

МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА ЭЖЕКЦИИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГЛУБИНЫ ПРОНИКАНИЯ УДАРНИКА

Анисимова В.В.¹, Головешкин В.А.^{1,2}, Мягков Н.Н.²,
Оськин Д.А.¹, Юшманова О.О.³

¹*Московский технологический университет, г. Москва, Россия*

²*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

³*ФГБУН Институт водных проблем, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Столкновение метеороида или частицы космического мусора с поверхностью космического аппарата (КА) производит поток эжекционных частиц (ЭЧ), которые могут представлять опасность для внешнего оборудования КА (антенны, солнечные батареи и т. Д.). В настоящее время ЭЧ считаются одним из основных источников загрязнения околоземного пространства, что оправдывает интерес к их изучению. Основными параметрами, характеризующими ЭЧ, являются углы их вылета по отношению к поверхности преграды, пространственное распределение по массам, размерам и скоростям. В настоящей работе аналитически рассматривается задача о проникании жесткого ударника в бесконечную преграду с целью определения зависимости угла вылета эжекционных частиц (угла эжекции) от глубины внедрения ударника. Задача рассматривается в предположении о плоском деформированном состоянии материала преграды. Для описания механических свойств материала преграды принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности. На основании энергетического баланса получено уравнение движения (проникания) ударника. Углы эжекции определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Как показывают оценки, сделанные на основе предложенной модели, в случае внедрения компактного ударника $h \approx 2 \div 3$ (глубина внедрения h дана в единицах поперечного размера ударника) угол эжекции составляет ≈ 65 - 67 градусов, что соответствует известным экспериментальным данным. В случае стержня, при больших значениях глубины внедрения $h \gg 1$ угол эжекции меняется слабо с увеличением h . Например, при $h \approx 10$ - 20 он составляет, приблизительно, 72 - 75 градусов.

Ключевые слова: проникание; эжекция; высокоскоростной удар; аналитическая модель; космический мусор

MODEL OF CHANGING THE EJECTION ANGLE DEPENDING ON THE DEPTH OF THE PROJECTILE PENETRATION

Anisimova V.V.¹, Goloveshkin V.A.^{1,2}, Myagkov N.N.²,
Oskin D.A.¹, Yushmanova O.O.³

¹*Moscow Technological University, Moscow, Russia.*

²*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.*

³*Water Problems Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

Due to the ejection phenomenon, a high-velocity encounter of a meteoroid or a space debris particle with a spacecraft surface produces the ejecta particles, which may represent a danger to exterior equipments of the spacecraft (the antennae, solar batteries, etc). Nowadays, the ejecta particles are considered as one of the main sources of the near-Earth space pollution that justifies an interest to their study. The main parameters characterizing the ejecta are the angles of their ejection with respect to the surface of the target, the spatial distribution by mass, size, velocity. In the present paper we consider analytically the problem of penetrating a rigid projectile into an infinite target in order to determine the dependence of the output angles of the ejecta particles (the ejection angles) on the penetration depth of the projectile. The problem is considered under the assumption of a plane deformed state of the target material. To describe the mechanical properties of the target, the hypothesis of incompressibility and ideal plasticity is adopted. On the basis of the energy balance, the equation of motion (penetration) of the projectile is obtained. The ejection angles are determined from the condition of minimum power of internal forces. In the case of a compact-projectile penetration (the penetration depth in units of transverse dimension is $h \approx 2-3$), the ejection angles are about 65-67 degrees, which corresponds to the known experimental data. In the case of a rod, for large values of the penetration depth $h \gg 1$, the ejection angle varies slightly with increasing h . For example, at $h \approx 10-20$, it is approximately 72-75 degrees.

Keywords: penetration, ejecta, high-velocity impact, analytical model, space debris

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что космический аппарат (КА), функционирующий на околоземной орбите, подвергается воздействию целого комплекса факторов космического пространства, к числу которых относятся и микрочастицы с размерами от долей микрона до сотен микрон естественного и искусственного происхождения. С ростом антропогенного загрязнения околоземного космического пространства (ОКП) доля техногенных микрочастиц непрерывно возрастает, и, уже в настоящее время, в области низких околоземных орбит их вклад является доминирующим в значительном диапазоне размеров [1-3]. Наиболее вероятными источниками мелкодисперсного космического мусора являются микрочастицы, возникающие в результате деградации материала поверхности КА, вторичные частицы, выбрасываемые в ОКП при высокоскоростном ударе по поверхности КА более крупных частиц [2-4], а также мелкодисперсные продукты выбросов твердотопливных ракетных двигателей разгонных блоков КА.

