УДК 532.546

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе развивается метод асимптотического усреднения для уравнений термовязкоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами. В отличие от традиционного подхода, при асимптотическом анализе уравнений вводится дополнительный параметр, соответствующий зависимостям характеристик материала от температуры, и функции быстрых переменных рассматриваются в параметрическом пространстве. Соответствующим образом формулируется и процедура усреднения так, чтобы нелинейные зависимости, имеющие плавно изменяющийся характер по отношению к быстрым переменным, разрешались при асимптотическом анализе параметрически. Для реализации этой схемы применяется упруговязкая аналогия для интегро-дифференциальных уравнений термовязкоупругости. Определяющие соотношения между напряжениями и деформациями представляют собой интегральные уравнения по времени с ядрами релаксации разностного типа, и поэтому они могут быть описаны с помощью интегрального преобразования Лапласа или Фурье через комплексные модули для уравнений теории упругости с быстроосциллирующими коэффициентами, зависящими от пространственных координат и температуры.

Развивается двухуровневая схема решения вспомогательных задач метода асимптотического усреднения, основанная на аналитико-численном и конечно-элементном подходах по определению вспомогательных функций на микро- и макроуровне, участвующих в асимптотическом представлении решения. В частности, определен алгоритм вычисления эффективных параметров ядер релаксации с учетом зависимости вязкоупругих свойств материала от температуры. Развиваемый подход позволяет определять эффективные свойства материалов с квазипериодической структурой, например, функционально-градиентные свойства реономных композитных материалов с возможностью учёта зависимости этих характеристик от температуры. Для решения вспомогательных задач нижнего уровня для функций быстрых переменных развивается специальный блочный аналитико-численный метод аппроксимации решения для включений произвольной формы, в частности сферической с промежуточным межфазным слоем.

Ключевые слова: структурно-неоднородные вязкоупругие среды; нелинейные уравнения; параметрический метод асимптотического усреднения; эффективные механические и теплофизические характеристики реономных материалов

ASYMPTOTIC AVERAGING OF EQUATIONS OF THERMOVISCOELASTICITY WITH RAPIDLY OSCILLATING COEFFICIENTS

Vlasov A.N., Volkov-Bogorodsky D.B.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

A method of asymptotic averaging is developed for the equations of thermal viscoelasticity with rapidly oscillating coefficients. In contrast to the traditional approach, an asymptotic analysis of the equations introduces an additional parameter corresponding to the dependence of the material characteristics on temperature, and the functions of fast variables are considered in the parametric space. The averaging procedure is formulated in a corresponding manner so that nonlinear dependences that have a smoothly changing character with respect to fast variables are resolved in the asymptotic analysis parametrically. To implement this scheme, a complex analogy is used for the integro-differential equations of thermal viscoelasticity. The defining relationships between stresses and deformations are integral equations with relaxation kernels of difference type, and therefore they can be described by means of the integral Laplace or Fourier transformation through complex moduli for elasticity equations with rapidly oscillating coefficients that depend on spatial coordinates and temperature.

A two-level scheme for solving auxiliary problems of the considered asymptotic method is developed, based on the analytical-numerical and finite-element approaches to determining the auxiliary functions at the micro- and macro levels, which is involved in the asymptotic representation of the solution. In particular, an algorithm for calculating the effective parameters of relaxation kernels is determined taking into account the dependence of the viscoelastic properties of the material on temperature. The developed approach allows to determine the effective properties of materials with a quasiperiodic structure, for example, the functional-gradient properties of viscoelastic composite materials with dependence of these characteristics on temperature. For solving auxiliary problems for fast variable functions at the micro level, a special block analytic-numerical method is developed for approximation of the solution with inclusions of arbitrary geometrical shape, in particular, for a spherical one with intermediate interphase layer.

Keywords: structurally inhomogeneous viscoelastic media; nonlinear equations; parametric method of asymptotic averaging; effective mechanical and thermophysical characteristics of rheonomaterials.

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются неоднородные материалы с периодической структурой, механические характеристики которых обладают вязкоупругими свойствами и зависят от температуры [1-3]. К числу таких материалов относятся, например, композиты на основе полимерной матрицы [4], а также грунты, рассматриваемые в качестве композитов природного образования [5,6]. Поведение таких материалов описывается интегро-дифференциальными уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами, зависящими от пространственных координат и температуры. В настоящей статье мы будем рассматривать материалы в рамках линейной теории вязко упругости, которые не обладают свойством старения. В таком случае, определяющие соотношения между напряжениями и деформациями представляют собой интегральные уравнения по времени с ядрами релаксации разностного типа, и поэтому они могут быть описаны с помощью интегрального преобразования Лапласа (или Фурье для случая гармонических колебаний) через комплексные модули на основе упруговязкой аналогии. В результате механические свойства композитного материала с реономными свойствами описываются уравнениями теории упругости с комплексными быстроосциллирующими коэффициентами, зависящими от пространственных координат и температуры. К этим уравнениям применяется метод асимптотического усреднения [7,8] в параметрическом пространстве [9], обобщенный на уравнения с комплексными коэффициентами.

Показано, что в методе асимптотического усреднения плавные непериодические зависимости разрешаются параметрически в функциях быстрых переменных. В результате для решения задач с неоднородными материалами, обладающими реономными свойствами, формулируется двухуровневая схема представления решения в виде асимптотических N-рядов Бахвалова [10], и находится алгоритм вычисления эффективных механических характеристик с учетом зависимости вязкоупругих свойств материала от температуры.

Такой подход позволяет определять эффективные характеристики не только неоднородных материалов с периодической структурой, но и неоднородных материалов с квазипериодической структурой, например, структурой, определяющей функционально-градиентные свойства реономных композитных материалов, соответствующие плавному изменению их характеристик в пространстве, с возможностью учёта зависимости этих характеристик от температуры.

Для решения задач нижнего уровня (задач на ячейке периодичности) для функций быстрых переменных развивается аналитико-численный подход на основе аппроксимаций методом наименьших квадратов [11-13] для включений произвольной формы, в том числе сферической с промежуточным межфазным слоем. Для этого с помощью метода квазиразделения переменных построены полные системы функций для аппроксимации решения, точно удовлетворяющие уравнению, а в некоторых случаях [14] и контактным условиям на межфазных границах. С помощью этих функций решается задача на ячейке периодичности первого порядка, обеспечивающая параметрические зависимости эффективных характеристик от пространственных координат и температуры. Для решения задач верхнего уровня с эффективными характеристиками для усредненных функций развиваются конечно-элементные подходы в программном комплексе Uway [15].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений термовязкоупругости с быстро-осциллирующими коэффициентами, которая соответствует процессу деформирования неоднородной области с включениями сферической формы в поле установившейся температуры с учетом зависимости механических характеристик материала от температуры. Геометрия включений не имеет принципиального значения для процедуры асимптотического усреднения, используемой в данной статье, а только лишь определяет возможность получения аналитического решения в удобной замкнутой форме для вспомогательных задач, возникающих по ходу построения асимптотического ряда, аппроксимирующего решение.

Система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая указанный физический процесс записывается в следующем дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int\limits_0^t A_{ij}\left(x/\varepsilon, x, T, t-\tau\right)\frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}(x,\tau)}{\partial x_j}d\tau - A_{ij}^0\left(x/\varepsilon, x, T\right)\boldsymbol{\alpha}_j\left(x/\varepsilon, x, T\right)T\right) + \boldsymbol{F}(x,t) = 0\,, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa_{ij}\left(x/\varepsilon, x, T\right)\frac{\partial T(x)}{\partial x_j}\right) + h(x) = 0\,, \quad (1.2)$$

где $A_{ij} = \left\| c_{ikjl} \right\|$ – матрицы-функции релаксации, зависящие от времени и представляющие тензор-функцию четвертого ранга c_{ikjl} в матричном виде; $\boldsymbol{\alpha}_i = \left\{ \alpha_{ij} \right\}$ – тензор теплового расширения, представленный в векторном виде; $\boldsymbol{u} = \left\{ u_i \right\}$ – вектор перемещений; $\dot{\boldsymbol{u}} = \left\{ \dot{u}_i \right\}$ – его скорость (производная по времени); $\boldsymbol{F} = \left\{ F_i \right\}$ – плотность объёмных сил; T – температура; h – плотность тепловых источников по объему тела; κ_{ij} – тензор теплопроводности; ε – структурный параметр, имеющий смысл характерного расстояния между сферическими включениями (рис.1) в образце с характерным размером L; $\varepsilon << L$.

Матрицы-функции релаксации A_{ij} имеют скачок первого рода в начальный момент времени: $A_{ij}\left(x/\varepsilon, x, T, t \right) = A_{ij}^0\left(x/\varepsilon, x, T \right)$, $t = 0$, $A_{ij}\left(x/\varepsilon, x, T, t \right) = 0$, $t < 0$.

