова: вязкоупругость; модель Максвелла; модель Фойгта-Кельвина; наследственная память; ассоциативная память; эластомерный композит; большие деформации; релаксационный спектр; релаксационный модуль; нейронная сеть

DYNAMIC NEURAL NETWORK AS A MODEL OF VISCOELASTIC MEDIA

Basistov Yu.A., Vlasov A.N., Karnet Yu.N.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

The paper utilizes a nonlinear viscoelastic model of the medium with associative and hereditary memory in the form of a system of integro-differential equations. The hereditary memory is contained (for a long time) in the Volterra integral operator and the associative (short-term) memory is determined by the differential operator. Identification of the model is solved using neural networks in the version of the finite-dimensional approximation with discrete time for a composite material based on a matrix of natural rubber (polyisoprene), filled by 20% with N-330 carbon black. The study is carried out both in the small strain mode and in the finite strain mode. The issues studied in the paper are the accuracy of reproduction by the model of the real nonlinearity function and its ability to generalize the experimental material based on the training sample. The identification of this model showed a good reproduction of the actual function of nonlinearity of a real viscoelastic material in the finite strain mode.

* Работа выполнена в рамках работы по Государственному заданию ИПРИМ РАН номер гос.регистрации АААА-А17-117032010138-7.

Keywords: viscoelasticity, Maxwell model, Voigt-Kelvin model, hereditary memory, associative memory, elastomeric composite, large strain, relaxation spectrum, relaxation module, neural network

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование вязкоупругих сред можно разделить на два этапа: вначале даётся формулировка математической модели среды, затем эта модель идентифицируется по экспериментальным данным.

В настоящее время при формулировке моделей, как правило, используются модели Максвелла, Джеффриса и Фойгта-Кельвина [1]. При дальнейшем рассмотрении за основу приняты две модели – модель Максвелла и модель Фойгта-Кельвина.

Модель Максвелла состоит из последовательно соединённых упругого и вязкого элементов и описывается уравнением

$$\lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t}, \quad (1)$$

где σ – напряжение в элементе, γ – его деформация, $\lambda = \eta / G$ – время релаксации, η – коэффициент вязкости, G – модуль упругости, $\partial \gamma / \partial t$ – скорость деформации.

При постоянной деформации $\gamma \neq 0$ $\partial \gamma / \partial t = 0$ из (1) получаем, что напряжение $\sigma(t) = \sigma(0) \exp(-t/\lambda)$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ с постоянным временем релаксации λ . Поэтому элементы Максвелла могут применяться лишь для моделирования вязких жидкостей в линейном режиме (малые деформации) нагружения.

Интегрируя (1), получаем зависимость напряжения от времени

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (2)$$

Параллельное соединение из N независимых элементов Максвелла формирует математическую модель К-ВКЗ [2] в виде

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{t-s}{\lambda_k}\right) \frac{\alpha \mathbf{D} \mathbf{C}_t^{-1}(\mathbf{x}, \tau) / \mathbf{D} \tau}{(\alpha - 3) + \beta I + (1 - \beta) II} d\tau \quad (3)$$

Здесь: $\sigma(\mathbf{x}, t)$ – тензор напряжений; $\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{C}(t, \mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_t^T \mathbf{F}_t = \mathbf{C}_t^T(\mathbf{x}, \tau)$ – тензор деформации Коши-Грина, где $\mathbf{F}(\tau)$ – матрица Якоби; $\mathbf{C}_t^{-1}(\mathbf{x}, \tau)$ – тензор Фингера; $I = \text{tr} \mathbf{C}_t^{-1}$, $II = \text{tr} \mathbf{C}_t$, где $\text{tr}(\cdot)$ – след матрицы; параметры $\alpha > 0$, $0 \leq \beta \leq 1$; $\{\eta_k, \lambda_k\}$ – релаксационный спектр; $\mathbf{D}/\mathbf{D}t$ – инвариантная производная.

Задача идентификации модели (3) состоит в решении уравнения Фредгольма первого рода по имеющимся экспериментальным данным относительно релаксационного спектра. Эта задача некорректна по Адамару и поэтому требует регуляризации [3]. Такая задача решена в работе [4] с использованием метода минимакса для решения некорректно поставленных по Адамару задач [5].

В режиме конечных деформаций (нелинейный режим нагружения) можно использовать модель Вагнера [6]

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^t h(I, II) \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\lambda_k} \exp\left(-\frac{t-s}{\lambda_k}\right) \frac{\alpha \mathbf{D} \mathbf{C}_t^{-1}(\mathbf{x}, \tau) / \mathbf{D} \tau}{(\alpha - 3) + \beta I + (1 - \beta) II} d\tau, \quad (4)$$

где $h(I, II)$ – нелинейная демпинг-функция, подлежащая оцениванию по экспериментальным данным совместно с оценкой релаксационного спектра. Задача идентификации модели (4) по экспериментальным данным решена в работе [7]. Однако точность такой оценки была недостаточной.

Модель Фойгта-Кельвина состоит из параллельно соединённых упругого и вязкого элементов и описывается уравнением

$$\sigma(t) = G\gamma(t) + \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t}. \quad (5)$$

Здесь, при постоянной деформации $\gamma \neq 0$, $\partial \gamma / \partial t = 0$ напряжение $\sigma(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к постоянному значению $\sigma(\infty) = G\gamma \neq 0$, т.е. напряжение не релаксирует до нулевого значения. Поэтому модель Фойгта-Кельвина (5) можно использовать лишь для поведения твёрдых вязкоупругих сред. Это модель не обладает наследственной памятью в отличие от модели Максвелла.