С точки зрения экологии ОКП и угрозы внешнему оборудованию КА (антенны, солнечные батареи и т.п.) наиболее опасными являются потоки вторичных частиц, эжектируемых с большой скоростью в ту область полупространства (относительно ударяемой преграды) из которой прилетел ударник. Это так называемые эжекционные частицы (ЭЧ). Обзор процессов, сопровождающих ЭЧ, можно найти, например, в работе [2]. Основными параметрами, характеризующими ЭЧ, являются углы их вылета по отношению к поверхности преграды, пространственное распределение по массам, размерам, скоростям, количеству и фазовому состоянию. Обычно выделяют три типа процесса сопровождающих эжекцию:

1) испускание небольшого количества мелких и быстрых частиц, эжектируемых под острыми углами на ранней стадии удара, масса этих частиц составляет сотые

доли процента от массы ударника, а скорость превышает скорость ударника в 2-3 раза;

2) образование конуса быстрых частиц, эжектируемых при приблизительно постоянном угле возвышения, для тонких преград масса, выбрасываемая в конусе, приблизительно составляет ~25% массы ударника, а для толстых преград превышает массу ударника;

3) для хрупких материалов откол крупных фрагментов со стороны удара, эжектируемых с низкими скоростями.

Таким образом, для пластичных материалов наиболее важным является исследование конуса эжекты. Кроме того, для правильной интерпретации экспериментов, важно знать, как изменяется угол эжекционного конуса в зависимости от глубины проникания ударника в преграду [4,5]. В частности, знание этой зависимости позволило в [5] объяснить фигуры следов, оставляемых потоками ЭЧ на коллекторах в экспериментах [4].

В настоящей работе аналитически рассматривается задача о проникании жесткого ударника в бесконечную преграду с целью определения зависимости угла эжекции от глубины проникания ударника. Задача рассматривается в предположении о плоском деформированном состоянии материала преграды. Данная работа развивает подход к этой проблеме, предложенный в [6].

1. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЖЕСТКОГО УДАРНИКА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПРЕГРАДОЙ

Относительно механических свойств материала преграды принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности с пределом текучести Y_p , ρ – плотность материала преграды. Для описания деформации материала преграды предложена модель близкая к той, которая рассматривалась в работах [7,8]. Рассмотрим следующую схему взаимодействия (рис.1).

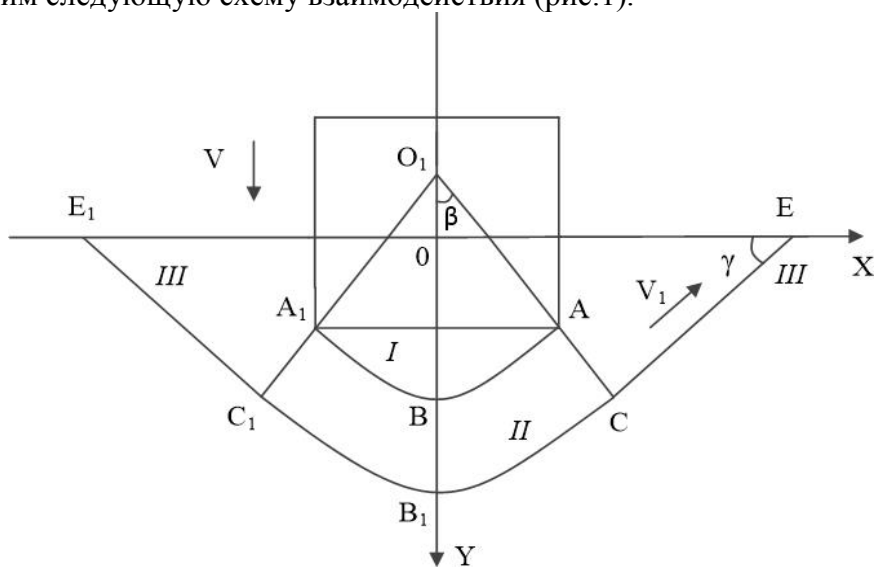


Рис.1. Чертеж к задаче о внедрении ударника в преграду.

Считаем, что деформация совершается в плоскости XU . Сечение ударника данной плоскостью имеет форму прямоугольника. Ось X проходит по начальной недеформированной поверхности. Начало оси U лежит на той же поверхности.

Поперечный размер ударника равен $2l$. Движение ударника осуществляется перпендикулярно преграде. Текущая глубина проникания принимается равной $2h$. В силу плоского характера деформации в дальнейшем все величины будут приводиться на единицу длины в направлении перпендикулярном плоскости XU . Массу ударника на единицу длины принимаем равной M .