На поверхностях контакта фаз композитного материала предполагается условие идеального контакта, а именно

$$\left[\boldsymbol{u}(x,t) \right] = \left[n_i \left(\int_0^t A_{ij}\left(\xi, x, T, t-\tau \right) \frac{\partial \dot{\boldsymbol{u}}(x,\tau)}{\partial x_j} d\tau - A_{ij}^0\left(\xi, x, T \right) \boldsymbol{\alpha}_j\left(\xi, x, T \right) T \right) \right] = 0, \qquad (1.3)$$

$$\left[T(x) \right] = \left[n_i \kappa_{ij}\left(\xi, x, T \right) \frac{\partial T(x)}{\partial x_j} \right] = 0, \quad x \in \Sigma, \quad \xi = x/\varepsilon, \qquad (1.4)$$

где квадратными скобками обозначен скачок (разность значений) указанных величин на поверхности контакта (при переходе через контакт).

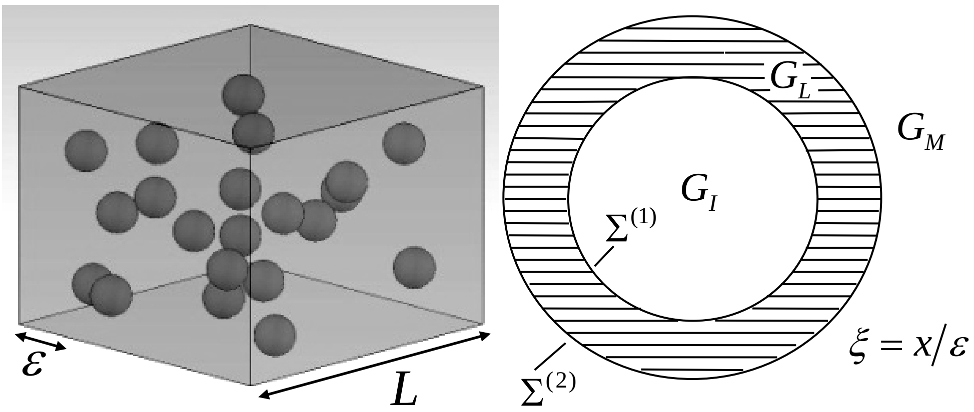


Рис. 1. Образец с дисперсными включениями с межфазным слоем.

Матрицы-функции $A_{ij}\left(\xi, x, T, t \right)$ соответствуют геометрии включений, которые могут иметь разную форму и структуру; в частности, они могут описывать сферические включения с межфазным слоем (см. рис.1). В этом случае поверхность контакта состоит из двух связных частей $\Sigma = \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)}$.

Зависимость механических и теплофизических свойств от быстрой переменной ξ при условии 1-периодичности соответствует регулярному (периодическому) расположению включений в исходном материале. Также отметим, что зависимость коэффициентов от двух типов переменных (x и ξ) позволяет в рамках рассматриваемой постановки описывать также и материалы с нерегулярным расположением включений, например, функционально-градиентные материалы, соответствующие суперпозиции двух видов зависимостей: быстроосциллирующей периодической и плавной. Такие зависимости будем называть квазипериодическими.

В начальный момент времени полагаем, что тело находится в недеформируемом состоянии и перемещения равны нулю

$$\boldsymbol{u}(x,t)=0\,,\qquad t\le 0\,. \tag{1.5}$$

Функцию плотности объемных сил $\boldsymbol{F}(x,t)$ и тепловых источников $h(x)$ будем подчинять условию, обеспечивающему существование и единственность решения поставленной задачи, т.е. будем предполагать, что эти функции являются бесконечно гладкими и финитными [16,17].

В определяющих соотношениях между температурой, напряжениями $\sigma_{ij}(x,t)$, деформациями $\varepsilon_{ij}(x,t)$ и теплопотоками $Q_i(x)$

$$\sigma_{ij}(x,t)=\int_0^t c_{ijkl}\left(\xi,x,T,t-\tau\right)d\varepsilon_{kl}(x,\tau)-c^0_{ijkl}\left(\xi,x,T\right)\alpha_{kl}\left(\xi,x,T\right)T(x)\,, \tag{1.6}$$

$$Q_i(x)=-\kappa_{ij}\left(\xi,x,T\right)\frac{\partial T(x)}{\partial x_j}\,, \tag{1.7}$$

механические и теплофизические свойства некоторым образом зависят от температуры $T(x)$.

В случае изотропных материалов определяющие соотношения (1.6), (1.7) имеют четыре независимых функции λ, μ, α и κ

$$c_{ikjl}=\mu\left(\xi,x,T,t\right)\left(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{jk}\delta_{il}\right)+\lambda\left(\xi,x,T,t\right)\delta_{ik}\delta_{jl}\,, \tag{1.8}$$

$$\alpha_{ij}=\alpha\left(\xi,x,T\right)\delta_{ij}\,,\qquad \kappa_{ij}=\kappa\left(\xi,x,T\right)\delta_{ij}\,, \tag{1.9}$$

где λ, μ – функции релаксации, аналогичные параметрам Ляме в теории упругости, α – коэффициент линейного теплового расширения, κ – коэффициент теплопроводности, δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij}=1$ при $i=j$ и $\delta_{ij}=0$ в противном случае).

Определяющие соотношения (1.6), (1.7) в случае изотропных материалов могут быть записаны в эквивалентном виде

$$\sigma_p(x,t)=\int_0^t K\left(\xi,x,T,t-\tau\right)d\theta(x,\tau)-3K_0\left(\xi,x,T\right)\alpha\left(\xi,x,T\right)T(x)\,, \tag{1.10}$$

$$\sigma'_{ij}(x,t)=2\int_0^t \mu\left(\xi,x,T,t-\tau\right)d\varepsilon'_{ij}(x,\tau)\,, \tag{1.11}$$

$$Q_i(x)=-\kappa\left(\xi,x,T\right)\frac{\partial T(x)}{\partial x_i}\,. \tag{1.12}$$

Здесь σ_p – первый инвариант тензора напряжений, $\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_p$, θ – объемная деформация (первый инвариант тензора деформаций), $\varepsilon'_{ij}=\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\,\theta/3$, K – функция релаксации давления (аналог объемного модуля деформации в теории упругости).

Далее будем рассматривать изотропные материалы, которые ведут себя упруго по отношению к объемной деформации. В этом случае определяющее соотношение для первого инварианта тензора напряжений (1.10) приобретает обычный вид

$$\sigma_p(x,t) = K_0\left(\xi,x,T\right)\left[\theta(x,t) - 3\alpha\left(\xi,x,T\right)T(x)\right].$$

Введем аналог модуля Юнга для вязкоупругого материала, т.е. функцию релаксации напряжений E при одноосном напряженно-деформированном состоянии по формуле

$$\frac{3}{E\left(\xi,x,T,t\right)} = \frac{1}{\mu\left(\xi,x,T,t\right)} + \frac{1}{3K_0}, \qquad (1.13)$$

где K_0 – модуль объемного расширения.

При этом для несжимаемых материалов из (1.13) будем иметь $E = 3\mu$.

Функцию релаксации $E\left(\xi,x,T,t\right)$ в каждой фазе материала $\xi \in G_I$, $\xi \in G_M$ и $\xi \in G_L$ в зависимости от температуры определяем экспериментальным путем на образцах, подвергаемых одноосному растяжению, и приближаем ее на основе экспериментальных данных рядами Дирихле по экспонентам (см. [18]) с показателями α_k, имеющими смысл обратных времен релаксации для каждой отдельной экспоненты (рис. 2). В результате, функцию релаксации E в каждой фазе материала ($i \in \{I,L,M\}$) можем представить в виде конечной суммы

$$E_i\left(T,t\right) = E_0^{(i)}(T) - \sum_{k=1}^{M} a_k^{(i)}(T)\frac{1-e^{-\alpha_k^{(i)}t}}{\alpha_k^{(i)}} = E_\infty^{(i)}(T) + \sum_{k=1}^{M} A_k^{(i)}(T)e^{-\alpha_k^{(i)}t}, \qquad (1.14)$$

где $E_0^{(i)}$ и $E_\infty^{(i)}$ соответственно мгновенный и длительный модуль упругости каждой фазы композитного материала.