В настоящее время остаются актуальными основные проблемы, связанные с идентификацией модели в режиме конечных деформаций (нелинейный режим нагружения).

Как правило, нелинейные модели представляются в виде уравнения

$$\lambda \frac{D\sigma}{Dt} + f(\sigma) = 2\eta D[u],$$

где σ – тензор напряжений; $D[u]$ – симметричная часть тензора градиента скорости деформации $L(x, t) = \nabla u$ с элементами $L_{ij} = \partial u_i / \partial u_j$; $f(\cdot)$ – неизвестная нелинейная функция напряжения. Как и прежде, $\lambda = \eta/G$, η , G – время релаксации, коэффициент вязкости и модуль упругости, соответственно, а D/Dt – инвариантная производная.

В работе [8] предложена квадратичная аппроксимация нелинейной функции $f(\sigma) = \sigma + c\sigma^2$, где $c = \alpha\lambda/\eta$, α – некоторая постоянная. В работе [9] нелинейность представлена в виде $f(\sigma) = \sigma \varphi(tr\sigma)$, где $\varphi(\cdot)$ – нелинейная функция, например, в виде, $\varphi(tr\sigma) = \exp[(\varepsilon\lambda/\eta)tr\sigma]$, где ε является материальным параметром, определяющим поведение модели.

В рассмотренных моделях фактический вид нелинейности неизвестен и способы оценки этой нелинейности по экспериментальным данным не определены. Аппроксимации в виде квадратичной или экспоненциальной функции могут не соответствовать поведению реальной вязкоупругой среды. Поэтому вопрос оценки вида нелинейности по экспериментальным данным остаётся актуальным.

1. НЕЛИНЕЙНАЯ ВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ С АССОЦИАТИВНОЙ И НАСЛЕДСТВЕННОЙ ПАМЯТЬЮ. СВОБОДНАЯ РЕЛАКСАЦИЯ

Рассмотрим модель, которая представляет собой параллельное включение элементов Максвелла (с наследственной памятью) и Фойгта-Кельвина (с ассоциативной памятью), имеющие одинаковые модули упругости и коэффициенты вязкости. Чтобы записать математическую формулировку такой модели, проинтегрируем соотношение (2) по частям. В результате получим

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \frac{\partial \gamma(\tau)}{\partial \tau} d\tau = \frac{\eta}{\lambda} \left[\gamma_1(t) - \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \gamma(\tau) d\tau \right] \quad (6)$$

При действии нагрузки в модели с параллельным соединением элементов величина деформации модели будет равна величинам деформаций элементов Максвелла и Фойгта-Кельвина. При этом напряжения в элементах будут равными между собой, а действующее в модели напряжение будет равно сумме напряжений в элементах.

Складывая напряжения, определяемые зависимостями (5) и (6), после элементарных алгебраических преобразований получим для рассматриваемой модели следующую зависимость между напряжениями и деформациями

$$\sigma(t) = \frac{\eta}{\lambda} \left[\gamma(t) - \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \gamma(\tau) d\tau + \frac{\lambda}{2} \frac{d\gamma(t)}{dt} \right] \quad (7)$$

Вычитая из уравнения (6) уравнение (5) и делая элементарные алгебраические преобразования, получим интегро-дифференциальное уравнение, описывающее деформированное состояние рассматриваемой модели во времени

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\frac{2\gamma(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \gamma(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$-\infty < \tau \leq t \leq T, \quad \gamma(-\infty) = \gamma_0$$

Экспериментально авторами в работе [10] было показано, что нелинейность среды заложена в её материальной функции и поэтому ими было предложено использовать нелинейный вязкоупругий элемент с ассоциативной и наследственной памятью. Для этого к интегральной части (8), содержащую наследственную долговременную память была подключена нелинейная непрерывная функция φ типа насыщения (функция активации). В результате соотношение (8) было преобразовано к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = -\frac{2\gamma(t)}{\lambda} + \varphi \left(\frac{1}{\lambda^2} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda}\right) \gamma(\tau) d\tau + const \right), \quad (9)$$

$$-\infty < \tau \leq t \leq T, \quad \gamma(-\infty) = \gamma_0$$

Объединяя модели типа (9) между собой интегральными операторами Вольтерра, выполняющими функцию синаптических связей, получим более общую нелинейную модель вязкоупругой среды в виде системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{d\gamma_j(t)}{dt} = -\frac{2\gamma_j(t)}{\lambda_j} + \varphi_j \left(\sum_{i=1}^M \int_{-\infty}^t \frac{k_i}{\lambda_j \lambda_i} \exp\left\{-\tau \frac{\lambda_j + \lambda_i}{2\lambda_j \lambda_i}\right\} \gamma_i(t-\tau) d\tau + b_i \right) \quad (10)$$

где $-\infty < \tau \leq t \leq T < \infty$; $\gamma(-\infty) = \gamma_0$; $j=1, \dots, N$; $k_i=1$ при $i=j$; b_i – некоторые параметры модели; N – число элементов (10) в вязкоупругой среде; M – число элементов с наследственной памятью, которые оказывают влияние на элемент с номером j .