Рассмотрим следующую схему поля скоростей (поле скоростей симметрично относительно оси Y .) Скорость ударника принимаем равной V , в начальный момент $V = V_0$

Зона I - сегмент круга A_1BA . Материал преграды “прилипший” к ударнику и движущийся вместе с ним как жесткое тело. Размеры сегмента – угол β и положение центра O_1 определяются в процессе решения. Соответствующие скорости в зоне I равны $u_x = 0$, $u_y = V$.

Зона II. Сектор кольца $A_1BACB_1C_1$ с центром в O_1 . Его размеры определяются в процессе решения. Полагаем $O_1A = a$, $O_1C = b$. В локальной полярной системе координат $(r\varphi)$ с центром в O_1 , (полярная ось совпадает с осью Y) принимается гипотеза, что скорость u_φ зависит только от угла φ , то есть $u_\varphi = f(\varphi)$. Тогда в силу условия несжимаемости имеем

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

Следовательно $\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\frac{df}{d\varphi}$. Интегрируя, имеем $u_r = -\frac{df}{d\varphi} + \frac{g(\varphi)}{r}$. Полагая

$u_r = 0$ при $r = b$, получаем $u_r = \frac{df}{d\varphi} \frac{b-r}{r}$. В силу непрерывности нормальной

скорости при $r = a$ выполняется условие $\frac{df}{d\varphi} \frac{b-a}{a} = V \cos \varphi$. Так как $f(\varphi) = 0$ при

$\varphi = 0$, то $f(\varphi) = \frac{Va}{b-a} \sin \varphi$.

Тогда имеем окончательно

$$u_r = \frac{Va}{b-a} \frac{b-r}{r} \cos \varphi, \quad u_\varphi = \frac{Va}{b-a} \sin \varphi \quad (1)$$

Зона III. Двигается как жесткое тело в направлении CE , составляющем угол γ , где $\beta \leq \gamma$ с осью X , со скоростью V_1 . В силу непрерывности нормальной скорости на AC имеем

$$V_1 \cos(\gamma - \beta) = \frac{Va}{b-a} \sin \beta \quad \text{и} \quad V_1 = \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы E (на единицу длины) состоит из следующих составляющих:

E_1 – кинетическая энергия ударника

$$E_1 = \frac{1}{2} MV^2, \quad (3)$$

E_2 – кинетическая энергия сегмента круга A_1BA

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho V^2 a^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right), \quad (4)$$

E_3 – кинетическая энергия сектора кольца $A_1BACB_1C_1$

$$E_3 = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \int_{-\beta}^{\beta} d\varphi \int_a^b \left[\left(\frac{b-r}{r} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right] r dr.$$

Вычисляя, получаем

$$E_3 = \frac{1}{4} \rho V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \left\{ 2\beta \left[b^2 \ln \frac{b}{a} - (b-a)^2 \right] + \sin 2\beta \left[b^2 \ln \frac{b}{a} - 2b(b-a) \right] \right\} \quad (5)$$

E_4 – кинетическая энергия зоны III

$$E_4 = \frac{1}{2} \rho V^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma - \beta)} \times \left\{ 2lh + 2h(b-a) \sin \beta + \frac{1}{2} (b-a)^2 \sin 2\beta + [h + (b-a) \cos \beta]^2 \operatorname{ctg} \gamma \right\} \quad (6)$$

При вычислении (6) предполагали, что вся масса части плоскости, ограниченной линией $E_1C_1A_1ACE$ находится в данной зоне (сюда входит масса вытесненная ударником, не показанная на рис.1). Полная кинетическая энергия E равна

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 \quad (7)$$

Мощность внутренних сил W состоит из следующих составляющих:

W_1 – мощность в деформируемой зоне сектора кольца $A_1BACB_1C_1$

$$W_1 = Y_p \sqrt{\frac{2}{3}} \iint_{CBA_1B_1C_1} \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + 2\varepsilon_{r\varphi}} r dr d\varphi.$$

Поскольку

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -\frac{Va}{b-a} \frac{b}{r^2} \cos \varphi, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} = \frac{Va}{b-a} \frac{b}{r^2} \cos \varphi,$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right) = -\frac{1}{2} \frac{Va}{b-a} \frac{b}{r^2} \sin \varphi$$

