

УДК 539.4

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО КОМПОЗИТА С ВОЛОКНАМИ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ*

Мовчан А.А.¹, Чернов М.И.²¹ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия²Московский государственный университет, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В рамках модифицированной модели нелинейного термомеханического поведения сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях описаны процессы изменения напряженно – деформированного состояния однонаправленного композита с упругим связующим и волокнами из никелида титана. Предварительно волокнам с помощью явлений накопления деформации прямого превращения или мартенситной неупругости задается начальная фазово – структурная деформация. После этого волокна, находящиеся в мартенситном фазовом состоянии, совмещаются со связующим с тем, чтобы обеспечить совместное деформирование обоих компонент. При последующем нагреве волокон в них происходит обратное термоупругое мартенситное фазовое превращение, сопровождающееся явлением памяти формы. В результате весь композит испытывает продольные сжимающие деформации, в его элементах возникают внутренние напряжения (сжимающие в связующем и растягивающие в волокнах). При последующем охлаждении волокон в них будет происходить прямое термоупругое мартенситное фазовое превращение под действием внутренних растягивающих напряжений. Волокна будут удлиняться в продольном направлении, обеспечивая процесс деформации растяжением всего композита. С использованием подходов микромеханики композиционных материалов, в связанной постановке, с учетом переменности модуля Юнга никелида титана исследованы процессы изменения напряженно – деформированного состояния такого композита в целом и его компонент, изменение фазового состава волокон. Особое внимание уделено исследованию возможности осуществления в данной системе замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы (явления многократно обратимой памяти формы) при котором в точке окончания прямого термоупругого фазового превращения в волокнах, внутренние напряжения в системе полностью исчезают. Показано, что это явление может быть описано лишь в рамках модели поведения сплавов с памятью формы, учитывающей, наряду с процессом зарождения мартенситных мезоэлементов, процесс их развития при прямом превращении, т.е. при использовании системы определяющих уравнений, правильно описывающих явление ориентированного превращения. Показано, что замкнутый двухпутевой эффект памяти формы имеет место при определенном значении коэффициента наполнения, являющимся убывающей функцией заданной волокнам начальной деформации.

Ключевые слова: композит однонаправленный; коэффициент наполнения; сплавы с памятью формы; нелинейная модель; обратимая память формы

* Работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрации темы АААА-А17-117032010136-3) при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00216_а).

NON-LINEAR ANALYSIS OF THERMOMECHANICAL BEHAVIOUR OF A UNIDIRECTIONAL COMPOSITE WITH SHAPE MEMORY ALLOY FIBERS

Movchan A.A.¹, Chernov M.I.²

¹*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia*

²*Moscow State University, Moscow, Russia*

ABSTRACT

In the framework of the modified model of nonlinear thermomechanical behavior of the shape memory alloy during phase and structural transformations, the processes of changing the stress-strain state of a unidirectional composite with an elastic matrix and fibers of titanium nickelide are described. Preliminary, with the help of the phenomena of direct strain accumulation or martensitic inelasticity, the fibers are given the initial tension phase-structural deformation. After this, the fibers in the martensitic phase state are combined with the matrix in order to ensure joint deformation of both components. With the subsequent heating of the fibers, in them an inverse thermoelastic martensitic phase transformation occurs, accompanied by a shape memory phenomenon. As a result, the entire composite experiences longitudinal compressive deformations, internal stresses appear in its elements (compressing in the matrix and stretching in the fibers). Upon subsequent cooling of the fibers, a direct thermoelastic martensitic phase transformation will occur in them under the action of internal tensile stresses. The fibers will elongate in the longitudinal direction, providing the process of deformation by stretching the entire composite. Using the approaches of micromechanics of composite materials, in a coupled statement, taking into account the variability of the Young's modulus of titanium nickelide, the processes of changing the stress-strain state of such a composite as a whole and its components, changes in the phase composition of fibers were studied. Special attention is paid to the investigation of the possibility of implementing in this system a closed two-way shape memory effect (the phenomenon of repeatedly reversible shape memory) in which the internal stresses in the system disappear completely at the point of the direct thermoelastic phase transformation termination in the fibers. It is shown that this phenomenon can be described only in the framework of the shape memory alloys behavior model, taking into account, not only the process of martensitic meso-elements nucleation, but the process of their development under direct transformation, i.e. in the case of using systems of constitutive equations correctly describing the phenomenon of oriented transformation. It is shown that a closed two-way shape memory effect takes place at a certain value of the filament volume fraction, which is a decreasing function of a given initial deformation of filament.

Keywords: unidirectional composite; filament volume fraction; shape memory alloys; non-linear model; two way shape memory effect

ВВЕДЕНИЕ

Композиты (КМ) с элементами из сплавов с памятью формы (СПФ) [1-15] могут обладать уникальными термомеханическими свойствами, которые не характерны по отдельности ни для обычных КМ, ни для СПФ самих по себе. В частности в таких КМ может осуществляться замкнутый двухпутевой эффект памяти формы, что позволяет управлять процессами циклического неупругого деформирования КМ только за счет изменения температуры его активных элементов.

Дело в том, что для СПФ после стандартных термомеханических обработок характерна асимметрия поведения при нагреве и охлаждении. В случае нагрева элемента из СПФ в нем наблюдается явление памяти формы (возврат к исходной форме) происходящий даже в отсутствии напряжений или при наличии противодействующих возврату напряжений. В то же время, при прямом превращении, только за счет уменьшения температуры, изменения девиаторной части фазовой деформации происходит в отсутствии напряжений не будет и деформационный цикл не замыкается.

Для того, чтобы заставить КМ с наполнителем из СПФ деформироваться при охлаждении и соответствующем прямом превращении в отсутствие внешних приложенных напряжений, необходимо создать в системе внутренние, нужным образом направленные напряжения. Для этого в элементах из СПФ, находящихся в мартенситном фазовом состоянии, задается некоторая фазово-структурная деформация. Процедура задания начальной деформации может производиться путем нагружения монотонно возрастающим усилием в режиме мартенситной неупругости, либо в режиме накопления деформаций прямого термоупругого фазового превращения из полностью аустенитного состояния под действием некоторых, в простейшем случае, постоянных нагрузок. После разгрузки элементов из СПФ они совмещаются с пассивной частью композита (связующим). При этом температура совмещения должна быть меньше температуры начала обратного термоупругого превращения в СПФ с тем, чтобы в процессе совмещения не произошло обратного фазового перехода в активных элементах. Совмещение должно обеспечить совместное деформирование активных и пассивных составляющих композита.

Происходящее после совмещения нагревание активных элементов (например - путем пропускания электрического тока) вызывает в них обратное термоупругое фазовое превращение и снятие ранее полученных фазово-структурных деформаций. В результате весь КМ деформируется (рабочий ход актуатора). Поскольку пассивная часть композита упруго (по предположению) сопротивляется процессу деформирования, в этой части создаются некоторые внутренние напряжения. Поскольку композит в целом не нагружен, в активной его части создаются напряжения, уравнивающие напряжения в пассивной составляющей. Наибольшую интенсивность эти внутренние напряжения, а также связанные с ними деформации и изменение формы КМ имеют в точке конца обратного превращения в элементах из СПФ. При охлаждении активных элементов через интервал температур прямого мартенситного превращения (холостой ход актуатора) в этих элементах под действием упомянутых выше напряжений происходит процесс накопления деформаций прямого превращения. В правильно спроектированном актуаторе деформации в активных элементах будут развиваться в том же направлении, что и в процессе создания начальных деформаций. В результате внутренние напряжения в системе в ходе прямого превращения будут ослабевать. Возможна ситуация, в которой в момент завершения прямого превращения в активных элементах КМ они примут исходную форму, соответствующую наличию в них деформации, равной начально заданной. В этот момент в КМ внутренние напряжения обратятся в нуль, и состояние КМ будет тождественным с тем, которое имело место в момент совмещения активных и пассивных элементов. Повторение описанного выше температурного цикла в случае стабильного поведения СПФ приведет

к повторению цикла деформационного. Таким образом, будут созданы условия осуществления многократного обратимого эффекта памяти формы.