Итак, в этих уравнениях, каждый элемент связан с соседними элементами интегральными операторами Вольтерра. Эти операторы характеризуют наличие некоторого дополнительного типа вязкоупругих цепей (типа Максвелла) между ассоциативными элементами. Диагональные компоненты матрицы системы

интегро-дифференциальных уравнений (10) $w_{i,i}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{k_i}{\lambda_i^2} \exp\left\{-\frac{t-\tau}{\lambda_i}\right\} \gamma_i(\tau) d\tau$ есть деформация вязкоупругих элементов за время t . Компоненты же матрицы $w_{j,i}(t) = \int_{-\infty}^t \frac{k_i}{\lambda_j \lambda_i} \exp\left\{-\frac{(\lambda_j + \lambda_i)(t-\tau)}{2\lambda_j \lambda_i}\right\} \gamma_i(\tau) d\tau$, $i \neq j$, не лежащие на диагонали, определяют синаптическое соединение j -го вязкоупругого элемента с i -м элементом. Когда $w_{j,i}(t) < 0$, $i \neq j$, $k_i < 0$, эти интегралы отрицательны, что означает уменьшение влияния (подавление) одного элемента на другой. Спектр релаксации вязкоупругой среды характеризуется релаксационной матрицей A в которой компоненты $\{\lambda_i^2\}_{i=1}^N$ определяют спектр релаксации вязкоупругих элементов среды, а компоненты $\lambda_i \lambda_j$ отвечают за наследственные связи этих i -ого элемента с j -м элементом среды (и наоборот) с условиями возбуждения или подавления.

Вышесказанное говорит о том, что вязкоупругая модель (10) существенно отличается от известных моделей вязкоупругих сред. Если, например, мы разрываем взаимные связи между элементами, то получаем диагональную матрицу релаксации, что представляет собой обычный спектр релаксации вязкоупругой среды. Модель (10) описывает процесс релаксации вязкоупругой среды по времени от состояния нагружения в состояние устойчивого термодинамического равновесия. В этом смысле ассоциативной памяти модели. Отметим, что модель (10) применима как для жидких, так и для твёрдых вязкоупругих сред, как в линейном режиме, так и в режиме конечных деформаций. Последнее не достижимо для классических моделей (3), (4). Все элементы модели (10) соединены синаптическими связями в виде интегральных операторов Вольтерра, в то время как элементы в моделях (3), (4) взаимно независимы. Последнее свойство позволяет моделировать нелинейные анизотропные вязкоупругие среды, чего невозможно для классических моделей (3), (4).

Кроме того модель (10) обладает всеми преимуществами нейронных сетей – это параллельная обработка информации, отказоустойчивость (функции повреждённых соединений принимают на себя параллельные связи), способность к обучению и к обобщению полученных знаний, и другие свойства искусственного интеллекта. Оказалось, что система уравнений (10) распространяет известную нейронную сеть Хопфилда на пространство $L_2(X)$, а также на наследственную память, которой нейронная сеть Хопфилда не обладает [11]. Поэтому мы будем приближать модель (10) нейронной сетью. Для этого в системе интегро-дифференциальных уравнений (10) перейдём к дискретному времени, заменяя при этом интегралы от ядер на единичных интервалах времени их средними значениями. В результате несложных преобразований система интегро-дифференциальных уравнений (10) сводится к динамической нелинейной системе с дискретным временем в пространстве R^N (см. [10])

$$\gamma_j(n) = \varphi_j \left(\sum_{i=1}^M k_i W_{j,i} \gamma_i(n-1) + b_j \right); \quad \gamma_i(0) = \gamma_0; \quad b_j(0) = 1;$$

$$j=1, 2, \dots, N; \quad i=1, 2, \dots, N;$$

или в матричной форме

$$\gamma(n) = \varphi(W\gamma(n-1) + b), \quad \gamma(0) = \gamma_0, \quad n=1,2,\dots,N. \quad (11)$$

Здесь матрица $W = W^T$ симметрична, положительно определена, функция активации $\varphi(x)$ ограничена, монотонно возрастает и один раз всюду дифференцируема в области определения, $\gamma(n)$ – деформация как функция дискретного времени.

Реализация ассоциативной памяти вязкоупругой среды с двумя элементами представлена на рис.1. В этом случае мы имеем $\gamma(n) = \begin{pmatrix} \gamma_1(n) \\ \gamma_2(n) \end{pmatrix}$, и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Предположим, что в точке равновесия, где выполняется равенство $\varphi(W\tilde{\gamma} + b) = \tilde{\gamma}$, где $\tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Затем, используя алгоритм обучения [14], мы имеем весовую

матрицу $W = \begin{bmatrix} 0.6925 & -0.4994 \\ -0.4994 & 0.6925 \end{bmatrix}$ и вектор перемещения $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Таким образом, мы имеем, что

$$\varphi \left[\begin{pmatrix} 0.6925 & -0.4994 \\ -0.4994 & 0.6925 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \varphi \begin{pmatrix} -1.1919 \\ 1.1919 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Существуют три различные начальные точки вектора деформаций: $\gamma_1(0)$, $\gamma_2(0)$ и $\gamma_3(0)$. На рис.1 показано, что все траектории вектора деформаций сходятся к устойчивому термодинамическому равновесию. Этот результат подтверждает свойство устойчивости динамической модели (11).

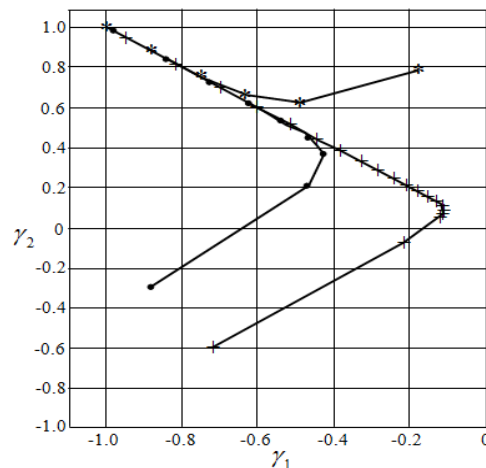


Рис. 1 Траектории векторов состояний.