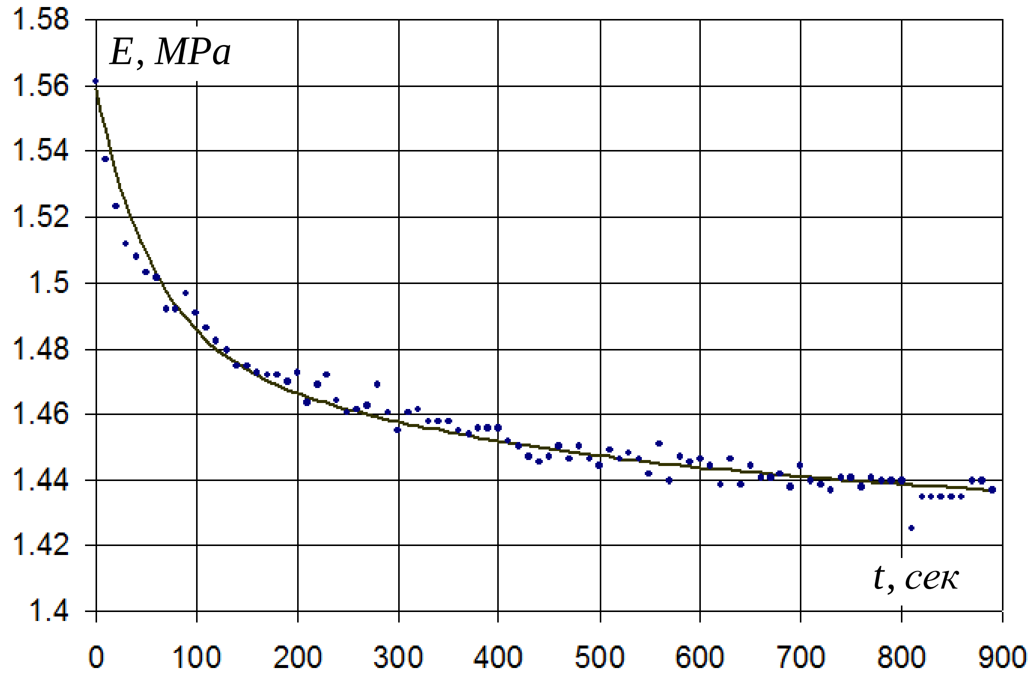


Рис.2. Аппроксимация экспериментальных данных (точки) рядом Дирихле (тонкая линия).

На основе соотношений (1.14) и (1.13) функцию сдвиговой релаксации μ пересчитываем путем ее аппроксимации рядом Дирихле с теми же показателями экспонент:

$$\mu_i\left(T,t\right)=\mu_0^{(i)}(T)-\sum_{k=1}^{M}b_k^{(i)}(T)\frac{1-e^{-\alpha_k^{(i)}t}}{\alpha_k^{(i)}}=\mu_\infty^{(i)}(T)+\sum_{k=1}^{M}B_k^{(i)}(T)e^{-\alpha_k^{(i)}t}\ , \qquad (1.15)$$

для несжимаемого материала находим, что $B_k^{(i)}(T)=A_k^{(i)}(T)/3$.

Таким образом, исходная информация о поведении компонент вязкоупругого тела в данной работе представлена в виде рядов экспонент с коэффициентами, зависящими от температуры. Структурная зависимость всего композитного материала от распределенных в нем фаз наполнителя определяется периодической зависимостью функции сдвиговой релаксации, объемного модуля, коэффициента теплового расширения и коэффициента теплопроводности от быстрой переменной ξ при фиксированном x. Такая же форма представления исходной информации о свойствах композитного материала позволяет описывать и различные нерегулярные распределения включений, которые определяются квазипериодической зависимостью указанных функций от быстрых и медленных переменных.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Применяя к определяющим уравнениям (1.10), (1.11) интегральное преобразование Лапласа [19,20], получаем соотношение между образами напряжений и деформаций в виде обычного линейного закона теории упругости с комплексными модулями, параметрически зависящими от комплексной величины $s=\xi+i\eta$

$$\sigma_p^*(x,s)=K_0\left(\xi,x,T\right)\left[\theta^*(x,s)-3\alpha^*\left(\xi,x,T,s\right)T(x)\right], \qquad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^{*\prime}(x,s)=2\mu^*\left(\xi,x,T,s\right)\varepsilon_{ij}^{*\prime}(x,s), \qquad (2.2)$$

где

$$\mu^*\left(\xi,x,T,s\right)=\mu_i^*\left(T,s\right),\quad \alpha^*\left(\xi,x,T,s\right)=\alpha_i^*\left(T,s\right),\quad \xi\in G_i, \qquad (2.3)$$

$$\mu_i^*\left(T,s\right)=\mu_\infty^{(i)}(T)+\sum_{k=1}^{M}\frac{s\,b_k^{(i)}(T)}{\alpha_k^{(i)}(s+\alpha_k^{(i)})},\quad \alpha_i^*\left(T,s\right)=\frac{\alpha_i\left(T\right)}{s}, \qquad (2.4)$$

а $\sigma_p^*(x,s)$, $\sigma_{ij}^{*\prime}(x,s)$, $\theta^*(x,s)$ и $\varepsilon_{ij}^{*\prime}(x,s)$ – образы функций $\sigma_p(x,t)$, $\sigma_{ij}{}'(x,t)$, $\theta(x,t)$ и $\varepsilon_{ij}{}'(x,s)$ при преобразовании Лапласа. Здесь мы учли, что в начальный момент времени тело находилось в недеформированном состоянии, т.е. $\varepsilon_{ij}{}'(x,0)=0$.

Из формул (2.4), в частности, следует, что при $s\to\infty$ выполняются предельные переходы $\alpha_i^*\left(T,s\right)\to 0$, $\mu_i^*\left(T,s\right)\to\mu_0^{(i)}(T)$, где $\mu_0^{(i)}$ мгновенный модуль сдвига каждой фазы композитного материала. Как известно [19,20], обратное преобразование Лапласа осуществляется путем интегрирования образа по комплексной прямой $\left[\tau_0-i\infty,\tau_0+i\infty\right]$ с некоторым вещественным $\tau_0>0$.

В результате система уравнений термовязкоупругости для образа $\boldsymbol{u}^*(x)$ вектора перемещений $\boldsymbol{u}(x)$ при интегральном преобразовании Лапласа переписывается в следующем дивергентном виде с комплексными коэффициентами, зависящими от быстрых переменных $\xi=x/\varepsilon$ и от набора параметров $\boldsymbol{p}=\left\{x,T,s\right\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A^*_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial x_j} - \boldsymbol{\alpha}^*_j\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)T\right)\right) + \boldsymbol{F}(x) = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\kappa_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + h(x) = 0\,, \tag{2.6}$$

с контактными условиями на межфазных границах

$$\left[\boldsymbol{u}^*\right] = \left[n_i A^*_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}^*}{\partial x_j} - \boldsymbol{\alpha}^*_j\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)T\right)\right] = 0\,,$$

$$\left[T\right] = \left[n_i \kappa_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\frac{\partial T}{\partial x_j}\right] = 0\,, \tag{2.7}$$

где

$$A^*_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right) = \left\{\mu^*\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il} - 2\delta_{ik}\delta_{jl}/3\right) + K_0\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\delta_{ik}\delta_{jl}\right\}, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^*_j\left(\xi,\boldsymbol{p}\right) = \left\{\alpha^*\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\delta_{ij}\right\}, \quad \kappa_{ij}\left(\xi,\boldsymbol{p}\right) = \kappa\left(\xi,\boldsymbol{p}\right)\delta_{ij}\,. \tag{2.9}$$

В соответствии со структурой уравнений (2.5) – (2.7) будем рассматривать их решения как функции переменных ξ, x и набора параметров $\boldsymbol{p}$, в который включены и зависимости коэффициентов от пространственных координат, в периодической среде с периодом ε. Причем зависимость от медленных переменных определяется функциями медленных переменных $\boldsymbol{V}^*_0(x)$ и $T_0(x)$, имеющими физический смысл средних по быстрым переменным ξ от образа перемещений и температуры

$$\boldsymbol{u}^*(x,s) = \hat{\boldsymbol{u}}^*(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{V}^*_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\,\boldsymbol{u}^{(l)}(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p})\,, \quad \boldsymbol{V}^*_0(x) = \left\langle \hat{\boldsymbol{u}}^*(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p})\right\rangle, \tag{2.10}$$

$$T(x) = \hat{T}(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p}) = T_0(x) + \sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^l\,T^{(l)}(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p})\,, \quad T_0(x) = \left\langle \hat{T}(\xi,\,x,\,\boldsymbol{p})\right\rangle. \tag{2.11}$$

Структура функций $\boldsymbol{u}^{(l)}(\xi,x,\boldsymbol{p})$, их зависимость от быстрых и медленных переменных (точнее от функций быстрых и медленных переменных), осуществляется на основе асимптотического анализа уравнений (2.5)-(2.7) с помощью формулы дифференцирования сложной функции при условии независимости функций быстрых и медленных переменных (см. [9])

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = D^k + \varepsilon^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_k} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \xi_k}\nabla_{\boldsymbol{p}}\right), \quad D^k = \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x_k}\nabla_{\boldsymbol{p}}\,, \tag{2.12}$$

что выражает собой принцип асимптотического усреднения нелинейных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами в параметрическом пространстве.