получаем

$$W_1 = Y_p \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (8)$$

W_2 – мощность на разрыве касательной скорости на линии A_1BA

$$W_2 = \int_{A_1BA} \frac{Y_p}{\sqrt{3}} [v] ds.$$

С учетом того, что разрыв скорости $[v]$ на этой линии равен $[v] = \frac{Va}{b-a} |\sin \varphi|$,

окончательно получим

$$W_2 = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \int_0^\beta a \sin \varphi d\varphi = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va^2}{b-a} (1 - \cos \beta). \quad (9)$$

W_3 – мощность на разрыве касательной скорости на линии C_1B_1C

$$W_3 = \int_{C_1B_1C} \frac{Y_p}{\sqrt{3}} [v] ds.$$

С учетом того, что разрыв скорости $[v]$ на этой линии равен $[v] = \frac{Va}{b-a} |\sin \varphi|$, окончательно получим

$$W_3 = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \int_0^\beta b \sin \varphi d\varphi = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Vab}{b-a} (1 - \cos \beta). \quad (10)$$

W_4 – мощность на разрыве касательной скорости на линиях C_1E_1, EC . Учитывая, что разрыв скорости $[v]$ на этих линиях равен $[v] = \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)}$, а их суммарная длина $L = 2 \frac{h + (b-a)\cos \beta}{\sin \gamma}$, имеем

$$W_4 = \frac{Y_p}{\sqrt{3}} [v] L = \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{h + (b-a)\cos \beta}{\sin \gamma}. \quad (11)$$

W_5 – мощность на разрыве касательной скорости на линиях C_1A_1, AC . Учитывая, что разрыв скорости $[v]$ на этих линиях равен

$$[v] = \frac{Va}{b-a} \frac{b-r}{r} \cos \beta + \frac{Va}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta), \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} W_5 &= \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \int_a^b \left[\frac{b-r}{r} \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta) \right] dr = \\ &= \frac{2Y_p}{\sqrt{3}} \frac{Va}{b-a} \left\{ \left[b \ln \frac{b}{a} - (b-a) \right] \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta) (b-a) \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

Полная мощность W равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 \quad (13)$$

Представим полную кинетическую энергию системы в виде

$$E = \frac{1}{2} V^2 [M + F_1(a, b, h, \beta, \gamma)]$$

где

$$\begin{aligned} F_1(a, b, h, \beta, \gamma) &= \rho^2 a^2 \left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) + \\ &+ \rho^2 \frac{a^2}{(b-a)^2} \left\{ \beta \left[b^2 \ln \frac{b}{a} - (b-a)^2 \right] + \frac{1}{2} \sin 2\beta \left[b^2 \ln \frac{b}{a} - 2b(b-a) \right] \right\} + \\ &+ \rho \frac{a^2}{(b-a)^2} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma - \beta)} \left\{ 2lh + 2h(b-a)\sin \beta + \frac{1}{2}(b-a)^2 \sin 2\beta + \frac{[h + (b-a)\cos \beta]^2}{\operatorname{tg} \gamma} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что $a = \frac{l}{\sin \beta}$. Обозначим $x = \frac{b}{a}$, $\bar{h} = \frac{h}{l}$.

Тогда $E = \frac{1}{2} V^2 [M + \rho l^2 F(x, \bar{h}, \beta, \gamma)]$ (в дальнейшем черту над h опускаем),

где

$$\begin{aligned}
F(x, h, \beta, \gamma) &= \frac{\left(\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta\right)}{\sin^2 \beta} + \\
&+ \frac{1}{(x-1)^2 \sin^2 \beta} \left\{ 2\beta [x^2 \ln x - (x-1)^2] + \sin 2\beta [x^2 \ln x - 2x(x-1)] \right\} + \\
&+ \frac{\sin^2 \beta}{(x-1)^2 \cos^2(\gamma - \beta)} \left\{ 2h + 2h(x-1) + (x-1)^2 \operatorname{ctg} \beta + \frac{[h + (x-1) \operatorname{ctg} \beta]^2}{\operatorname{tg} \gamma} \right\}
\end{aligned} \quad (15)$$

Полную мощность W представим в виде $W = \frac{2Y_p V}{\sqrt{3}} G_1(a, b, h, \beta, \gamma)$,

где

$$\begin{aligned}
G_1(a, b, h, \beta, \gamma) &= \frac{2ab}{b-a} \ln \frac{b}{a} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \\
&+ \frac{a(a+b)}{b-a} (1 - \cos \beta) + \frac{a}{b-a} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{h + (b-a) \cos \beta}{\sin \gamma} + \\
&+ \frac{a}{b-a} \left\{ \left[b \ln \frac{b}{a} - (b-a) \right] \cos \beta + \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \sin(\gamma - \beta) (b-a) \right\}
\end{aligned}$$