Заметим, что два элемента W отрицательны (подавление в синаптических связях), а диагональные элементы отличны от нуля. Это подтверждает, что модель (11) не является классической моделью Хопфилда [11], т.к. имеет другую функцию активации, другие синаптические связи типа «один ко всем» и алгоритм обучения, отличный от алгоритма Хэбба, принятого для обучения модели Хопфилда. Устойчивость модели (11) была доказана в работе [12] с помощью теоремы Коэна-Гроссберга [13]. Диагональ релаксационной матрицы W есть

квадраты времён релаксации отдельных вязкоупругих элементов. Остальные элементы матрицы характеризуют релаксационные синаптические связи между вязкоупругими элементами. Модель (11) описывает эволюцию свободного вязкоупругого деформирования среды во времени от исходного состояния до термодинамического равновесия.

2. ЦЕЛЬ РАБОТЫ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Цель настоящей работы состоит в исследовании динамической нейросетевой модели (11). Исследованию подлежит качество идентификации (обучения) к композиту на основе матрицы из натурального каучука (полиизопрен), наполненного 20 масс. % технического углерода марки № 330, далее ПИ-330, как в линейном режиме нагружения, так и в режиме конечных деформаций, исследование точности воспроизведения моделью реальной функции нелинейности, а также исследование возможности модели к обобщению обучающей выборки. Для того чтобы эта модель могла работать в реальном времени динамического нагружения, её необходимо дополнить входом и выходом, и подключить реовискозиметр. Таким образом, мы переходим к модели в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(k) &= \varphi_1 [\mathbf{W}_a \dot{\gamma}(k-1) + \mathbf{w}_b \sigma(k) + \mathbf{b}_1] \\ \hat{\gamma}(k) &= \varphi_2 (\mathbf{w}_c^T \dot{\gamma}(k) + \mathbf{b}_2)\end{aligned}\quad (12)$$

где $\varphi_1(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}} - 1$ – логистическая функция активации, или функция гиперболического тангенса $\varphi_1(x) = \tanh(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Функция φ_2 – линейная (из условий эксперимента).

Уравнения (12) описывают динамическую систему с одним входом (функцией напряжения) и одним выходом (интегральная деформация). Компоненты вектора $\dot{\gamma}(k)$ описывают скорости деформаций в различных вязкоупругих элементах в зависимости от дискретного времени « k ». Первое уравнение в (12) определяет эволюцию среды во времени под воздействием напряжения $\sigma(k)$. Второе уравнение в (12) моделирует реовискозиметр (в нашем случае RS-150 НААКЕ, Германия). Матрица \mathbf{W}_a и вектор \mathbf{b}_1 представляют собой комбинации времён релаксации подлежат оценке. Векторы \mathbf{w}_b , \mathbf{w}_c и смещение \mathbf{b}_2 описывают линейный оператор реовискозиметра, на котором осуществляется эксперимент. Они также подлежат оценке. Сравнивая (11) и (12), видим, что основная рекуррентная часть модели (12) повторяет уравнение (11) и определяет модель вязкоупругой среды. Уравнения состояния, записанные в виде (12), аналогичны рекуррентной сети Элмана [11]. Обучение модели состоит из нескольких этапов: формирование обучающей выборки, выбор целевого функционала, выбор алгоритма обучения, тестирование модели. Рассмотрим основные этапы подробнее.

3. ФОРМИРОВАНИЕ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ

Экспериментально на реовискозиметре RS-150 (НААКЕ, Германия) для вязкоупругой среды ПИ-330 были измерены модули упругости (накопления) G'

и потерь G'' для различных значений градиента деформации. Графики экспериментальных зависимостей приведены на рис.2.

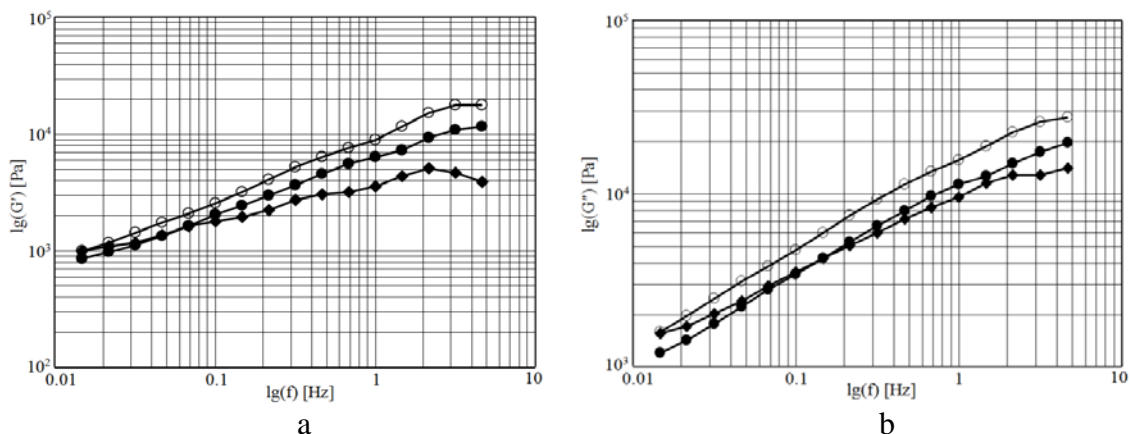


Рис.2. Экспериментальные зависимости динамических модулей: а – упругости G' и б – потерь G'' [Па] от частоты деформирования [Гц]. Символы \circ , \square , Δ – соответствуют градиентам деформации 1,2,3 соответственно.