С помощью формулы (2.12) оказывается возможным установить структуру всех членов формального асимптотического ряда (2.10), (2.11). И при этом для функций быстрых переменных (параметрически зависящих от x, T_0 и внешнего параметра s) устанавливаются разрешающие уравнения на ячейке в классе периодических функций. Для функций медленных переменных в результате асимптотического усреднения выводится уравнение, не зависящее от ξ (см. [9]) и формально получаемое усреднением по ξ исходных уравнений, в которых переменные разделены с помощью (2.12). Таким образом, для анализа системы уравнений (2.5)-(2.7) применяется вариант метода многих масштабов, основанный на анализе исходных уравнений с учетом независимости функций быстрых и медленных переменных.

Наибольший интерес представляет асимптотика первого порядка и уравнения на ячейке периодичности первого порядка, поскольку они определяют эффективные характеристики рассматриваемой термовязкоупругой среды с учетом нелинейных зависимостей от температуры и пространственных координат

$$\boldsymbol{u}^{(1)}(\xi, x, \boldsymbol{p}) = N_{i_1}(\xi, \boldsymbol{p})\, D^{i_1}\boldsymbol{V}_0^*(x) + \boldsymbol{m}(\xi, \boldsymbol{p}) T_0(x), \tag{2.13}$$

$$T^{(1)}(x, \xi, \boldsymbol{p}) = n_{i_1}(\xi, \boldsymbol{p})\, D^{i_1} T_0(x), \qquad \boldsymbol{p} = \{x, T_0, s\}. \tag{2.14}$$

Здесь $N_{i_1}(\xi, \boldsymbol{p})$, $\boldsymbol{m}(\xi, \boldsymbol{p})$ и $n_{i_1}(\xi, \boldsymbol{p})$ функции быстрых переменных в параметрическом пространстве, соответственно матричные, векторные и скалярные, периодические с периодом 1 по ξ.

Форма представления (2.13), (2.14) определяет уравнения на ячейке для функций быстрых переменных в классе периодических функций в параметрическом пространстве из условия равенства нулю членов асимптотического разложения исходных уравнений порядка $O(\varepsilon^{-1})$, см. [9]

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(A_{ij}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} E)}{\partial \xi_j} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(A_{ij}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (\boldsymbol{m} - \xi_i \alpha_i)}{\partial \xi_j} \right) = 0, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\kappa_{ij}(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (n_{i_1} + \xi_{i_1})}{\partial \xi_j} \right) = 0. \tag{2.16}$$

Также из граничных условий на межфазных поверхностях получаем контактные условия, которым удовлетворяют функции быстрых переменных

$$\left[N_{i_1} \right] = \left[A_{ij}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (N_{i_1} + \xi_{i_1} E)}{\partial \xi_j} n_i \right] = 0, \quad [\boldsymbol{m}] = \left[A_{ij}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial \boldsymbol{m}}{\partial \xi_j} n_i \right] = 0, \tag{2.17}$$

$$\left[n_{i_1} \right] = \left[\kappa_{ij}(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (n_{i_1} + \xi_{i_1})}{\partial \xi_j} n_i \right] = 0. \tag{2.18}$$

Требование разрешимости уравнений для функций быстрых переменных второго порядка в классе периодических функций приводит к необходимости усреднения по периоду членов порядка $O(1)$ асимптотического равенства в разложении уравнений (2.5), (2.6). В результате получаем усреднённые уравнения для функций $\boldsymbol{V}_0^*(x)$ и $T_0(x)$, которые соответствуют обращению в нуль членов порядка $O(1)$ в асимптотическом разложении исходных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\langle A_{ik}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial \left(N_j + \xi_j E \right)}{\partial \xi_k} \right\rangle \frac{\partial \boldsymbol{V}_0^*}{\partial x_j} + \left\langle A_{ik}^*(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial (\boldsymbol{m} - \xi_i \alpha_i)}{\partial \xi_k} \right\rangle T_0 \right) + \boldsymbol{F}(x) = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left\langle \kappa_{ik}(\xi, \boldsymbol{p}) \frac{\partial \left(n_j + \xi_j \right)}{\partial \xi_k} \right\rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) + h(x) = 0, \qquad \boldsymbol{p} = \{x, T_0, s\}. \tag{2.20}$$

Здесь $\langle \cdot \rangle$ означает среднее значение по объёму ячейки периодичности по быстрым переменным при фиксированном значении набора параметров.

Уравнения (2.19), (2.20) представляют собой усреднённые уравнения термовязкоупругости (в пространстве образов) с эффективными характеристиками, которые определяются по следующему алгоритму после вычисления функций быстрых переменных

$$\hat{A}_{ij} = \left\langle A^*_{ik}\left(\xi, \boldsymbol{p}\right) \frac{\partial\left(N_j + \xi_j E\right)}{\partial \xi_k} \right\rangle, \ \hat{\boldsymbol{\alpha}}_j = -\hat{A}^{-1}_{ij} \left\langle A^*_{ik}\left(\xi, \boldsymbol{p}\right) \frac{\partial\left(\boldsymbol{m} - \xi_i \alpha_i\right)}{\partial \xi_k} \right\rangle, \quad (2.21)$$

$$\hat{\kappa}_{ij} = \left\langle \kappa_{ik}\left(\xi, \boldsymbol{p}\right) \frac{\partial\left(n_j + \xi_j\right)}{\partial \xi_k} \right\rangle. \quad (2.22)$$

Здесь $\hat{A}_{ij} = \left\| \hat{c}_{ijkl} \right\|$ – эффективная матрица с комплексными коэффициентами, составленная из соответствующих компонент тензора жёсткости структурно-неоднородного материала, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j = \left\{ \hat{\alpha}_{ij} \right\}$ – вектор-столбцы, определяемые компонентами эффективного тензора теплового расширения, $\hat{\kappa}_{ij}$ – компоненты эффективного тензора теплопроводности. В этих характеристиках сохраняется зависимость от параметра $\boldsymbol{p}$, поэтому формулы (2.21), (2.22) определяют алгоритм нахождения нелинейной диаграммы состояния эффективного термовязкоупругого материала. Соответствующие этим коэффициентам функции релаксации определяются с помощью обратного преобразования Лапласа.

Для изотропного материала, рассматриваемого в нашем случае, коэффициенты $\hat{A}_{ij}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_j$ и $\hat{\kappa}_{ij}$ могут иметь различные условия симметрии в зависимости от геометрии включений. В случае, когда включение имеет три плоскости симметрии (к этому относится и включение цилиндрической и сферической формы), эффективные характеристики имеют условия симметрии, соответствующие ортотропному термовязкоупругому материалу, т.е. определяются 12 независимыми комплексными характеристиками $\hat{E}_1$, $\hat{E}_2$, $\hat{E}_3$, $\hat{\nu}_{12}$, $\hat{\nu}_{13}$, $\hat{\nu}_{23}$, $\hat{G}_{12}$, $\hat{G}_{13}$, $\hat{G}_{23}$, $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_3$, отвечающими за его деформированное состояние, и тремя вещественными коэффициентами теплопроводности $\hat{\kappa}_1$, $\hat{\kappa}_2$, $\hat{\kappa}_3$.

Разделение быстрых и медленных переменных, формализованное в уравнениях (2.10), (2.11), (2.13)-(2.20) представляет собой, по сути, двухуровневую схему решения задач термовязкоупругости в неоднородных материалах с квазипериодической структурой. На первом этапе решается задача по определению функций быстрых переменных (2.15)-(2.17) и эффективных характеристик (2.21), (2.22) неоднородной среды. На втором этапе решается задача термовязкоупругости с нелинейными характеристиками. Каждая из этих задач имеет свою специфику. Для задач второго этапа обычно применяется общий конечно-элементный подход, развиваемый с учетом специфики задачи [14].

Для решения задачи первого этапа в классе периодических функций быстрых переменных в параметрическом пространстве, развивается блочный метод наименьших квадратов, основанный на аналитически точных аппроксимациях решения в подобластях-блоках системами специально конструируемых для этого функций (метод блочных аппроксимаций [12]). Матричные уравнения (2.15) для периодических функций N_{i_1} разбиваются на ряд векторных задач, которые решаются блочным методом и трактуются как задачи линейной теории упругости с комплексными коэффициентами на ячейке в форме прямоугольного параллелепипеда с включением и с условиями «периодического скачка» для компонент вектора перемещений. Аналогично задача (2.16), (2.18) трактуется как задача о распределение тепла в ячейке с включением при условиях «периодического скачка» на температуру.

3. БЛОЧНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Заметим, что общее решение однородного уравнения Ляме для изотропного тела представляется через вспомогательные гармонические потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа [21,22]

$$\boldsymbol{u}^*(P) = \frac{\boldsymbol{f}_0(P)}{\mu^*} + \frac{K_0 + \mu^*/3}{K_0 + 4\mu^*/3}\frac{\nabla\left(\phi_0 - \boldsymbol{r}\,\boldsymbol{f}_0\right)}{\mu^*},$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{f}_0(P) = 0, \quad \nabla^2 \phi_0(P) = 0. \qquad (3.1)$$

Здесь $P = (x, y, z)$ – точка в пространстве, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор из начала координат в точку P, $\boldsymbol{f}_0$ – векторный гармонический потенциал, ϕ_0 – скалярный гармонический потенциал, μ^* – модуль сдвига, K_0 – объемный модуль, связанный с модулями Юнга и сдвига таким же соотношением (1.13), как и для функции релаксации. Материальные константы в представлении (3.1) принимают комплексное значение и зависят от параметра $s = \xi + i\eta$.

На основе комплексного представления Папковича-Нейбера (3.1) были построены полные системы функций, удовлетворяющие уравнению (2.19) для изотропного тела (2.8), (2.9). Это построение основывается на аппроксимации гармонических потенциалов $\boldsymbol{f}_0$ и ϕ_0 в представлении (3.1) системами базисных функций с заданными аналитическими свойствами, определяемыми формальным рядом [23] с двумя произвольными функциями, аналитической функцией $\psi_0(w)$ и вещественной функцией $U_0(z)$, $w = x + iy$

$$\Phi(P) = \sum_p \frac{(-1)^p \overline{w}^p}{4^p\, p!}\psi_0^{(-p)}(w)U_0^{(2p)}(z),$$

$$\psi_0^{(-p-1)} = \int \psi_0^{(-p)}\,dw, \quad \psi_0^{(0)} = \psi_0(w). \qquad (3.2)$$

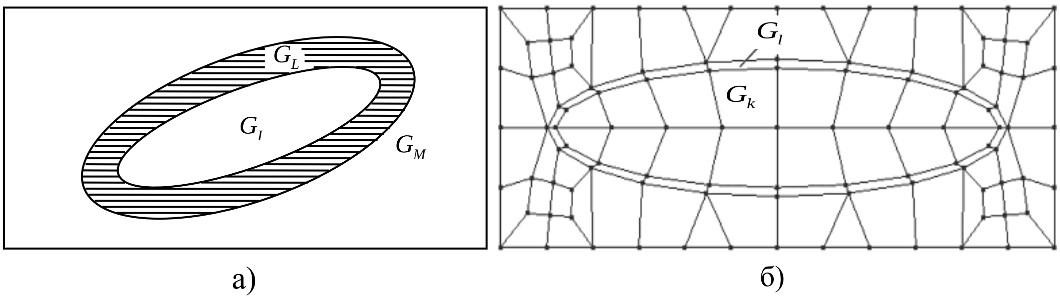
Формальный ряд (3.2) имеет комплексную форму представления и удовлетворяет гармоническому уравнению $\nabla^2\Phi(P) = 0$ при условии его конечности или абсолютной сходимости; в свою очередь конечность ряда обеспечивается выбором $U_0(z)$ в виде полинома.

При выборе определяющих функций в виде $\psi_0(w) = w^m$ и $U_0(z) = z^{n-m}$ ряд (3.2) совпадает с системой однородных гармонических полиномов $\Phi_n^m(P)$ (системой шаровых функций); здесь n – общая степень полинома, m – его «угловая» степень, т.е. число осцилляций по координате $\varphi = \arctan(y/x)$. Система функций $\left\{\Phi_n^m(P)\right\}$, $m \le n$, образует полную систему для аппроксимации произвольной регулярной гармонической функции. Наряду с регулярной системой (3.2) определяется дополнительная сингулярная система гармонических функций $\left\{\hat{\Phi}_n^m(P)\right\}$, соответствующая функциям $\psi_0(w) = w^m$ и $U_0(z) = z^{-n-1-m}$.

Определение этой системы функций в виде (3.2) приводит к бесконечному ряду и к необходимости исследования области его сходимости. Однако, сингулярная система функций может быть определена также и в эквивалентном виде с помощью шаровых функций и системы сингулярных радиальных множителей $\hat{\Phi}_n^m(P) = r^{-n-1}\Phi_n^m(P)$.

Все эти системы функций (и при необходимости еще различные системы функций с нужными аналитическими свойствами) используются для аппроксимации решений в задаче (2.15)-(2.18) на ячейке периодичности в рамках блочного метода [12-14]. Определение в виде ряда (3.2) позволяет сформулировать между этими функциями систему рекуррентных соотношений, которая позволяет их легко вычислять, а также дифференцировать и интегрировать в аналитическом виде, что эффективно используется в блочном методе.

Для аппроксимации решения в рамках блочного метода исходная область разбивается на множество подобластей-блоков, согласованных с фазами материала G_I, G_L, G_M так, что они заполняют целиком эту фазу (рис.3а), или представляют собой часть каждой фазы композитного материала (рис.3б). В результате получаем блочную структуру G_k подобластей исходной области G, пересекающихся между собой только по своей границе: $\bar{G} = \cup \bar{G}_k$, $G_k \cap G_l = \varnothing$, $k \neq l$. Среди блоков встречаются или односвязные, или двусвязные подобласти (типа межфазного слоя G_L, матрицы без включения G_M). В односвязных блоках для аппроксимации потенциалов используется регулярная система $\{\Phi_n^m(P)\}$, а в двусвязных блоках две системы $\{\Phi_n^m(P)\}$ и $\{\hat{\Phi}_n^m(P)\}$ одновременно, что соответствует разложениям типа Лорана для потенциалов.



а) б)

Рис.3. Разбиение исходной ячейки с включением на систему подобластей-блоков.

Для задачи (2.15) используется представление Папковича-Нейбера (3.1) с комплексными коэффициентами, и в каждом блоке осуществляется аппроксимация вспомогательных потенциалов $\boldsymbol{f}_0$ и ϕ_0 независимыми рядами по базисным функциям с комплексными коэффициентами. При этом перемещения и напряжения, необходимые для сшивки блоков, вычисляются с помощью дифференцирования вспомогательных потенциалов

$$\boldsymbol{u}^*(P) = \frac{1}{K_0 + 4\mu/3}\left[\boldsymbol{f}_0(P) + \left(\frac{1}{3} + \frac{K_0}{\mu}\right)\left(\nabla\phi_0 - \boldsymbol{r}\nabla\boldsymbol{f}_0\right)\right], \tag{3.3}$$

$$\sigma_{ij}^{*}=\frac{1}{K_0+4\mu/3}\left[(K_0-\mu)\left(\frac{\partial f_i^0}{\partial x_j}+\frac{\partial f_j^0}{\partial x_i}\right)+3K_0\,\delta_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{f}_0+\right.$$
$$\left.+2(K_0+\mu/3)\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial x_i\partial x_j}-\boldsymbol{r}\frac{\partial\boldsymbol{f}_0}{\partial x_i\partial x_j}\right)\right]. \tag{3.4}$$

Для задачи (2.16) аппроксимация осуществляется непосредственно над решением

$$\Phi_k(P)=\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{n}\Big[a_{nm}^k\,\Phi_n^m(P-P_k^0)+b_{nm}^k\,\bar{\Phi}_n^m(P-P_k^0)+$$
$$+c_{nm}^k\,\hat{\Phi}_n^m(P-P_k^0)+d_{nm}^k\,\bar{\hat{\Phi}}_n^m(P-P_k^0)\Big]. \tag{3.5}$$

Здесь $\Phi_k(P)$ – значение неизвестной функции в k-м блоке, P_k^0 – точка внутри блока G_k, a_{nm}^k, b_{nm}^k, c_{nm}^k, d_{nm}^k – неизвестные коэффициенты (комплексные в общем случае), M – максимальная степень аппроксимирующих функций. В односвязных блоках подсистема сингулярных функций $\hat{\Phi}_n^m$ отсутствует и соответственно коэффициенты c_{nm}^k, d_{nm}^k равны нулю.

Аппроксимация условий периодического скачка для перемещений $\boldsymbol{u}_k$ и температур Φ_k в блоках, а также сшивка перемещений, поверхностных сил, температуры и теплопотоков на границах между блоками осуществляется с помощью системы функционалов $\{F_k\}$ метода наименьших квадратов (см. [11-13,23-26]), что приводит к минимизации невязки между блоками по норме, реализуемой в виде блочной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\boldsymbol{X}_k$ в разложениях по базисным системам функций

$$F(\boldsymbol{u}^*-\boldsymbol{u}_0^*,\Phi-\Phi_0)\to\min,\qquad F(\boldsymbol{u},\Phi)=\max_k F_k, \tag{3.6}$$

$$T_k\,\boldsymbol{X}_k+\sum_l T_{kl}\,\boldsymbol{X}_l=\boldsymbol{H}_k,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots\ N. \tag{3.7}$$

При этом рассматривается два типа функционалов, которые приводят соответственно к симметричной и несимметричной системе уравнений (см. [13,24,25]).