Полагая $a = \frac{l}{\sin \beta}$, $x = \frac{b}{a}$, $\bar{h} = \frac{h}{l}$, имеем $G_1(a, b, h, \beta, \gamma) = lG(x, \bar{h}, \beta, \gamma)$,

где

$$\begin{aligned}
G(x, h, \beta, \gamma) &= \frac{2x}{x-1} \ln x \frac{1}{\sin \beta} \int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{(x+1)(1 - \cos \beta)}{(x-1) \sin \beta} + \\
&+ \frac{1}{x-1} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma - \beta)} \frac{h + (x-1) \operatorname{ctg} \beta}{\sin \gamma} + \\
&+ \frac{1}{x-1} \left\{ [x \ln x - (x-1)] \operatorname{ctg} \beta + \frac{\sin(\gamma - \beta)}{\cos(\gamma - \beta)} (x-1) \right\}
\end{aligned} \quad (16)$$

Закон изменения скорости определяется уравнением

$$\frac{dE}{dt} + W = 0$$

Используя соответствующие соотношения для кинетической энергии и полной мощности, получаем

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} V^2 [M + \rho l^2 F(x, h, \beta, \gamma)] \right\} + \frac{2Y_p V}{\sqrt{3}} lG(x, h, \beta, \gamma) = 0$$

Преобразуя, имеем

$$\begin{aligned}
&[M + \rho l^2 F(x, h, \beta, \gamma)] V \frac{dV}{dt} + \frac{1}{2} \rho l^2 V^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\partial F}{\partial h} \frac{dh}{dt} \right) + \\
&+ \frac{2Y_p V}{\sqrt{3}} lG(x, h, \beta, \gamma) = 0
\end{aligned}$$

Так как $\frac{dh}{dt} = \frac{V}{l}$, то время можно исключить и определить скорость как функцию глубины проникания h с помощью следующего дифференциального уравнения

$$\left[M + \rho l^2 F \right] \frac{dV}{dh} = -\frac{1}{2} \rho l^2 V \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial F}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dh} + \frac{\partial F}{\partial \gamma} \frac{d\gamma}{dh} + \frac{\partial F}{\partial h} \right) - \frac{2Y_p l^2}{\sqrt{3}} \frac{G}{V}$$

при условии $V = V_0$ при $h = 0$.

Значения x, β, γ определяются из условия минимума мощности внутренних сил при дополнительном условии $0 \leq \beta \leq \gamma \leq \pi/2$. Следовательно, угол эжекции γ может быть определен как функция глубины проникания ударника h .

Заметим, что с приемлемой точностью

$$\int_0^\beta \sqrt{1 - \frac{3}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^\beta \left(1 - \frac{3}{8} \sin^2 \varphi \right) d\varphi = \int_0^\beta \left[1 - \frac{3}{16} (1 - \cos 2\varphi) \right] d\varphi = \frac{13}{16} \beta + \frac{3}{32} \sin 2\beta$$

Таким образом

$$\begin{aligned} G(x, h, \beta, \gamma) = & \frac{2x}{x-1} \ln x \frac{1}{\sin \beta} \left(\frac{13}{16} \beta + \frac{3}{32} \sin 2\beta \right) + \frac{(x+1)(1-\cos \beta)}{(x-1) \sin \beta} + \\ & + \frac{1}{x-1} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{h + (x-1) \operatorname{ctg} \beta}{\sin \gamma} + \\ & + \frac{1}{x-1} \left\{ [x \ln x - (x-1)] \operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{\cos(\gamma-\beta)} \sin(\gamma-\beta)(x-1) \right\} \end{aligned}$$

Преобразуя, получаем

$$\begin{aligned} G(x, h, \beta, \gamma) = & \frac{x}{x-1} \ln x \left(\frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \operatorname{ctg} \beta \right) + \frac{(x+1)(1-\cos \beta)}{(x-1) \sin \beta} + \\ & + \frac{h}{x-1} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{\cos \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{1}{\sin \gamma} - \operatorname{ctg} \beta + \frac{1}{\cos(\gamma-\beta)} \sin(\gamma-\beta) \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = & \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \ln x \right] \left(\frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \operatorname{ctg} \beta \right) - \frac{2}{(x-1)^2} \frac{(1-\cos \beta)}{\sin \beta} - \\ & - \frac{h}{(x-1)^2} \frac{\sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{1}{\sin \gamma} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \beta} = & \frac{x}{x-1} \ln x \left(\frac{13}{8} \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{3}{8} \sin \beta - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{(x+1)(1-\cos \beta)}{(x-1) \sin^2 \beta} + \\ & + \frac{h}{x-1} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\cos \gamma}{\cos^2(\gamma-\beta)} - \frac{2}{\cos^2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \gamma} = - \left(\frac{h \sin \beta}{x-1} + \cos \beta \right) \frac{\cos(2\gamma-\beta)}{\cos^2(\gamma-\beta) \sin^2 \gamma} + \frac{1}{\cos^2(\gamma-\beta)} \quad (20)$$