Согласно известным соотношениям [15]

$$G''(\omega) = \int_0^{\infty} h_1(\lambda) \frac{\omega\lambda}{1 + \omega^2\lambda^2} d(\ln \lambda), \quad G'(\omega) = \int_0^{\infty} h_2(\lambda) \frac{\omega^2\lambda^2}{1 + \omega^2\lambda^2} d(\ln \lambda) \quad (13)$$

Путём решения обратных задач для уравнений Фредгольма первого рода (13) методом минимакса вычисляем релаксационные спектры $h_1(\lambda)$ и $h_2(\lambda)$ для различных значений скорости деформации. Формируем реальное значение релаксационного спектра по соотношению $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$. Графики релаксационных спектров $h(\lambda)$ для различных значений градиента деформации представлены на рис.3.

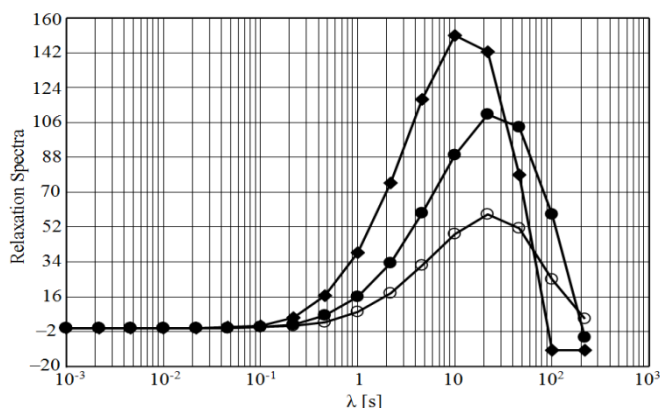


Рис.3. Последовательность релаксационных спектров для различных импульсов деформации. Символы \circ , \square , Δ – градиенты деформации 1,2,3 соответственно.

Одна из важнейших материальных функций среды (композита ПИ-330), а именно, релаксационный модуль, может быть вычислен через спектр времён релаксации в соответствии с уравнением [15]

$$G(t) = G_e + \int_0^\infty h(\lambda) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) d(\ln \lambda), \quad G_e = 0 \tag{14}$$

Графики релаксационных модулей для различных значений градиента деформации представлены на рис.4.

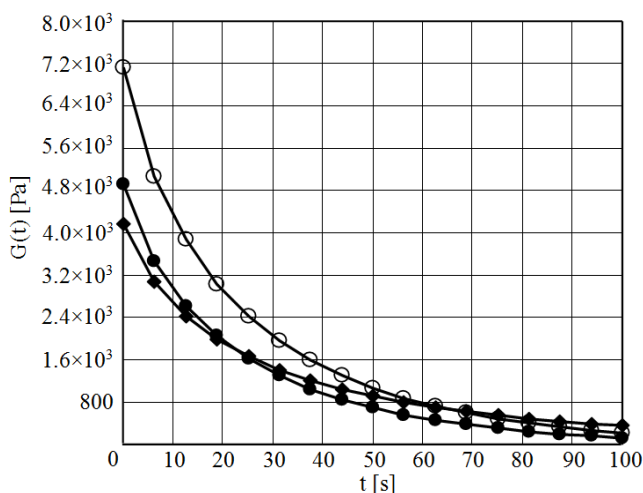


Рис.4. Последовательность релаксационных модулей. Символы \circ , \square , Δ – соответствуют градиентам деформации 1,2,3 соответственно. Ось абсцисс в секундах, ось ординат в паскалях.

Окончательно зависимость касательных напряжений от градиента деформации можно вычислить по соотношению (см. [15])

$$\tau(t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \dot{\gamma}(s) dt \tag{15}$$

Если задать входной сигнал (градиент деформации) в виде прямоугольного импульса с амплитудами 1,2,3 соответственно, то, согласно (15), получим выходные сигналы (касательные напряжения) в виде релаксационных функций с наследственной памятью. Графики входных и выходных сигналов представлены на рис.5.

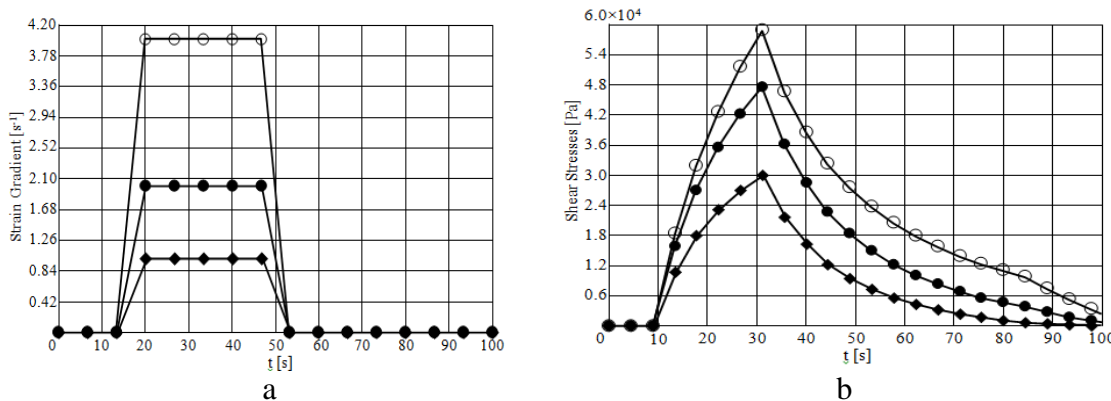


Рис.5. Графики импульсов градиента деформации: а – входные сигналы, графики касательных напряжений; б – выходные сигналы как реакция ПИ-330 на импульсы градиента деформации. Символы \circ , \square , Δ – соответствуют градиентам деформации 1,2,3 соответственно.