В работе [5] поведение однонаправленного композита с волокнами из СПФ и упругим связующем при нагреве и охлаждении волокон было описано в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [16,17]. В аналитическом виде были получены условия осуществления замкнутого многократно обратимого эффекта памяти формы, сводящееся к выбору определенного значения коэффициента наполнения КМ волокнами из СПФ. Было установлено, что в рамках линейного описания свойств СПФ искомое значение коэффициента наполнения не зависит от заданной волокнам начальной деформации.

Полученное в [5] решение обладает рядом недостатков. В этом решении не учитываются нелинейные свойства СПФ, в частности, явление мартенситной неупругости, которое в рамках модели [16] вообще не описывается. Полученное в [5] решение не учитывало эффект переменности упругого модуля при фазовом переходе, хотя и было установлено, что искомые значения коэффициента наполнения для случаев, когда модуль Юнга СПФ имеет высокое (аустенитное) или низкое (мартенситное) значения существенно различаются. Задача об охлаждении волокон КМ, от результатов решения которой зависит определение условий осуществления эффекта многократной обратимой памяти формы, рассматривалась в [5] в несвязанной постановке, т.е. без учета влияния действующих напряжений на процесс фазового перехода. Вопрос о том, зависит ли искомое значение коэффициента наполнения от того, в связанной, или несвязанной постановке решается эта задача, рассмотрен не был.

В данной работе поведение однонаправленного КМ с волокнами из СПФ при фазовых и структурных переходах в материале волокон исследовано в рамках модели нелинейного поведения СПФ при фазовых и структурных превращениях [17-20]. При решении учтено различие в диаграммах процессов фазового и структурного превращения в СПФ, переменность модуля Юнга при фазовом переходе, влияние действующих напряжений и накопленных неупругих деформаций на процессы фазовых переходов в СПФ. Установлено, что значения коэффициента наполнения, обеспечивающие осуществление эффекта многократно обратимой памяти формы в КМ, полученные в упрощенной линейной и уточненной нелинейной постановках различаются весьма существенно.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поведение волокон из СПФ описывается в рамках модифицированной модели нелинейного деформирования поведения СПФ при фазовых и структурных превращениях [17-20], одномерный вариант которой, соответствующий одноосному растяжению, имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{phst}, \quad \varepsilon^{phst} = \varepsilon_0 q + \varepsilon^{phst'}, \quad d\varepsilon^{phst'} = d\varepsilon^{ph'} + d\varepsilon^{st} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)}, \quad \frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A} \quad (1.2)$$

$$d\varepsilon^{ph'} = \omega^\pm dq, \quad \omega^+ = \rho_D (1 - qf'(q))F_1'(|\sigma|) + f(q)\varepsilon^{phst'}, \quad (1.3)$$

$$\omega^- = \varepsilon^{phst'} / q \quad (1.4)$$

$$d\varepsilon^{st} = \rho_D q_{st} F_2'(|\sigma|) d\sigma \quad (1.5)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)), \quad (1.6)$$

$$t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma\omega^+ + Z(\sigma) + \sigma\varepsilon_0}{\Delta S} \quad (1.7)$$

$$t = 1 - \frac{A_s^\sigma - T}{A_s^0 - A_f^0}, \quad A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\sigma\omega^- + Z(\sigma) + \sigma\varepsilon_0}{\Delta S}, \quad Z(\sigma) = \frac{(E_A - E_M)\sigma^2}{2E_A E_M} \quad (1.8)$$

Здесь $\varepsilon, \varepsilon^e, \varepsilon^{phst}, \varepsilon^{phst'}, \varepsilon_0$ – осевая компонента полной, упругой и фазово-структурной деформации, девиаторная часть соответствующей компоненты и линейная деформация объемного эффекта фазового превращения (температурная деформация в силу ее малости не учитывается); σ – осевая компонента напряжения; q – объемная доля мартенситной фазы; $E(q), E_M, E_A$ – модуль Юнга и его значения для аустенитного и мартенситного фазовых состояний; $F_1(|\sigma|), F_2(|\sigma|)$ – материальные функции, трактуемые как интегральные функции распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное и мартенситное состояние соответственно); функция $f(q)$ определяет соотношение между приростом объема мартенсита за счет зарождения и за счет развития мартенситных мезоэлементов; эта функция введена в модель для возможности описания явления ориентированного превращения [21]; $M_s^0, M_f^0, M_s^\sigma, \Delta S$ – температуры начала и окончания прямого превращения в ненагруженном состоянии, температура начала прямого превращения при наличие напряжений и скачек объемной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния в аустенитное; A_s^0, A_f^0, A_s^σ – температуры начала и окончания обратного фазового превращения при отсутствии напряжений и деформаций, а также температура начала обратного превращения в нагруженном СПФ. В (1.3) и далее верхний индекс +, а также формулы (1.7) соответствуют прямому ($dq > 0$), а верхний индекс минус и формулы (1.8) – обратному ($dq < 0$) термоупругому мартенситному фазовому превращению. Формула (1.5), справедливая в случае догрузки $d|\sigma| > 0$, описывает явление развития деформаций структурного превращения. В этой формуле q_{st} – та часть мартенсита представительного объема, которая в рассматриваемый момент испытывает структурное превращение. Алгоритм определения величины q_{st} описан в [20]. Предполагается, что интенсивность микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние) имеет распределение Лапласа: $F_1(|\sigma|) = \Phi_1(|\sigma|/\sigma_1)$, $\Phi_1(x) = erf(x/\sqrt{2})$. Для интенсивности микронапряжений в мартенситном фазовом состоянии предполагается распределение Вейбулла: $F_2(|\sigma|) = \Phi_2(|\sigma|/\sigma_2)$, $\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^a)$. Функция $f(q)$ представляется в виде

$$f(q) = 1/(C + q) \quad (1.9)$$

Для расчетов используются следующие значения параметров материала, характерные для равноатомного никелида титана: $M_s^0 = 40^\circ C$, $M_f^0 = 20^\circ C$, $A_s^0 = 50^\circ C$, $A_f^0 = 70^\circ C$, $\Delta S = 0.644$ МПа/К, $E_A = 84000$ МПа, $E_M = 28000$ МПа, $\varepsilon_0 = 0.001$, $\rho_D = 0.08$, $C = 2$, $\sigma_1 = 140$ МПа, $\sigma_2 = 200$ МПа, $a = 2$. Значения трех

последних параметров должны обеспечивать выполнение условия $F_1(|\sigma|) > F_2(|\sigma|)$ для всех значений $|\sigma|$ [22,23].

Для микромеханического описания процесса деформирования в продольном направлении однонаправленного КМ с волокнами из СПФ, наряду с определяющими соотношениями для связующего и волокон используется гипотеза об осреднении по Фойгхту, согласно которой продольные деформации волокон и связующего одинаковы

$$\varepsilon = \frac{\sigma_f}{E_f} + \alpha_f (T - T_0) + \varepsilon_1^{phst} = \frac{\sigma_m}{E_m} + \alpha_m (T - T_0) \quad (1.10)$$

а напряжения в волокнах и связующем удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\mu \sigma_f + (1 - \mu) \sigma_m = 0 \quad (1.11)$$

Здесь нижний индекс f ставится для величин, относящихся к волокнам, m – к связующему, α – коэффициенты температурной деформации, T_0 – температура совмещения, ε – общая продольная деформация КМ, ε_1^{phst} – фазово-структурная деформация волокон, отсчитываемая от деформированного мартенситного состояния волокон в момент их совмещения со связующим

$$\varepsilon_1^{phst}(q) = \varepsilon^{phst}(q) - \varepsilon^0 = \varepsilon^{phst} - \varepsilon^0 - \varepsilon_0(1 - q) \quad (1.12)$$

В (1.12) ε^0 – заданная волокнам перед совмещением фазово-структурная деформация растяжения, ε^{phst} – фазово-структурная деформация волокон, отсчитываемая от недеформированного аустенитного состояния и входящая в соотношения модели поведения СПФ (1.1), штрихом обозначены девиаторные составляющие соответствующих величин. Согласно (1.12) получается, что в полностью аустенитном состоянии ($q=0$) $\varepsilon_1^{phst} = -\varepsilon^0$, а в полностью мартенситном состоянии ($q=1$) $\varepsilon_1^{phst} = \varepsilon^{phst} - \varepsilon^0$.