В качестве классического сшивающего функционала F_k для задачи (2.15), (2.17) рассматривается функционал, осуществляющий сшивку одновременную перемещений и напряжений на границе каждого блока

$$F_k=\sum_l\left\|\alpha_{kl}\left(\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_l\right)+\beta_{kl}\left(\boldsymbol{p}_k-\boldsymbol{p}_l\right)\right\|_{L_2(S_{kl})}^2, \tag{3.8}$$

аналогично для задачи (2.16), (2.18). Здесь S_{kl} – общая часть границы блоков G_k и G_l, суммирование производится по всем индексам l, для которых $\bar{G}_k\cap\bar{G}_l\neq\varnothing$, α_{kl}, β_{kl} – нормирующие коэффициенты, обеспечивающие корректность процедуры сшивки и невырожденность общего функционала. Дело в том, что на границе блока при сшивке можно поставить для оператора второго порядка только одно условие – равенство нулю невязки или перемещений, или напряжений. Но, поскольку каждая граница S_{kl} примыкает ровно к двум блокам G_k и G_l, то эти условия можно разделить, и в одном блоке сшивать перемещения, а в другом блоке – напряжения. В общей форме этот принцип реализуется в виде условия (3.8) с требованием невырожденности матрицы, составленной из коэффициентов α_{kl} , β_{kl} в виде условия (см. [25])

$$\det \begin{Vmatrix} \alpha_{kl} & \beta_{kl} \\ \alpha_{lk} & \beta_{lk} \end{Vmatrix} \neq 0, \quad P \in S_{kl} . \tag{3.9}$$

При выполнении (3.9) функционал F_k совместно с функционалом F_l обеспечивают сшивку перемещений и напряжений. В структуре функционалов (3.6), (3.8) также явно учитывается краевое условие «периодического скачка» для блоков, примыкающих к границе ячейки периодичности.

Блочная система линейных алгебраических уравнений (3.7) для неизвестных коэффициентов в блоках $\boldsymbol{X}_k$ имеет разреженную структуру и плотно заполненные матрицы-блоки T_k и T_{kl}. Здесь T_k – матрица Грама аппроксимирующей системы функций, T_{kl} – матрицы, составленные из скалярных произведений аппроксимирующих функций смежных блоков, $\boldsymbol{H}_k$ – вектор, соответствующий граничным условиям в блоке (сшивка функций или условия «периодического скачка»).

Основная трудность в блочном методе наименьших квадратов заключается в решении системы линейных алгебраических уравнений, структура которых соответствует структуре блочного разбиения исходной области [24,25]. Но поскольку система линейных уравнений имеет блочно-разреженную структуру, то при ее решении естественным образом возникает два уровня вычислений: интенсивные вычисления с плотными подматрицами-блоками на уровне общей памяти и относительно независимые вычисления между блоками на уровне распределенной памяти. Такая структура блочной матрицы позволяет эффективно организовать вычисления и использовать неоднородную структуру памяти в современных кластерных системах, реализовав параллельные алгоритмы вычислений (см. [24,25]). Интенсивные вычислительные операции с плотными подматрицами организуются на основе потоков вычислений с использованием общей памяти, а относительно независимые вычисления с блочно-разреженной структурой распараллеливаются с помощью MPI.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с изложенным параметрическим методом асимптотического усреднения эффективные характеристики термовязкоупругих материалов определяются из решения периодических задач (2.15)-(2.18) с комплексными коэффициентами на основе представления (3.1) и разложения вспомогательных потенциалов по системам аппроксимирующих функций в форме (3.2). Ниже приводятся примеры расчетов эффективных теплофизических и реологических характеристик для структурно-неоднородных материалов, наполненных однонаправленными волокнами цилиндрической формы. В этом случае задача сводится к двумерному уравнению в плоской области (условие плоского деформированного состояния) с включением некоторой формы, разбитой на систему подобластей-блоков.

Эффективная теплопроводность и теплоемкость композитного материала с вязкоупругой матрицей и однонаправленными углеродными волокнами.

Рассмотрим композицию вязкоупругой матрицы из бутадиен-стирольного каучука и углеродных волокон круглой формы с коэффициентом теплопроводности равным $\kappa_I = 196\, вт/(м \cdot град)$, плотностью $\rho_I = 1.7 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3$ и удельной теплоемкостью $c_I = 0.71\, кДж/(кг \cdot град)$. В расчёте были приняты следующие теплофизические характеристики бутадиен-стирольного каучука: $\kappa_M = 0.184\, вт/(м \cdot град)$, $\rho_M = 1.19 \cdot 10^{-3}\ кг/м^3$, $c_M = 1.68\, кДж/(кг \cdot град)$. Задача (2.16), (2.18) рассматривалась в плоской постановке и решалась блочным методом наименьших квадратов с разбиением исходной области всего лишь на два криволинейных блока, соответствующих фазам материала: $G = G_I \cup G_M \cup \partial G_I$. При этом блок G_M представляет собой двусвязную подобласть исходной ячейки с включением. Максимальная степень регулярных и сингулярных функций в аппроксимирующем решение представлении (3.5) была равна $M = 21$ в каждом блоке.

На рис.4 приведено распределение функции $n_1(\xi)$ (левый рисунок) и компоненты теплопотока $q_1(\xi) = \kappa_{1j}\, \partial(n_1 + \xi_1)/\partial \xi_j$ (правый рисунок) в периодической ячейке, являющихся основой для нахождения эффективных теплофизических характеристик композитного материала по формуле (2.22).

На рис.5 представлена зависимость эффективного модуля теплопроводности при распространении тепла в поперечном направлении от коэффициента c_0 объемного наполнения (сплошная линия) в сопоставлении с правилом смеси обратных величин (штриховая линия).

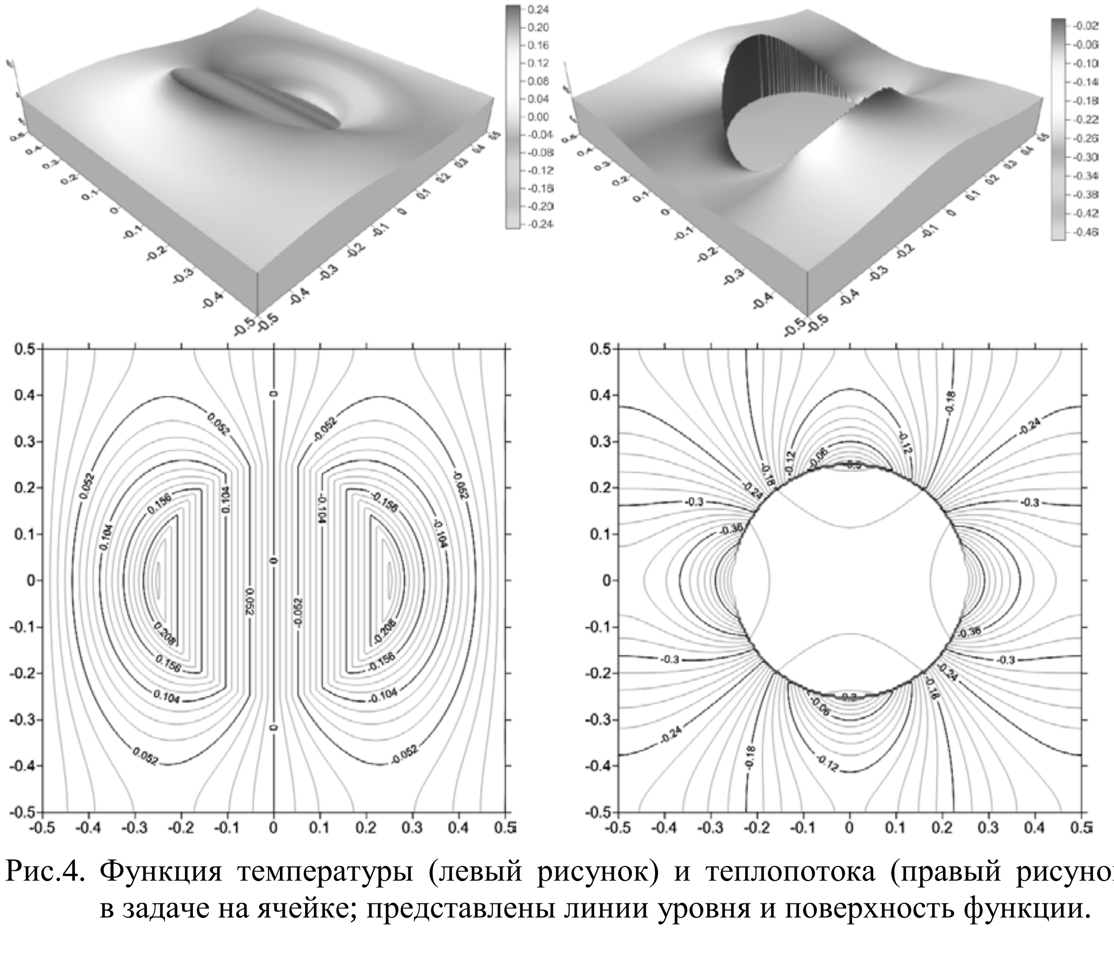


Рис.4. Функция температуры (левый рисунок) и теплопотока (правый рисунок) в задаче на ячейке; представлены линии уровня и поверхность функции.