Если теперь по оси абсцисс отложить последовательность амплитуд скорости деформации $\{\max_t \dot{\gamma}_i(t)\}$, а по оси ординат – последовательность амплитуд касательных напряжений $\{\max_t \tau_i(t)\}$, то получим график зависимости касательных напряжений от значений градиента деформации для композита ПИ-330.

Из графика рис.6 следует, что среда ПИ-330 при значении $\dot{\gamma}_1 = 1$ работает в линейном режиме, а уже при $\dot{\gamma}_2 = 2$ и при $\dot{\gamma}_3 = 3$ – в режиме конечных деформаций. Далее, в качестве обучающего материала для нейронной сети (8) примем линейный режим работы (нижние графики на рис.5), а для тестирования нейронной сети – режим конечных деформаций (остальные графики рис.5).

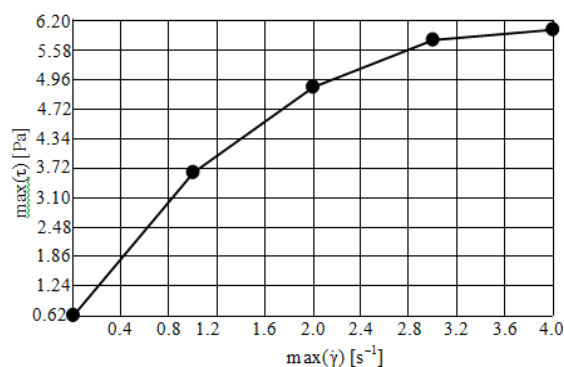


Рис.6. Нелинейная зависимость касательных напряжений от значений амплитуд градиента деформации.

4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Структурная схема эксперимента представлена на рис.7.

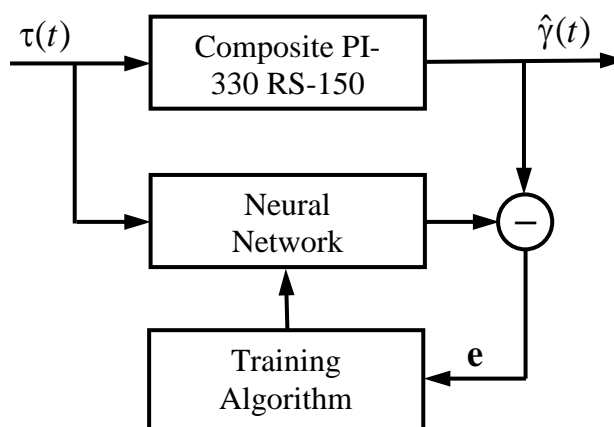


Рис.7. Структурная схема эксперимента.

В качестве целевого функционала выбираем среднеквадратичную ошибку $SSE = \sum_{i=1}^N e_i^2$. В качестве алгоритма обучения выбираем градиентный спуск с возмущением, в котором параметр скорости спуска выполняет адаптивную функцию. На рис.8 приведены выходные сигналы (касательные напряжения

для композита ПИ-330) с нейронной сети (12) и с экспериментальной установки под действием одного и того же входного сигнала (импульса градиента деформации с амплитудой $\dot{\gamma} = 1$).

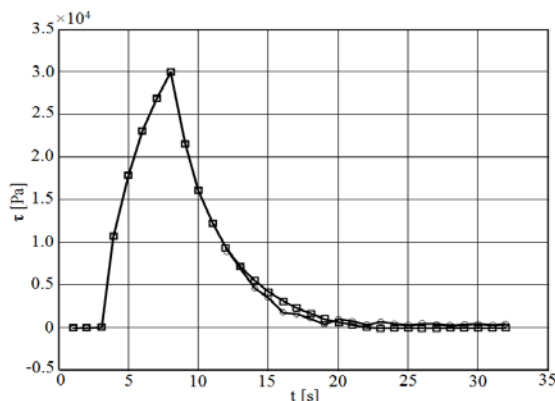


Рис.8. Графики целевого и выходного сигналов для $\dot{\gamma} = 1$: \square – желаемый сигнал, \circ – выходной сигнал с нейронной сети.

Графики подтверждают хорошее качество обучения (идентификации к ПИ-330) нейронной сети. Далее проведём тестирование нейронной сети (12). Для этого разъединим выходы экспериментальной установки и нейронной сети, при этом убираем алгоритм обучения в блок-схеме рис.7 эксперимента. Таким образом, при дальнейшей работе запрещено обучаться нейронной сети на других обучающих данных. Представляет интерес – как работает нейронная сеть на сигналах, которые не предъявлялись ей для обучения, т.е. проверить свойство нейронной сети обобщать обучающий материал. На рис.9 представлены выходные сигналы нейронной сети и экспериментальной установки при поступлении на их входы импульса градиента деформации с амплитудами $\dot{\gamma}_2 = 2$ и $\dot{\gamma}_3 = 4$.