то из условия $\frac{\partial G}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial G}{\partial \gamma} = 0$ для определения x, β, γ имеем систему уравнений

$$(x-1 - \ln x) \left(\frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + \operatorname{ctg} \beta \right) - 2 \frac{(1-\cos \beta)}{\sin \beta} - \frac{h \sin \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{1}{\sin \gamma} = 0 \quad (21)$$

$$\frac{x}{x-1} \ln x \left(\frac{13}{8} \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{3}{8} \sin \beta - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{(x+1)(1-\cos \beta)}{(x-1) \sin^2 \beta} +$$

$$+\frac{h}{x-1} \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\cos \gamma}{\cos^2(\gamma-\beta)} - \frac{2}{\cos^2(\gamma-\beta)} + \frac{1}{\sin^2 \beta} = 0 \quad (22)$$

$$-\left(\frac{h \sin \beta}{x-1} + \cos \beta\right) \frac{\cos(2\gamma-\beta)}{\cos^2(\gamma-\beta) \sin^2 \gamma} + \frac{1}{\cos^2(\gamma-\beta)} = 0 \quad (23)$$

Систему представим в виде

$$(x-1-\ln x) \left(\frac{13}{8} \beta + \frac{3}{8} \cos \beta \sin \beta + \cos \beta \right) - 2(1-\cos \beta) - \frac{h \sin^2 \beta}{\cos(\gamma-\beta)} \frac{1}{\sin \gamma} = 0 \quad (24)$$

$$x \ln x \left[\frac{13}{8} (\sin \beta - \beta \cos \beta) - \frac{3}{8} \sin^3 \beta - 1 \right] + (x+1)(1-\cos \beta) +$$

$$+ h \frac{1}{\sin \gamma} \frac{\sin^2 \beta \cos \gamma}{\cos^2(\gamma-\beta)} - \frac{(x-1) \sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma-\beta)} + (x-1) - \frac{(x-1) \sin^2 \beta}{\cos^2(\gamma-\beta)} = 0 \quad (25)$$

$$- [h \sin \beta + (x-1) \cos \beta] \cos(2\gamma-\beta) + (x-1) \sin^2 \gamma = 0 \quad (26)$$

Соотношение (26) преобразуем к следующему

$$[htg \beta + (x-1)(2+tg^2 \beta)] tg^2 \gamma - 2tg \gamma tg \beta [htg \beta + (x-1)] - [htg \beta + (x-1)] = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение относительно $tg \gamma$

Обозначая

$$D = \frac{1}{\cos^2 \beta} [htg \beta + (x-1)][htg \beta + 2(x-1)]$$

$$tg \gamma = \frac{[htg \beta + (x-1)] + \sqrt{D}}{[htg \beta + (x-1)(2+tg^2 \beta)]} \quad (27)$$

Если значение $tg \gamma$, вычисленное по формуле (27), не удовлетворяет условию $tg \gamma \geq tg \beta$, то принимаем $\gamma = \beta$. Это означает, что минимум достигается на границе области.

Преобразуем соотношение (21) к следующему

$$(x-1-\ln x) \left(\frac{13}{8} \frac{\beta}{\sin \beta} + \frac{3}{8} \cos \beta + ctg \beta \right) - 2 \frac{(1-\cos \beta)}{\sin \beta} - \frac{htg \beta}{(1+tg \gamma tg \beta)} \frac{(1+tg^2 \gamma)}{tg \gamma} = 0 \quad (28)$$

Соотношение (22) к

$$\frac{x}{x-1} \ln x \left(\frac{13}{8} \frac{\sin \beta - \beta \cos \beta}{\sin^2 \beta} - \frac{3}{8} \sin \beta - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) + \frac{(x+1)(1-\cos \beta)}{(x-1) \sin^2 \beta} +$$

$$+ \frac{(1+tg^2 \beta)(1+tg^2 \gamma)}{1+tg \beta tg \gamma} \left(\frac{h}{x-1} \frac{1}{tg \gamma} - 2 \right) + \frac{1}{\sin^2 \beta} = 0 \quad (29)$$