Соотношения (1.10), (1.11) позволяют выразить напряжения в волокнах и матрице, а также общую деформацию КМ через величину ε_1^{phst}

$$\sigma_f = \frac{(1 - \mu) E_m [(\alpha_m - \alpha_f)(T - T_0) - \varepsilon_1^{phst}]}{R_2(q)}$$

$$\sigma_m = \frac{-\mu E_m [(\alpha_m - \alpha_f)(T - T_0) - \varepsilon_1^{phst}]}{R_2(q)}$$

$$\varepsilon = \frac{[\mu \alpha_f + (1 - \mu) \alpha_m R_1(q)](T - T_0) + \mu \varepsilon_1^{phst}}{R_2(q)}$$

$$R_1(q) = \lambda_1(1 + \lambda_2 q), \quad \lambda_1 = E_m / E_A, \quad \lambda_2 = E_A / E_M - 1,$$

$$R_2(q) = \mu + (1 - \mu) R_1(q)$$

В случае пренебрежения температурными деформациями приведенные выше формулы существенно упрощаются

$$\sigma_f = -\frac{(1 - \mu) E_m \varepsilon_1^{phst}}{R_2(q)}, \quad \sigma_m = \frac{\mu E_m \varepsilon_1^{phst}}{R_2(q)}, \quad \varepsilon = \frac{\mu \varepsilon_1^{phst}}{R_2(q)} \quad (1.13)$$

2. ПРОЦЕСС ЗАДАНИЯ ВОЛОКНАМ НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Возможны несколько способов задания волокнам из СПФ начальной фазово-структурной деформации растяжения. В зависимости от выбранного способа, даже при одинаковых значениях заданной деформации, волокна и композит в целом будут вести себя по-разному при последующем нагреве волокон. Ниже рассматривается два варианта этого процесса.

В первом варианте начальная деформация задается в режиме мартенситной неупругости. Для этого волокна сначала охлаждаются в отсутствие механических напряжений через интервал температур (M_s^0, M_f^0) и их материал переводится в состояние хаотического (полностью сдвойникового) мартенсита. При этом волокна приобретают растягивающую деформацию ε_0 , соответствующую линейной деформации объемного эффекта прямого фазового превращения. Далее волокна изотермически нагружаются монотонно возрастающим до некоторого значения σ_{\max} напряжением. В материале волокон происходит структурный переход, ориентированность низкосимметрических мартенситных элементов растет и возникает структурная деформация формоизменения ε_{\max}^{st} . После снятия деформирующих напряжений снимаются упругие деформации, но остаются фазово-структурные. Интегрируя уравнение (1.5) для структурных деформаций при $q_{st}=1$ (полностью мартенситное состояние) и складывая результат с линейной деформацией объемного эффекта реакции прямого превращения для результирующей неупругой деформации получаем

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_0', \quad \varepsilon_0' = \rho_D F_2(\sigma_{\max}) \quad (2.1)$$

Согласно аналогу теории пластичности для описания процесса деформирования в режиме мартенситной неупругости [24], при последующем нагружении таких волокон растягивающим напряжением структурное превращение и соответствующий рост деформаций согласно формуле (1.5) начнется лишь после того, как напряжение превысит величину $\sigma_s = \sigma_{\max}$, которая, согласно (2.1) может быть определена из соотношения

$$\sigma_s = \sigma_2 \left[\ln \left(\frac{\rho_D}{\rho_D - (\varepsilon^0 - \varepsilon_0)} \right) \right]^{1/a} \quad (2.2)$$

В табл.1 приведены значения σ_s в МПа (вторая строка), вычисленные по формуле (2.2) для серии значений ε^0 (в %) (первая строка). Именно для этих пар значений проведены описанные ниже вычисления.

Таблица 1.

ε^0	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5
σ_s	69	88	104	119	134	149	164	179	195	212	231	254	282	322

Второй вариант задания начальной деформации сводится к использованию явления накопления деформаций прямого фазового превращения. Волокна, находящиеся в аустенитном фазовом состоянии, нагружаются постоянным растягивающим напряжением σ при температуре, $T_1 > M_s^\sigma$. Выполнение этого неравенства обеспечит отсутствие вызванного напряжением прямого превращения. Под действием этого напряжения происходит охлаждение волокон

через интервал температур прямого превращения (M_s^σ, M_f^σ) и накопление соответствующих деформаций. Учет объемного эффекта реакции прямого превращения и интегрирование дифференциального уравнения (1.3) для девиаторной части деформации приведет к созданию в волокнах деформации ε^0 , равной

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_0 + \varepsilon_0', \quad \varepsilon_0' = \rho_D F_1(\sigma) \quad (2.3)$$

В результате накопления деформаций прямого превращения в волокнах из СПФ происходит, так называемое "перекрестное упрочнение" этого материала [25]. Согласно модели [24] напряжение σ_s начала структурного превращения в этих волокнах при их последующем растяжении в мартенситном состоянии определяется из условий равенства фазовых деформаций прямого превращения (2.3) и структурных деформаций (2.1) и равно

$$\sigma_s = F_2^{-1}(F_1(\sigma)) = \sigma_2 \left\{ -\ln \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}\sigma_1} \right) \right] \right\}^{1/\alpha} > \sigma \quad (2.4)$$

Полученные выражения для σ_s необходимы для корректного описания процессов деформирования КМ с волокнами из СПФ на этапе нагрева волокон.

3. ДЕФОРМИРОВАНИЕ КМ НА ЭТАПЕ НАГРЕВАНИЯ ВОЛОКОН

Чисто температурные деформации в силу их малости в данной работе не учитываются. Поэтому при нагреве волокон КМ деформирование начинается, когда растущая температура превосходит значение A_s^0 . Ранее заданная волокнам деформация будет сниматься, они будут укорачиваться. Связующее препятствует этому укорочению. Поэтому в волокнах будут генерироваться растягивающие напряжения, а в связующем - сжимающие. До тех пор, пока напряжения в волокнах не достигнут значения σ_s , определяемые по формулам (2.2) или (2.4) в зависимости от способа задания начальных деформаций, структурного превращения в материале волокон происходить не будет

$$d\varepsilon^{st} = 0 \quad (3.1)$$

и деформация будет изменяться только за счет обратного фазового перехода. В силу последнего уравнения (1.1) и (3.1) в данном случае $d\varepsilon^{ph} = d\varepsilon^{phst}$, первое уравнение (1.3), с учетом (1.4) может быть переписано в форме $d\varepsilon^{phst} = \varepsilon^{phst} dq/q$ и проинтегрировано при начальном условии $\varepsilon^{phst}(1) = \varepsilon_0'$, в результате чего получается $\varepsilon^{phst} = \varepsilon_0' q$, и, согласно второй формулы (1.1)

$$\varepsilon^{phst} = \varepsilon^0 q, \quad \varepsilon_1^{phst} = -\varepsilon^0(1-q) \quad (3.2)$$

Подстановка (3.2) в (1.13) позволяет найти все искомые величины как функции q

$$\sigma_f = \frac{(1-\mu)E_m \varepsilon^0(1-q)}{R_2(q)}, \quad \sigma_m = -\frac{\mu E_m \varepsilon^0(1-q)}{R_2(q)}, \quad \varepsilon = -\frac{\mu \varepsilon^0(1-q)}{R_2(q)} \quad (3.3)$$