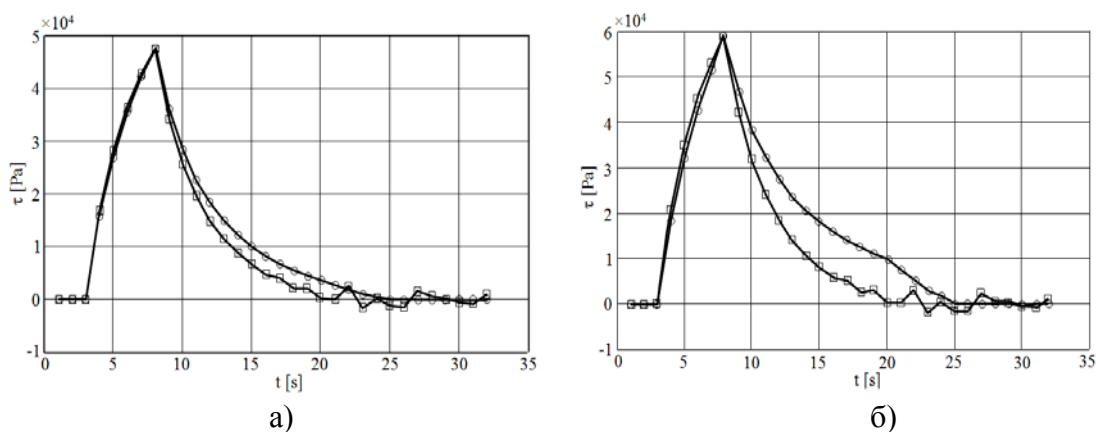


Рис.9. Результаты тестирования нейронной сети при а) $\dot{\gamma} = 2$ и б) $\dot{\gamma} = 4$
 \circ – желаемый сигнал, \square – выходной сигнал с нейронной сети.

Из рис.9 видно некоторое расхождение сигналов на падающей ветви релаксации, однако, амплитуда выходных сигналов определена точно. Эксперимент показал, что для повышения качества обучения необходимо предъявить системе дополнительные входные и выходные обучающие сигналы.

Далее было интересно установить, как точно нейронная сеть воспроизводит функцию нелинейности при работе ПИ-330 в режиме конечных деформаций. Было показано, что функция нелинейности, вычисленная нейронной сетью, полностью совпала с экспериментальной функцией нелинейности представленной на рис.6.

Следующий численный эксперимент состоял в сравнении функции нелинейности нейронной сети с демпинг (damping) функцией модели (3), вычисленной в работе [7]. Эти функции представлены на рис.10.

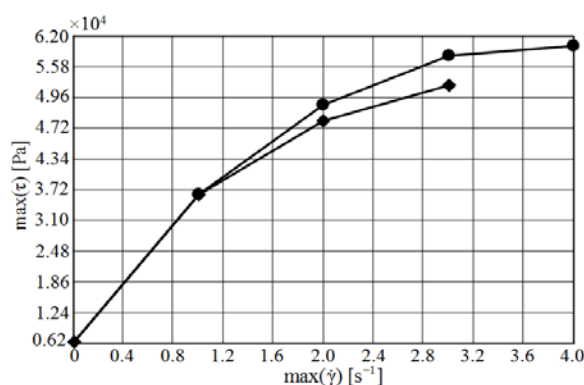


Рис.10. Сравнение нелинейных функций, вычисленных нейронной сетью (○) и моделью с демпинг функцией (□).

Сравнение рис.12 показывает значительное преимущество в качестве идентификации нейросетевой модели перед нелинейной интегральной моделью с факторизацией функции нелинейности. Более того интегральные модели не обладают свойством обобщения обучающего материала.

ВЫВОДЫ

Построена нейронная сеть с ассоциативной и наследственной памятью для моделирования напряжённо-деформационного поведения вязкоупругих сред в режиме конечных деформаций. Показано, что модель является обобщением нейронной сети Хопфилда на пространство $L_2(X)$ и на наследственную память.

Показано, что для идентификации нейронной сети физическому эксперименту необходимо дополнить сеть входным и выходным не рекуррентными слоями, моделирующие реовискозиметр и регистрирующее устройство, что соответствует нейронной сети в пространстве состояний.

Сформирован обучающий материал в виде набора входных сигналов и целевых сигналов. В качестве входных сигналов использовались импульсы градиента деформации, полученные в результате динамических испытаний композита ПИ-330 в режиме конечных деформаций при периодическом синусоидальном деформировании. В качестве целевых сигналов использовались касательные напряжения в композите ПИ-330, снятые в этом же эксперименте, как реакции на градиент деформации. Эксперименты получены на реовискозиметре RS-150 (НААКЕ, Германия).

Произведено тестирование нейронной сети, обученной ранее на материале с амплитудой $\dot{\gamma} = 1$, на других значениях $\dot{\gamma} = 2$ и $\dot{\gamma} = 4$. Показано, что выходные сигналы нейросети незначительно отличались от экспериментальных сигналов.

Последний эксперимент доказывает, что нейросеть обладает свойством обобщения обучающего материала. Заметим, что модели, построенные на интегральных и дифференциальных уравнениях, этим свойством не обладают.