Систему уравнений (28, 29) перепишем в виде

$$(x-1-\ln x) \left(\frac{13}{8} \beta + \frac{3}{8} \cos \beta \sin \beta + \cos \beta \right) -$$

$$- 2(1-\cos \beta) - \frac{htg \beta}{(1+tg \gamma tg \beta)} \frac{(1+tg^2 \gamma)}{tg \gamma} \sin \beta = 0 \quad (30)$$

$$x \ln x \left[\frac{13}{8} \left(\sin \beta - \beta \cos \beta - \frac{3}{8} \sin^3 \beta - 1 \right) \right] + (x+1)(1-\cos \beta) +$$

$$+ \frac{(1+tg^2 \beta)(1+tg^2 \gamma)}{1+tg \beta tg \gamma} \sin^2 \beta \left[\frac{h}{tg \gamma} - 2(x-1) \right] + (x-1) = 0 \quad (31)$$

где

$$tg\gamma = \frac{[htg\beta + (x-1)] + \sqrt{D}}{[htg\beta + (x-1)(2 + tg^2\beta)]} \text{ при } tg\beta \leq \frac{[htg\beta + (x-1)] + \sqrt{D}}{[htg\beta + (x-1)(2 + tg^2\beta)]} \quad (32)$$

$$tg\gamma = tg\beta \text{ при } tg\beta \geq \frac{[htg\beta + (x-1)] + \sqrt{D}}{[htg\beta + (x-1)(2 + tg^2\beta)]} \quad (33)$$

$$D = \frac{1}{\cos^2\beta} [htg\beta + (x-1)][htg\beta + 2(x-1)]$$

Поскольку $tg\gamma$ является функцией x, β , то подставляя его в уравнение (30), получаем уравнение для определения x как функции β . Определенную таким образом функцию $x(\beta)$, подставляем в уравнение (31) и определяем значение β .

Ниже приведены результаты расчета параметров x, β, γ в зависимости от глубины внедрения

Таблица 1.

Зависимость параметров x, β, γ от глубины внедрения.

h	x	β	γ радианы	γ градусы
0.1	2.17	0.95	0.95	54.5
0.2	2.26	0.97	0.97	55.7
0.3	2.34	0.98	0.98	56.1
0.4	2.42	1.00	1.00	57.3
0.5	2.50	1.01	1.01	57.9
0.6	2.57	1.03	1.03	59.0
0.7	2.64	1.04	1.04	59.6
0.8	2.71	1.05	1.05	60.2
0.9	2.78	1.06	1.06	60.8
1.	2.85	1.07	1.07	61.4
2.	3.47	1.13	1.13	64.8
3.	4.03	1.17	1.17	67.0
4.	4.56	1.19	1.19	68.2
5.	5.07	1.21	1.21	69.3
6.	5.56	1.23	1.23	70.5
7.	6.04	1.24	1.24	71.1
8.	6.52	1.25	1.25	71.7
9.	6.98	1.26	1.26	72.3
10	7.44	1.265	1.265	72.6
20	11.86	1.31	1.31	75.1

ВЫВОДЫ

Столкновение метеороида или частицы космического мусора с поверхностью космического аппарата (КА) производит поток эжекционных частиц (ЭЧ), которые могут представлять опасность для внешнего оборудования КА (антенны, солнечные батареи и т. Д.). В настоящее время ЭЧ считаются одним из основных источников загрязнения околоземного пространства, что оправдывает интерес к их изучению. Основными параметрами,

характеризующими ЭЧ, являются углы их вылета по отношению к поверхности преграды, пространственное распределение по массам, размерам, скоростям.