В то же время, параметр q для рассматриваемого процесса с помощью формул (1.6), (1.8) выражается через температуру и действующие в волокнах напряжения

$$q = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\pi \frac{T - (A_f^0 + (\varepsilon^0 \sigma_f + Z(\sigma_f)) / \Delta S)}{A_s^0 - A_f^0} \right] \right\} \quad (3.4)$$

Выражая из (3.4) температуру T через q и σ_f , можно получить

$$T = A_f^0 + \frac{\varepsilon^0 \sigma_f + Z(\sigma_f)}{\Delta S} - \frac{A_f^0 - A_s^0}{\pi} \arccos(1 - 2q) \quad (3.5)$$

Подстановка выражения для σ_f (первая формула (3.3)) в (3.5) дает выражению температуры через q . Таким образом, получается параметрическое представление всех искомых величин через параметр q , справедливое для значений q , уменьшающихся в интервале от $q=1$, до $q=q_s$, где величина q_s , может быть найдена путем решения первого уравнения (3.3) относительно q , причем в качестве σ_f в этом решении фигурирует σ_s

$$q_s = \frac{E_m \varepsilon^0 - \sigma_s (\beta + \lambda_1)}{E_m \varepsilon^0 + \sigma_s \lambda_1 \lambda_2}, \quad \beta = \frac{\mu}{1 - \mu} \quad (3.6)$$

Подстановка в (3.6) выражений (2.2) или (2.4) для σ_s позволяет выразить величину q_s через начальную деформацию ε^0 , если она задавалась путем деформирования волокон в режиме мартенситной неупругости или через напряжение σ , под действием которого производилось прямое превращение для задания начальной деформации. В случае, если формула (3.6) дает отрицательные значения q_s , полученное решение справедливо для всего обратного превращения.

При дальнейшем нагреве волокон и снижении q от значения q_s , в волокнах наряду с обратным фазовым превращением при росте растягивающих напряжений будет происходить структурный переход. Предполагается, что монотонный рост σ_f в этом процессе имеет место (это предположение проверяется далее по полученному решению). В [19] показано, что для обратного превращения, происходящего под действием монотонного пропорционального нагружения, справедливо положение об активных процессах пропорционального нагружения, согласно которому определяющие соотношения для СПФ в приращениях могут быть проинтегрированы независимо от пути термомеханического нагружения, что в рассматриваемом случае приводит к следующему конечному соотношению между фазово-структурными деформациями, напряжениями в волокнах и параметром фазового состава

$$\varepsilon^{phst} = q \rho_D [F_2(\sigma_f) - F_2(\sigma_s)] + \varepsilon_s \frac{q}{q_s} \quad (3.7)$$

Здесь ε_s – значение фазово-структурной деформации в момент начала рассматриваемого этапа процесса. Согласно первой формуле (3.2) $\varepsilon_s = \varepsilon^0 q_s$, и, следуя (3.7), (1.12) получается

$$\varepsilon_1^{phst} = q \rho_D [F_2(\sigma_f) - F_2(\sigma_s)] + \varepsilon^0 (q - 1) \quad (3.8)$$

Подстановка (3.8) в первое соотношение (1.13) дает уравнение, связывающее σ_f и q , которое удастся разрешить относительно q

$$q = \frac{E_m \varepsilon^0 - \sigma_f (\beta + \lambda_1)}{E_m \varepsilon^0 + \sigma_f \lambda_1 \lambda_2 + E_m \left\{ \rho_D [F_2(\sigma_f) - F_2(\sigma_s)] \right\}} \quad (3.9)$$

Поскольку F_2 , как интегральная функция распределения, не убывает с ростом σ_f , то, согласно (3.9), напряжение σ_f возрастает при уменьшении q . Следовательно, сделанное ранее предположение о монотонном возрастании σ_f в рассматриваемом процессе действительно выполняется. Величина σ_f меняется в рассматриваемом процессе от σ_s до значения

$$\sigma_{\max} = \frac{E_m \varepsilon^0}{\beta + \lambda_1}$$

получающегося из условия $q = 0$ в (3.9). Формулы (3.9), (3.8), (3.5) и последние две (3.3) дают параметрическое представление решения на втором этапе процесса, где уже параметром является не q , а величина σ_f , меняющаяся до σ_s до σ_{\max} .

На рис.1 изображены графики зависимости напряжений в волокнах КМ σ_f (МПа) от их температуры (градусы Цельсия) в процессе нагрева от $T = A_s^0$ и до окончания обратного превращения. Задача решена для $\varepsilon^0 = 0.04$, $\mu = 0.251$.

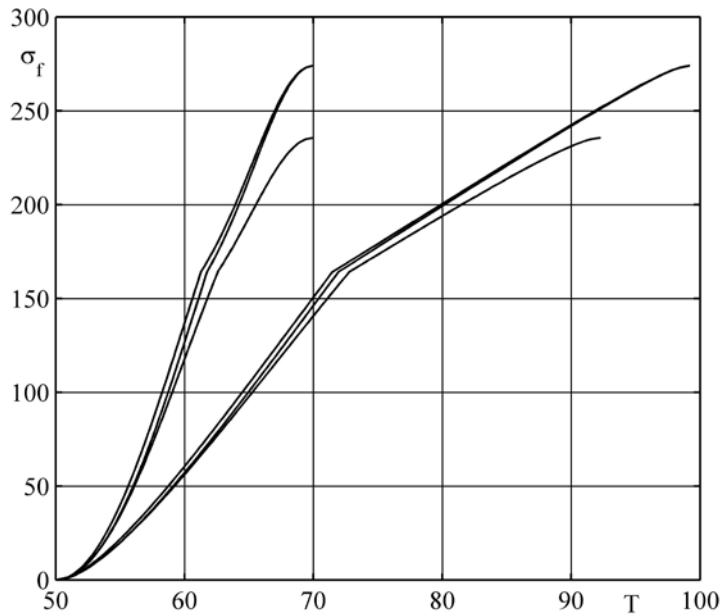


Рис.1.

Левая группа из трех кривых соответствует решению задачи в несвязанной постановке, что соответствует условию $\Delta S \rightarrow \infty$ во второй формуле (1.8). Правая группа кривых соответствует решению в связанной постановке. Левые кривые в каждой из двух групп соответствуют решению при постоянном значении модуля Юнга СПФ, равном его аустенитному значению, правые – при мартенситном значении модуля Юнга. Средняя кривая в каждой из двух групп получена при решении с учетом переменности модуля Юнга СПФ в соответствии со второй формулой (1.2). Представленные на рис.1 кривые содержат точку излома, соответствующую переходу напряжения σ_f через значение σ_s .

Согласно рис.1 напряжения в волокнах КМ являются растягивающими и монотонно возрастают с ростом их температуры. Полученное решение позволяет найти максимальное значение действующих в волокнах напряжений

σ_f^{\max} во всем рассматриваемом процессе нагрева и охлаждения волокон, необходимое для расчета КМ на прочность и выполнения условия не допуска в волокнах из СПФ дислокационных пластических деформаций, ухудшающих функциональные свойства СПФ. Согласно полученным данным, значения σ_f^{\max} не зависят при прочих равных условиях от того, в связанной или несвязанной постановке решается задача, однако температура, при которой достигаются эти максимальные значения при решении задачи в связанной постановке существенно выше, чем для решения в постановке несвязанной. Сам ход зависимости σ_f от T меняется при изменении значения модуля Юнга волокон или при переходе от постоянного значения этого модуля к учету его переменности при фазовом превращении. Однако, значение σ_f^{\max} получаются одинаковыми в случае учета переменности модуля Юнга или при решении для постоянного аустенитного значения этого модуля. В случае расчета с постоянной величиной модуля, равной его мартенситному значению E_M , величина σ_f^{\max} получается существенно меньше.

На рис.2 приведены графики зависимости от температуры напряжения σ_m в матрице КМ. Расположение кривых на рис.2 такое же, как и на рис.1.