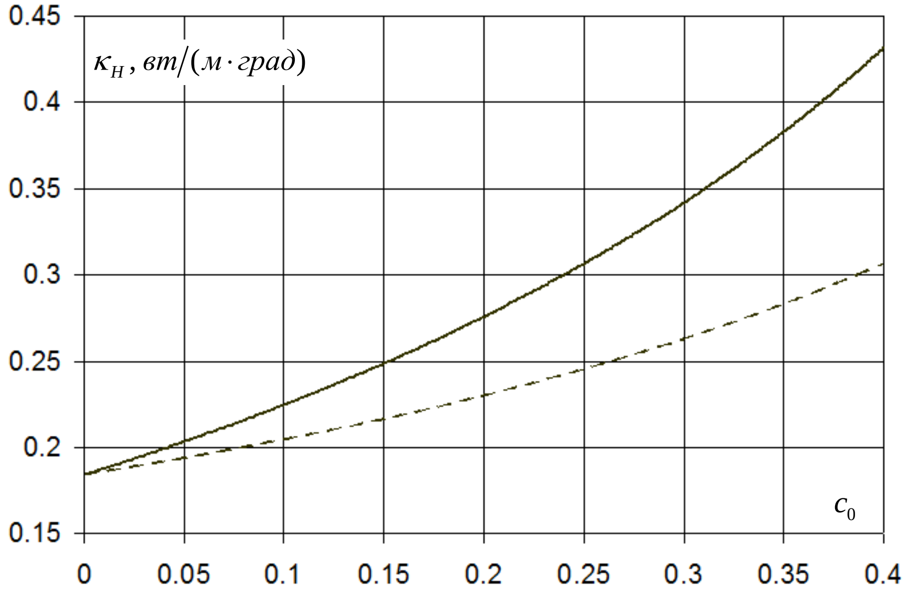
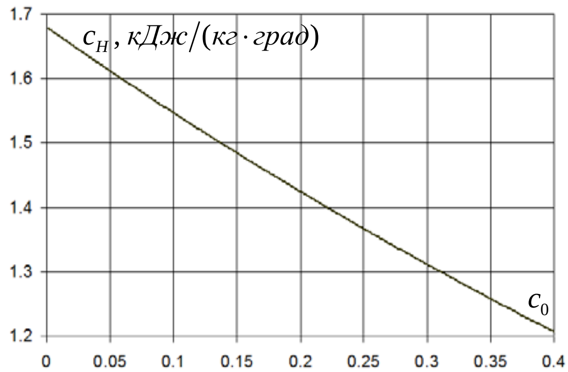


Рис.5. Зависимость эффективной теплопроводности от объемной концентрации включений (сплошная линия) в сопоставлении с приближенной оценкой (штриховая линия).

Наблюдается сильное расхождение между этими величинами, что является следствием значительного разброса этих значений у исходных материалов и указывает на необходимость вычисления коэффициента теплопроводности по формуле (2.22), точной (см. [7]) в соответствии с принципом эквивалентной гомогенности, в отличие от приближенной оценки по формуле смеси обратных величин. На рис.6 представлены эффективная теплоемкость (левый рисунок) и эффективная теплопроводность при распространении тепла вдоль углеродных волокон (правый рисунок), которые вычисляются в этом случае согласно теории асимптотического усреднения по формуле смеси.



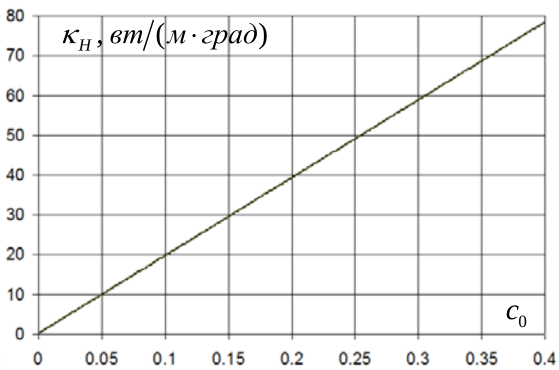


Рис.6. Зависимость эффективной теплоемкости (левый рисунок) и теплопроводности (правый рисунок) от объемной концентрации включений.

<u>Расчет эффективных вязкоупругих сойств волокнистого композитного материала на основе эластомерной матрицы с однонаправленными углеродными волокнами.</u>

Как и в предыдущем случае, рассмотрим композицию вязкоупругой матрицы из бутадиен-стирольного каучука (вязкоупругий несжимаемый материал) и углеродных волокон круглой формы с коэффициентом, кривая релаксации которого представлена на рис.2. Аппроксимация модуля Юнга рядом экспонент (1.14) обеспечивает хорошую точность при двух экспонентах в ряде и при следующих параметрах приближения: $E_\infty = 1.43\,MPa$, $A_1 = 0.0546\,MPa$, $A_2 = 0.0746\,MPa$, $\alpha_1 = 0.00225\,сек^{-1}$, $\alpha_2 = 0.018\,сек^{-1}$. Рассмотрим композицию этого материала с однонаправленными углеродными волокнами с модулем Юнга $E_I = 260\,GPa$, $\nu_I = 0.2$, при коэффициенте объемного наполнения $c_0 = 0.07$. Переход в пространство образов преобразования Лапласа позволяет получить зависимость эффективного модуля Юнга композиции от комплексного параметра $\lambda = \lambda_0 + i\,p$, на основании которой и вычисляются реологические свойства всего композитного материала с помощью обратного преобразования Лапласа (см. [27]). На рис.7 представлены зависимости действительной и мнимой части эффективного модуля Юнга $E^*(p)$ при $\lambda_0 = 0$ для исследуемого композитного материала в сопоставлении с такой же характеристикой материала матрицы (исходного материала). Эти функции посчитаны на основе преобразования Лапласа аппроксимации (1.14) путем решения задачи на ячейке (2.15), (2.17) в пространстве комплексных параметров при разбиении ячейки на два блока $G = G_I \cup G_M \cup \partial G_I$ и при $M = 7$, что обеспечивает решение задачи с высокой степенью точности. Эффективные характеристики определялись на основе формулы (2.21) с помощью аналитического интегрирования представлений (3.3) – (3.5).