Приведён график нелинейной зависимости амплитуды касательных напряжений от амплитуды градиента деформации, воспроизведённый нейросетью. Показано, что этот график полностью совпадает с экспериментальным графиком. Показано, что подобный график, воспроизведённый нелинейной интегральной моделью с факторизацией функции нелинейности, отклоняется от аналогичного экспериментального графика. Последнее также подтверждает преимущество нейросетевой модели перед нелинейными моделями на основе интегральных и дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Joseph D.D. *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*. – New York: Springer-Verlag Inc., 1990. – 755 p.
2. Bernstein B., Kearsley E.A., Zapas I.J. *A study of stress relaxation with finite strain* // *Trans. Soc. Rheol.* – 1963. – No.7. – Pp.397-410.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. – М.: Наука, 1979. – 283 с.
4. Yanovsky Yu.G., Basistov Yu.A., Siginer D. *Linear inverse problems in viscoelastic continua and a minimax method for Fredholm equation of the first kind* // *Int. J. Engng Sci.* – 1996. – Vol.34. – No.11. – Pp.1221-1245.
5. Basistov Yu.A. *A minimax solution of an equation of the first kind* // *Soviet Math. Dokl.* – 1983. – Vol.27. – No.1. – Pp.200-203.
6. Wagner M.H. *A constitutive analysis of uniaxial elongation flow data of a low density polyethylene melt* // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1978. – No.4. – Pp.39-55.
7. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. *Развитие метода идентификации интегральных нелинейных моделей вязкоупругих сред на базе нелинейной «демпинг-функции»* // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2012. – Т.18. – №4. – С.580-595.
8. Giesecus H. *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation – dependent tensorial mobility* // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1982. – No.11. – Pp.69-109.
9. Phan-Thien N., Tanner R. *A new constitutive equation derived from network theory* // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* – 1977. – No.2. – Pp.353-365.
10. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. *Нейродинамическая модель вязкоупругих сред с ассоциативной памятью* // *Доклады Академии наук (РАН)*. – 2010. – Т.430. – №4. – С.494-497.
11. Haykin S. *Neural networks: A comprehensive foundation*. – Prentice Hall Intern., 1999. – 864 p.
12. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. *Нейронная сеть с ассоциативной и наследственной памятью как модель вязкоупругих сред* // *Нейрокомпьютеры, разработка, применение*. – 2010. – №7. – С.29-39.
13. Cohen M.A., Grossberg S. *Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks* // *IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics*. – 1983. – Vol.SMC-13. – Pp.815-826.

14. Li J., Michel A.N., Porod W. *Analysis and synthesis of a class of neural networks: linear systems operating on a closed hypercube* // IEEE Transaktions on Circuits and Systems. – 1989. – Vol.36. – Pp.1405-1422.
15. Ferry J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. – N.Y.-Chichester-Brisbane-Toronto: John Wiley and Sons, Inc., 1980. – 641 p.

REFERENCES

1. Joseph D.D. *Fluid dynamics of viscoelastic liquids*. New York: Spinger-Verlag Inc., 1990, 755 p.
2. Bernstein B., Kearsley E.A., Zapas I.J. *A study of stress relaxation with finite strain*. Trans. Soc. Rheol., 1963, No.7, Pp.397-410.
3. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Solution of ill-posed problems]*. New York, Halsted Press, 1977, 258 p.
4. Yanovsky Yu.G., Basistov Yu.A., Siginer D. *Linear inverse problems in viscoelastic continua and a minimax method for Fredholm equation of the first kind*. Int. J. Engng Sci., 1996, Vol.34, No.11, Pp.1221-1245.
5. Basistov Yu.A. *A minimax solution of an equation of the first kind*. Soviet Math. Dokl., 1983, Vol.27, No.1, Pp.200-203.
6. Wagner M.H. *A constitutive analysis of uniaxial elongation flow data of a low density polyethylene melt*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1978, No.4, Pp.39-55.
7. Yanovsky Yu.G., Basistov Yu.A. *Developing a method for identification of integral nonlinear models of viscoelastic media based on a nonlinear damping function*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2013, Vol.4, Iss.1, Pp.25-44.
8. Giesecus H. *A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation – dependent tensorial mobility*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1982, No.11, Pp.69-109.
9. Phan-Thien N., Tanner R. *A New constitutive equation derived from network theory* // J. Non-Newtonian Fluid Mech. – 1977. – No.2. – Pp.353-365.
10. Basistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. *Nejrodinamicheskaya model' vyazkouprugikh sred s assotsiativnoj pamyat'yu [A neurodynamic model of viscoelastic materials with associative memory]*, Doklady Physics, 2010, Vol.55, No.2, Pp.81-84.
11. Haykin S. *Neural networks: A comprehensive foundation*. Prentice Hall Intern., 1999, 864 p.
12. Basistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. *Nejronnaya set' s assotsiativnoj i nasledstvennoj pamyat'yu kak model' vyazkouprugikh sred [A Neural Network with Associative and Fading Memory as Model of Viscoelastic Media]*. Nejrokomp'yutery, razrabotka, primeneniye, 2010, Vol.7, Pp.29-39.
13. Cohen M.A., Grossberg S. *Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks*. IEEE Transaction on System, Man and Cybernetics, 1983, Vol.SMC-13, Pp.815-826.
14. Li J., Michel A.N., Porod W. *Analysis and synthesis of a class of neural networks: linear systems operating on a closed hypercube*. IEEE Transaktions on Circuits and Systems, 1989, Vol.36, Pp.1405-1422.

15. Ferry J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. N.Y.-Chichester-Brisbane-Toronto, John Wiley and Sons, Inc., 1980, 641 p.

Поступила в редакцию 28 июня 2018 года.

Сведения об авторах:

Басистов Юрий Александрович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Власов Александр Николаевич – д.т.н., дир., зав.отд., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: jam@iam.ras.ru

Карнет Юлия Николаевна – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: missis.karnet@yandex.ru