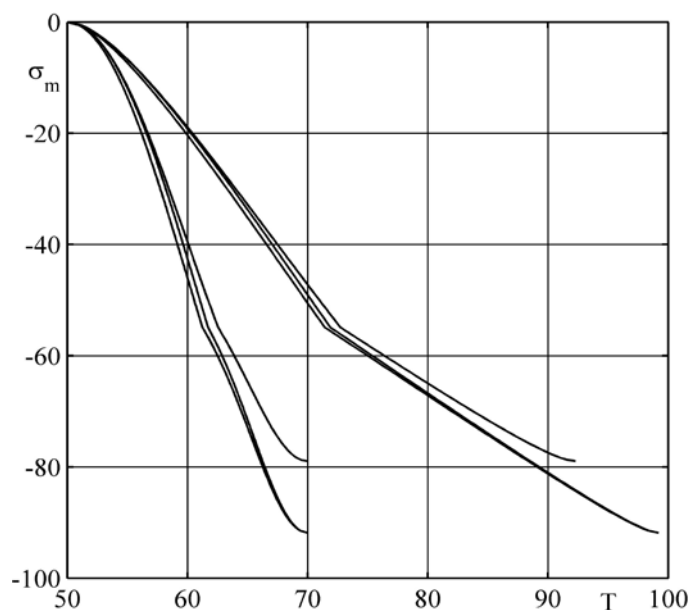


Рис.2.

Напряжения в матрице являются сжимающими и монотонно возрастают по модулю в процессе нагрева. Сформулированные выше по поводу напряжений в волокнах выводы остаются справедливыми и для модулей напряжений в матрице. Во всяком случае, если речь идет лишь об определении максимальных по модулю значений напряжений, как в волокнах, так и в матрице, то эти величины могут быть абсолютно точно определены путем решения задачи в упрощенной несвязанной постановке, без учета переменности упругих модулей СПФ, при условии, что постоянная величина модуля равна его аустенитному значению. Однако определение σ_m следует проводить в связанной постановке, позволяющей правильно определить температуру волокон, поскольку свойства

связующего существенно зависят от его температуры, которая может меняться из-за контакта с нагреваемыми волокнами.

На рис.3 для того же процесса и с таким же расположением кривых построены графики зависимости от температуры продольной деформации всего КМ.

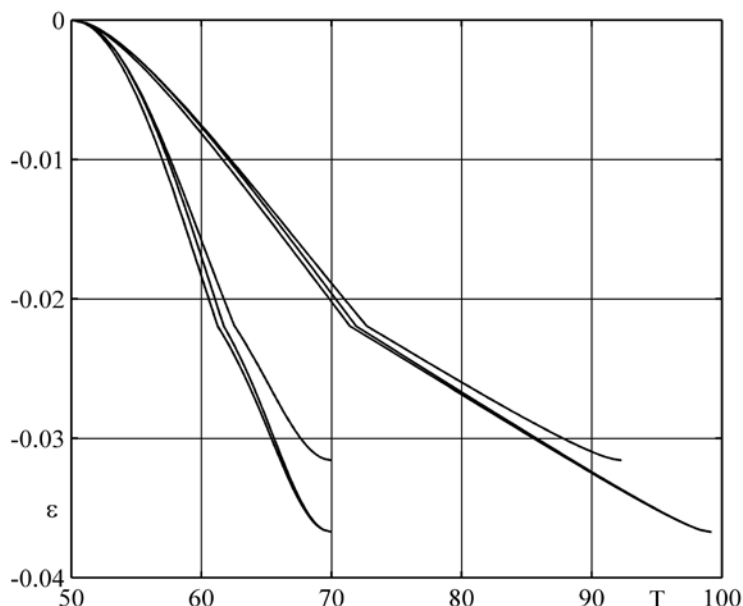


Рис.3.

Как видно, речь идет о монотонно возрастающей по модулю деформации сжатия. Максимальные по модулю значения этой деформации опять могут быть точно найдены при решении задачи в несвязанной постановке с постоянным модулем Юнга, равным его аустенитному значению. Максимальное по модулю значение продольной деформации КМ меньше, чем заданная волокнам деформация ε^0 на величину упругой деформации волокон, соответствующей действующим в них растягивающим напряжениям.

4. ДЕФОРМИРОВАНИЕ КМ В ПРОЦЕССЕ ОХЛАЖДЕНИЯ ВОЛОКОН

В процессе охлаждения волокон действующие в них напряжения будут убывать, поэтому положение об активных процессах пропорционального нагружения в данном случае не применимо. Задача, однако, облегчается тем, что в случае падения напряжений не наблюдается структурный переход, $d\varepsilon^{st} = 0$, так что проблема сводится к интегрированию дифференциального уравнения (1.3) только для прямого фазового превращения (индекс + у ω). Можно показать, что для рассматриваемого случая совокупность двух соотношений: (1.3) для девиаторной части неупругой деформации и второго соотношения (1.1) для всей компоненты неупругой деформации ε^{phst} можно свести к одному дифференциальному уравнению для величины ε^{phst}

$$\frac{d\varepsilon^{phst}}{dq} = [\varepsilon_0 + \rho_D F_1(\sigma_f)](1 - qf(q)) + f(q)\varepsilon^{phst} \quad (4.1)$$

которое для случая охлаждения из аустенитного состояния следует решать при нулевом начальном условии

$$\varepsilon^{phst}(0) = 0 \quad (4.2)$$

Разрешающее обыкновенное дифференциальное уравнение получается, если в правую часть (4.1) подставить первое соотношение (1.13) для σ_f с учетом (1.12) для ε_1^{phst} и выражения для $f(q)$ (1.9)

$$\frac{d\varepsilon^{phst}}{dq} = \left\{ \varepsilon_0 + \rho_D \operatorname{erf} \left[\frac{A(\varepsilon^0 - \varepsilon^{phst})}{\sqrt{2}\sigma_1} \right] \right\} \left(\frac{C}{C+q} \right) + \frac{1}{C+q} \varepsilon^{phst} \quad (4.3)$$

$$A = \frac{E_m}{\lambda_1(1 + \lambda_2 q) + \beta} \quad (4.4)$$

Решение нелинейного уравнения (4.3) $\varepsilon^{phst} = \varepsilon^{phst}(q)$ при начальном условии (4.2) находится численно. После этого определяется зависимость от q величины $\varepsilon_1^{phst}(q) = \varepsilon^{phst}(q) - \varepsilon^0$. Подстановка найденной зависимости в формулы (1.13) позволяет выразить для процесса охлаждения волокон напряжения в волокнах, напряжение в связующем и общую деформацию КМ через параметр q . Формула (3.5) с учетом найденной ранее зависимости $\sigma_f = \sigma_f(q)$ (вторая формула (1.13)), позволяет выразить температуру как функцию q . Таким образом, решение задачи об охлаждении волокон получается в параметрической форме для параметра q , возрастающего от нуля до единицы.

5. УСЛОВИЕ ОСУЩЕСТВИМОСТИ ЗАМКНУТОГО ДВУХПУТЕВОГО ЭФФЕКТА ПАМЯТИ ФОРМЫ

Легко видеть, что в рассматриваемом КМ замкнутый двухпутевой эффект памяти формы осуществляется в том случае, когда в точке окончания полного прямого превращения в волокнах, т.е. при $q=1$ в этих волокнах генерируется за счет накопления деформаций прямого превращения фазово-структурная деформация, в точности равная фазово-структурной деформации, заданной волокнам перед совмещением со связующим: $\varepsilon^{phst}(1) = \varepsilon^0$. Напряжения в волокнах и матрице в точке окончания прямого превращения должны быть равны нулю $\sigma_f(1) = \sigma_m(1) = 0$.

Следует отметить, что правые части дифференциальных определяющих соотношений для накопления деформаций прямого превращения большинства известных моделей поведения СПФ [26-29] содержат составляющие, подобные первому слагаемому правой части формулы (4.1), но не содержат составляющие, аналогичные второму слагаемому той же формулы, т.е. в этих моделях учитывается процесс образования зародышей мартенсита при прямом превращении, но не учитывается процесс их развития. Модели такого типа не описывают явление ориентированного превращения в СПФ [21], в то время как в рамках приведенной выше системы определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях (1.1)-(1.8) это явление описывается количественно и качественно правильно.