В настоящей работе аналитически рассматривается задача о проникании жесткого ударника в бесконечную преграду с целью определения зависимости угла вылета эжекционных частиц (угла эжекции) от глубины внедрения ударника. Задача рассматривается в предположении о плоском деформированном состоянии материала преграды. Для описания механических свойств материала преграды принимается гипотеза о несжимаемости и идеальной пластичности. На основании энергетического баланса получено уравнение движения (проникания) ударника. Углы эжекции определяются из условия минимума мощности внутренних сил. Как показывают оценки, сделанные на основе предложенной модели, в случае внедрения компактного ударника $h \approx 2 \div 3$ (глубина внедрения дана в единицах поперечного размера ударника) угол эжекции составляет $\approx 65-67$ градусов, что соответствует известным экспериментальным данным (~ 60 градусов [2] и ~ 55 градусов [4]). В случае стержня, при больших значениях глубины внедрения $h \gg 1$ угол эжекции меняется слабо с увеличением h (табл. 1). Например, при $h \approx 10-20$ угол эжекции составляет, приблизительно, $72-75$ градусов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Protection Manual (2014). IADC-WD-04-03. Version 7.0. Prepared by the IADC WG3 members / Retrieved from http://www.iadc-online.org/Documents/IADC-04-03_Protection_Manual_v7.pdf.
2. Rival M., Mandeville J.C. *Modeling of Ejecta Produced upon Hypervelocity Impacts // Space Debris*. – 1999. – Vol.1. – Pp.45-57.
3. Bariteau M., Mandeville J.-C. *Modelling of Ejecta as a Space Debris Source // Space Debris*. – 2002. – Vol.2. – Pp.97-107.
4. Shumikhin T.A., Myagkov N.N., Bezrukov L.N. *Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of the in bumpers made from different constructional materials // Int. J. Impact Engn.* – 2012. – Vol.50. – Pp.90-98.
5. Мягков Н.Н., Шумихин Т.А., Попов В.В. *Моделирование эжекты, возникающей при высокоскоростном взаимодействии ударника с преградой, с помощью экспериментов по соударению капли с поверхностью жидкости // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.282-300.
6. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. Юшманова О.О. *Изменение угла эжекции в зависимости от глубины проникания ударника / 7-я Всеросс. конф. с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред»*. Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2017. – С.312-314.
7. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a semi-infinite target // Int. J. Impact Engn.* – 2013. – Vol.61. – Pp.13-23.
8. Головешкин В.А., Мягков Н.Н. *Оценка параметров фрагментов, возникающих при проникании периодической системы струн в массивную преграду // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2012. – Т.18. – №2. – С.190-212.

REFERENCES

1. Protection Manual (2014). IADC-WD-04-03. Version 7.0. Prepared by the IADC WG3 members. Retrieved from http://www.iadc-online.org/Documents/IADC-04-03_Protection_Manual_v7.pdf.
2. Rival M., Mandeville J.C. *Modeling of Ejecta Produced upon Hypervelocity Impacts*. Space Debris, 1999, Vol.1, Pp.45-57.
3. Bariteau M., Mandeville J.-C. *Modelling of Ejecta as a Space Debris Source*. Space Debris. 2002, Vol.2, Pp.97-107.
4. Shumikhin T.A., Myagkov N.N., Bezrukov L.N. *Properties of ejecta generated at high-velocity perforation of thin bumpers made from different constructional materials*. Int. J. Impact Engn., 2012, Vol.50, Pp.90-98.
5. Myagkov N.N., Shumikhin T.A., Popov V.V. *Modelirovaniye ezhekty, vznikayushchey pri vysokoskorostnom vzaimodeystvii udarnika s pregradoy, s pomoshch'yu eksperimentov po soudareniyu kapli s poverkhnost'yu zhidkosti [Simulation of the ejecta arising during high-speed interaction with the obstacle by means of experiments on the impact of a drop on a liquid surface]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.282-300.
6. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N., Yushmanova O.O. *Izmeneniye ugla ezheksii v zavisimosti ot glubiny pronikaniya udarnika [Changing the ejection angle depending on the penetration depth of the striker]*. 7-th Vserossiiskaia konferentsiia s mezhdunarodnym uchastiyem "Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media", Sbornik trudov, 2017, Pp.312-314.
7. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Estimating parameters of fragments forming at penetration of periodic system of strings into a semi-infinite target*. Int. J. Impact Engn., 2013, Vol.61, Pp.13-23.
8. Goloveshkin V.A., Myagkov N.N. *Otsenka parametrov fragmentov, vznikayushchikh pri pronikanii periodicheskoy sistemy strun v massivnuyu pregradu [Estimation of the parameters of fragments arising when a periodic system of strings penetrates a massive obstacle]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.2, Pp.190-212.

Поступила в редакцию 14 марта 2017 года.

Сведения об авторах:

Анисимова Виктория Владимировна – студ., Московский технологический университет, г. Москва, Россия

Головешкин Василий Адамович – д.т.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, Московский технологический университет, г. Москва, Россия

Мягков Николай Николаевич – д.ф.-м.н., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Оськин Денис Алексеевич – студ., Московский технологический университет, г. Москва, Россия

Юшманова Ольга Олеговна – с.н.с., к.ф.-м.н., ФГБУН Институт водных проблем РАН, г. Москва, Россия