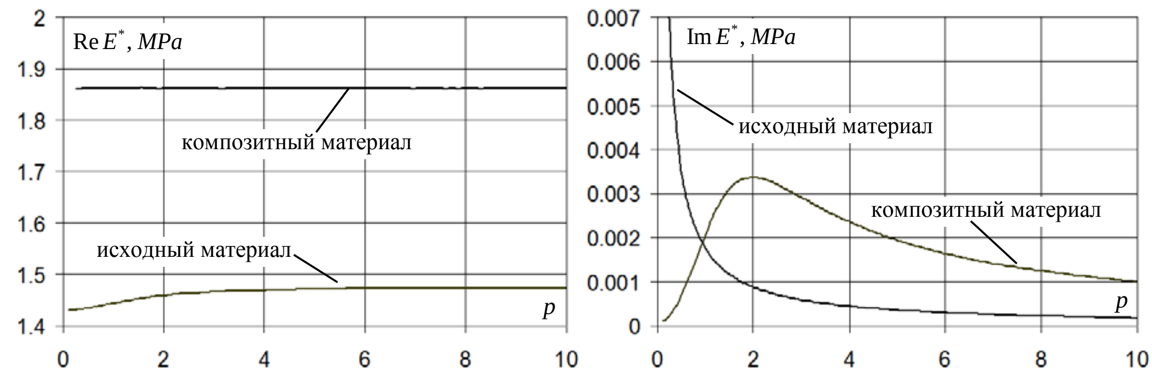


Рис.7. Действительная и мнимая часть модуля Юнга композитного и исходного материала в пространстве образов преобразования Лапласа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе реализован метод асимптотического усреднения уравнений термовязкоупругости с быстроосциллирующими коэффициентами. В отличие от традиционного подхода функции быстрых переменных при асимптотическом анализе уравнений строятся в параметрическом пространстве, что позволяет применять метод к материалам, зависящим от температуры нелинейным образом и имеющим регулярную, не обязательно периодическую структуру. Вспомогательные задачи решаются численно-аналитическим методом наименьших квадратов на системах функций точно удовлетворяющих определяющему уравнению задачи. Примеры численной реализации показывают высокую эффективность метода, позволяющего с высокой степенью точности рассчитывать термовязкоупругие характеристики композитных материалов, построенных на вязкоупругих компонентах матрицы и включений. Разработанный метод может применяться для оценки эффективных реологических характеристик структурно-неоднородных материалов и для моделирования физических процессов в таких материалах с учетом микроструктуры включений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций.* − М.: Наука, 1966. − 752 с.
2. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. − 338 с.
3. Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. *Методы прикладной вязкоупругости.* – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. − 411 с.
4. Ферри Дж. *Вязкоупругие свойства полимеров*. – М.: ИЛ, 1963. − 535 с.
5. Власов А.Н., Мерзляков В.П. *Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород.* – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
6. Королев М.В., Власов А.Н., Остякова А.В., Лупанова И.А. *Угличское водохранилище. Переработка берегов. Мониторинг. Геомеханические исследования.* – М.: ИПРИМ РАН: ООО «Сам Полиграфист», 2017. – 308 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
8. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов.* – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
9. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б. *Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т. 20. – № 4. – С.491-507.
10. Бахвалов Н.С. *Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами* // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 221. – № 3. – С.516-519.
11. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
12. Волков-Богородский Д.Б. *Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики* // Сборник трудов школы-семинара “Композиционные материалы”. – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С. 44-56.
13. Волков-Богородский Д.Б. *Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связных задачах механики сплошных сред* // Всеросс. науч.-практич. конф. “Инженерные системы-2008”. Сборник трудов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.123-138.
14. Волков-Богородский Д.Б. *Метод радиальных множителей в задачах механики неоднородных сред с многослойными включениями* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т. 22. – № 1. – С.19-39.
15. Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Мнушкин М.Г. *Программный комплекс «UWay»* / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. – Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – № 2011611833, 28 февраля, 2011 г.

16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. – М.: Наука, 1976. – 543 с.
17. Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики*. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
18. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. – М.: Наука, 1975. – 536 с.
19. Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционное исчисление*. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 524 с.
20. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
21. Папкович П.Ф. *Теория упругости*. – Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
22. Новацкий В. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
23. Волков-Богородский Д.Б. *Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов* // X Всеросс. съезд по фунд. проблемам теоретич. и прикл. механики. Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – № 4, часть 2. – С.407-409.
24. Волков-Богородский Д.Б., Харченко С.А. *Параллельная версия аналитико-численного метода блоков для связных задач волновой виброакустики* // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. – 2009. – № 5. – С.202-209.
25. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. *Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах* // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т.11. – С.127-136.
26. Волков-Богородский Д.Б., Власов А.Н. *Моделирование уравнений конвективного переноса тепла в структурно-неоднородных средах методом двухмасштабного усреднения* / IV Всеросс. симпоз. (4-6 декабря 2012, Москва). Сборник трудов. Т.2. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – С.186-203.
27. Крылов В.И., Скобля В.С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*. − М.: Наука, 1974. – 224 с.

REFERENCES

1. Rabotnov Iu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsii [Creep of structural elements]*. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.
2. Kristensen R. *Vvedenie v teoriiu viazkouprugosti [Introduction to the theory of viscoelasticity]*. Moskva, Mir, 1974, 338 p.
3. Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Metody prikladnoi viazkouprugosti [Methods of applied viscoelasticity]*. Ekaterinburg, UrO RAN, 2003, 411 p.
4. Ferri Dzh. *Viazkouprugie svoistva polimerov [Viscoelastic properties of polymers]*. Moskva, Inostrannaya Literatura, 1963, 535 p.
5. Vlasov A.N., Merzliakov V.P. *Usrednenie deformatsionnykh i prochnostnykh svoistv v mekhanike skal'nykh porod [Averaging of deformation and strength properties in rock mechanics]*. Moskva, Izd-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 208 p.
6. Korolev M.V., Vlasov A.N., Ostiakova A.V., Lupanova I.A. *Uglicheskoe vodokhranilishche. Pererabotka beregov. Monitoring. Geomekhanicheskie issledovaniia [The Uglich reservoir. Processing of shores. Monitoring. Geomechanical research]* Moskva, IPRIM RAN, OOO «Sam Poligrafist», 2017, 308 p.

7. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging processes in periodic media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
8. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, Izdatel'stvo MGU, 1984, 336 p.
9. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B. *Parametricheskii metod asimptotiches-kogo usredneniia dlia nelineinykh uravnenii termouprugosti [Parametric method of asymptotic averaging for nonlinear equations of thermoelasticity]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.491-507.
10. Bakhvalov N.S. *Osrednenie differentsial'nykh uravnenii s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruiushchimi koeffitsientami [Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients]*. Doklady AN SSSR, 1975, Vol.221, No.3, Pp.516-519.
11. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike [Variational methods in mathematical physics]*. Moskva, Nauka, 1970, 512 p.
12. Volkov-Bogorodskii D.B. *Razrabotka blochnogo analitiko-chislennogo metoda resheniia zadach mekhaniki i akustiki [Development of a block analytic-numerical method for solving problems in mechanics and acoustics]*. Sbornik trudov shkoly-seminara “Kompozitsionnye materialy”, Moskva, IPRIM RAN, 2000, Pp.44-56.
13. Volkov-Bogorodskii D.B. *Primenenie analiticheskikh raschetov na osnove metoda blokov v sviaznykh zadachakh mekhaniki sploshnykh sred [The use of analytical calculations based on the method of connected blocks in the problems of continuum mechanics]*.Vserossiiskaia nauchno-prakticheskaia konferentsiia “Inzhenernye sistemy-2008”, Sbornik trudov, Moskva, Rossiiskii universitet druzhby narodov, 2008, Pp.123-138.
14. Volkov-Bogorodskii D.B. *Metod radial'nykh mnozhitelei v zadachakh mekhaniki neodnorodnykh sred s mnogosloinymi vkliucheniiami [Method of radial multipliers in problems of mechanics of inhomogeneous media with multilayered inclusions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1. Pp.19-39.
15. Vlasov A.N., Volkov-Bogorodskii D.B., Mnushkin M.G. *Programmnyi kompleks «UWay». Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM [The software complex "UWay". Certificate of state registration of the computer program]*. Federal'naia sluzhba po intellektual'noi sobstvennosti, patentam i tovarnym znakam, № 2011611833, February 28, 2011.
16. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis]*. Moskva, Nauka, 1976, 543 p.
17. Ladyzhenskaia O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki [Boundary-value problems of mathematical physics]*. Moskva, Nauka, 1973, 408 p.
18. Leont'ev A.F. *Riady eksponent [Series of exponents]*. Moskva, Nauka, 1975, 536 p.
19. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniia i operatsionnoe ischislenie [Integral transforms and operational analysis]*. Moskva, GIFML, 1961, 524 p.
20. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti [Theory of heat conductivity]*. Moskva, Vysshaia shkola, 1967, 600 p.
21. Papkovich P.F. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Leningrad, Oborongiz, 1939, 640 p.
22. Novatskii V. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva, Nauka, 1975, 872 p.

23. Volkov-Bogorodskii D.B. *Analitiko-chislennyi metod otsenki effektivnykh kharakteristik strukturno-neodnorodnykh materialov [Analytical-numerical method for estimating the effective characteristics of structurally heterogeneous materials]*. X Vserossiiskii s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki, Sbornik trudov. Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N.I.Lobachevskogo, 2011, No.4(2), Pp.407-409.
24. Volkov-Bogorodskii D.B., Kharchenko S.A. *Parallel'naia versiia analitiko-chislennogo metoda blokov dlia sviaznykh zadach volnovoi vibroakustiki [Parallel version of the analytic-numerical block method for connected problems of wave vibroacoustics]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I.Lobachevskogo, 2009, No.5, Pp.202-209.
25. Volkov-Bogorodskii D.B., Sushko G.B., Kharchenko S.A. *Kombinirovannaia MPI+threads parallel'naia realizatsiia metoda blokov dlia modelirovaniia teplovykh protsessov v strukturno-neodnorodnykh sredakh [Combined MPI+threads parallel realization of the block method for modeling thermal processes in structurally inhomogeneous media]*. Vychislitel'nye metody i programmirovanie, 2010, Vol.11, Pp.127-136.
26. Volkov-Bogorodskii D.B., Vlasov A.N. *Modelirovanie uravnenii konvektivnogo perenosa tepla v strukturno-neodnorodnykh sredakh metodom dvukhmasshtabnogo usredneniia [Simulation of the equations of convective heat transfer in structurally inhomogeneous media by the method of two-scale averaging]*. IV Vserossiiskii simpozium (December 4-6, 2012, Moskow). Sbornik trudov, Vol.2, Moskov, IPRIM RAN, 2012, Pp.186-203.
27. Krylov V.I., Skoblia V.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniia Fur'e i obrashcheniia preobrazovaniia Laplasa [Methods of the approximate Fourier transform and inversion of the Laplace transformation]*. Moskva, Nauka, 1974, 224 p.

Поступила в редакцию 6 февраля 2018 года.

Сведения об авторах:

Власов Александр Николаевич – д.т.н., дир., зав.отд., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: iam@iam.ras.ru

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: v-b1957@yandex.ru