Пусть в определяющих соотношениях для прямого превращения в СПФ (4.1) отсутствует последнее слагаемое, зависящее от фазово – структурной деформации, что равносильно равенству $f(q) = 0$. Докажем, что в этих условиях в случае неучета объемного эффекта реакции фазового перехода замкнутый

двухпутевой эффект памяти формы в композите с волокнами из СПФ не возможен. Уравнение (4.3) для случая $f(q) = 0$ с использованием искомой функции ε_1^{phst} (1.12) переписывается в виде

$$\frac{d\varepsilon_1^{phst}}{dq} = \rho_D F_1 \left(-\frac{A\varepsilon_1^{phst}}{\sqrt{2}\sigma_1} \right) \quad (5.1)$$

Правая часть (5.1) в случае пренебрежения объемным эффектом фазового превращения удовлетворяет условию

$$F_1(0) = 0 \quad (5.2)$$

Кроме того, предполагается, что функция, стоящая в правой части (5.1) удовлетворяет условию Липшица по своему аргументу (или имеет непрерывную первую производную). Используемая здесь функция Лапласа этим условиям удовлетворяет. Уравнение (5.1) решается при начальном условии

$$\varepsilon_1^{phst}(0) = -\varepsilon^0 \neq 0 \quad (5.3)$$

Замкнутый двойной эффект памяти формы осуществим, если существует решение задачи (5.1), (5.3), удовлетворяющее условию

$$\varepsilon_1^{phst}(1) = 0 \quad (5.4)$$

Будем искать то же решение, но "в обратную сторону", считая (5.4) начальным условием, а (5.3) - равенством, которому должно удовлетворять на другом конце интервала изменения переменной q искомое решение. Очевидно, что задача (5.1), (5.4) при выполнении (5.2) имеет тождественно нулевое решение: $\varepsilon_1^{phst}(q) \equiv 0$, которое не удовлетворяет условию (5.3). В то же время задача (5.1), (5.4) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому никаких других решений задачи (5.1), (5.4) быть не может. Следовательно, решения задачи (5.1), (5.3), удовлетворяющего условию (5.4), не существует, что и требовалось доказать.

В то же время, при решении полного уравнения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях (4.3) для величин начальной деформации $\varepsilon^0 < \rho_D$ удастся подобрать такие значения коэффициента наполнения μ , которые обеспечивают осуществление замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы. Численное решение дифференциального уравнения (4.3) при начальном условии (4.2) является функцией q , зависящей от величин ε^0 и μ (через $\beta = \mu/(1-\mu)$): $\varepsilon^{phst}(1) = \phi(\varepsilon^0, \mu)$. С ростом μ на интервале $\mu \in (0,1)$ величина β монотонно возрастает, а коэффициент A (4.4) уменьшается. Соответственно, будет падать и величина $\phi(\varepsilon^0, \mu)$. Величина $\mu^*(\varepsilon^0)$, обеспечивающая осуществление замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы в КМ, определяется из алгебраического уравнения $\phi(\varepsilon^0, \mu^*) = \varepsilon^0$. Это уравнение решается численно. Результаты его решения в виде графиков зависимости $\mu^*(\varepsilon^0)$ приведены на рис.4. Кривая 1 соответствует решению с постоянным значением модуля Юнга СПФ, равным $E = E_M = 28000$ МПа, кривая 3 – случаю $E = E_A = 84000$. Кривая 2 построена с учетом переменности модуля СПФ в соответствии со второй формулой (1.2). Как видно, с ростом модуля волокон

из СПФ искомое значение μ^* несколько возрастает. Учет переменности упругих модулей СПФ существенно меняет решение для μ^* .

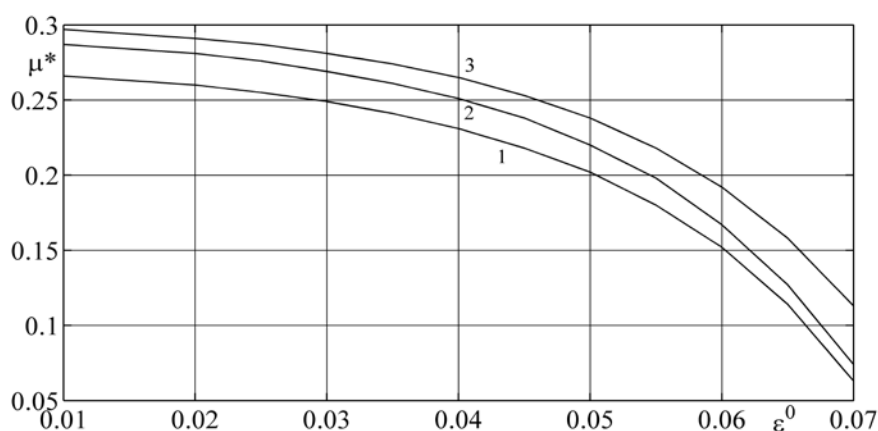


Рис.4.

Согласно рис.4 искомое значение μ^* зависит от величины деформации ε^0 , предварительно заданной волокнам, убывая с ростом этой величины. Следует отметить, что при решении данной задачи в упрощенной постановке [5], в рамках модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [16,17], было получено решение, согласно которому величина μ^* от ε^0 не зависит. Тем самым подтверждается необходимость решения данной задачи в уточненной нелинейной постановке.

Связанную постановку краевой задачи термомеханики для СПФ от несвязанной отличает более сложное выражение q через температуру, учитывающее влияние напряжений и фазово-структурных деформаций на характерные температуры фазовых переходов (вторые формулы (1.7) и (1.8)).

Однако в приведенной выше постановке и решении задачи поиска значения μ^* зависимость q от T не фигурирует. Поэтому полученный результат для μ^* не зависит от того, в связанной или несвязанной постановке описывалось поведение КМ. Следовательно, определение параметров КМ, обеспечивающих существование замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы, можно проводить в упрощенной несвязанной постановке.

На рис.5 приведены графики зависимости полной продольной деформации композита в цикле нагрева и охлаждения волокон через полные интервалы обратного и прямого превращения, построенные при решении задачи в связанной постановке с учетом переменности упругих модулей. Петля 1 построена для $\varepsilon^0 = 0.01$, петля 2 - для $\varepsilon^0 = 0.02$, петля 3 для $\varepsilon = 0.03$, петля 4 для $\varepsilon = 0.04$. Коэффициент наполнения для каждого значения ε^0 определялся по формуле

$$\mu = \mu^*(\varepsilon^0) \quad (5.5)$$

обеспечивающей осуществление замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы, что подтверждается замкнутостью всех изображенных на рис.5 петель.

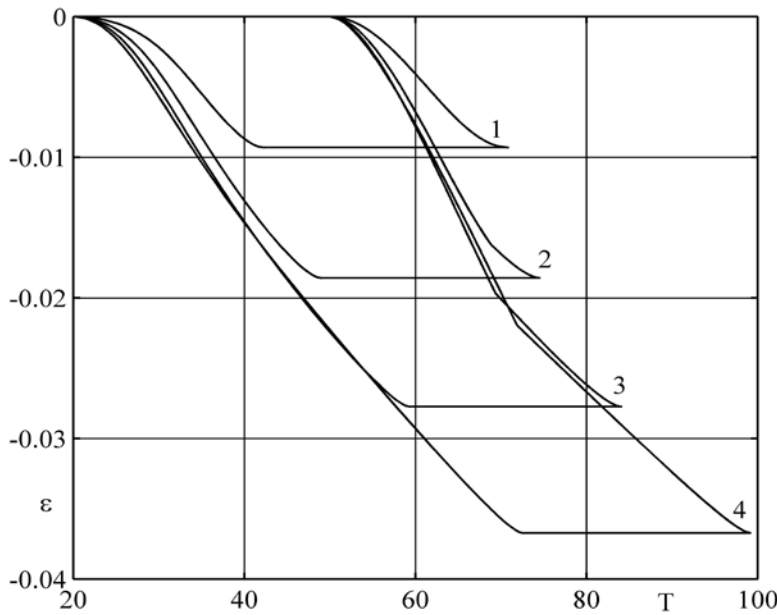


Рис.5.

На рис.6 приведен график зависимости величины σ_f^{\max} от заданной волокну начальной деформации ε^0 в КМ со значением коэффициента наполнения (5.5). Как видно, с ростом ε^0 максимальные напряжения в волокнах монотонно возрастают. Это возрастание связано, как с ростом деформации композита в целом при нагреве волокон, так и с уменьшением при росте ε^0 коэффициента наполнения μ (см. рис.4). Данный график позволяет выбрать максимально возможное значение начальной деформации волокон, при котором выполняется заданное ограничение сверху на напряжения в этих волокнах, связанное, например, с сохранением функциональных свойств СПФ.

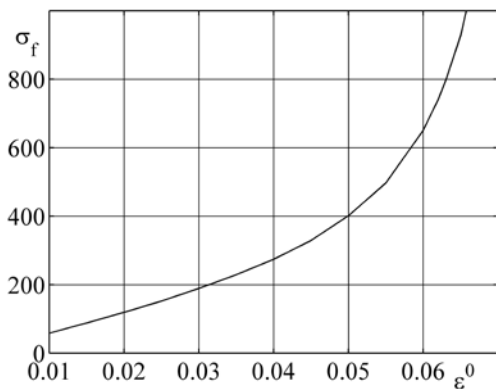


Рис.6.

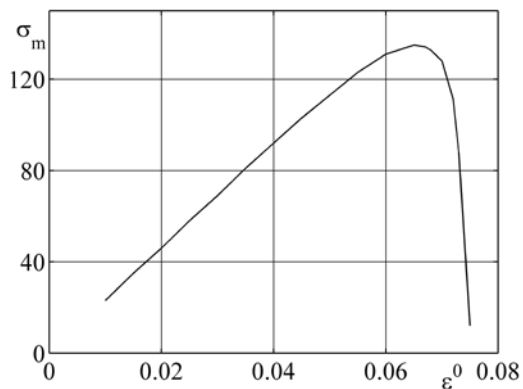


Рис.7.

На рис.7 приведен график зависимости максимальных значений модуля напряжений в связующем КМ от заданной деформации волокон при коэффициенте наполнения, значение которого определяется формулой (5.5). Согласно рис.7, с ростом ε^0 до величины порядка 0.065 напряжения в связующем монотонно возрастают. Дальнейший рост ε^0 приводит к резкому падению напряжения в связующем, связанному с резким падением μ^* при росте ε^0 в этом

диапазоне и, соответственно, с ростом объемной доли связующего. График этого рис. позволяет выбрать максимально возможное значения ε^0 , при котором модуль напряжения в связующем не превосходит его прочность при сжатии.

Согласно данным этих рисунков для КМ с волокнами из никелида титана и матрицей из дифлона МФ-42 с модулем Юнга $E_m = 2500$ МПа и пределом текучести при сжатии для $T = 20^\circ\text{C}$, равным 72 МПа [26, стр. 220], для которого и производились описанные выше расчеты, можно использовать волокна с начальной деформацией около 3%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В рамках модифицированной модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, в связанной постановке с учетом переменности модуля Юнга СПФ при фазовых переходах описано термомеханическое поведение однонаправленного КМ с волокнами из СПФ и упругим связующим при нагреве и охлаждении волокон.

2. Установлено, что замкнутый двухпутевой эффект памяти формы в таком КМ может быть описан лишь в рамках модели поведения СПФ, которая учитывает, наряду с процессами зарождения мартенситных элементов при прямом фазовом превращении, процесс их развития.

3. Осуществление замкнутого двухпутевого эффекта памяти формы в таком КМ обеспечивается определенным оптимальным значением коэффициента наполнения, которое является убывающей функцией начальной растягивающей деформации ε^0 , заданной волокнам. Тем самым найденное уточненное решение принципиально отличается от приближенного, ранее полученного в рамках упрощенной модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях, в рамках которого оптимальный коэффициент наполнения не зависит от ε^0 .

4. Для получения оптимального значения коэффициента наполнения КМ необходимо учитывать переменность значения модуля Юнга СПФ при фазовом переходе, однако, задача может решаться в упрощенной несвязанной постановке.

5. Точное значение максимального напряжения в волокнах и матрице, а также максимальное значение продольной деформации КМ могут быть получены в упрощенной несвязанной постановке без учета переменности модуля Юнга СПФ, при условии равенства этого модуля значению, характерному для аустенитного состояния. При использовании мартенситного значения модуля Юнга величины упомянутых выше искоемых характеристик занижаются.

6. Максимальное напряжение в волокнах монотонно возрастают с ростом заданной волокнам начальной деформации (для оптимальных значений коэффициента наполнения).

7. Максимальные напряжения в связующем с ростом заданной волокнам начальной деформации сначала возрастают, потом, достигнув максимального значения, резко убывают, что связано с резким уменьшением оптимальных значений коэффициента наполнения для высоких значений начальной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates* / 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) Conference. Proceeding. – 1989. – Part 4. – Pp.2011-2017.
2. Fisher K., Extner A., Hornbogen E., Schmidt H. *The two way effect for mechanical hands* / 31-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) Conference. Proceeding. – 1990. – Part 1. – Pp.29-37.
3. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators* // Trans. ASME. J. of the Mechanical Design. – 1992. – Vol.114. – No.4. – Pp.670-676.
4. Liang C., Rogers C.A. *One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials* // J. of the Intelligent Material System and Structures. – 1990. – Vol.1. – No.2. – Pp.207-234.
5. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Механика активных композитов, содержащих волокна или слои из сплавов с памятью формы. Механика композиционных материалов и конструкций* // 1996. – Т.2. – №2. – С.29-48.
6. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators* // Composite Structures. – 1999. – Vol.47. – Pp.695-703.
7. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp.3393-3409.
8. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2001. – Vol.38. – Pp 7029-7044.
9. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites* // Material Letters. – 2001. – Vol.51. – Pp.425-428.
10. Tsoi K.A., Stalmans R., Shrooten J. *Transformation behavior of constrained shape memory alloys* // Acta Materialia. – 2002. – Vol.50. – Pp.3535-3544.
11. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* // Scripta materialia. – 2004. – Vol.50. – Pp.249-253.
12. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – Pp.1577-1594.
13. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates* // Intern. J. of Solids and Structure. – 2003. – Vol.40. – Pp.5949-5972.
14. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. Review. *Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites* // J. of Materials Science. – 1998. – Vol.33. – Pp.3763-3783.
15. Kabir M.-Z., Tehrani B.T. *Closed-form Solution for Thermal, Mechanical and Thermo-mechanical Buckling and Post-buckling of SMA Composite Beams* // Composite Struct. – 2017. – Vol.168. – Pp.535-548.
16. Мовчан А.А. *Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – №1. – С.197-205.
17. Мовчан А.А., Со Н. *Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса* // Прикладная механика и техническая физика. 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.

18. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. *Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформации и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
19. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.
20. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.
21. Кузьмин С.Л., Лихачев В.А., Шиманский С.Р., Чернышенко А.И. *Эффект ориентированного превращения в никелиде титана* // Физика металлов и металловедение. – 1984. – Т.57. – Вып.3. – С.612-614.
22. Казарина С.А., Мовчан А.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное исследование взаимодействия фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.85-98.
23. Казарина С.А., Сильченко А.Л., Мовчан А.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое описание процесса доориентации мартенсита после прямого фазового превращения в сплаве с памятью формы* // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – 2016. – Т.21. – Вып.3. – Физика. – С.787-790.
24. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.
25. Мовчан А.А., Сильченко А.Л., Казарина С.А. *Экспериментальное исследование и теоретическое моделирование эффекта перекрестного упрочнения сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №3. – С.20-27.
26. Popov P., Lagoudas D. C. *A 3-d constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self-accommodated martensite* // Intern. J. of Plasticity. – 2007. – Vol.23. – No.10. – Pp.1679-1720.
27. Cheikh Cisse C., Zaki W., Ben Zineb T. *A review of modeling techniques for advanced effects in shape memory alloy behavior* // Smart Materials and Structures. – 2016. – Vol.25. – 103001(36pp).
28. Olsen J. S., Zhang Z. L., Hals J. K., Lu H. *Effect of notches on the behavior of superelastic round-bar NiTi-specimens* // Smart materials and structures. – 2011. – Vol.20. – 025014. (12pp).
29. Hartl D., Lagoudas D. *Constitutive modeling and structural analysis considering simultaneous phase transformation and plastic yield in shape memory alloys* // Smart Materials and Structures. – 2009. – Vol.18. – Pp.1-17.
30. Кацнельсон М.Ю., Балаев Г.А. *Полимерные материалы. Свойства и применение*. – Л.: «Химия», 1982. – 317 с.

REFERENCES

1. Rogers C.A., Liang G., Jia J. *Behavior of shape memory alloy reinforced composite plates*. 30-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, Proceeding, 1989, Part 4, Pp.2011-2017.

2. Fisher K., Extner A., Hornbogen E., Schmidt H. *The two way effect for mechanical hands*. 31-th Structural, Structural Dynamics and Materials (SDM) conference, Proceeding, 1990, Part 1, Pp.29-37.
3. Jia J., Rogers C.A. *Formulation of the mechanical model for composites with embedded SMA actuators*. Trans. ASME. J. of the Mechanical Design, 1992, Vol.114, No.4, Pp.670-676.
4. Liang C., Rogers C.A. *One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials*. J. of the Intelligent Material System and Structures, 1990, Vol.1, No.2, P.207-234.
5. Movchan A.A. Kazarina S.A. *Mekhanika aktivnykh kompozitov soderzhashchikh volokna ili sloi iz splavov s pamiatiu formy [Mechanics of active composites, containing fibres or layers from shape memory alloys]*. Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, 1996, Vol.2, No.2, Pp.29-48.
6. Lee J.J., Choi S. *Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators*. Composite Structures, 1999, Vol.47, Pp.695-703.
7. Gordaninejad F., Wu W. *A two dimensional shape memory alloy/elastomer actuator*. Intern. J. of Solids and Structures. 2001, Vol.38, Pp.3393-3409.
8. Armstrong W.D., Lorentzen T. *The self – thermal – plastic response of TiNi shape memory alloy fiber actuated metal matrix composites*. Intern. J. of Solids and Structures, 2001, Vol.38, Pp.7029-7044.
9. Zheng Y., Cui L., Li Y., Stalmans R. *Partial transformation behavior of prestrained TiNi fibers in composites*. Material Letters, 2001, Vol.51, Pp.425-428.
10. Tsoi K.A., Stalmans R., Shrooten J. *Transformation behavior of constrained shape memory alloys*. Acta Materialia, 2002, Vol.50, Pp.3535-3544.
11. Michaud V. *Can shape memory alloy composites be smart?* Scripta materialia, 2004, Vol.50, Pp.249-253.
12. Cherkaoui M., Sun Q.P., Song G.Q. *Micromechanics modeling of composite with ductile matrix and shape memory alloy reinforcement*. Intern. J. of Solids and Structures, 2000, Vol.37, Pp.1577-1594.
13. Dano M.-L., Hyer M.W. *SMA-induced snap-through of unsymmetric fiber-reinforced composite laminates // Intern. J. of Solids and Structure*. 2003, Vol.40, Pp.5949-5972.
14. Wei Z.G., Sandstrom R., Miyazaki S. Review. *Shape memory materials and hybrid composites for smart systems. Part II. Shape-memory hybrid composites*. J. of Materials Science, 1998, Vol.33, Pp.3763-3783.
15. Kabir, M.-Z. and Tehrani, B. T., *Closed-form solution for thermal, mechanical and thermo-mechanical buckling and post-buckling of SMA composite beams*. Composite Struct, 2017, Vol.168, Pp.535-548.
16. Movchan A.A. *Micromechanical description of the deformation due to martensite transformations in shape - memory alloys*. Mechanics of Solid, 1995, Vol.30, No.1, Pp.186-194.
17. Movchan A.A., Soe N. *Thermodynamic description of the behavior of shape memory alloys by an additive Gibbs potential*. Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, Vol.47, No.4, Pp.542-546.
18. Movchan A.A., Kazarina S.A. Mishustin I.V. Movchan I.A. *Termodinamicheskoe Obosnovanie Modeli Nelinejnogo Deformirovaniya Splavov s Pamjatju Formy Pri-Fazovyh I Strukturnyh Prevrashhenijah [Thermodynamics justification the model of*

- shape memory alloys nonlinear deformation at phase and structural transformations*]. Deformacii I Razrushenie Materialov, 2009, No.8, Pp.2-9.
19. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking into account of the martensite inelasticity in reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
 20. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
 21. Kuzmin S.L. Likhachev V.A. Shimanskii S.R. Chernyshenko A.I. *Effekt Orientirovannogo Prevrashcheniia v Nikelide Titana [The effect of oriented transformation in titanium nickelide]*. Fizika Metallov I Metallovedenie, 1984, Vol.57, Iss.3, Pp.612-614.
 22. Kazarina S.A., Movchan A.A. Silchenko A.L. *Ekspperimentalnoe Issledovanie Vzaimodeistviia Fazovykh I Strukturnykh Deformatsii v Splavakh s Pamiatiu Formy [Experimental investigation of the interaction of phase and structural deformations in shape memory alloys]*. Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.85-98.
 23. Kazarina S.A. Silchenko A.L. Movchan A.A. *Ekspperimentalnoe Issledovanie I Teoreticheskoe Opisaniie Protsessa Doorientatsii Martensita Posle Priamogo Fazovogo Prevrashcheniia v Splave s Pamiatiu Formy [Experimental study and theoretical description of the martensite reorientation process after direct phase transformation in a shape memory alloy]*. Vestnik Tambovskogo Universiteta. Serii Estestvennye I Tekhnicheskie Nauki, 2016, Vol.21, Iss.3, Fizika, Pp.787-790.
 24. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
 25. Movchan A.A., Sil'chenko A.L., Kazarina S.A. *Experimental Study and Theoretical Simulation of the Cross Hardening Effect in Shape Memory Alloys*. Russian Metallurgy (Metally), 2017, Vol.2017, No.10, Pp.779-784.
 26. Popov P., Lagoudas D.C. *A 3-d constitutive model for shape memory alloys incorporating pseudoelasticity and detwinning of self-accommodated martensite*. Intern. J. of Plasticity, 2007, Vol.23, No.10, Pp.1679-1720.
 27. Cheikh Cisse C., Zaki W., Ben Zineb T. *A review of modeling techniques for advanced effects in shape memory alloy behavior*. Smart Materials and Structures, 2016, Vol.25, 103001 (36pp).
 28. Olsen J. S., Zhang Z. L., Hals J. K., Lu H. *Effect of notches on the behavior of superelastic round-bar NiTi-specimens*. Smart materials and structures, 2011, Vol.20, 025014 (12pp).
 29. Hartl D., Lagoudas D. *Constitutive modeling and structural analysis considering simultaneous phase transformation and plastic yield in shape memory alloys*. Smart Materials and Structures, 2009, Vol.18, Pp.1-17.
 30. Katsnelson M. Iu. Balaev G.A. *Polimernye Materialy Svoistva I Primenenie [Polymeric materials. Properties and applications]*. Leningrad, Khimiia, 1982, 317 p.

Поступила в редакцию 28 декабря 2017 года.

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: movchan47@mail.ru
Чернов Михаил Игоревич – студ., МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия